UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

MODELO DE COVARIÂNCIA BAYESIANA PARA SELEÇÃO DE PORTFÓLIOS DE INVESTIMENTOS

Melquiades Pereira de Lima Junior

Orientadora: Mariana Rodrigues de Almeida, DSc.
Co-Orientador: Rodrigo Jose Pires Ferreira, DSc.

Natal
2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

MODELO DE COVARIÂNCIA BAYESIANA PARA SELEÇÃO DE PORTFÓLIOS DE INVESTIMENTOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção.

Melquiades Pereira de Lima Junior

Orientadora: Mariana Rodrigues de Almeida, DSc.
Co-Orientador: Rodrigo Jose Pires Ferreira, DSc.

Natal
2011

Divisão de Serviços Técnicos

Catalogação da Publicação na Fonte. UFRN / Biblioteca Central Zila Mamede

Lima Júnior, Melquiades Pereira de.
Modelo de covariância bayesiana para seleção de portfólios de investimentos / Melquiades Pereira de Lima Júnior. – Natal, RN, 2011.
110 f.

Orientador: Mariana Rodrigues de Almeida.
Co-Orientador: Rodrigo José Pires Ferreira.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção.

1. Investimentos – Dissertação. 2. Portfólio – Seleção – Dissertação. 3. Markowitz – Dissertação. 4. Bayes – Dissertação I. Almeida, Mariana Rodrigues de. II. Ferreira, Rodrigo José Pires. III. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. IV. Título.

RN/UF/BCZM CDU 336.76

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

MODELO DE COVARIANCIA BAYESIANA PARA SELEÇÃO DE PORTFOLIOS DE INVESTIMENTOS

por

MELQUIADES PEREIRA DE LIMA JUNIOR

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO PROGRAMA DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE

MESTRE EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

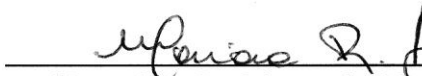
DEZEMBRO, 2011

© 2011 MELQUIADES PEREIRA DE LIMA JUNIOR
TODOS DIREITOS RESERVADOS.

O autor aqui designado concede ao Programa de Engenharia de Produção da Universidade Federal do Rio Grande do Norte permissão para reproduzir, distribuir, comunicar ao público, em papel ou meio eletrônico, esta obra, no todo ou em parte, nos termos da Lei.

Assinatura do Autor:

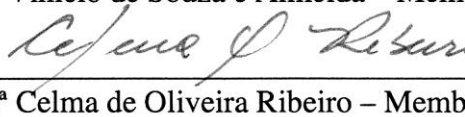
APROVADO POR:



Prof.ª Mariana Rodrigues de Almeida – Presidente

Prof. Rodrigo Jose Pires Ferreira - Membro Examinador Interno

Prof. Vinicio de Souza e Almeida – Membro Examinador Externo



Prof.ª Celma de Oliveira Ribeiro – Membro Examinador Externo

DEDICATÓRIA

À Deus...
Aos meus pais, a quem devo a vida
À minha esposa, pelo amor e carinho
Aos meus irmãos, pelas orientações e apoio
Á toda minha família,

AGRADECIMENTOS

O curso de mestrado me proporcionou grandes amizades e, sobretudo ensinamentos que levarei para toda a minha vida. Por isso, agradeço a várias pessoas que participaram desse trajeto comigo e a quem devo sinceros agradecimentos:

Aos orientadores: À professora Mariana, grande amiga e pelos imprescindíveis ensinamentos. Ao professor Rodrigo, pela oportunidade, grande amigo, a quem agradeço a oportunidade que me ofereceu.

Aos meus pais: Melquiades Pereira e Maria Izabel de Lima; e aos meus irmãos: Cláudia, Carmélia, Carlito e Carlindo Pereira, pelo apoio e paciência, sem os quais esse trabalho não seria possível.

Á minha esposa Renata, pelo amor, carinho, paciência, tolerância, incentivo, apoio nessa jornada de estudos e a quem dedico todo meu amor e companheirismo.

Aos meus amigos do curso de mestrado: Bruna, Rafael Rodrigues, Rafael Sales, Everton, Diogo, Saulo, Miriam, Sérgio e todos os outros colegas.

Aos professores: Daniel Aloise e Caroline Rocha, Luciano Ferreira pelos ensinamentos na área de otimização.

Ao Prof. Vinício de Administração, pelo apoio a fornecimento de dados e informações.

Aos colegas de trabalho do IFRN: Nonato, Gerda, Laysce, Jássio, Sônia, Maria Emília, Fernando, Monteiro, e tantos outros que me ajudaram e deram apoio.

Aos professores que participaram da minha banca de qualificação e defesa e contribuíram para melhorias deste trabalho: Prof. Vinício Almeida, Prof. Anderson Mol, Prof. Luciano Sampaio, e Profa. Celma Ribeiro.

Á todas as pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para minha jornada.

À Deus, por me conceder apoio e forças, mesmo nas adversidades e que me ilumina todos os dias.

I'VE GOT A STOCK HERE THAT COULD REALLY EXCEL
REALLY EXCEL?
EXCEL?
SELL?
SELL?
SELL
SELL!
SELL!
SELL!
SELL!
SELL!
THIS IS MADNESS! I CAN'T TAKE ANYMORE
GOOD BYE!
GOOD BYE!
BYE?
Buy?
Buy!
Buy!
BUY!!!
Buy!
Buy!
Buy!
I'VE GOT A STOCK HERE..

RESUMO

LIMA JUNIOR, M.P. **Modelo de Covariância Bayesiana para Seleção de Portfólio de Investimentos**. Natal, 2011. Dissertação de Mestrado - Programa de pós-graduação em Engenharia de Produção, Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

A teoria de portfólio é um campo de estudos que se dedica a investigar a tomada de decisão por investidores de recursos. O propósito desse processo é a redução do risco por meio da diversificação e, portanto, a garantia de determinado retorno. Apesar disso, o modelo clássico de Média-Variância contém críticas quanto a sua parametrização, observa-se que o uso da variância e covariâncias possui sensibilidade ao mercado e à estimação de parâmetros. Como forma de redução dos erros de estimação, os modelos bayesianos possuem mais flexibilidade na modelagem, com a possibilidade de inserir parâmetros quantitativos e qualitativos sobre o comportamento do mercado como forma de redução de erros. Observando isso, o presente trabalho teve como objetivo formular um novo modelo de matriz por meio do teorema de Bayes, como forma de substituição da covariância no modelo M-V, denominado de MCB - Modelo de Covariância Bayesiana. Para avaliação do modelo, algumas hipóteses são formuladas por meio do método *ex post facto* e por análise de sensibilidade. Os *benchmarks* utilizados como referência foram: (1) o modelo clássico de Média Variância; (2) o Índice de mercado da Bovespa; e, (3) 94 Fundos de Investimento. Os retornos acumulados durante o período de maio de 2002 a dezembro de 2009 demonstraram superioridade do MCB em relação ao modelo clássico M-V e o Índice Bovespa, porém assumindo um pouco mais de risco diversificável que o M-V. A análise robusta do modelo, considerando o horizonte de tempo, constatou retornos próximos ao Ibovespa, considerando menor risco que o mercado. Por último, em relação ao índice de Mao, o modelo se demonstrou satisfatório, em retorno e risco, principalmente em prazos mais longos. Por fim, algumas considerações são realizadas, bem como sugestões de futuros trabalhos.

Palavras-Chave: Seleção de Portfólio. Markowitz. Bayes. Covariância. Investimento.

ABSTRACT

LIMA JUNIOR, M.P. **Bayesian Covariance Model for Investment Portfolio Selection**. Natal, 2011. Dissertation - Programa de pós-graduação em Engenharia de Produção, Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

The portfolio theory is a field of study devoted to investigate the decision-making by investors of resources. The purpose of this process is to reduce risk through diversification and thus guarantee a return. Nevertheless, the classical Mean-Variance has been criticized regarding its parameters and it is observed that the use of variance and covariance has sensitivity to the market and parameter estimation. In order to reduce the estimation errors, the Bayesian models have more flexibility in modeling, capable of insert quantitative and qualitative parameters about the behavior of the market as a way of reducing errors. Observing this, the present study aimed to formulate a new matrix model using Bayesian inference as a way to replace the covariance in the MV model, called MCB - Covariance Bayesian model. To evaluate the model, some hypotheses were analyzed using the method *ex post facto* and sensitivity analysis. The benchmarks used as reference were: (1) the classical Mean Variance, (2) the Bovespa index's market, and (3) in addition 94 investment funds. The returns earned during the period May 2002 to December 2009 demonstrated the superiority of MCB in relation to the classical model MV and the Bovespa Index, but taking a little more diversifiable risk that the MV. The robust analysis of the model, considering the time horizon, found returns near the Bovespa index, taking less risk than the market. Finally, in relation to the index of Mao, the model showed satisfactory, return and risk, especially in longer maturities. Some considerations were made, as well as suggestions for further work.

Keywords: Portfolio Selection. Markowitz. Bayes. Covariance. Investment.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Modelo Conceitual da Pesquisa 4
Figura 1.2 – Estrutura do Trabalho 8
Figura 2.1 – Processo de Seleção de Portfólios 10
Figura 2.2 – Famílias de Previsão de Preços de Ativos 13
Figura 2.3 – Distribuições de Probabilidade de dois Ativos R' e R'' 15
Figura 2.4 – Correlação entre os retornos de dois ativos 16
Figura 2.5 – Risco diversificável e não-diversificável 17
Figura 2.6 – Investimentos elementares e independentes 25
Figura 2.7 – Demonstração gráfica das funções de utilidade 27
Figura 2.8 – Avesso e propenso ao risco 28
Figura 2.9 – Neutro ao risco 29
Figura 2.10 – Fronteira Eficiente 30
Figura 3.1 – Evolução histórica da Moderna Teoria de Portfólio 44
Figura 3.2 – Mapa da Teoria de Portfólio 47
Figura 4.1 – Modelo de decisão para seleção de portfólios de investimentos 49
Figura 6.1 – Superfície das Matrizes de Covariância Tradicional e Bayesiana 62
Figura 6.2 – Fronteiras da Escolha por Cenário do Estimador Bayesiano 63
Figura 6.3 – Boxplot dos Retornos dos Portfolios por Cenário do Estimador 64
Figura 6.4 – Retornos Acumulados das Carteiras 67
Figura 6.5 – Pesos dos Portfólios do Modelo M-V 68
Figura 6.6 – Pesos dos Portfólios do Modelo de Covariância Bayesiana 68
Figura 6.7 – Média do Índice de Mao dos Portfólios pelo Horizonte Investido 70
Figura 6.8 – Dispersão entre Retorno e Risco dos Modelos e Fundos de Investimento 72

LISTA DE QUADROS E TABELAS

Quadro 2.1 – Medidas de risco 18
Quadro 2.2 – Taxonomia dos custos de transação 20
Quadro 2.3 – Representações matemáticas de funções utilidade 26
Quadro 2.4 – Representações matemáticas dos perfis de investimentos 29
Quadro 3.1 – Métodos de Otimização para Modelos de Portfólio 41

Tabela 6.1 – Estatística dos Retornos das Carteiras de Maio 2002 a Dez 2009 .. 65
Tabela 6.2 – Retornos e Risco em Relação ao Horizonte de Investimento 69
Tabela 6.3 – Rank das carteiras em relação aos fundos baseados no Ibovespa . 71

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

APT – Arbitrage Pricing Theory

BH – Estratégia Buy and Hold

CAPM – Capital Asset Pricing Model

CVaR – Conditional Value at Risk

FP – Estratégia Fixed Proportion

L-Risk – Modelo de Risco Linear

MCB – Modelo de Covariância Bayesiana

MTP – Moderna Teoria de Portfólio

M-V – Modelo Média e Variância de Markowitz

OECD – Organization for Economic Co-operation and Development

VaR – Value at Risk

LISTA DE SÍMBOLOS

$\overline{\overline{x_i}}$ - Valor máximo do peso no ativo i

$\overline{x_i}$ - Valor mínimo do peso no ativo i

$\Omega_{ij\varepsilon}$ - matriz de covariância bayesiana em um cenário estimado ε

$L_i(r_i, \theta)$ - função perda do retorno do ativo i em um estado da natureza θ

$\overline{RC}$ - Retorno médio da Carteira

R_i - Retorno do ativo i

R_m - Retorno do Mercado

Z_i - variável binária que representa a alocação do ativo i

p_i - Preço do ativo i

$\int_{-x}^{+y}$ - Integral de menos x a mais y

x_i - Variável de alocação de recursos no portfólio e em cada ativo i

$\mu_{\theta i}$ - média do ativo i em um estado da natureza θ

ρ_{ij} - Correlação entre o ativo i e o ativo j

σ_i^2 - Variância do ativo i

$\prec$ - menos preferível a

$\succ$ - mais preferível a

$\in$ - Elemento de

$\sim$ - similar a

$E(R_i)$ - Esperança do Retorno do ativo i

$E(R_{i\varepsilon})$ - Esperança do Retorno do ativo i no cenário do estimador ε

$E(R_p)$ - Esperança do Retorno do portfólio

$E[U(w)]$ - Esperança da utilidade da riqueza

G - Gamble

$H1$ - hipótese 1

$H2$ - hipótese 2

$H3$ - hipótese 3

$P1$ - problema de pesquisa 1

$P2$ - problema de pesquisa 2

$P3$ - problema de pesquisa 3

RC - Retorno da Carteira

$RC[k]$ - Retorno da Carteira Acumulado em k períodos

$Std(RC) = \sigma_p$ - Desvio Padrão da Carteira

U - Utilidade

$U(r_{\theta i})$ - utilidade do retorno i em um estado da natureza θ

$U(x)$ - Utilidade de x

$U[E(w)]$ - Utilidade da esperança da riqueza

W - riqueza do indivíduo

ln - Logaritmo natural

$p(a, \theta)$ - função verossimilhança

$p(\varepsilon, \theta)$ - função verossimilhança

$p(\theta|a)$ - distribuição à *posteriori* de θ em uma alternativa a

$p(\theta|\varepsilon)$ - distribuição à *posteriori* de θ em uma alternativa ε

$p(r_i|\theta)$ - função consequência do retorno do ativo i

$u(r_{\theta i})$ - utilidade do retorno do ativo i em um estado da natureza θ

a - alternativa de escolha

$\mathcal{A}$ - conjunto de alternativas de escolhas

ε - alternativa de escolha do estimador do modelo MCB

E - conjunto de alternativas de escolhas do estimador do modelo MCB

θ - estados da natureza

Θ - conjunto de estados da natureza

λ - Variável real entre 0 e 1

$\pi(\varepsilon)$ - frequência do estimador à *priori*

$\pi(\theta)$ - frequência dos estados da natureza à *priori*

$\varphi(x)$ - Escala da utilidade do valor x

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 APRESENTAÇÃO **1**
1.1 Introdução 1
1.2 Problema 2
1.3 Justificativa 6
1.4 Objetivos 7
1.4.1 Objetivo Geral 7
1.4.2 Objetivos Específicos 7
1.5 Estrutura do Trabalho 7
CAPÍTULO 2 TEORIA DE PORTFÓLIO **9**
2.1 Escopo da Construção de Portfólios 9
2.2 Modelagem dos Retornos 10
2.3 Modelagem da Volatilidade 14
2.4 Restrições da Escolha de Portfólio 18
2.5 O Modelo Markowitz Clássico de 1952 e 1959 21
2.6 Objetivos do Investidor 22
2.6.1 Teoria da Decisão 23
2.6.2 Perfil do Investidor 28
2.6.3 Fronteira Eficiente 30
CAPÍTULO 3 ESTÁGIOS EVOLUTIVOS DOS MODELOS **32**
3.1 Década de 50 32
3.2 Década de 60 33
3.3 Década de 70 35
3.4 Década de 80 37
3.5 Década de 90 38
3.6 Década de 2000 40
3.7 Considerações sobre a Evolução Teórica 42
3.8 Mapa da Moderna Teoria de Portfólio 43
CAPÍTULO 4 SISTEMATIZAÇÃO DO MODELO **48**
4.1 MCB - Modelo de Covariância Bayesiana 48
4.1.1 Retornos Contínuos (r) 49
4.1.2 Estados da Natureza (θ) 49
4.1.3 Estimador (ε) 50

4.1.4 Função Verossimilhança p(ε,θ) 51
4.1.5 Distribuição Posterior p(θ|ε) 51
4.1.6 Função Utilidade U(r) 52
4.1.7 Função Consequência p(r|θ) 52
4.1.8 Função Perda L(r|θ) 53
4.1.9 Risco Bayesiano – Ω [i,j,ε] 53
4.1.10 Retorno Bayesiano – $E(R)_{i\varepsilon}$ 54
4.1.11 Framework do modelo 54
CAPÍTULO 5 MÉTODO DE PESQUISA 56
5.1 Definição do Método 56
5.2 Coleta de Dados 57
5.3 Análise do Desempenho Ex Post Facto 58
CAPÍTULO 6 ANÁLISE DOS RESULTADOS 60
CAPÍTULO 7 CONCLUSÃO 73
REFERÊNCIAS 77
APÊNDICE 90
Apêndice 01 – Relação de Fundos utilizados com Código Anbid 90
Apêndice 02 – Rank de Fundos de Investimentos 91
Apêndice 03 – Portfólios Construídos pelo Modelo M-V 93
Apêndice 04 – Portfólios Construídos pelo Modelo MCB 94

CAPÍTULO 1 APRESENTAÇÃO

1.1 Introdução

Os agentes econômicos aplicam recursos visando um determinado retorno, para isso há uma diversidade de alternativas de investimentos disponíveis no mercado de capitais. Nessa escolha, a diversificação assume papel importante para o investidor, a finalidade é a redução do risco em favor da garantia de determinado retorno. Em contraponto, a análise apenas sob a ótica da rentabilidade torna essa avaliação incompleta, repercutindo na necessidade de observar outros fatores e condições impostas pelo mercado.

Dentre outros fatores do mercado, o comportamento do investidor é um dos mais relevantes para a seleção de portfólios, pois cada indivíduo possui diferente sensibilidade para a escolha de oportunidades de investimentos. Segundo Friedman e Savage (1948), a premissa é que os indivíduos, em sua maioria, são avessos ao risco. Em outras palavras, tende a optar pela alternativa que minimizem o risco.

Corroborando com essa premissa, a MTP - Moderna Teoria de Portfólio - desenvolvida por Markowitz (1952a, 1959) possui como base o pressuposto de que a diversificação de investimentos proporciona a redução do risco. Tobin (1958) complementa que essa diversificação visa encontrar um portfólio ótimo dentre um conjunto de ativos a serem selecionados, considerando a volatilidade como principal medida a ser reduzida, observando a utilidade do agente investidor perante a escolha.

Conforme Focardi e Fabozzi (2004), ao retratar características e fatores do mercado, a MTP busca contemplar os padrões de comportamento econômicos e financeiros, com o objetivo de aproximar os modelos

matemáticos à realidade. A compreensão desse contexto demonstra que as pesquisas na MTP procuram por adaptações e evoluções que possam considerar a dinâmica do mercado e suas particularidades.

Em consequência dessa evolução, os modelos matemáticos tornam-se mais complexos à medida que mais características da realidade vão sendo incorporadas. Em contrapartida, a resolução desses modelos exige maior esforço computacional. Portanto, a MTP carece no desenvolvimento de métodos e modelos para alcançar os propósitos da teoria de forma precisa e em tempo hábil para a tomada de decisão (AVRAMOV; ZHOU, 2010; TU; ZHOU, 2011).

Visando a atender essas necessidades, nas últimas décadas, a evolução teórica culminou na construção de vários modelos. Elton e Gruber (1998), Avramov e Zhou (2010) e Markowitz (2010), mediante estudo, afirmam que essas modelagens vêm evoluindo por meio da combinação de técnicas, modelos e métodos que promovem a melhoria na mensuração dos parâmetros da modelagem. Um desses casos são os modelos bayesianos de investimentos, os quais procuram inserir elementos qualitativos da análise.

Diante de algumas fragilidades que a covariância do modelo M-V Média-Variância possui, apresentadas por Michaud (1989), este trabalho tem como objetivo desenvolver uma nova abordagem para a elaboração da matriz de covariância por meio do teorema de Bayes. A nova covariância foi elaborada por meio da distribuição a priori dos retornos históricos dos ativos, usando o teorema de Bayes para transformá-la em distribuição preditiva, formando a base da estimação dos novos parâmetros de risco e retorno.

1.2 Problema

A MTP trata de uma teoria que visa à tomada de decisão para a seleção de portfólios de investimentos, para isso possui modelagens e aplicações em diversos setores e segmentos de mercado. Diante dessa variedade de métodos e modelos difundidos, conforme Michaud (1989), Black e Litterman (1992) e Elton e Gruber (1998) há lacunas que a teoria ainda não conseguiu suprir. Portanto, o presente estudo propõe uma nova modelagem para melhoria do modelo clássico.

Elton e Gruber (1998) afirmam que os resultados da evolução, desde o início da teoria, têm obtido melhorias em função do aumento da capacidade computacional e dos métodos utilizados na construção de portfólios. Todavia, alguns aspectos ainda necessitam ser discutidos e aprofundados, um dos principais fatores é a estimação dos parâmetros de *inputs* nos modelos. Alguns pontos críticos são observados, principalmente com base na utilização do modelo M-V.

Segundo Michaud (1989) e Black e Litterman (1992), o modelo clássico M-V contém críticas quanto a sua parametrização. Observa-se que o uso da variância não é adequado para carteiras que apresentam retornos assimétricos. Em outras palavras, não considera de forma apropriada a característica de caudas pesadas dos retornos, além de penalizar de maneira uniforme os desvios positivos e negativos das correlações.

Outro problema é a utilização de retornos, variâncias e covariâncias de forma constante. Segundo Bamberg e Spremann (1981), assim como Fama e French (1989), a volatilidade entre os ativos se altera constantemente, o que implica na perda de eficiência da solução proposta pelo modelo ao longo do tempo. Essa falha ocasiona, segundo Bamberg e Spremann (1981) e Michaud (1989), erros de estimação e, portanto, modificações nas soluções.

O problema de estimação dos parâmetros descrito é um fator comum a outros modelos desenvolvidos pela teoria. Os coeficientes de retorno e risco apresentam sensibilidade para sua elaboração em relação à janela de tempo selecionada. Esse problema está relacionado à incerteza dos acontecimentos, os quais provêm da aleatoriedade dos retornos dos ativos e da aleatoriedade dos estimadores.

Uma solução apresentada pela teoria é a utilização da técnica bayesiana, de forma a modelar e minimizar a expectativa de perda do portfólio por meio da inserção de regras de decisão, que incorporam outras fontes de informação e não apenas as históricas (BLACK; LITTERMAN, 1992).

O teorema de Bayes, na seleção de portfólios, passou a ser utilizada a partir de Mao e Sarndal (1966) como forma a transformar uma distribuição dos retornos a priori em uma distribuição dos retornos preditiva, por meio de fontes alternativas de informação além da série de preços. Na classe bayesiana, outras modelagens e adaptações ganharam destaque como Kalymon (1971),

Winkler e Barry (1975), Barry e Winkler (1976), Jorion (1986), Frost e Savarino (1986), Shanken (1987), Dumas e Jacquilat (1990), Polson e Tew (2000), Pástor (2000), Bade *et al* (2009) e Tu e Zhou (2010).

No mercado brasileiro, algumas aplicações e estudos utilizam o teorema de Bayes como Ferreira *et al* (2009) e Souza (2009) que adaptaram os modelos de seleção de portfólio. Da mesma forma que Mao e Sarndal (1966), esses estudos utilizam o valor de perda esperada como critério de decisão para a maximização da utilidade do investidor. Avramov e Zhou (2010) demonstram, por meio de uma pesquisa evolutiva, o desempenho significativo dos modelos bayesianos para o campo de estudo.

Michaud (1989) afirma que alterações nos parâmetros dos *inputs* conduzem a diferentes portfólios. Um exemplo de alterações são as modificações e perturbações na matriz tradicional como mostra os resultados de Disatnik e Benninga (2006, 2007) e Almeida (2008) com o modelo *Shrinkage Procedure* que provocam perturbações na matriz. Este trabalho, usando como exemplo essas inovações e a capacidade dos modelos bayesianos, propõe uma metodologia para construção de uma nova matriz com o intuito de substituir a covariância tradicional (AVRAMOV; ZHOU, 2010).

Os problemas e hipóteses para esse trabalho são formulados, como demonstra a Figura 1.1.

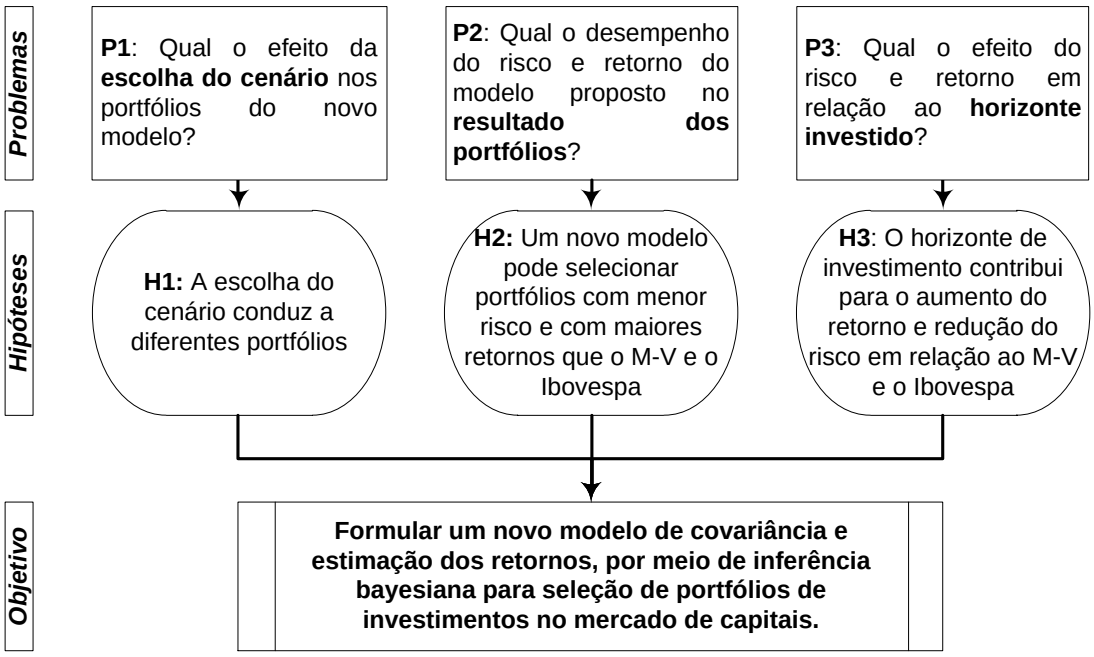


Figura 1.1 – Modelo Conceitual de Pesquisa
Fonte: Elaboração Própria.

Fundamentado nessas premissas, alguns problemas foram elaborados como forma de construção do trabalho de pesquisa. O primeiro problema $P1$ foi analisar o efeito do estimador bayesiano na construção dos portfólios de ativos no novo modelo. Esse questionamento foi baseado em Jorion (1986) e Frost e Savarino (1986) e trata da importância da escolha e uso do estimador bayesiano. Como consequência, na primeira hipótese $H1$, espera-se que o estimador provoque deslocamentos na curva da fronteira eficiente usando a nova matriz, conduzindo à escolha de diferentes portfolios da mesma forma que outros modelos bayesianos, Polson e Tew (2000) e Tu e Zhou (2010).

O segundo problema $P2$ trata do desempenho efetivo do modelo proposto, analisando o risco e retorno dos portfólios gerados pelo modelo. Para isso, os coeficientes de risco e retorno deverão ser avaliados por meio de análise de sensibilidade para demonstrar se o modelo proporciona aumento nos retornos em relação ao índice do mercado e ao modelo clássico. Vale salientar que na aplicação é considerado o método de mínima variância, em função dos bons resultados de Thomé Neto (2011).

Fundamentando em Avramov e Zhou (2010), a $H2$ espera que a modelagem proporcione riscos menores, porém com retornos também proporcionalmente menores em relação ao modelo clássico e ao Ibovespa. Essa hipótese é baseada em Ribeiro e Leal (2002) e Mendes e Leal (2005) que afirmam que o uso de um estimador robusto, como um índice de mercado usado por Polson e Tew (2000), captura de forma mais precisa a alta volatilidade do mercado e proporciona resultados mais estáveis.

O terceiro problema, $P3$ propõem a análise do comportamento do risco e retorno em relação ao horizonte de tempo a ser investido. A $H3$ estuda a hipótese de que o aumento do horizonte de tempo a ser investido contribui para a maximização do retorno das carteiras, conforme resultados obtidos por Polson e Tew (2000) com o uso do índice de mercado como estimador. Diante de tais questionamentos e hipóteses, é elaborado um objetivo que possa atender de forma sistemática os problemas apresentados.

1.3 Justificativa

As teorias econômicas e financeiras são baseadas na utilização de modelos que possam apoiar decisões de indivíduos relacionadas a investimentos e financiamentos. Apesar da busca constante de aperfeiçoamento e sofisticação, a realidade possui peculiaridades que impossibilitam os modelos considerarem todos os fatores do mercado, o que corrobora para o aumento da complexidade matemática e computacional (COPELAND; WESTON, 1988; VARIAN, 1990; LUENBERGER, 1998).

Com o aumento do esforço de resolução, os modelos e métodos necessitam de melhorias de forma a alcançar o equilíbrio entre a praticidade e a sofisticação teórica. Considerando novas especificidades do mercado, as estruturas proporcionam melhoria de investimentos e a geração de riqueza para os indivíduos (VARIAN, 1990). Copeland e Weston (1988) demonstram que investidores e consumidores aumentam seu bem estar por meio da melhoria do mercado de capitais e do fluxo de recursos.

Diante das lacunas existentes nos modelos tradicionais e como forma de redução dos erros de estimação, os modelos bayesianos possuem flexibilidade na modelagem, que possibilitam inserir parâmetros quantitativos e qualitativos sobre o comportamento do mercado. Dentre outras vantagens, que justifica a escolha do método bayesiano, está a flexibilidade para utilização de séries com diferentes distribuições de probabilidade e de utilização de diferentes funções de utilidade sem impacto na estrutura do modelo (FERREIRA, *et al,* 2009; SOUZA, 2009; AVRAMOV; ZHOU, 2010).

Outro aspecto relevante na pesquisa é a evolução das oportunidades de investimentos em mercados emergentes nas últimas décadas. Pesquisas recentes da *Organization for Economic Co-operation and Development* - OECD (2010a, 2010b), reforçam o crescimento de economias como novas fontes de investimentos. Como exemplo: Brasil, Rússia, Índia, China e África do Sul são considerados como fontes potenciais de recursos e de oportunidades de investimentos para as próximas décadas.

Por fim, este trabalho também considera, além do aumento de oportunidades de investimentos, a carência no mercado de capitais brasileiro de trabalhos que tratam da escolha ótima de portfólio, de forma a traduzir a

realidade com maior precisão. A simulação com base no mercado brasileiro já representa uma grande contribuição para a literatura (COSTA; NABHOLZ, 2004; ARAUJO, 2007; ALBUQUERQUE, 2009).

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo Geral

Formular um novo modelo de covariância e estimação dos retornos, por meio de inferência bayesiana, para seleção de portfólios de investimentos no mercado de capitais.

1.4.2 Objetivos Específicos

- Descrever as principais estruturas, métodos e modelos;
- Formular um novo método para uma matriz de covariância bayesiana;
- Definir a estrutura para a estimação de retornos do novo modelo;
- Estruturar o modelo M-V e o Ibovespa como *benchmark*;
- Avaliar o desempenho do modelo.

1.5 Estrutura do Trabalho

Este trabalho apresenta uma estrutura com base no modelo de pesquisa desenvolvido por Mitroff *et al* (1974). A estrutura está composta por quatro estágios de desenvolvimento: (1) elaboração da estrutura conceitual do problema; (2) elaboração de um modelo científico ou matemático do problema; (3) resolução desse modelo; (4) e, por último, sua validação.

Mediante estrutura apresentada, o trabalho foi composto em capítulos que seguem o modelo de Mitroff, *et al* (1974), conforme Figura 1.2. A primeira etapa constitui a conceituação e compreensão da teoria necessária ao desenvolvimento do modelo. Os capítulos 1 e 2 desenvolvem a identificação e contextualização da pesquisa, incluindo o conjunto de teorias. A segunda etapa contém os capítulos 3 e 4 que analisam e sistematizam os principais modelos e estruturas da literatura a fim de elaborar uma proposta. A etapa de resolução é

composta pelo capítulo 5 que trata do método de resolução do modelo. Por fim, a última etapa de implantação, análise e validação do modelo que são os capítulos 6 e 7.

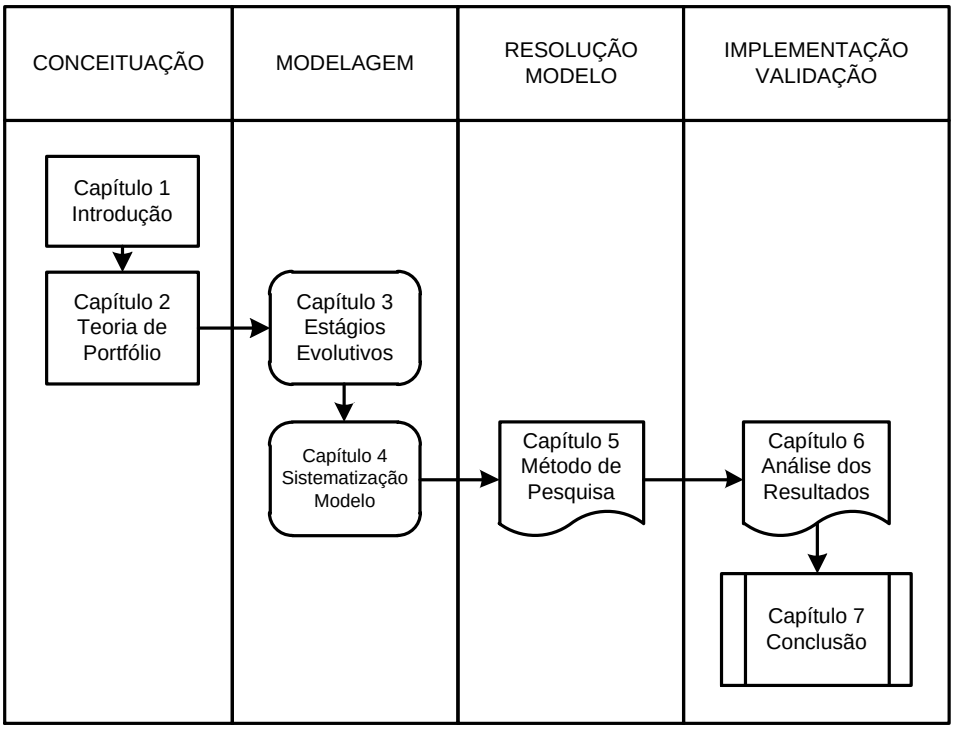


Figura 1.2 – Estrutura do Trabalho
Fonte: Elaboração Própria.

CAPÍTULO 2 TEORIA DE PORTFÓLIO

2.1 Escopo da Construção de Portfólios

A teoria de portfólio é um campo de estudos que se dedica a investigar a tomada de decisão por investidores de recursos. O propósito desse processo é a redução do risco por meio da diversificação e, portanto a tentativa de garantia de determinado nível de retorno. Para aplicar esses conceitos, Markowitz (1952a, 1959) desenvolveu a parametrização Média e Variância dos ativos, em que o retorno é estimado pela média e o risco por meio da variância.

O critério M-V é o critério de seleção de ativos ou grupos de ativos, mais aceito na literatura em função, dentre outros fatores, de ser coerente com o pressuposto de normalidade dos retornos dos ativos e com o pressuposto de que os indivíduos são avessos ao risco. Para desenvolver a compreensão do M-V, é necessário compreender as etapas do processo de construção de um modelo e posteriormente o comportamento dos ativos ao longo do tempo.

Para o processo de construção de portfólios de investimentos é necessário compreender cinco passos da literatura: (1) quantificar o retorno dos ativos; (2) elaborar as relações das probabilidades dos retornos dos ativos e suas implicações no risco do investimento; (3) relacionar as condições de mercado, seja restrições e/ou limitações impostas pela relidade; (4) considerar o comportamento de consumo e investimento dos indivíduos; e, (5) utilizar o método de seleção de portfólio, seja linear, quadrático, dinâmico, robusto, múltiplos períodos, dentre outros (MARKOWITZ, 1959; CLARKSON; MELTZER, 1960).

Para entender esse processo foi utilizada a estrutura ilustrativa desenvolvida por Fabozzi *et al* (2002). A Figura 2.1 demonstra o processo de gerenciamento do portfólio.

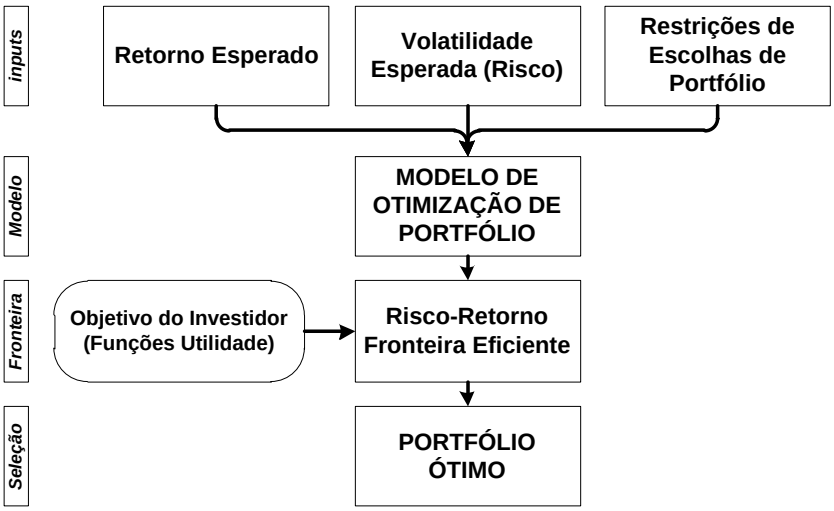


Figura 2.1 – Processo de Seleção de Portfólio
Fonte: Adaptado de Fabozzi *et al* (2002, p.8).

Conforme Figura 2.1, o modelo inicia com a seleção dos *inputs* que são a modelagem dos retornos, a volatilidade dos ativos e as restrições ou limitações impostas pelo mercado. Em segundo, a definição do *framework*. Terceiro, a analise do perfil do investidor e seus objetivos de investimento. E por último, é elaborada a fronteira eficiente de portfólios para confrontar com a etapa anterior, em que, diante das alternativas, o investidor selecione seu portfólio ótimo. Para ficar mais clara essa estrutura cada etapa é detalhada nos próximos tópicos do capítulo.

2.2 Modelagem dos Retornos

Os estudos de modelagem de retornos foram influenciados em primeiro lugar pela teoria do *Random Walk*. Bachelier (1900) formulou os primeiros relatos e testes sobre o conceito, baseado no princípio de que o comportamento dos preços futuros seria traduzido pela especulação. Em outras palavras, assume-se que a expectativa do retorno do especulador seria igual à zero.

Na década de 30, Working (1934) também identificou que o comportamento dos preços de ativos segue um caminho aleatório e na década de 50, o estatístico Kendall (1953) iniciou a sistematização da *Random Walk Theory* por não identificar ciclos regulares de preços, o que complementou os conceitos de Bachelier (1900). Esses estudos do comportamento aleatório dos retornos no tempo influenciaram os estudos de Markowitz (1952a, 1959) e Tobin (1958) que em consequência utilizaram a média dos retornos históricos.

Tobin (1958) desenvolveu, em complemento, a suposição de que os retornos são normalmente distribuídos e que o risco é medido pela variabilidade dos retornos ao longo do tempo. Na década de 50, quando as teorias de precificação de ativos ainda não tinham sido desenvolvidas, a suposição de normalidade conjunta dos retornos foi uma hipótese estatística razoável.

Tobin (1958), Fama (1965) e Modigliani e Pogue (1973) descreveram o modelo de cálculo da taxa de retorno de um ativo em determinado momento e periodicidade (dia, mês, ano, etc.) como sendo o percentual de variação de seu preço entre dois períodos de tempo, conforme demonstrado na Equação 2.1. O retorno R_i do ativo é consequência da relação entre y_n que é o preço do ativo no momento n e y_{n-1} o preço no momento n-1, não levando em consideração a distribuição de dividendos ou bonificações.

$$R_i = \frac{y_n - y_{n-1}}{y_{n-1}} = \frac{y_n}{y_{n-1}} - 1 \qquad \text{[Eq. 2.1]}$$

Essa transformação é importante para fins de tratamento estatístico, pois segundo Fama (1965) e Tsai (2005), o uso de retornos é mais adequado do que dos preços, assim como o logaritmo desses retornos. Na Equação 2.2, o logaritmo natural define o retorno composto continuamente ou simplesmente log-retorno r_i, consequência da logaritmização da Equação 2.1.

$$r_i = \ln(1 + R_i) = \ln\left(\frac{y_n}{y_{n-1}}\right) = [\ln y_n - \ln y_{n-1}] \qquad \text{[Eq. 2.2]}$$

Os retornos de múltiplos períodos ou períodos acumulados são descritos da seguinte forma: o retorno de um período k é descrito na Equação 2.3 e 2.4, respectivamente, retornos de k períodos $R_i[k]$ e log-retornos de k períodos $\ln r_i[k]$.

$$R_i[k] = \prod_{j=1}^{k}(1 + R_i) - 1 \qquad \text{[Eq. 2.3]}$$

$$r_i[k] = \ln R_i[k] = \ln\left[\prod_{j=1}^{k}(1 + R_i)\right] \qquad \text{[Eq. 2.4]}$$

Posteriormente, as séries de retornos devem ser ajustadas por eventos societários, como dividendos, juros, desdobramentos, agrupamentos e bonificações. Quando isso ocorre deve-se ajustar os valores dos históricos para que estes acompanhem as mudanças. Caso seja realizada uma análise de um gráfico sem os ajustes, os resultados serão imprecisos principalmente depois de desdobramentos ou agrupamentos (ELTON; GRUBER, 2004).

Após quantificar os retornos históricos, juntamente com seus ajustes, para selecionar um portfólio é necessário analisar o retorno futuro com base em uma esperança de preço y_{n+1} em um momento n+1. Existem diversas maneiras para se quantificar a rentabilidade esperada de um determinado ativo como, por exemplo, projeção de cenários econômicos ou por análise de séries históricas de preços.

Uma das formas utilizadas por analistas é a média ponderada dos retornos R do ativo i por cada probabilidade p de repetição, considerando os retornos para q cenários. Esse conceito é conhecido como método de Ponderação de Cenários, definida pela Equação 2.5, em que $E(R_i)$ é o retorno esperado para o próximo período do ativo i, e que p_{qi} é uma probabilidade ou frequência de cada retorno R_{qi} em um cenário q (MODIGLIANI; POGUE, 1973).

$$E(R_i) = \sum_{q=1}^{n} p_{qi} R_{qi} \qquad \text{[Eq. 2.5]}$$

Apesar de ser bastante simples, por desconhecer as probabilidades exatas dos retornos esperados, Markowitz (1959) propõe a utilização do método de Cenários Equiprováveis, no qual todos os retornos possuem igual probabilidade. Em outras palavras, a esperança do retorno dos ativos é igual média de seus históricos.

Como alternativa à utilização de média simples, Modigliani e Pogue (1973) utilizaram o conceito de média geométrica em que o retorno futuro do ativo é igual a uma média geométrica de seus retornos históricos, conforme ilustra a Equação 2.6, e que esses retornos são defasados pelo coeficiente k. Esse trabalho foi o início da utilização de outros métodos de estimação de retornos por meio de séries históricas.

$$R_i[k] = \prod_{j=1}^{k}(1 + R_i)^{\frac{1}{k}} - 1 \qquad \text{[Eq. 2.6]}$$

Contudo, a média geométrica ainda não constitui uma medida capaz de refletir a esperança dos retornos com precisão. Após o desenvolvimento da teoria de portfólio, outras formulações foram desenvolvidas para estimação dos retornos esperados dos ativos. Focardi e Fabozi (2004) classificam em três formas de previsão dos retornos futuros. As linhas de pensamento são ilustradas na Figura 2.2.

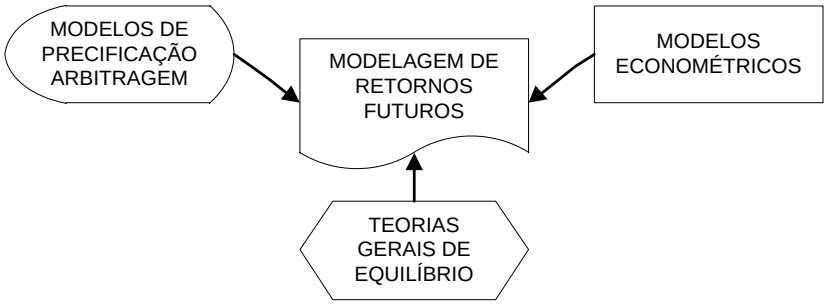


Figura 2.2 – Famílias de Previsão de Preços de Ativos
Fonte: Elaborado a partir de Focardi e Fabozzi (2004, p.511).

A primeira família consiste na modelagem dos retornos a partir do comportamento do mercado. Sharpe (1964) e Lintner (1965) desenvolveram os pressupostos básicos do *CAPM – Capital Asset Pricing Model*, que consiste em analisar a relação entre o retorno do ativo ou portfólio e o retorno do mercado, de forma linear. Os pressupostos desse método foram formalizados por Mossin

(1966). Apesar de ser um dos métodos mais aplicados, Markowitz (2005, 2008) desenvolve críticas quanto ao CAPM, concluindo que o comportamento dos retornos dos ativos não possui uma relação linear com os retornos de mercado.

Como solução, outros modelos e adaptações do CAPM foram propostos, como *Conditional CAPM*, pelos autores Black *et al* (1972) e Fama e Macbeth (1974), *Intertemporal CAPM* desenvolvido por Merton (1973), dentre outras variações. O CAPM é ainda responsável pelos conceitos de risco sistemático e não sistemático que será detalhado posteriormente.

A segunda família é denominada de modelos de precificação por arbitragem, desenvolvido por Ross (1976) que tem por finalidade a precificação de ativos por meio de vários fatores ou processos que podem influenciar os retornos futuros. O terceiro grupo, os modelos econométricos, são processos estocásticos de modelagem aplicados à economia e finanças. Há diversos modelos, segundo Focardi e Fabozzi (2004) e Tsai (2005), classificam-se em processos lineares estacionários, processos não estacionários, movimento *Browniano* e *Martingales*.

Ao estimar o retorno futuro por meio de algum desses métodos, o retorno esperado de um portfólio é definido por meio da Equação 2.7. O retorno esperado do portfólio $E(R_p)$ é o somatório do produto entre as esperanças de retorno de cada ativo $E(R_i)$ e as participações percentuais x_i do ativo i na carteira.

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^{N} E(R_i)x_i \qquad \text{[Eq. 2.7]}$$

2.3 Modelagem da Volatilidade

A modelagem da volatilidade consiste em estimar a possibilidade de perda de um ativo ou portfólio. O modelo de média-variância de Markowitz (1952a, 1959) utiliza como medida de volatilidade a variância e o desvio padrão dos retornos históricos de um ativo, conforme Equações 2.8 e 2.9. A Figura 2.3 demonstra as distribuições de probabilidade de dois ativos com base em seus retornos R’ e R’’, ou seja, quanto maior a dispersão das distribuições de

probabilidade maior será a variância e consequentemente o risco do ativo, no caso da Figura 2.3 o ativo R'' possui uma dispersão maior que o ativo R'.

$$\sigma^2(R_i) = VAR(R_i) = \sum_{i=1}^{N} p_i[R_i - \bar{R}_i]^2 \qquad \text{[Eq. 2.8]}$$

$$\sigma[R_i] = DP[R_i] = \sqrt{V[R_i]} \qquad \text{[Eq. 2.9]}$$

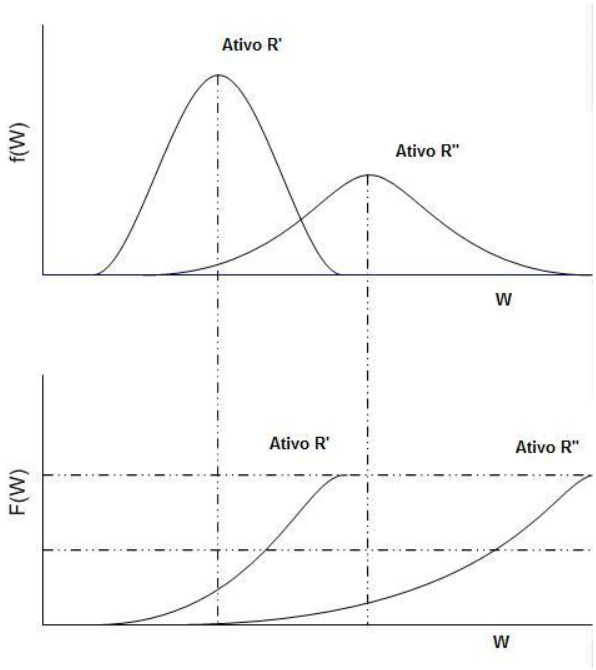


Figura 2.3 – Distribuições de Probabilidade de dois ativos R' e R''
Fonte: Elaborado a partir de Copeland e Weston (1988, p. 93).

Analisando os conceitos de correlação, os investimentos em ativos cujos retornos são altamente correlacionados não é uma estratégia muito prudente, independente de quão pequena é a chance de qualquer um dos investimentos resultarem em baixo desempenho. Isso porque se houver um único ativo com desempenho negativo, é muito provável, devido à sua alta correlação que os outros ativos também tenham desempenho negativo, acarretando numa perda de grande parte ou todo investimento do portfólio.

Tobin (1958) relata que o risco associado ao conjunto de dois ativos está relacionado diretamente com o risco de se investir nos dois ativos no mesmo momento. Para isso, a covariância está relacionada à correlação entre os ativos. A correlação expressa o quão os retornos desses ativos são

dependentes, ou mais precisamente, estão correlacionados. A Figura 2.4 demonstra exemplos de graus de correlação dos retornos de dois ativos.

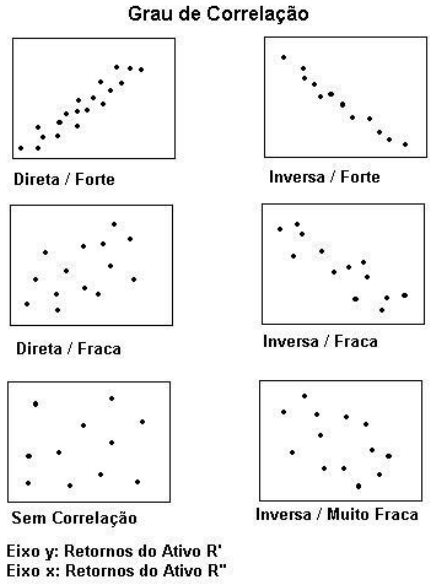


Figura 2.4 – Correlação entre os retornos de dois ativos
Fonte: Elaborado a partir de Copeland e Weston (1988, p.159)

Os conceitos de correlação demonstram que dois ativos para reduzir o risco conjunto devem representar dois mercados que não estão diretamente correlacionados. Com isso, a covariância e a correlação entre os retornos de dois ativos R_i e R_j são expressas pelas Equações 2.10 e 2.11 respectivamente.

$$COV[R_i, R_j] = \sigma_{ij} = (R_i - \bar{R_i})(R_j - \bar{R_j}) \quad \text{[Eq. 2.10]}$$

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} \quad \text{[Eq. 2.11]}$$

A covariância é dada pelos dos desvios $(R_i - \bar{R_i})$ de cada ativo em relação à sua média. Conforme Equação 2.10, a covariância, assim como a correlação, podem assumir valores positivos e negativos σ_{ij}. Com estas medidas é possível obter combinações de risco de um portfólio que sobrepõem o valor linear dos desvios individuais. Nesse caso, o somatório das partes minimiza o todo (MARKOWITZ, 1952a, 1959; TOBIN, 1958; MODIGLIANI; POGUE, 1973).

O risco do portfólio baseia-se na elaboração das covariâncias entre os ativos. A Equação 2.12 demonstra o somatório dos produtos entre as covariâncias σ_{ij} e os pesos alocados em cada ativo $x_i \; e \; x_j$.

$$\sum_{j \neq i} x_i x_j \sigma_{ij} + \sum_{i} {x_i}^2 \sigma_i^2 \qquad \text{[Eq. 2.12]}$$

Para entender o comportamento do risco do portfólio, é importante compreender seus dois componentes: o primeiro, que não pode ser diversificável ou reduzido tem origem a partir de eventos econômicos, políticos e sociais que impactam todos os ativos de mercado. O segundo, de caráter diversificável, pode ser reduzido com a montagem de carteiras de investimento. O risco não diversificável não é alterado com a prática da diversificação como demonstra a Figura 2.5 (LUENBERGER, 1998).

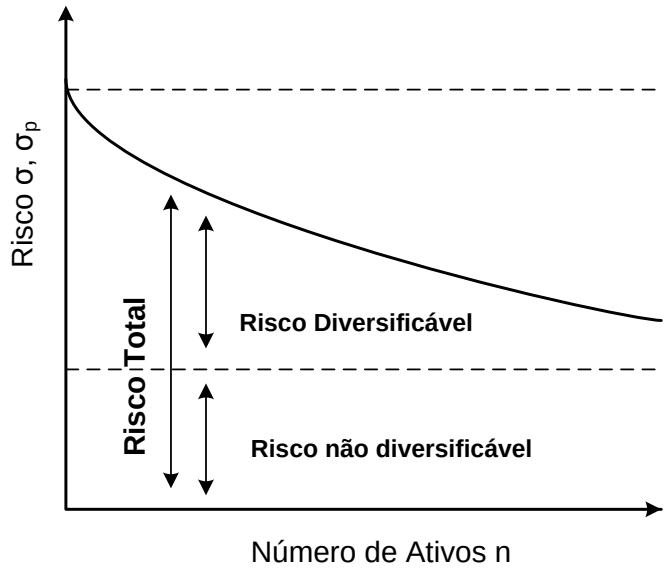


Figura 2.5 – Risco Diversificável e Não-Diversificável.
Fonte: Elaborado a partir de Luenberger (1998, p.183).

Na literatura há diversas formas de se quantificar o risco ou volatilidade de ativos e de um portfólio. Um dos motivos que levam a utilização de outras medidas é que a variância é formulada com base em pressupostos como (1) o pressuposto de normalidade dos retornos dos ativos e (2) pressuposto que as funções de utilidade são quadráticas. Em função dessas restrições, surgiram outras formas de medidas menos restritivas como o Desvio Absoluto Médio que

foi adaptado para o *L-Risk* por Konno (1990). O Quadro 2.1 descreve outras medidas de volatilidade além da tradicional variância.

Medida	Descrição	Formulação Básica
Desvio absoluto médio	$R_p = retorno\ do\ portfolio$ $\mu_p = retorno\ médio$ $E = Esperança$	$DMA_p = E(\lvert R_p - \mu_p \rvert)$
Semi-Variância	$R_p = retorno\ do\ portfolio$ $\mu_p = média\ dos\ retornos$ $E = Esperança$	$SemVar_p = E[min(R_p - \mu_p)]^2$
Downside Risk	$R_p = retorno\ do\ portfolio$ $\mu_0 = Indicador\ médio$ $E = Esperança$	$DR_p = E[min(R_p - \mu_0)]^2$
Value at Risk	$\Sigma = Matriz\ de\ Covariância$ $x = Vetor\ de\ Pesos\ Ativos$ $\alpha = Nível\ de\ Significância$	$Var_p = min\left[\alpha\sqrt{x'}\Sigma x\right]$ $R_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$
Perda Esperada (Bayes)	$L(\theta, a) = Função\ Perda$ $\pi(\theta\|x) = Distribuição\ Posterior$	$E(p)_a = \sum_{\theta} L(\theta, a) \cdot \pi(\theta\|x)$

Quadro 2.1 – Medidas de Risco.
Fonte: Elaborado a partir de Markowitz (1959, p.188); Elton e Gruber (2004, p.249); Berger (1985, p.8); Tsai (2005, p.113).

2.4 Restrições da Escolha de Portfólio

Para a elaboração dos modelos, há especificações e características do mercado que são inseridas com o objetivo de aproximá-los da realidade. Uma dessas restrições é obrigatória em todos os modelos, a restrição orçamentária. Assim, um dos fatores que proporciona a sofisticação dos modelos é o acréscimo de restrições e limitações.

Fabozzi *et al* (2006) descrevem as principais restrições de mercado. O agrupamento das restrições é dado por sua característica matemática, entre lineares, quadráticas, não lineares e combinatória ou inteira. Estas restrições são apresentadas para aproximar o modelo M-V e outros da realidade do mercado. Vale salientar que o acréscimo aumenta a complexidade computacional.

Diante da realidade e das características dos mercados há restrições que são predominantes nos modelos desenvolvidos, dentre as mais tradicionais há

(1) restrição orçamentária do investidor; (2) determinação do retorno mínimo exigido pelo investidor; (3) custo das operações; (4) consideração da compra de ações apenas em lotes padrão e/ou fracionado; (5) quantificação de um número mínimo de ativos denominado de restrição de cardinalidade; e, por último, (6) o valor mínimo e/ou máximo de investimento nos ativos.

Na restrição orçamentária, Markowitz (1952a, 1959) observou que o somatório dos percentuais dos ativos i, X_i devem ser igual a 1, considerando que X_i está entre 0 e 1. Conforme Equação 2.13, esta restrição demonstra que o valor investido deve ser igual à disponibilidade orçamentária do investidor. Como opcional X_i pode considerar valores negativos, como forma de realizar vendas a descoberto.

$$\sum_i x_i = 1 \qquad \text{[Eq. 2.13]}$$

A segunda restrição, retorno mínimo exigido pelo investidor, pode ser definida como uma comparação, em que o retorno do portfólio $\sum_{j \epsilon N} R_j x_j$ deve ser maior ou igual ao retorno mínimo exigido pelo investidor R_e. A Equação 2.14 demonstra a restrição. A restrição posterior de custos de transação pode ser utilizada em conjunto com a Equação 2.14.

$$\sum_i R_i x_i \geq R_e \qquad \text{[Eq. 2.14]}$$

O terceiro tipo de restrição trata dos custos das transações, como em Latané e Tuttle (1967). Kissel e Glantz (2003) e Fabozzi *et al* (2006) descrevem em detalhes a taxonomia dos custos de transação que existem no mercado de ações. O Quadro 2.2 demonstra a classificação dos custos.

A partir da Equação 2.14, pode-se inserir um custo da transação da operação, por meio de um percentual sobre o volume monetário. A Equação 2.15 demonstra o custo percentual ponderado de cada ativo na aquisição $\sum_{j \epsilon N} c_j x_j$. No caso apresentado, o custo é um percentual único sobre o montante investido adquirido x_i. Outras modalidades de custos podem ser complementadas como custos na venda do portfólio e custos fixos.

$$\sum_i R_i x_i - \sum_i c_i x_i \geq R_e \qquad \text{[Eq. 2.15]}$$

	Fixo		Variável	
	Título	**Descrição**	**Título**	**Descrição**
Explícito	**Comissões**	Custos de negociação pelas corretoras e brokers	**Bid-Ask Spread**	Custos de spread sobre a diferença do valor de venda e compra em determinado momento
	Honorários	Valores pagos sobre custódia dos ativos	**Taxas**	Custos de impostos e taxas
Implícito			**Custo Espera**	Custo referente ao tempo em que o gestor toma a decisão e o trader executa a operação
			Risco Movimento Preço	Risco proveniente do movimento natural dos preços, vinculado aos movimentos históricos
			Custo Impacto Mercado	Trata do custo de uma queda no preço proveniente do impacto do mercado no ativo individual, em momento diferente da compra
			Risco Temporal	Risco relacionado ao erro da previsão dos preços futuros, podendo ocasionar distorções na formação carteira
			Custo Oportunidade	Trata do custo da escolha de uma oportunidade de investimento, tendo em vista o abandono de uma outra alternativa

Quadro 2.2 – Taxonomia dos Custos de Transação.
Fonte: Elaborado a partir de Fabozzi *et al* (2006, p.53).

O quarto tipo de restrição, Mao (1970) mostra o tipo de quantificação da variável x_j, que tradicionalmente assume valores entre $0 \leq x_j \leq 1$. Para considerar apenas lotes padrão de ativos pode-se tornar a variável x_j inteira, considerando o valor investido por meio do preço do lote p_j.

O quinto tipo de restrições, denominado de cardinalidade, trata de modelos que exigem um número mínimo de ativos na composição do portfólio. Essa restrição é fundamentada na Equação 2.16, na qual o coeficiente K representa o número máximo de ativos que devem compor o portfólio. Z_i é uma variável binária que representa a inserção do ativo i no portfólio, a variável assume o valor 1 se pertencer e 0 se não.

$$\sum_{i}^{N} Z_i \leq K \qquad \text{[Eq. 2.16]}$$

A restrição de máximo e/ou mínimo da quantidade de ativos que devem compor o portfólio está relacionada à escolha mínima de determinados ativos a participarem da carteira e ao peso máximo de comercialização permitida pelo mercado. Elton *et al* (1977b) justificam a utilização da restrição, pela quantidade de disponibilidade de determinados ativos no mercado. A Equação 2.17 demonstra a restrição de máximo e mínimo de cada ativo na modelagem matemática, em que $\overline{x_i}$ representa o percentual mínimo e $\overline{\overline{x_i}}$ representa o percentual máximo.

$$\overline{x_i} \leq x_i \leq \overline{\overline{x_i}} \qquad \text{[Eq. 2.17]}$$

Além das restrições citadas, outras restrições são incorporadas visando à obtenção maior retorno e menor risco. Fabozzi *et al* (2006) descrevem algumas limitações adicionais, como (7) Restrições de Fatores de Risco, que tratam da limitação do risco do portfólio a um determinado nível; (8) Restrição de Rastreio de Erro, que trata da diferença do portfólio e uma carteira de mercado; e (9) Vendas à Descoberto, desenvolvido por Elton *et al* (1978) que destina a eliminação da restrição de não negatividade dos pesos.

2.5 O Modelo Markowitz Clássico de 1952 e 1959

O primeiro modelo foi elaborado por Markowitz (1952a) descrito como um relatório mais simples e objetivo. Posteriormente, foi sistematizado de forma mais ampla e completa por Markowitz (1959). Mediante outras pesquisas realizadas sobre preferências de consumo, utilidade e bem estar, Markowitz (1952b) fundamentou seu modelo de Média-Variância: M-V.

O modelo visa minimizar o risco a um determinado nível de retorno. Markowitz (1952a, 1959) descreve o modelo como segue nas Equações 2.18, 2.19, 2.20 e 2.21.

Min:

$$\sigma_p = \sum_{j \neq i} x_i x_j \sigma_{ij} + \sum_i {x_i}^2 \sigma_i^2 \quad \text{[Eq. 2.18]}$$

Sujeito a:

$$\sum_{j \epsilon N} R_j x_j \geq R_e \quad \text{[Eq. 2.19]}$$

$$\sum_{j \epsilon N} x_j = 1 \quad \text{[Eq. 2.20]}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in N \quad \text{[Eq. 2.21]}$$

No modelo apresentado, a Equação 2.18 é o risco do portfólio, o qual deseja ser minimizado, calculado pela covariância entre os ativos i e j, sendo N o conjunto de ativos candidatos a compor o portfólio e x_i referente aos percentuais de cada ativo no portfólio. Dentre as restrições, a Equação 2.19 trata do retorno mínimo, em que o retorno do portfólio $\sum_{j \epsilon N} R_j x_j$ deve ser maior que o retorno mínimo exigido pelo investidor R_e.

A Equação 2.20, a segunda restrição, apresenta que o somatório dos pesos de cada ativo x_j deve ser igual a um, esta restrição refere-se a uma restrição orçamentária. A terceira restrição, na Equação 2.21, trata de uma restrição de não negatividade, em que o valor dos percentuais de x_i deve ser um número natural positivo, não considerando vendas a descoberto.

Nessa formulação, Markowitz (1952a, 1959) considera um investidor que, no momento t, decide qual o portfólio de investimentos a investir no horizonte temporal Δt. No momento $t + \Delta t$, o investidor reconsidera a situação e decide novamente. Em outras palavras, considera que as variáveis futuras não se modificam com o passar do tempo.

2.6 Objetivos do Investidor

A economia é uma ciência que estuda como os agentes econômicos escolhem alocar os recursos escassos e distribuir a riqueza entre um e outro

ao longo do tempo, portanto, a MTP busca compreender os objetos e os métodos de escolha. O foco desse tópico é descobrir como os agentes fazem suas escolhas com base na incerteza. Com a combinação da teoria da decisão e os objetos de escolha, pode-se denominar a teoria da escolha ótima em condições de incerteza (COPELAND; WESTON, 1988).

2.6.1 Teoria da Decisão

A escolha de alternativas, desenvolvida por Friedman e Savage (1948), é fundamentada na Teoria da Decisão. Esse campo de estudo consiste em analisar e resolver problemas que tratam da escolha de alternativas de decisão, de forma a considerar alguma incerteza envolvendo o problema. Para isso, essas incertezas, são quantificadas numericamente para fins de tratamento estatístico e resolução do problema (BERGER, 1985).

O primeiro elemento na teoria da decisão são as alternativas de ações denominadas de a, que consistem, segundo Berger (1948), em alternativas de escolhas que o agente decisório possui. O conjunto de alternativas na teoria é denominado por $\mathcal{A}$, ou seja, para cada decisão há um conjunto de N alternativas possíveis de escolha.

Na teoria da decisão, a escolha de alternativas torna-se complexa por conter elementos incertos associados à decisão, que provém principalmente do estado futuro das observações do experimento. O segundo elemento da teoria da decisão são os Estados da Natureza das observações, que de acordo com Bernardo e Smith (1994), consistem em efeitos ou eventos provenientes do processo de tomada de decisão. O símbolo grego teta Θ denota um grupo de possíveis estados da natureza com quantidade de cenários nem sempre conhecidos.

De acordo com Berger (1985), a combinação da seleção de uma alternativa de escolha a e a ocorrência de um determinado estado da natureza θ ocasiona uma determinada consequência c contida em um conjunto de possíveis consequências $\mathcal{C}$. A relação $\mathcal{A}\ x\ \theta \rightarrow \mathcal{C}$ representa a hipótese de que com uma ação $a_i \in \mathcal{A}$ escolhida, então um, e somente um evento incerto $\theta_j \in \Theta$ ocorrerá, tendo uma consequência correspondente $c_{ij} = c(a_i, \theta_j) \in \mathcal{C}$.

A incerteza do problema está associada então ao estado da natureza que acontecerá com a escolha da alternativa. As incertezas sobre a repetição dos eventos ou estados da natureza são medidas em probabilidades, e que esta técnica visa estimar essas probabilidades no momento da decisão. Bernardo e Smith (1994) demonstram que uma alternativa para análise das probabilidades é o teorema de Bayes, que é utilizado como ferramenta de estimação dessas probabilidades.

O Teorema de Bayes é demonstrado por meio da Equação 2.22 e consiste em estimar as probabilidades futuras ou à *posteriori* $p(\theta|a)$ dos estados da natureza das observações θ à determinada escolha a. A estimativa é realizada por meio da relação entre as frequências históricas ou à *priori* dos próprios estados da natureza $p(\theta)$, a frequência das ações ou decisões passadas $p(a)$, e a frequência histórica das ocorrências conjuntas entre as escolhas e os estados da natureza $p(a,\theta)$, também denominado de verossimilhança.

$$p(\theta|a) = \frac{p(a,\theta)p(\theta)}{p(a)} \qquad \text{[Eq. 2.22]}$$

Vale salientar que a análise é realizada com o propósito de avaliar as relações entre as alternativas de decisão e as preferências do indivíduo decisório. Então, além das probabilidades é necessário definir uma medida numérica para a comparação, para isso a avaliação das alternativas por cada indivíduo é feita com base em funções de utilidade.

As funções de utilidade são um método de se mensurar o valor de benefício de uma escolha, em relação a outras possíveis alternativas disponíveis. Na MTP, uma função utilidade é uma forma de atribuir um número a todos os possíveis portfólios, de forma que seja mais preferível um portfólio que outros menos preferíveis. Varian (1990) define a função utilidade como sendo a forma de representar a utilidade de vários portfólios dentro de um conjunto viável de escolhas. Segundo Luenberger (1998), as funções de utilidade são utilizadas para prover um ranking entre as possíveis alternativas de ativos ou portfólios, por meio da utilidade esperada de cada um.

As funções de utilidade possuem duas propriedades: primeiro se um investimento x possui maior utilidade que outro y, ou seja, $U(x) \succ U(y)$, isso

significa que x é atualmente preferível a y, $x \succ y$, tendo que $\mathcal{A} = \{x, y\}$. A utilidade esperada pode ser usada para ranquear combinações de alternativas de risco, conforme Equação 2.23 (FRIEDMAN; SAVAGE, 1948).

$$\mathrm{U[G(x,y:\alpha)]} = \alpha \mathrm{U(x)} + (1 - \alpha)\mathrm{U(y)} \qquad \text{[Eq. 2.23]}$$

A utilidade esperada do investimento G, é demonstrado por $U[G(x, y: \alpha)]$ que é igual a probabilidade α de resultar em $U(x)$ e a probabilidade $1 - \alpha$ de resultar em $U(y)$. Na teoria da decisão, α e $1 - \alpha$ são as probabilidades dos estados da natureza das observações, em que alfa é igual a probabilidade de teta 1 $\alpha = p(\theta_1)$ e consequentemente, $1 - \alpha = p(\theta_2)$.

A Equação 2.23 representa a forma como um investimento pode ser avaliado. A ilustração da Figura 2.6 demonstra o princípio da escolha de investimentos independentes, em que o conjunto de escolhas é dado por $\mathcal{A} = \{x, y\}$, os possíveis estados da natureza são considerados por $\Theta = \{a, b\}$, com as respectivas probabilidades $\alpha(x)$ e $\alpha(y)$ do estado da natureza a e $1 - \alpha(x)$ e $1 - \alpha(y)$ do estado da natureza b.

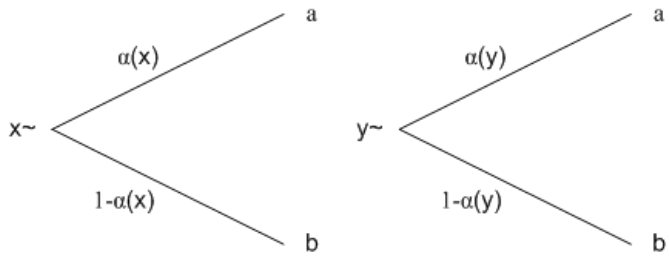


Figura 2.6 – Investimentos elementares e independentes
Fonte: Adaptado de Copeland e Weston (1988, p.81).

Segundo Markowitz (1959), a utilidade esperada da riqueza do indivíduo $E[U(W)]$ é exatamente o somatório do produto entre a utilidade $U(W_i)$ de cada estado de riqueza i, também denominado de estado da natureza, multiplicado por suas respectivas probabilidades de ocorrência p_i. A utilidade esperada é então descrita por meio da notação $\sum_i p_i \, U(W_i)$.

De acordo com a teoria da utilidade descrita por Friedman e Savage (1948), Herstein e Milnor (1953) e Varian (1990), sob uma ótica racional, o objetivo de um investidor, portanto, torna-se maximizar a Utilidade Esperada de sua riqueza. Os investidores querem calcular a Utilidade Esperada da riqueza

para todas as possíveis alternativas de escolhas e combinações de investimentos que maximizam a Utilidade Esperada (MARKOWITZ, 1952b).

No entanto, Markowitz (1959) conclui que o critério de maximização da utilidade como função objetivo não é considerado um comportamento racional, concluindo que os indivíduos possuem propensão à irracionalidade. Em função dessa reflexão e comprovações, Markowitz (1952a) elabora a função objetivo de seu modelo como a minimização do risco do investimento.

As funções de utilidade são especificas dos indivíduos, não há uma forma de comparar uma função de utilidade de um indivíduo com a de outro. É possível construir uma fórmula de comparação hipotética das funções de utilidade (FRIEDMAN; SAVAGE, 1948). O fator de comparação da utilidade de um indivíduo e o mercado pode ser escrito por uma equação linear pela Equação 2.24.

$$\frac{(\mathrm{U(x)} - \mathrm{U(y)})}{\big(\varphi(\mathrm{x}) - \varphi(\mathrm{y})\big)} = \mathrm{Constante} \qquad \text{[Eq. 2.24]}$$

U(x) e φ(x) são duas diferentes funções de utilidade, pois cada indivíduo possui uma escala de valor da utilidade para determinadas escolhas. A relação entre a comparação das duas funções possui como produto final, uma constante entre 0 e 1 que é o fator de comparação das duas utilidades marginais (COPELAND; WESTON, 1988). Luenberger (1998) apresenta diversas representações matemáticas de funções utilidade, estas formulações são uma consequência das características dos indivíduos frente a decisões a serem tomadas. O Quadro 2.3 juntamente com a demonstração gráfica na Figura 2.7 descrevem alguns formatos.

Tipo da Função Utilidade	Representação
Linear	$U(x) = x$
Exponencial	$U(x) = -e^{-ax}$
Logarítmica	$U(x) = \ln(x)$
Potenciação	$U(x) = bx^b$
Quadrática	$U(x) = x - bx^2$

Quadro 2.3 - Representações Matemáticas de Funções de Utilidade
Fonte: Elaborado a partir: Luenberger (1998, p.229).

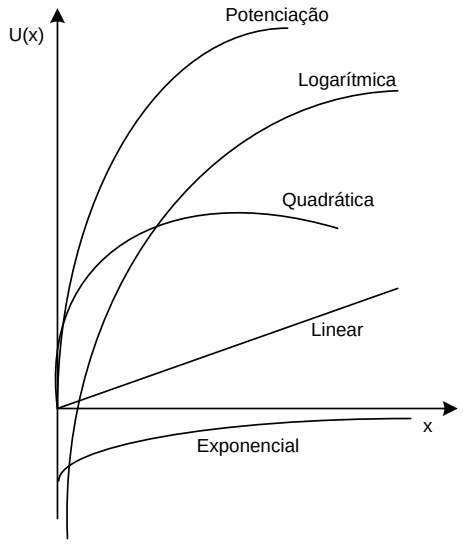


Figura 2.7 – Demonstração Gráfica das Funções de Utilidade
Fonte: Adaptado de Luenberger (1998, p.229).

As funções de utilidade apresentadas no Quadro 2.3 demonstram que existem diversas formas de representação das características comportamentais dos indivíduos frente a diversas escolhas a serem tomadas, por isso as funções de utilidade estão na base da tomada de decisão.

Na aplicação da teoria da decisão é possível analisar a utilidade das observações do experimento para avaliação das alternativas. A utilidade é quantificada por meio da distribuição histórica das observações, usando como base a função de utilidade de cada indivíduo. Conforme Markowitz (1952b) e na MTP, um indivíduo com baixo nível de recursos pode ter uma aceitação de utilidade e risco diferente de um indivíduo com alto nível de recursos.

A utilidade do ativo i, dada por $U(R)_i$ é representada como na Equação 2.25, assumindo que essas observações possuem uma distribuição normal. Em outras palavras, trata da integral definida em r da função utilidade $U(r)$ do indivíduo com a função de probabilidade cumulativa baseada em uma distribuição normal $f(r, \mu_r, \sigma_r)$. A variável μ_r significa a média e σ_r o desvio padrão dos retornos do ativo, e que esses retornos encontram-se em uma amplitude entre **+∞** *e* **-∞** (TOBIN, 1958). Na análise bayesiana, segundo Berger (1985) essa função é denominada de perda esperada.

$$U(R)_i = \int_{-\infty}^{+\infty} U(r)\, f(r, \mu_r, \sigma_r) dr \qquad \text{[Eq. 2.25]}$$

2.6.2 Perfil do Investidor

A compreensão do perfil do investidor tem como objetivo analisar e descrever de forma cardinal sua satisfação, ou preferência. A forma com que um investidor toma uma decisão, uma escolha a outra, influencia diretamente na formação do portfólio. O estudo da Teoria da Utilidade Esperada tenta medir de forma cardinal esse comportamento ou preferência de forma a maximizar a utilidade esperada do indivíduo.

Estabelecido um modo de converter suas preferências na função de utilidade esperada, é possível estabelecer e definir os conceitos de aversão ao risco. Um modo usual e simples é comparar três simples funções de utilidade, que assumem em geral, que mais riqueza é preferível que menos. Em outras palavras a utilidade marginal da riqueza é sempre positiva $UM(W) > 0$ (VARIAN, 1990).

Fama e Miller (1972), Copeland e Weston (1988), Varian (1990), Luenberger (1998) descrevem que há três perfis básicos quanto ao risco, o indivíduo Propenso ao Risco, o Avesso ao Risco e o Neutro ao Risco. As Figuras 2.8 e 2.9 demonstram esses três perfis por meio das suas respectivas curvas de utilidade.

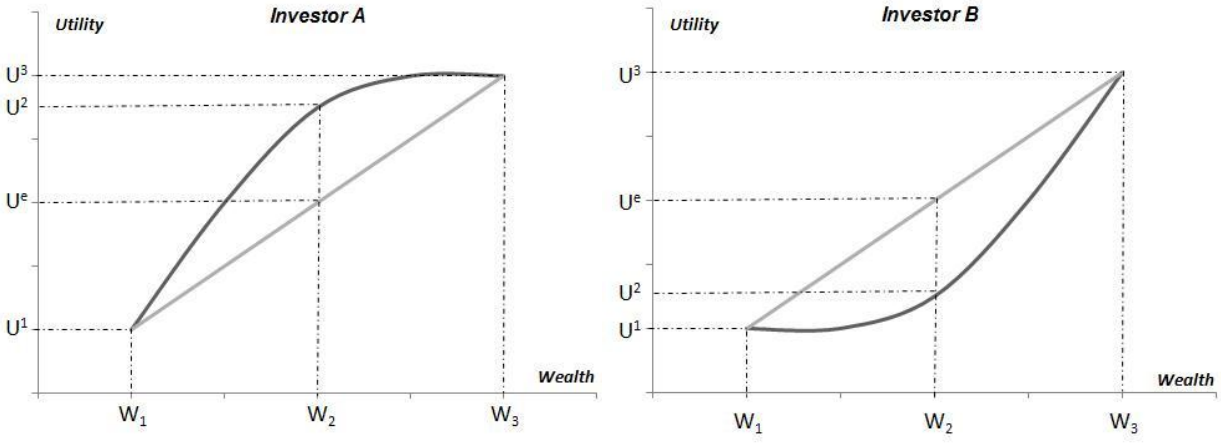


Figura 2.8 – Avesso e Propenso ao Risco
Fonte: Elaborado a partir de Friedman e Savage (1948, p.290) e Varian (1990, p.47).

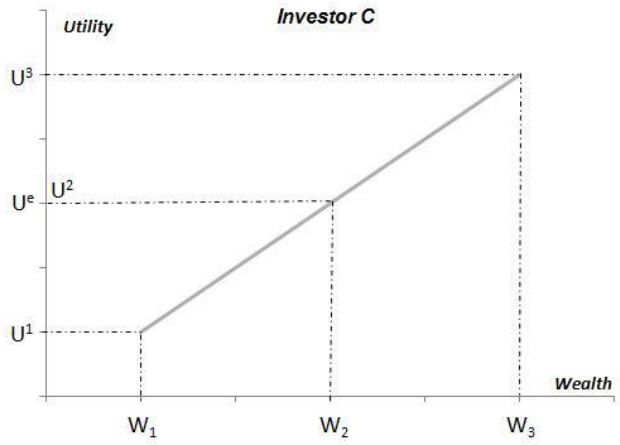


Figura 2.9 – Neutro ao Risco
Fonte: Elaborado a partir de Friedman e Savage (1948, p.290) e Varian (1990, p.47).

Para o indivíduo A, no qual $E[U^2(W)] < U^e[E(W)]$, a esperança de ganho do investimento é menor que a utilidade da riqueza atual, consequentemente, possui aversão ao risco do investimento. O indivíduo B, por sua vez, possui $E[U^2(W)] > U^e[E(W)]$, a esperança de ganho do investimento é maior que a utilidade da riqueza atual que possui, consequentemente, há propensão a investir e propensão ao risco (COPELAND; WESTON, 1988).

O terceiro caso será de um indivíduo neutro ao risco no qual apresentaria uma função linear, na Figura 2.9. O indivíduo não possui propensão ou aversão a realização do investimento e ao risco, em outras palavras as alternativas são equivalentes $E[U^2(W)] = U^e[E(W)]$. Os três perfis de investimento são definidos com base nas expressões matemáticas demonstradas no Quadro 2.4, a relação entre a $U[E(W)]$ Utilidade da Esperança do Investimento e a $E[U(W)]$ Esperança da Utilidade, ou algo certo.

Perfil	Expressão
Aversão ao Risco	$\mathrm{U[E(W)]} > E[U(W)]$
Neutro ao Risco	$\mathrm{U[E(W)]} = \mathrm{E[U(W)]}$
Propensão ao Risco	$\mathrm{U[E(W)]} < E[U(W)]$

Quadro 2.4 - Representações Matemáticas dos Perfis de Investimento
Fonte: Elaborado a partir: Copeland e Weston (1988, p.84).

A partir da compreensão das funções de utilidade, que demonstram a representação quantitativa do benefício referente a uma escolha, foi possível descrever comportamentos dos indivíduos em face de escolhas em um

ambiente sobre incerteza. A avaliação de investimentos é inteiramente relacionada as características do agente investidor e das escolhas, o que pode inferir diretamente na avaliação de um portfólio de investimentos (TOBIN, 1958; COPELAND; WESTON, 1988; VARIAN, 1990; LUENBERGER, 1998).

2.6.3 Fronteira Eficiente

A elaboração da fronteira eficiente consiste em analisar a combinação de ativos em termos de retorno e risco de forma a selecionar não apenas um, mas um subconjunto de portfólios ditos ótimos. Pela análise multi-critério é possível encontrar um subconjunto de carteiras que são preferidas por todos os investidores que tem aversão ao risco e também pelos que preferem retornos mais altos. As alternativas passam a comporem uma curva de Pareto.

A teoria explica que as estimativas de retornos e risco de um conjunto de investimentos, juntamente condicionadas aos critérios de escolhas, como restrições orçamentárias e retorno mínimo, possibilitam a realização de uma otimização, de acordo com Markowitz (1952a, 1959), que resulta em uma região de fronteira eficiente, conforme Figura 2.10.

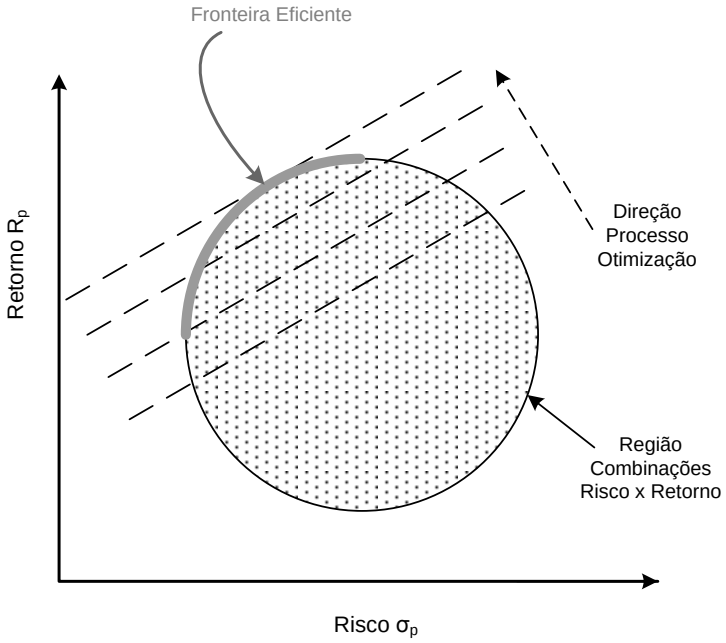


Figura 2.10 – Fronteira Eficiente
Fonte: Elaborado a partir de Markowitz (1952a, p.85).

A Figura 2.10 mostra a diversidade de combinações possíveis dos ativos que podem compor uma carteira de investimentos. A fronteira é eficiente por que todos os portfólios que a compõe serem não dominados. A cada ponto dessa fronteira possui uma carteira que resulta em maior retorno possível para determinado nível de risco, ou que encontre o menor risco possível para determinado nível de retorno. Os portfólios que se situam na fronteira compõem o conjunto de carteiras eficientes (FOCARDI; FABOZZI, 2004).

A fronteira é construída com base em dois critérios, por meio de uma Curva de Pareto. A curva é o resultado da relação entre duas variáveis, o risco do portfólio Equação 2.18 e o retorno do investimento Equação 2.19. Essas equações são substituídas pela Equação 2.25 na função objetivo.

Min:

$$\lambda \cdot \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij}^2 - (1-\lambda) \cdot \sum_{j=1}^{N} R_j x_j \qquad \text{[Eq. 2.25]}$$

A letra grega λ (lambda) é o parâmetro que determina o nível de aceitação do risco, estando entre $0 \leq \lambda \leq 1$. Para valores próximos de zero, o risco é considerado pelo investidor pouco importante, o peso é mais concentrado no retorno, ou seja, o investidor é propenso ao risco. Para valores próximos de um, é possível evidenciar maior prioridade na redução ao risco e menor para o retorno, assim o investidor é avesso ao risco. A fronteira é construída a partir da determinação do número de partições E e as variações de λ, conforme expresso pela Equação 2.26.

$$\lambda \in \left\{0, \frac{1}{E-1}, \frac{2}{E-1}, \frac{3}{E-1}, \cdots \frac{E-1}{E-1}\right\} \qquad \text{[Eq. 2.26]}$$

Em linhas gerais, o investidor buscará por um portfólio de investimentos que maximiza a sua utilidade esperada, buscando dentro da fronteira eficiente a carteira de investimento mais adequada as suas preferências de investimento.

CAPÍTULO 3 ESTÁGIOS EVOLUTIVOS DOS MODELOS

Os modelos de seleção de portfólios de investimentos foram desenvolvidos com o propósito de melhoria no retorno de aplicações de recursos, principalmente no mercado de capitais. Para alcançar o objetivo deste trabalho foi necessário aprofundar o conhecimento sobre a evolução teórica nas últimas seis décadas. A análise foi classificada por meio de dois parâmetros: temporal e ferramental.

Essa segunda classificação foi dividida em: (1) modelagem dos retornos; (2) modelagem da volatilidade e do risco; (3) análise dos critérios e restrições de mercado; (4) o comportamento e preferências do investidor; e por último, (5) o método de composição da carteira. Para acompanhamento do estudo, foi desenvolvida a Figura 3.1 que consiste na evolução histórica da teoria, descrevendo sucintamente as principais pesquisas; e posteriormente a Figura 3.2 que trata do mapa de visualização das ferramentas.

3.1 Década de 50

Os primeiros conceitos no campo de decisões de investimentos foram pesquisas de fundamentação microeconômica em que visavam investigar a tomada de decisões para alocação de recursos por meio da teoria da utilidade. Friedman e Savage (1948) foram os pioneiros a analisar os impactos da escolha de alternativas de investimentos em condições de incerteza, sob a ótica da utilidade. Posteriormente, os objetivos das pesquisas consistiam em mensurar a utilidade não apenas como uma escolha, mas sendo um conjunto

de escolhas ou de um portfólio como Markowitz (1952b) e Herstein e Milnor (1953).

Após os estudos sobre a utilidade do investimento, Markowitz (1952a) desenvolveu o primeiro estudo na construção de portfólios de investimentos considerando a utilidade não apenas como retorno, mas adotando o risco do investimento. Após os primeiros testes, Markowitz (1959) sistematizou e estabeleceu os pressupostos para o modelo, marcando o início da MTP. Nesse período, com o surgimento do referido modelo, pesquisas complementares se dedicaram a resolver o modelo proposto respeitando as condições e pressupostos, como em Martin (1955), Markowitz (1956) e Wolfe (1959). Na época havia carência de métodos de otimização quadrática para resolução do modelo M-V.

Simultaneamente aos métodos de resolução, foram estudadas outras linhas de pesquisa que testavam o modelo em aplicações práticas como Latané (1959, 1960); e outra investigava o comportamento dos preços das ações no mercado, estudado por Kendall (1953) que influenciou os estudos de estimação de retornos no modelo M-V na década de 60.

3.2 Década de 60

Após o marco inicial da MTP, novas pesquisas surgiram dando continuidade à consolidação da teoria. A grande evolução foi o estudo desenvolvido por Sharpe (1963) que construiu um novo modelo para seleção de portfólios, o de Índice Único. O modelo consiste em uma função objetivo linear de construção de portfólios baseado no Beta da carteira. Esse conceito foi sistematizado e difundido por meio das teorias de precificação por Sharpe (1964), Lintner (1965) e Mossin (1966). Os modelos de precificação CAPM ganharam destaque não apenas para a MTP, mas para aplicações em outras áreas de finanças.

O desenvolvimento do modelo de índice Único teve como motivação a simplificação da modelagem diante do esforço computacional exigido pelo modelo M-V. O coeficiente beta substitui a utilização da matriz de correlação, o que tornou o modelo quadrático em linear. Apesar da simplificação, os testes de Cohen e Pogue (1967) e Wallingford (1967) não apresentaram retornos

mais significativos desse novo modelo em comparação com o M-V, o que contribuiu para Cohen e Pogue (1967) ampliar o modelo para Múltiplos Índices. O modelo múltiplo também não contrapôs o M-V, o que demonstrou que o modelo clássico ainda superava os novos modelos que estavam surgindo no período.

Considerando novas abordagens, Mao e Sarndal (1966) desenvolveram uma aplicação de seleção de ativos utilizando a teoria da decisão. O estudo consistia de forma simples, na demonstração da probabilidade de perda do portfólio por meio da distribuição a priori dos retornos dos ativos. O simples fato da utilização do Teorema de Bayes contribuiu para o surgimento de uma nova linha, o início da utilização da análise bayesiana de portfólios (MAO; SARNDAL, 1966).

Com a construção desses novos modelos, como Sharpe (1963) e Cohen e Pogue (1967), novos métodos de resolução surgiram para resolvê-los por meio de programação linear em Sharpe (1967). Nessa linha de pesquisa, pode-se destacar Clarkson e Meltzer (1960) que desenvolveram uma heurística simples para a seleção de fundos de investimentos, iniciando uma das primeiras heurísticas computacionais para o tema juntamente com Cohen e Pogue (1967).

Outras pesquisas buscaram atingir os pontos fracos do modelo M-V como a construção de um portfólio para apenas um período, preponderante na pesquisa de Markowitz (1952a, 1959). Em outras palavras, a metodologia tradicional trata de um investimento em um momento t para um momento futuro t+1. Smith (1967) e Mossin (1968) propuseram a revisão periódica de portfólios entre o momento inicial e final considerando os custos de transição envolvidos apresentados em Latané e Tuttle (1967).

Samuelson (1969) e Merton (1969) desenvolveram o método de reconstrução periódica de portfólio, denominado de estocástico, em tempo discreto e contínuo respectivamente. Esses estudos trouxeram a premissa de que a realocação e reinvestimento durante o período de alocação de recursos proporcionam retornos mais significativos nos resultados dos portfólios. Por conseguinte, essas novas abordagens proporcionaram a motivação para o desenvolvimento de aplicações computacionais mais sofisticadas no próximo período histórico.

3.3 Década de 70

A formulação de modelos novos e adaptações tornaram-se comuns na década de 70. Os principais motivos foram, conforme Elton *et al* (1976): (1) a dificuldade de estimar os inputs dos modelos; (2) o custo computacional para se gerar portfolios eficientes; e, (3) a dificuldade no gerenciamento de portfólios.

Em relação aos modelos, o período iniciou com Mao (1970) que propôs outro critério de escolha, o qual representa a função objetivo por meio da maximização da relação entre retorno sobre o risco do ativo. Os testes do modelo por Mao (1970) e Jacob (1974) não obtiveram resultados melhores que o risco do M-V.

Outro modelo desenvolvido foi o de Dominância Estocástica, como exemplo Porter e Gaumnitz (1972) e Levy e Kroll (1976). O modelo usa a assimetria dos retornos como terceiro critério de escolha de ativos, além do retorno e da variância. Em comparação com o modelo M-V, Porter e Gaumnitz (1972) constataram que o modelo constrói portfólios com maior aversão ao risco, porém Levy e Kroll (1976) chegaram à conclusão de que o modelo M-V possui uma estrutura mais sólida, por se aproximar mais da premissa da maximização da utilidade esperada. O modelo foi aperfeiçoado em três níveis, o de primeiro, segundo e terceiro grau de dominância estocástica.

Dentre as adaptações, pode-se destacar Elton *et al* (1976, 1977a, 1977b, 1978) que utilizaram o modelo de Índice Único com algumas melhorias: (1) o incremento do método de fronteira eficiente para o modelo; (2) seleção de portfólios com ativos em grupos, o que facilita o esforço computacional; (3) restrições de quantidade máxima e mínima de ativos, diante da disponibilidade do mercado; e, (4) vendas a descoberto, em que possibilita ao investidor a venda de um ativo que não pertence à sua carteira. Essas adaptações ganharam repercussão, principalmente na utilização dessas novas restrições, como forma de adequar os modelos à realidade.

Pesquisas envolvendo o teorema de Bayes na elaboração de modelos foram desenvolvidas, destaque para Kalymon (1971), Winkler e Barry (1975) e Barry e Winkler (1976). Os testes empíricos se concentraram em analisar a formulação do risco, a função utilidade e a revisão periódica de construção de

portfólios. As pesquisas se basearam em melhorias do trabalho de Mao e Sarndal (1966).

As adaptações de Kalymon (1971), Winkler e Barry (1975) e Barry e Winkler (1976) para modelos dinâmicos demonstram a tendência dos modelos de construção de carteiras para múltiplos períodos e com revisão periódica. Os modelos dinâmicos passaram a ser mais pesquisados por assimilar de forma mais flexível a dinâmica do mercado. Hakansson (1971) e Chen *et al* (1971) contribuíram aperfeiçoando acerca do formato da transição entre as soluções dos períodos. As contribuições desses modelos motivaram a análise de aspectos gerenciais desse processo de otimização dinâmica. Em outras palavras, na modificação dinâmica do portfólio investido.

Em relação ao gerenciamento de portfólios, foram desenvolvidas estratégias de construção. Evans (1970) compara as estratégias para múltiplos períodos denominadas de *Buy and Hold - BH* e *Fixed Proportion - FP,* que se diferenciam pela forma de reinvestimento dos ganhos desde o período inicial até o final da alocação de recursos, o que influencia diretamente nos modelos dinâmicos mencionados.

A estratégia BH delimita o reinvestimento dos dividendos nos respectivos ativos que pagaram esse dividendo e já fazem parte da carteira, apenas aumentando o valor do montante durante o período de manutenção da carteira. Na estratégia FP, os dividendos não serão reinvestidos necessariamente nos mesmos ativos, permitindo o acréscimo de outros na carteira. Evans (1970) conclui com a definição da estratégia mais adequada para a relação entre risco, retornos e para determinados montantes de investimento.

Outro ponto carente destacado por Elton *et al* (1976) é sobre as pesquisas acerca da modelagem dos coeficientes de risco e retornos. O estudo de Kendall (1953) e Fama (1965) sobre o comportamento aleatório dos preços corroborou diretamente com novos estudos, como em Modigliani e Pogue (1973) e Elton e Gruber (1974) que fortaleceram o pressuposto de distribuição log-normal dos retornos. Esses estudos estavam vinculados aos requisitos dos modelos da MTP de que os retornos fossem normalmente distribuídos.

Outros aspectos desenvolvidos que aperfeiçoaram as medidas de precificação de ativos foram Black *et al* (1972) e Fama e Macbeth (1974) com o

CAPM condicional, Merton (1973) com o CAPM intertemporal, e mais significativamente Ross (1976) com a teoria da precificação por arbitragem APT. O objetivo desses métodos foi melhorar as estimativas de retorno dos ativos. As pesquisas contribuíram também no futuro trabalho de Fama e French (1993) no modelo de três fatores.

3.4 Década de 80

A formulação de novos modelos deixou de ser evidência nos estudos desse período. As pesquisas se concentraram em pequenos incrementos e comparações entre os modelos existentes, com o objetivo de avaliar de forma mais clara as vantagens dentre os modelos, principalmente utilizando o critério de erro em relação ao mercado. Dentre essas comparações, Chen e Brown (1983), Kwan (1984) e Chen *et al* (1987) compararam os modelos de índices, o M-V e o bayesiano, com o incremento de novas estimativas de retornos como CAPM e construção de cenários.

Outros estudos também compararam e testaram os modelos bayesianos desenvolvidos. As pesquisas se concentraram em minimizar o erro de estimação do risco e retorno como em Jorion (1986), Frost e Savarino (1986) e Shanken (1987). Jorion (1986) e Frost e Savarino (1986) demonstraram que sempre haverá um estimador que produzirá menor perda esperada em repetidas amostras, porém a regra clássica bayesiana *Certainty Equivalence* de Mao e Sarndal (1966), que não usa estimador, supera os outros métodos, em se tratar principalmente o que se refere às premissas dos axiomas da utilidade.

Frost e Savarino (1986) também fazem comparação entre estimadores, sugerindo melhorias para a seleção. Esses estudos contribuíram para analisar três pontos frágeis dos modelos bayesianos: (1) a escolha do estimador e no cenário esperado do estimador; (2) a importância na elaboração da distribuição prior dos retornos dos ativos; e, (3) a importância na elaboração da matriz de verossimilhança. Esses fatores impactam diretamente na seleção dos portfólios.

Em outra linha de pesquisa, Bamberg e Spremann (1981) e Fama e French (1989) desenvolveram críticas em relação à utilização de uma variância constante nos modelos. Corroborando com essas críticas, Engle (1982)

desenvolveu o modelo autoregressivo de heteroscedasticidade condicional ARCH e Bollerslev (1986), o modelo generalizado GARCH. Com isso, demonstraram que a variância se modifica ao longo do tempo. Os referidos estudos representam a necessidade de métodos para estimação não só do retorno, mas também da volatilidade, o que motivou Poskitt e Tremayne (1987) a aplicar em métodos de séries temporais para prever os retornos e o risco de portfólios ao longo do tempo, e Gennotte (1986) sobre coeficientes de risco e retorno em condições de informação incompleta ou imperfeita.

Apesar do benefício na utilização de métodos estocásticos de estimação, a utilização aumentava o esforço matemático e computacional dos modelos, inclusive em se tratar de grandes quantidades de ativos para estimação. Statman (1987) desenvolveu uma pesquisa mais específica acerca da quantidade necessária de ativos para ter uma boa diversificação, constatou a quantidade de 30 ativos ou mais como quantidade ideal, o que complementou os resultados obtidos por Cohen e Pogue (1967).

A repercussão dessas análises, considerando grande escala de ativos, desencadeou na elaboração de técnicas que melhorassem o tempo computacional. Perold (1984) foi um dos primeiros que desenvolveram algoritmos visando grandes conjuntos de ativos. Além da otimização em grande escala, a elaboração da fronteira eficiente também contribuiu para aumento da complexidade como em Cheng (1971), Jobson e Korkie (1980), Dybvig e Ross (1982) e Alexander e Resnick (1985). Tanto os métodos estocásticos, como a necessidade de ampliação da escala contribuíram para o surgimento de algoritmos mais sofisticados para resolução desses modelos nas próximas décadas.

3.5 Década de 90

Nos anos 90, Konno (1990) desenvolveu um modelo de risco linear fundamentado no modelo de Índice único de Sharpe (1963). O objetivo desse foi aperfeiçoar o modelo linearizado de forma que a medida de risco fosse compatível à covariância, a modelagem foi denominada de Desvio Absoluto Médio. Outro aspecto positivo do modelo é não possuir pressupostos, o que oferece maior flexibilidade na aplicação de dados reais, sem perder a coerência

com a teoria da utilidade. Em Konno (1990), o modelo linear apresentou resultados satisfatórios e retornos próximos do M-V.

As pesquisas com aplicações utilizando o modelo linear foram intensificadas em Konno e Yamazaki (1991). Os resultados comparativos comprovaram novamente a similaridade entre os modelos de risco linear de Konno (1990) e o quadrático de Markowitz (1952a). Os resultados apresentaram que a tendência de similaridade permanece para conjuntos de ativos acima de 500 e 1000 ativos. A pesquisa também corrobora com os pensamentos de Statman (1987), Cohen e Pogue (1967) e Perold (1984) que destacaram a necessidade de análise em grande quantidade de ativos.

Nessa década, outros modelos de medição de risco surgiram propondo medidas que pudessem reduzir o erro da volatilidade do ativo para a volatilidade do mercado. Harlow (1991), com o modelo de *Downside-Risk,* propõe minimizar o risco por meio da redução da dispersão do retorno do portfólio a um determinado valor alvo. Hamza e Janssen (1998) utilizaram o modelo de Semi-variância proposto por Markowitz (1959); e Rudolf (1999) com o modelo *Tracking Error* que apenas minimiza o desvio entre a volatilidade do portfólio e a volatilidade do ativo. Essa linha de modelos, juntamente com o de Konno (1990), compõe o conjunto denominado de modelos de desvios.

A aplicação do teorema de Bayes também obteve melhorias. O novo enfoque foi a estimação dos retornos, como em Harvey e Zhou (1990) e Kandel e Stambaugh (1995), motivados pela pesquisa de Shanken (1987). Kandel *et al* (1995) também contribuíram com uma estrutura bayesiana para analisar a eficiência de portfólios.

Fundamentados em Poskitt e Tremayne (1987), Chan *et al* (1999) e, posteriormente, Kane *et al* (2010) despertam o interesse para o modelo de média-variância, porém retratam a importância da previsão da variância e covariância futura dos ativos, por meio de métodos estocásticos, como forma de potencializar o desempenho do modelo M-V.

Pesquisas se destinaram a propor métodos de resolução dos modelos mais populares. Speranza (1996) utiliza o modelo de Konno (1990) com o objetivo de propor uma heurística para a resolução do modelo adaptado a variáveis discretas. Mansini e Speranza (1999, 2005) adaptaram o modelo para variáveis discretas e propuseram três tipos de heurísticas para resolução por

meio de programação inteira mista, com o objetivo de aumentar a capacidade de busca do modelo para grande escala de ativos.

Tratando-se dos métodos de resolução, Konno e Wijayanayake (1999) propõem um método de resolução, do modelo linear de desvio absoluto médio, baseado no método matemático *branch and bound*. Em paralelo, outros autores passaram a se dedicar em melhorias de algoritmos para resolução do modelo quadrático M-V, como Bienstock (1995).

3.6 Década de 2000

Novas adaptações dos modelos são destaque pela inserção de métodos mais sofisticados de estimação dos inputs, otimização e restrições de mercado. Conforme Tu e Zhou (2011), a miscelânea de modelos tem como principal objetivo o aumento da sofisticação e alcance de melhores resultados, mesclando as áreas de finanças, estatística e computação.

O modelo de Shefrin e Statman (2000) é um exemplo de adaptação. Revisam os precursores da teoria da utilidade em condições de incerteza, fundamentados em Friedman e Savage (1948). Shefrin e Statman (2000) desenvolveram o modelo de portfólio comportamental, fundamentado pelo surgimento das finanças comportamentais. Os resultados apresentados demonstram que o modelo segue indiretamente a linha de suposições do modelo M-V.

Com base nos modelos estocásticos e autoregressivos, o resgate dos modelos *VaR – Value at Risk* passou a ser difundido na prática conforme Alexander e Baptista (2000), Atkinson e Papakokkinou (2005), Mansini *et al* (2007), Markowitz (2010) e Ogryczak e Sliwinski (2010). Porém, segundo Elton e Gruber (2004), os modelos VaR apresentam alta sensibilidade ao pressuposto de normalidade dos retornos, o que contribuiu para o surgimento de outras versões como o *CVaR Conditional Value at Risk.* Jorion (2003) e Bertsimas *et al* (2004) são exemplos de casos com aplicações do acréscimo de melhorias por meio também de novas restrições artificiais para controle das falhas dos modelos.

Os novos estudos utilizando o teorema de Bayes trataram da previsão de retornos e, consequentemente, da variância e covariância por meio da

técnica bayesiana. Assim, diferentemente do modelo tradicional da teoria da decisão, estudos como Garlappi *et al* (2006), Greyserman *et al* (2006, 2010), Bade *et al* (2009), Tu e Zhou (2010), Huang (2010) buscaram utilizar a técnica em conjunto com algoritmos mais sofisticados e outros modelos como o *VaR* mencionados.

Com a utilização de modelos mais sofisticados e com maior esforço computacional como os métodos estocásticos para elaboração dos inputs, muitas pesquisas passaram a se dedicar e enfatizar, nessa nova década, em métodos de otimização que reduzisse o esforço computacional e mantivesse a exatidão do objetivo dos modelos. Alguns casos de destaque na literatura foram analisados, conforme Quadro 3.1.

Optimization Method	Case
Linear Programming	Young (1998), Cai *et al* (2000) e Shi-qi e Yong (2005)
Linear Integer Programming	Chiodi *et al* (2003)
Quadratic Integer Programming	Bertsimas e Shioda (2007), Li e Tsai (2007)
Dynamic Programming	Brandt e Santa-Clara (2006)
Evolucionary Algorithms	Streichert e Yamawaki (2006), Anagnostopoulus e Mamanis (2010a, 2010b), Talebi *et al* (2010)
Particle Swarm Optimization	Talebi *et al* (2010), Golmakani e Fazel (2011), Gilli e Schumann (2011)
Local Search	Schaerf (2002), Di Gaspero, *et al* (2007)
Tabu search	Chang *et al* (2000), Fouskakis e Draper (2002), Di Gaspero, *et al* (2007), Aldaihani e Al-Deehani (2008), Gilli e Schumann (2011) e Lima Junior *et al* (2011)
Simulated annealing	Chang *et al* (2000), Fouskakis e Draper (2002), Crama e Schyns (2003), Gilli e Schumann (2011)
Genetic algorithms	Chang *et al* (2000), Fouskakis e Draper (2002), Lai *et al* (2006), Lin e Liu (2008), Chang *et al* (2009), Chen *et al* (2010), Ewald *et al* (2010), Talebi *et al* (2010), Gilli e Schumann (2011)

Quadro 3.1 – Métodos de Otimização para Modelos de Portfólios
Fonte: Elaboração Própria.

O Quadro 3.1 apresenta alguns casos de relevância analisados em relação aos métodos de otimização mais recentes. Os resultados apresentam uma redução na utilização de métodos exatos e o aumento dos casos utilizando algoritmos aproximativos, a causa trata do aumento do esforço computacional dos modelos que se tornaram em termos computacionais NP-Completos e NP-Difíceis. Em pesquisas mais recentes, percebe-se que os métodos exatos como programação linear, inteira, quadrática e dinâmica estão se mesclando aos algoritmos de forma híbrida como Di Gaspero (2007), o que proporciona melhorias consideráveis no desempenho computacional.

Para adequação aos modelos, pode-se concluir que os algoritmos genéticos têm obtido resultados satisfatórios em relação aos outros algoritmos, principalmente nas comparações diretas como Chang *et al* (2000), Fouskakis e Draper (2002), Talebi *et al* (2010), Gilli e Schumann (2011), mesmo utilizando diferentes estimativas de risco e retornos. Apesar disto os algoritmos evolucionários são mais adequados para modelos de otimização multicritério em que mais de uma função objetivo é considerada.

3.7 Considerações sobre a Evolução Teórica

Após essa investigação teórica, foi possível desenvolver um mapa histórico para descrever sucintamente a evolução da Moderna Teoria de Portfólio. A revisão fornece embasamento suficiente para os principais desenvolvimentos desde os anos 50 até 2011. A Figura 3.1 descreve os estágios evolutivos dos modelos de portfólio, os quais são demarcados pelas obras que compõem o estado da arte sobre o tema.

Com a diagramação, alguns pontos chaves foram destacados acerca dos períodos estudados. Na década de 50, evidenciou-se o surgimento da Moderna Teoria de Portfólio por Markowitz (1952a, 1959), como também a adequação do modelo à Teoria da Utilidade. Na década de 60 foi possível caracterizar principalmente as Teorias de Equilíbrio por Sharpe (1963, 1964, 1966) que desencadearam novas formas de precificação, modelos de seleção de ativos e métodos de avaliação de desempenho.

Posteriormente, nas décadas de 70 e 80, não foi possível caracterizar uma linha única de pesquisa, mas por um perfil característico das pesquisas. As adaptações foram o principal aspecto, na adaptação de medidas de risco e retorno. Essas adaptações consistiram em desenvolver a melhoria dos modelos para adequação a aspectos da realidade dos mercados. Em outras palavras, esse estágio evoluiu com objetivo de estimar os riscos e retornos com maior precisão.

Na década de 90 e no século XXI, a principal evidência foi a sofisticação dos modelos, com a evolução de métodos estatísticos e computacionais. A sofisticação evidencia modelos e estruturas mistas que visam considerar além

de características puramente estáticas do mercado, como também a dinâmica ao longo do tempo.

Como exemplo os métodos dinâmicos e estocásticos, principais inovações desse período. Essa evolução surgiu pelo fato dos métodos dinâmicos possibilitarem mapear a realidade com interações de variáveis no tempo e os estocásticos comportam abrigar modelos mais complexos para aferir a realidade, tendo em vista que a simulação foi o método mais utilizado para análise dos resultados nos portfólios. Esses foram os estágios que proporcionaram as evoluções nas seis décadas de estudos da MTP.

3.8 Mapa da Moderna Teoria de Portfólio

A partir da análise histórica da teoria, foi elaborado um mapa da teoria de portfólio capaz de demonstrar diversas modalidades, métodos e estruturas para formatação de um modelo de seleção de portfólios de investimentos, esse mapa é demonstrado por meio da Figura 3.2.

No diagrama foram selecionados alguns dos principais fatores que compõe a estrutura, iniciando com definições preliminares como a abrangência do mercado, em que o investidor tem a opção de investimento em um único mercado doméstico ou em mais de um mercado, o que impacta em custos de transação mais sofisticados principalmente em função do câmbio (ELTON; GRUBER, 2004).

Após a delimitação da abrangência, deve-se então delimitar o tipo de gerenciamento da carteira, cujo caráter pode ser ativo ou passivo. A segunda opção torna a preferência por fundos de investimentos, funcionando como uma terceirização dos recursos sem que o investidor necessite acompanhar em tempo real sua carteira. Por outro lado, a gestão ativa possui preferência por produtos diretos, sejam títulos monetários ou do mercado de capitais. Essas escolhas delimitam indiretamente o tipo de produto financeiro a ser investido. O gerenciamento ativo em títulos variáveis ou derivativos exigem métodos de previsão e modelos que incorporem as características desses produtos (ELTON; GRUBER, 2004).

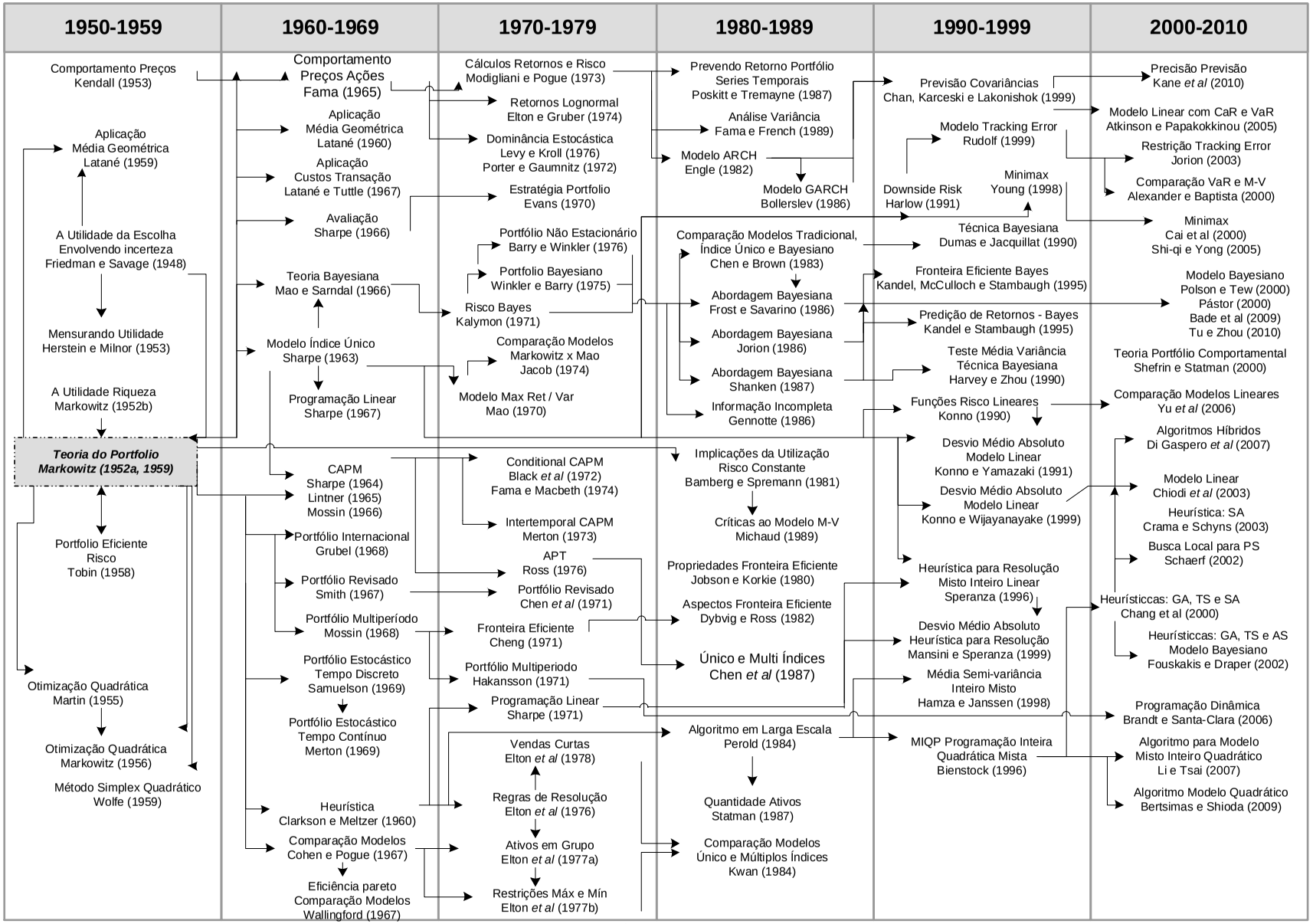


Figura 3.1 – Evolução Histórica da Moderna Teoria de Portfolio
Fonte: Elaboração Própria

Diante da diversidade dos produtos financeiros, após a seleção do tipo de gerenciamento e consequentemente dos produtos, deve ser realizada uma pré-seleção de ativos candidatos a comporem a carteira de investimentos. Para isso, há critérios e ferramentas que podem ser utilizadas para essa pré-seleção, a necessidade surge da gama de títulos financeiros existentes. Um exemplo disto são as Técnicas Gráficas e a Fundamentalista que se dedicam a analisar informações para encontrar perspectivas futuras de preços dos ativos (LUENBERGER, 1998).

A escolha dos títulos que são candidatos a comporem a carteira de investimentos faz com que seja indiretamente selecionado o formato da solução da carteira e a forma de representação matemática da solução também interfere na estrutura do modelo. O formato inicial do modelo M-V é composto por variáveis reais que representam os pesos de investimentos nos ativos, porém alguns mercados trabalham com lotes padronizados ou fracionados, o que remete à utilização de uma solução com valores inteiros. Outro formato pertencente à modelagem é o agrupamento de ativos em segmentos do mercado, no qual o modelo gera como *output* uma carteira com os pesos a investir em cada segmento de mercado, em Elton *et al* (1977a).

Posteriormente, é necessária a definição de quais os critérios de escolha do portfólio, seja um único critério como menor risco ou máximo retorno, ou múltiplos critérios em conjunto, como em Anagnostopoulus e Mamanis (2010a, 2010b) que usam o critério de cardinalidade. O incremento de critérios tem como consequência o acréscimo de opções de carteiras a serem escolhidas.

Apesar da definição da etapa anterior dos critérios, antes de avançar nos métodos de otimização alguns fatores devem ser considerados. Deve-se definir qual a posição inicial de partida, isso retrata se o modelo de otimização inicia a partir de um orçamento inicial ou de uma carteira já construída, ao se iniciar de um portfólio já construído remete-se aos modelos dinâmicos, em que a carteira se modifica ao longo do tempo. Tal dinâmica surgiu com Smith (1967) e Mossin (1968). A alteração das carteiras ao longo do tempo pode ser em tempo contínuo, ou seja, com alterações contínuas como em Merton (1969), ou em uma determinada periodicidade para as modificações como em Samuelson (1969).

A periodicidade da estrutura consiste na modificação ou revisão do portfólio durante a realização do investimento. A utilização em múltiplos períodos tem como consequência as restrições intermediárias, incluindo fatores de custos na modificação de um portfólio investido x em outro y. Essas modificações geram a necessidade da escolha de um novo portfólio, considerando os ganhos e perdas nessa modificação, incluindo a forma de reinvestimento, que Evans (1970) corrobora como BH e FP, já descritas.

Os quatro últimos aspectos do mapa tratam da escolha da definição dos parâmetros para o processo de modelagem da otimização, adequados aos fatores já delimitados. Os principais parâmetros são as medidas de previsão do risco ou volatilidade e as medidas de previsão de retornos. Em seguida, os critérios de restrição e limitações do mercado são considerados segundo Maringer (2005) para tornar os modelos mais realistas. A partir dessas definições, o modelo de resolução do problema é selecionado.

Dentre os mecanismos de resolução há métodos puramente exatos e algoritmos aproximativos denominados de heurísticas e metaheurísticas. Os métodos de otimização exatos utilizados para resolução consistem em métodos apenas matemáticos, como Programação Linear, Inteira e Quadrática, porém consomem maior esforço computacional. Os métodos heurísticos consistem em algoritmos aproximativos que buscam uma solução ótima por meio de lógica computacional em tempo mais curto e com menos esforço computacional, porém nem sempre encontram essas soluções ótimas. Os métodos híbridos caracterizam-se pela utilização mista entre métodos exatos e os aproximativos (GLOVER; KOCHENBERGER, 2003).

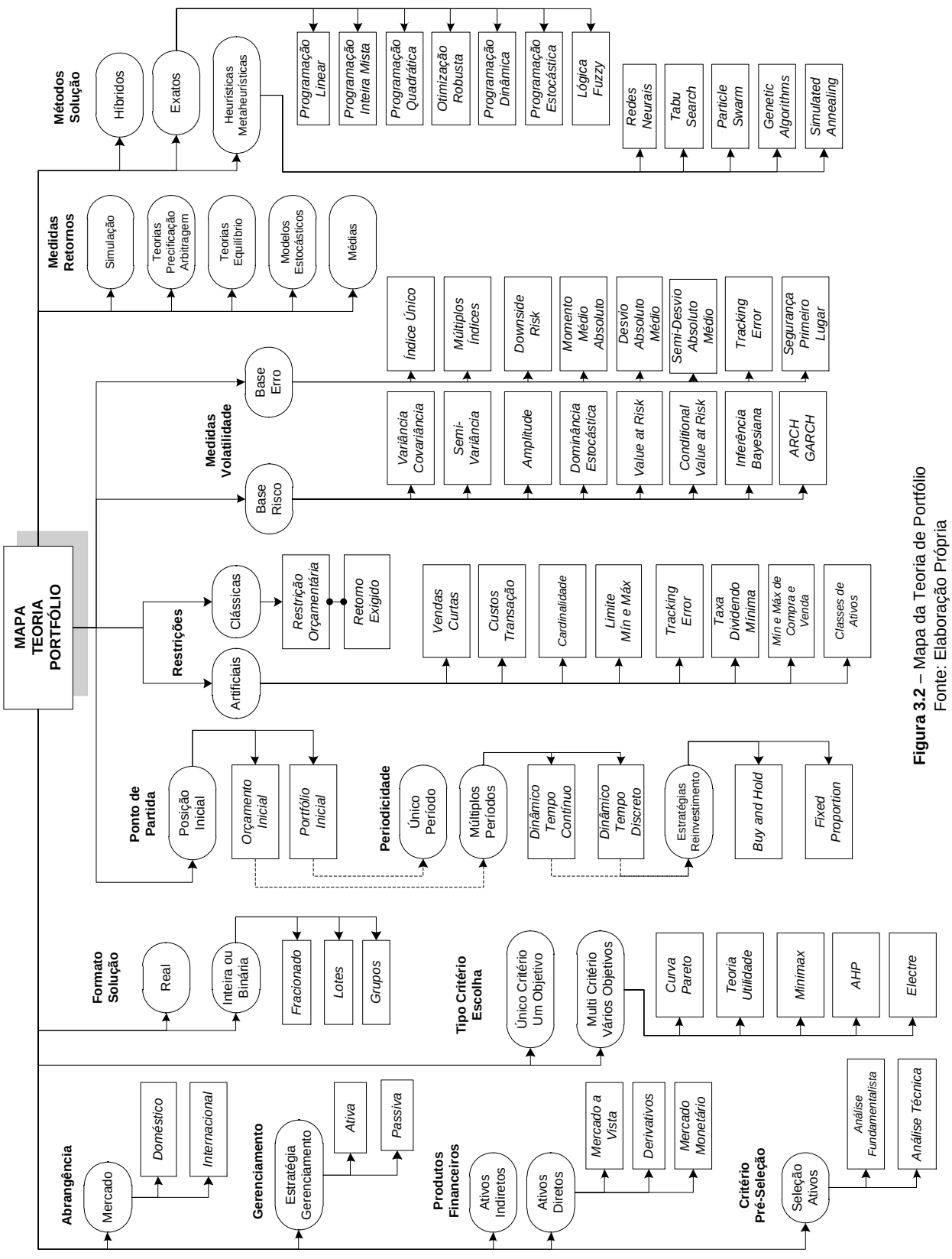


Figura 3.2 – Mapa da Teoria de Portfólio
Fonte: Elaboração Própria

CAPÍTULO 4 SISTEMATIZAÇÃO DO MODELO

4.1 MCB - Modelo de Covariância Bayesiana

Os agentes de investimentos utilizam duas fontes de informações, a que provém da aleatoriedade dos rendimentos dos ativos e da aleatoriedade das variáveis econômicas, políticas e sociais que influenciam esses rendimentos. Os modelos de construção de portfólios bayesianos conseguem, segundo Avramov e Zhou (2010), incorporar essas duas fontes de informações, ao contrário dos modelos tradicionais que apenas utilizam as informações dos ativos.

O grupo de modelos bayesianos para a seleção de carteiras de investimentos usam ferramentas de análise de decisão, conforme Berger (1985), como forma de minimizar o erro de estimação dos parâmetros na construção de portfólios. Baseando-se nesse pressuposto, Mao e Sarndal (1966) construíram o modelo clássico utilizando o teorema de Bayes. Uma das grandes vantagens da inserção na teoria da decisão é a consideração de variáveis econômicas que podem direcionar os resultados das estimativas de risco e retorno.

Para alcançar o objetivo da pesquisa, foi desenvolvido um novo modelo de seleção de portfólios de investimentos por meio do teorema de Bayes. O modelo foi construído com base na elaboração de uma nova matriz para substituição da tradicional covariância e para estimação dos retornos. O novo modelo foi fundamentado no teorema de Bayes usando as premissas da teoria da decisão em Friedman e Savage (1948) e Berger (1985), a estrutura de Markowitz (1959), a concepção de utilidade dos retornos dos ativos por Mao e Sarndal (1966), o estimador usado por Polson e Tew (2000) e a forma de

elaboração dos estados da natureza em Ferreira *et al* (2009). A combinação desses estudos resultou no novo modelo desta pesquisa.

O MCB é estruturado por meio de três fatores básicos: (1) os retornos dos ativos (r); (2) os estados da natureza passados desses ativos (θ); e, (3) as alternativas de escolha baseadas no estimador (ε). Por meio desse grupo de elementos, o risco é avaliado na forma de uma nova matriz de covariância para o modelo M-V de seleção de carteiras. A interação entre esses elementos é demonstrada pela Figura 4.1.

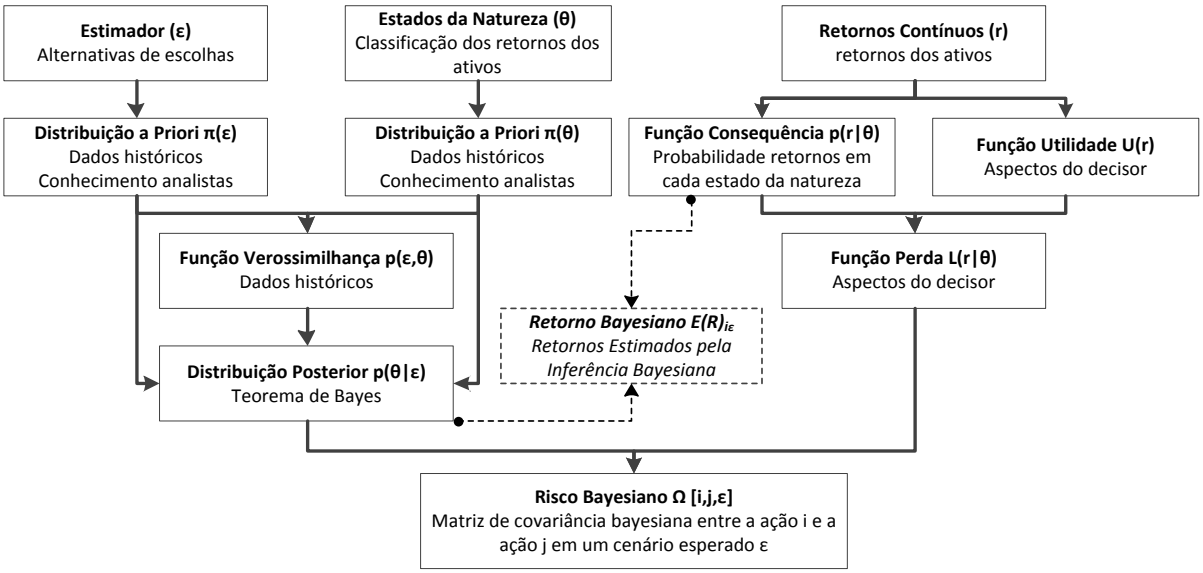


Figura 4.1 - Modelo de Decisão para Seleção de Portfólio de Investimentos
Fonte: Elaboração Própria.

4.1.1 Retornos Contínuos (r)

O MCB inicia-se por meio da elaboração do logaritmo dos retornos dos ativos, elaborados com a Equação 2.2. Para investimento em mais de um período futuro, pode-se utilizar os retornos acumulados por meio da Equação 2.4. Para elaboração dos retornos, os preços devem ser ajustados conforme descrito no Tópico 2.2.

4.1.2 Estados da Natureza (θ)

Os estados da natureza θ, no modelo proposto, são provenientes da matriz dos retornos r_i de cada ativo i acumulados em $[k]$ períodos determinado

pelo agente decisório. Como os retornos futuros são desconhecidos, essa incerteza motiva o desenvolvimento de um modelo de decisão com base no comportamento histórico. Os Estados da Natureza dos ativos são divididos em categorias conforme utilizado por Ferreira *et al* (2009), em que a classificação é definida como um conjunto de n estados, $\Theta_i = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n\}$.

O critério utilizado para construção dos estados da natureza nesse modelo foi a transformação das séries dos retornos em uma série binária de combinações, em que os três primeiros ativos do conjunto de dados assumem um vetor de valores em 1 se positivo e 0 se negativo. Com uma série de retornos de três ativos, obtêm-se nove possíveis combinações binárias para os estados, também denominados de cenários: $\theta_1 = \{0,0,0\}$, $\theta_2 = \{0,0,1\}$, $\theta_3 = \{0,1,0\}$, $\theta_4 = \{0,1,1\}$, $\theta_5 = \{1,0,0\}$, $\theta_6 = \{1,0,0\}$, $\theta_7 = \{1,0,1\}$, $\theta_8 = \{1,1,0\}$ e $\theta_9 = \{1,1,1\}$.

A distribuição da classificação passada, à *priori,* dos estados da natureza é estimada diretamente a partir da frequência histórica ou por meio do conhecimento de analistas do mercado, conforme protocolo de elicitação como em Lins e Souza (2001). A frequência histórica relativa dos estados da natureza é definida por $\pi(\theta)$. Uma possibilidade desse método de decisão é estimar a probabilidade à *priori* desses estados da natureza no futuro a partir de seu histórico.

4.1.3 Estimador (Ɛ)

Nesta modelagem, as alternativas de escolhas são baseadas em uma variável denominada de Estimador que representa as alternativas de escolha $\mathcal{A}$ do processo de decisão. A simbologia $\mathcal{A}$ é substituída pela letra grega épsilon E, e a por ε. O estimador consiste em um elemento de escolha do analista que contribui para a predição dos estados da natureza e consequentemente dos parâmetros de risco e retorno dos portfólios.

O estimador bayesiano nesse modelo pode ser utilizado como um índice de mercado ou indexador de uma carteira teórica como utilizado em Polson e Tew (2000), ou pode também utilizar séries econômicas para predizer os retornos conforme Tu e Zhou (2010). O estimador serve como meio para

estimar o comportamento das séries no futuro, transformando uma distribuição a priori em uma distribuição preditiva, conforme desenvolvimento no Tópico 2.6.1.

O modelo constrói os cenários do estimador da mesma forma que os estados da natureza. O estimador também é transformado em formato binário, sendo 1 para variação positiva e 0 para variação negativa. A classificação dos estimadores pode conter até k cenários observados $\mathrm{E}_i = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_k\}$.

A distribuição da classificação passada, à *priori,* do comportamento dos estimadores é estabelecida diretamente a partir da frequência relativa histórica das alternativas selecionadas no passado ou por meio do conhecimento de analistas do mercado, conforme protocolo de elicitação como em Lins e Souza (2001). A frequência relativa dos estimadores é definida por $\pi(\varepsilon)$.

4.1.4 Função Verossimilhança p(ε,θ)

A função verossimilhança $p(\varepsilon, \theta)$ é a probabilidade conjunta entre os estados da natureza Θ e o estimador selecionado E. Esse é um mecanismo que tem como objetivo combinar a frequência histórica da ocorrência de um estado da natureza e ocorrência de um cenário do estimador de forma conjunta. Essa função é o canal de comunicação entre os estimadores ε e os estados da natureza θ. Conforme descrito por Ferreira *et al* (2009), o resultado dessa função é uma matriz de probabilidades de dimensão $k * n$, em que k é o número de alternativas dos estimadores e n é o número de cenários dos estados da natureza.

4.1.5 Distribuição Posterior p(θ|ε)

A distribuição esperada, ou à *posteriori* é consequência da aplicação do teorema de Bayes, conforme Berger (1985) e Scherer (2005). O propósito dessa função é estimar a probabilidade esperada $p(\theta|\varepsilon)$ dos estados da natureza θ em função de um determinado cenário selecionado do estimador ε, conforme demonstrado na Equação 4.1. A probabilidade esperada dos estados da natureza é componente para elaboração do risco e dos retornos, como

elemento para ponderação da utilidade dos ativos, conforme Equação 2.23. As probabilidades $p(\theta|\varepsilon)$ são equivalentes à probabilidade definida por α demonstrada na Figura 2.6. O modelo retoma os conceitos construídos por Friedman e Savage (1948), usando o teorema de Bayes como forma de elaborar a probabilidade dos cenários $\alpha \sim p(\theta|\varepsilon)$.

$$p(\theta|\varepsilon) = \frac{p(\varepsilon,\theta)p(\theta)}{p(\varepsilon)} \quad \text{[Eq. 4.1]}$$

4.1.6 Função Utilidade U(r)

A função utilidade no modelo é utilizada para mensurar o valor atribuído por um agente decisório à série de retornos acumulados de determinado ativo e em determinada janela de tempo. Essa função no modelo pode assumir diferentes formatos, conforme Quadro 2.3 e Figura 2.7, em relação aos diferentes perfis que um investidor possui, conforme descrito no Quadro 2.4 e nas Figuras 2.8 e 2.9.

As funções utilidade no MCB mensuram mais que apenas o valor dos retornos, estabelece um coeficiente para o comportamento do investidor perante a escolha de cada ativo individualmente. Como exemplo, a função utilidade na Equação 4.2. A $u(r_{\theta i})$ utilidade do retorno do ativo i dado um determinado estado da natureza θ é expresso por meio da relação entre o retorno máximo e o mínimo do ativo em torno de sua série histórica.

$$u(r_{\theta i}) = \frac{(r_{\theta i} - r_{MIN})}{(r_{MAX} - r_{MIN})} \quad \text{[Eq. 4.2]}$$

4.1.7 Função Consequência p(r|θ)

A função consequência é um mecanismo que visa estimar a probabilidade de um determinado retorno r_i em função de uma decisão e um estado da natureza esperado. A probabilidade é estimada por meio dos retornos históricos, que possui uma média $\mu_{\theta i}$ e um desvio padrão $\sigma_{\theta i}$ no estado da natureza θ especificado, presume-se que a série de retornos

assume uma densidade normal, conforme Equação 4.3. A função densidade acumulada possui flexibilidade e pode ser adequada a outros tipos de distribuição das séries de retornos dos ativos.

$$p(r_i|\theta) = Normal(r_i, \mu_{\theta i}, \sigma_{\theta i}) \qquad \text{[Eq. 4.3]}$$

4.1.8 Função Perda L(r|θ)

A função perda ou perda esperada, segundo Berger (1985), consiste em na mensuração da perda em diversas situações aleatórias. Berger (1985) também demonstra que a minimização da perda esperada é equivalente a maximização da utilidade da riqueza. No modelo, a perda esperada é avaliada por cada ativo individualmente, em função de um cenário esperado do estimador e um determinado estado da natureza.

Por meio da Equação 4.4 foi possível estimar a perda esperada com uma integração entre a função utilidade do investidor e a função densidade acumulada, aproximadamente normal, representada pela função consequência apresentada. A função de integração que foi adequada ao modelo foi vetorizada quadrática, conforme análise pelo Matlab (2004). O coeficiente encontrado é equivalente à utilidade do retorno. Como segundo Boyle e Tian (2007), obter maiores retornos implica em assumir maior risco, os coeficientes estimados são utilizados como coeficientes a serem minimizados. A função perda é equivalente redução da utilidade esperada de um ativo em relação ao comportamento da distribuição dos retornos.

$$L_i(r_i, \theta) = \int_{r_{min}}^{r_{max}} U(r_{\theta i}) \cdot p(r_i|\theta) dr_i \qquad \text{[Eq. 4.4]}$$

4.1.9 Risco Bayesiano – Ω [i,j,ε]

Baseando-se no conceito de que risco é o coeficiente esperado de perda, o risco de um ativo em função de um determinado cenário estimado ε é obtido por meio da Equação 4.5. A proposta é obter uma matriz para

substituição da covariância tradicional representada por meio da perda esperada e da probabilidade do cenário do estimador $\Omega_{ij\varepsilon}$.

Esse tipo de regra de decisão incorpora a probabilidade futura da natureza dos ativos estimada $p(\theta|\varepsilon)$ e o resultado da utilidade representada pela função perda, nesse caso resultado do somatório das médias entre as perdas dos ativos, considerando os estados da natureza. Em outras palavras, estima-se a intensidade de perda dos ativos no futuro por meio de um estimador ε.

A matriz resultante é uma matriz positiva semi-definida. Diferente da covariância tradicional, a nova matriz não tem valores na ordem de 10^{-4}, em outras palavras, reduz o esforço computacional.

$$\Omega_{ij\varepsilon} = \sum_{\theta} \left[\frac{L(r_i, \theta) + L\left(r_j, \theta\right)}{2} \right] \cdot p(\theta|\varepsilon) \qquad \text{[Eq. 4.5]}$$

4.1.10 Retorno Bayesiano – $E(R)_{i\varepsilon}$

O MCB também estima os retornos esperados. A proposta é baseada e fundamentada na ponderação de cenários, conforme Equação 2.5. O retorno bayesiano esperado denominado por $E(R)_{i\varepsilon}$ é baseado na ponderação das médias dos retornos dos ativos em cada estado da natureza $\mu_{\theta i}$ pelas respectivas probabilidades desses estados da natureza em função do cenário do estimador selecionado anteriormente na elaboração do risco $p(\theta|\varepsilon)_i$ Conforme Equação 4.6.

$$E(R)_{i\varepsilon} = \sum_{\theta} \mu_{\theta i} \cdot p(\theta|\varepsilon)_i \qquad \text{[Eq. 4.6]}$$

4.1.11 Framework do modelo

A estrutura do MCB foi elaborada a partir da estrutura do modelo M-V apresentado nas Equações 2.18, 2.19, 2.20 e 2.21. Para descrever o framework resultante, as equações são substituídas pela estrutura proposta.

Em que a letra σ, na Equação 4.7, é substituída por Ω a nova matriz na função objetivo.

Min:

$$\Omega_p = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \Omega_{ij\varepsilon} \qquad \text{[Eq. 4.7]}$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^{n} E(R)_{i\varepsilon} x_i \geq R_e \qquad \text{[Eq. 4.8]}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \qquad \text{[Eq. 4.9]}$$

$$x_i \geq 0, \qquad x\ e\ i \in N \qquad \text{[Eq. 4.10]}$$

Dentre as restrições, a Equação 4.8 demonstra o retorno mínimo. A esperança do retorno do portfólio deve ser maior que o retorno mínimo exigido pelo investidor. No primeiro termo, o somatório de $\sum_{i=1}^{n} E(R)_{i\varepsilon} x_i$ representa o retorno esperado no ato da venda do portfólio no final do período, em que o peso x_i é multiplicado por seus respectivos retornos $E(R)_{i\varepsilon}$. O retorno esperado é elaborado pela ponderação de cenários do MCB, conforme Equação 4.6. Na Equação 4.8, o fator R_e trata do retorno mínimo exigido pelo investidor.

No último termo, a Equação 4.9 trata da restrição orçamentária, o valor do somatório deve ser igual ao valor disponível pelo investidor. A quarta restrição, na Equação 4.10, é a restrição de não negatividade, sem vendas a descoberto.

CAPÍTULO 5 MÉTODO DE PESQUISA

5.1 Definição do Método

O método de pesquisa responde como o objetivo foi alcançado para a resolução do problema, para isso o estudo foi caracterizado quanto ao tipo e ao procedimento. Por se tratar da formulação de um modelo de seleção de carteiras de investimentos, o tipo utilizado foi o de pesquisa empírica no formato *ex post facto*, que segundo Latané e Tuttle (1967) e Latané e Young (1969) consiste em uma simulação do modelo no passado (JONKER; PENNINK, 2010).

A pesquisa foi quantitativa por se tratar da observação de resultados numéricos do estudo conforme descrito em Mahoney e Goertz (2006), o que influenciou na forma de avaliação. A avaliação desses resultados foi realizada por meio da análise da sensibilidade das variáveis do modelo, com gráficos, conforme sistematizado por Jonker e Pennink (2010).

Os modelos que são utilizados neste trabalho pertencem à classe de problemas Quadráticos, por isso, foram empregados métodos de otimização não lineares para resolução. O problema também é classificado como *NP-Completo*, o que acarreta na utilização de grande esforço computacional. A programação dos modelos foi realizada com o software Matlab®.

Para a validação do MCB – Modelo de Covariância Bayesiana foi utilizada a análise de sensibilidade. O princípio do método de avaliação foi checar o comportamento dos parâmetros e depois os resultados, do retorno e do risco. A análise foi realizada por meio das otimizações do MCB, o tradicional modelo M-V e como *benchmark* o índice do mercado brasileiro, o Ibovespa. Por

se tratar do conjunto de ativos do Ibovespa, foram selecionados como *benchmark* complementar 94 Fundos de Investimentos baseados no índice.

A análise utiliza as ações que fazem parte da carteira teórica do Índice Bovespa. O Ibovespa é o indicador macro do mercado brasileiro e serve como referência principal para diversas análises do comportamento dos ativos do mercado de capitais. As ações que compõem a carteira teórica respondem por mais de 80% do número de negócios e do volume financeiro verificados no mercado à vista, em outras palavras, das ações com maior liquidez (BOVESPA, 2011).

5.2 Coleta de Dados

Os dados coletados foram obtidos de origem secundária por meio do software *Economática*®. A seleção da amostra para subsidiar a elaboração do modelo compreendeu o histórico de fechamentos diários ajustados por proventos, bonificações, *splits* e *inplits*. Os ativos selecionados faziam parte das carteiras teóricas dos índices Ibovespa válidos para os quadrimestres dos anos de 2002 a 2009.

Como *benchmark* complementar, foram utilizados 94 fundos de investimentos indexados ao Índice Bovespa, considerando que esses fundos não apresentam vendas a descoberto. Os fundos de investimentos utilizados como referência foram coletados da base *Quantum Axis*® que forneceu o valor das cotas diárias dos fundos de investimentos Ibovespa Ativo e Ibovespa Indexado.

Os processos de ajustes das séries garantiram a qualidade das informações na base de dados e a confiabilidade dos resultados. Os eventos societários como dividendos, juros, desdobramentos, agrupamentos, bonificações e outros alteram os valores dos ativos de um dia para outro. Quando isso ocorre deve-se ajustar os valores dos históricos para que esses acompanhem as mudanças (ELTON; GRUBER, 2004).

O uso de dados diários justifica-se pelos resultados encontrados por Clarke *et al* (2006), como forma de melhoria dos resultados dos portfólios. Para eliminar viés relacionado aos dados, o estudo considerou apenas ativos que não sofreram alterações ou somente mudaram o código do ativo. Em caso de

dias sem negociação, a cotação do dia anterior foi repetida, representando que o ativo não obteve retorno naquele dia.

5.3 Análise do Desempenho *Ex Post Facto*

Para analisar o desempenho do modelo foi utilizado o método *ex post facto* para simulação do resultado do modelo no passado. Como um dos referenciais utilizados para comparação é o índice Bovespa, a formação das carteiras foi realizada com base nos respectivos quadrimestres de realocação da carteira do índice. O cálculo do desempenho em relação ao retorno e do risco pressupõe a possibilidade de negociar os ativos pelo preço de fechamento e que o investidor mantém os ativos e proporções definidas pelo modelo durante os quatro meses seguintes.

O cálculo do retorno efetivo diário da carteira foi realizado no momento posterior a sua formação. O retorno da carteira RC_{D+t} no momento t, foi calculado pela ponderação dos pesos x_i e os retornos reais R_{iD+t} dos ativos no momento t, durante todo o quadrimestre posterior ao da formação da carteira, conforme Equação 6.1. Os retornos acumulados foram calculados por meio do produto entre os retornos do período k na Equação 6.2. O risco da carteira nesse período foi calculado a partir do desvio padrão, conforme Equação 6.3.

$$RC_{D+t} = \sum_{i=1}^{n} R_{iD+t} x_i \qquad \text{[Eq. 6.1]}$$

$$RC[k] = \prod_{j=1}^{k} (1 + RC_{D+j}) \qquad \text{[Eq. 6.2]}$$

$$Std(RC) = \sigma_p = \left[\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} \left(RC_{D+j} - \overline{RC} \right)^2 \right]^{1/2} \qquad \text{[Eq. 6.3]}$$

Além dos indicadores principais apresentados, outros parâmetros estatísticos foram calculados como assimetria, curtose, mediana, retorno diário mínimo e máximo, média de ativos na carteira e o *Value at Risk* histórico no período das carteiras a um nível de 99% de significância. Esse indicador

consiste em determinar um determinado quantil, no caso 1% de significância da distribuição empírica dos retornos para estimar a maior perda possível com 99% de segurança. A formulação matemática é descrita na Equação 6.4 (ATKINSON; PAPAKOKKINOU, 2005).

$$VaR_{\alpha} = \inf\{l \in \Re : p(L > l) \leq 1 - \alpha\} \quad \text{[Eq. 6.4]}$$

Apesar do cálculo dos índices como retorno acumulado, desvio padrão, e *Value at Risk* obterem conclusões significativas, tradicionalmente há ainda o uso do índice de Sharpe (1966). O objetivo do índice é avaliar a carteira por meio de uma proporção do retorno em relação ao risco. O índice é descrito pela Equação 6.5. O Índice de Sharpe é utilizado para comparação do retorno do portfólio R_p contra o retorno do mercado R_m, considerando ainda o desvio padrão dos retornos do mercado σ_p.

$$Índice\ de\ Sharpe = \frac{R_p - R_m}{\sigma_p} \quad \text{[Eq. 6.5]}$$

Como em alguns casos da análise o indicador de mercado é considerado como uma carteira para comparação, o índice foi adaptado para a análise individual das carteiras e dos *benchmarks* selecionados. Na Equação 6.6 representa o índice de Mao (1970) utilizado como referencial.

$$Índice\ de\ Mao = \frac{R_p}{\sigma_p} \quad \text{[Eq. 6.6]}$$

Nos casos em que os índices descritos não apresentaram diferença perceptível foi necessário o uso de testes estatísticos para comparação das séries. Como não foi possível comprovar que os dados apresentam distribuição normal, nesses casos, segundo Morgan (2004), indica-se o uso de testes não paramétricos, pois os testes tradicionais perdem sua eficácia, como o t-*student*. Diante da do comportamento dos retornos dos ativos de caudas mais pesadas em sua distribuição, Ribeiro e Leal (2002) orientam o uso do teste de Wilcoxon para análise da significância da diferença entre as séries.

CAPÍTULO 6 ANÁLISE DOS RESULTADOS

O MCB foi sistematizado e fundamentado por meio da Teoria da Decisão por Berger (1985) e da Teoria da Utilidade por Friedman e Savage (1948). A modelagem foi sistematizada no Capítulo 4, tendo como referência pesquisas como Polson e Tew (2000) e Ferreira *et al* (2009). O primeiro fator a ser observado é o estimador do modelo, que é o mecanismo de predição dos parâmetros.

O primeiro elemento construído após a elaboração dos retornos contínuos dos ativos foram os estados da natureza que foram classificados em nove cenários $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_9\}$. Os estados da natureza dos retornos foram representados por meio de combinações binárias dos ativos, sendo 1 para retorno positivo e 0 para negativo, porém para simplificação do modelo, os estados foram limitados a nove combinações binárias de três ativos.

Os estados foram representados da seguinte forma: $\theta_1 = \{0,0,0\}$, $\theta_2 = \{0,0,1\}$, $\theta_3 = \{0,1,0\}$, $\theta_4 = \{0,1,1\}$, $\theta_5 = \{1,0,0\}$, $\theta_6 = \{1,0,0\}$, $\theta_7 = \{1,0,1\}$, $\theta_8 = \{1,1,0\}$ e $\theta_9 = \{1,1,1\}$. Após a classificação, a frequência histórica desses cenários foi quantificada numericamente e consequentemente o percentual de probabilidade de cada estado da natureza, e que o somatório das probabilidades é $\sum_{i=1}^{n} p(\theta_i) = 1$, conforme usado por Ferreira *et al* (2009). A frequência histórica dos estados da natureza é representada por $\pi(\theta)$.

Como os dados utilizados para teste do modelo foram os ativos pertencentes ao índice Bovespa, o estimador E utilizado foi o próprio indexador. Apesar de Tu e Zhou (2010) terem obtido bons resultados no uso de estimadores usando variáveis econômicas, neste trabalho foi preferível o índice de mercado para simplificar o procedimento de construção, com base no

desempenho obtido por Polson e Tew (2000), que usou o índice S&P500, como estimador.

O estimador bayesiano, da mesma forma que os estados da natureza, também foi transformado em um vetor binário, como utilizado em Ferreira *et al* (2009). Em outras palavras, os retornos do índice Bovespa foram transformados também em um vetor, em que 1 se positivo e 0 se negativo. As alternativas foram divididas em duas, se o mercado obteve variação positiva ε_1 ou negativa ε_2, e que pertencem ao conjunto $\mathrm{E} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, em que o somatório das probabilidades de cada cenário é dado por $\sum_{i=1}^{n} p(\varepsilon_i) = 1$. A frequência histórica das alternativas do estimador é representada por $\pi(\varepsilon)$.

Na execução do modelo, o analista em vez de tentar estimar o retorno e a variância de vários ativos, seleciona apenas a alternativa em relação a sua expectativa de mercado, ou seja, analisa a tendência de mercado. No caso do uso do Ibovespa, se o mercado tende a variação positiva ε_1 ou negativa ε_2.

Com base no estimador, e juntamente com os procedimentos descritos no Capítulo 4, desenvolve-se uma matriz positiva semi definida para aplicação do modelo. A matriz é construída não pela variabilidade do retorno do ativo, mas pela probabilidade de uma perda esperada do ativo individualmente e em conjunto. É importante salientar que a Função Utilidade aplicada no modelo foi do tipo linear, pois conforme Berger (1985) essa função contribui para a relação $U(\sum_i r_i) = \sum_i U(r_i)$ de uma variável como os retornos r_i, o que contribui para a eliminação de viés na Função Perda $L_i(r_i, \theta)$. Essa função é utilizada, conforme desenvolvimento do modelo na Equação 4.2.

A primeira análise, na Figura 6.1, demonstra dois gráficos de superfície dos coeficientes de ambas as matrizes, que representam a covariância e a nova matriz do modelo usando quarenta ativos. A primeira é a covariância tradicional que representa valores disformes, com um ponto atípico central, no qual demonstra os pontos extremos do coeficiente de correlação, conforme discutido em Michaud (1989) e Black e Litterman (1992) essa falha ocasiona um peso mais intenso em um único ativo.

O segundo gráfico, a nova matriz elaborada apresenta mais pontos atípicos da matriz, o que demonstra, a princípio, um padrão diferenciado, porém não necessariamente melhor. A vantagem é a utilização de pesos apenas positivos em uma amplitude entre 0.9 e 1.2, o que demonstra a

eliminação de valores da ordem de $\cdot 10^{-4}$, o que matematicamente reduz o esforço computacional. Como o gráfico não demonstra o resultado do uso da matriz foram elaboradas hipóteses de análise de desempenho do modelo.

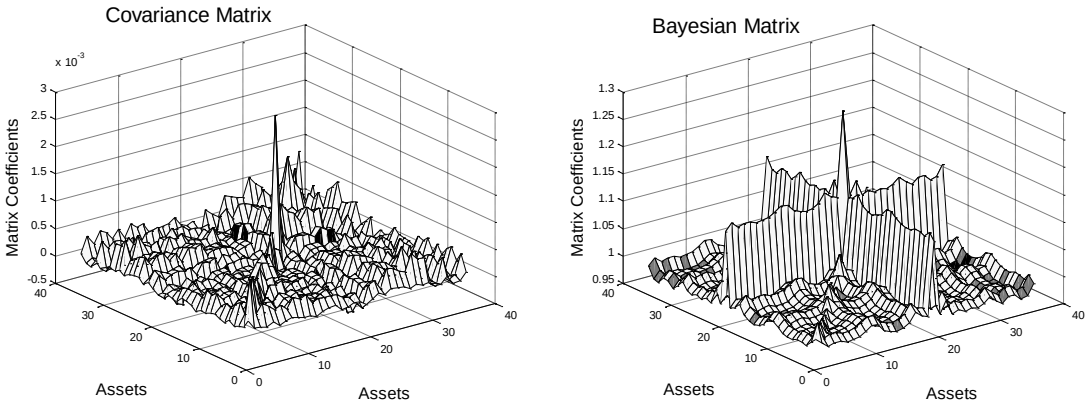


Figura 6.1 – Superfície das Matrizes da Covariância Tradicional e Bayesiana
Fonte: Elaboração Própria.

Para analisar a resolução do problema com a nova matriz, por se tratar de uma nova proposta de modelo bayesiano, a hipótese $H1$ consistiu em verificar o efeito do estimador utilizado. Com o uso da nova matriz de covariância retratada, foram diagramadas algumas fronteiras eficientes com o uso dos dados coletados. Na delimitação da janela de tempo, foram utilizados períodos históricos de 120 dias, equivalente a análise de um quadrimestre com retornos diários. O critério utilizado para construção foi o de mínima variância.

A Figura 6.2 apresentou as respectivas fronteiras eficientes elaboradas pelo MCB, os gráficos demonstram respectivamente o comportamento das fronteiras provenientes da expectativa do estimador e sua alternativa de escolha. Percebe-se que a escolha do cenário esperado modifica o comportamento da fronteira eficiente. Para a construção das fronteiras foi utilizada a técnica descrita no Tópico 2.6.3.

A linha cheia representa a fronteira eficiente elaborada com uma expectativa de mercado em alta, ou seja, pela escolha da alternativa ε_1 e a linha tracejada representa uma fronteira para uma expectativa de mercado em baixa, ou seja, pela seleção da alternativa ε_2 pelo agente decisório. Pode-se perceber que a escolha do cenário conduz realmente a diferentes portfólios no novo modelo. Apesar da fronteira eficiente não demonstrar efetivamente o

resultado dos portfólios na escolha do cenário, foi realizada uma simulação para analisar o resultado efetivo. A Figura 6.3 apresenta um *boxplot* com os retornos de mil portfólios simulados.

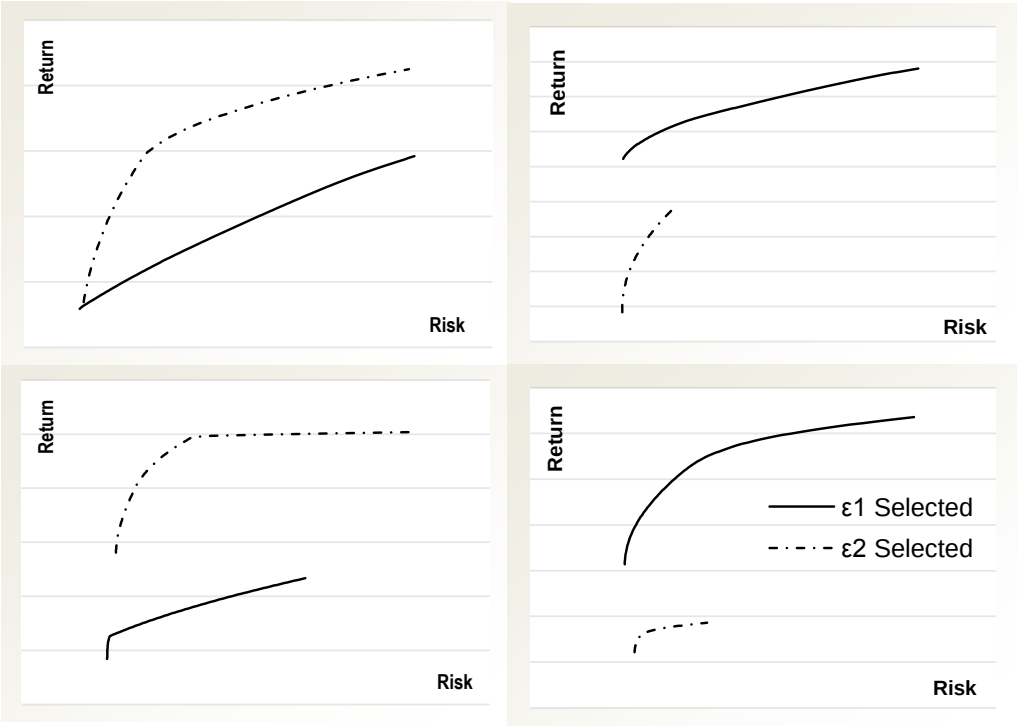


Figura 6.2 – Fronteiras da Escolha por Cenário do Estimador Bayesiano
Fonte: Elaboração Própria.

A análise na Figura 6.3 foi classificada em duas opções. Os resultados dos retornos com a escolha de um cenário com expectativa de mercado alta, ε_1 selecionado e com expectativa de mercado em baixa, ε_2 selecionado. Além do *boxplot*, o teste de comparação entre as séries não apresentou rejeição para a hipótese nula de que não há diferença significativa entre as séries, com valor p 0,9647. Esse resultado demonstra que a escolha do cenário do estimador para expectativas de mercado em baixa não produz necessariamente retornos negativos.

Com os resultados apresentados, foi perceptível que o estimador apresenta um impacto na escolha do portfólio, direcionando o investidor a diferentes fronteiras eficientes com os mesmos dados. Apesar dessa consideração, a escolha do cenário esperado não apresenta retornos significativamente diferentes, o que conclui com essa primeira hipótese que o estimador representa, em primeira instância, uma boa escolha para predizer o

comportamento dos retornos do conjunto de dados selecionado, corroborando com os resultados de Polson e Tew (2000).

Vale salientar que Polson e Tew (2000), em seu modelo, agregaram informações a priori na matriz tradicional do modelo M-V, diferentemente neste estudo, que foi desenvolvida uma nova matriz de covariância com essas informações. A partir desse ponto, é necessário então avaliar o desempenho do modelo em termos de retorno e risco, tendo como comparação o modelo M-V e o índice de mercado.

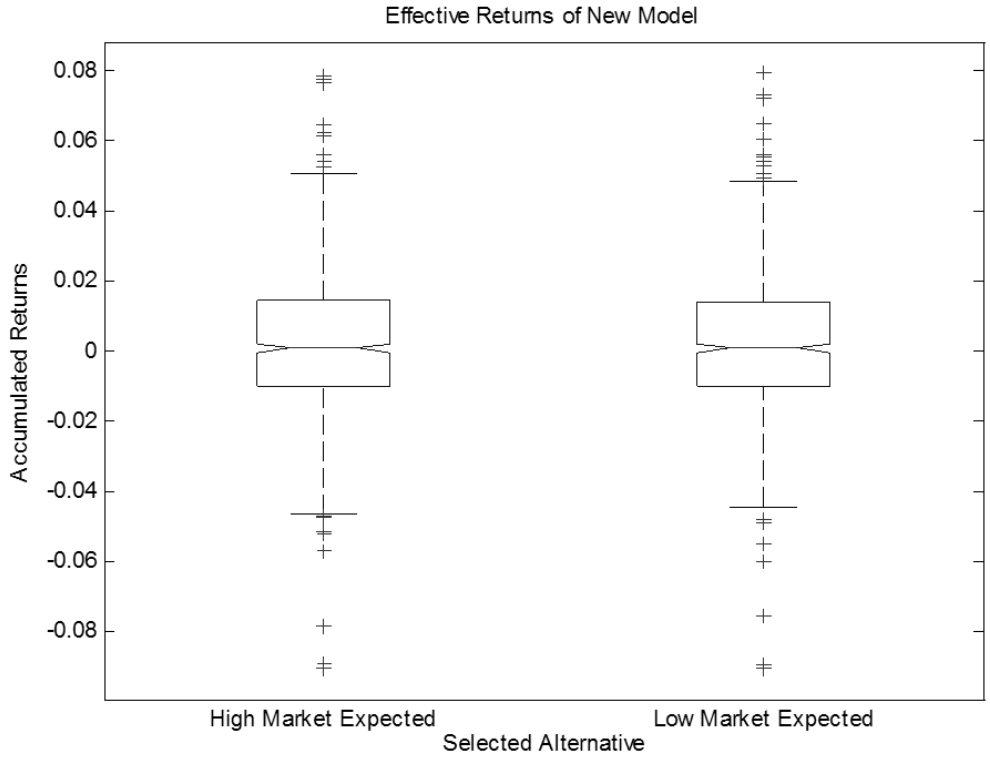


Figura 6.3 – Boxplot dos Retornos dos Portfolios por Cenário do Estimador
Fonte: Elaboração Própria.

Na avaliação do modelo, a hipótese $H2$, esperava-se que o modelo obtivesse retornos mais significativos e menor risco do que o mercado e o modelo clássico M-V. Para análise dessa hipótese, foram utilizados como referência os trabalhos de Polson e Tew (2000) e Thomé Neto (2011). O objetivo é analisar o desempenho da carteira juntamente com o indicador de mercado e o modelo clássico M-V, tentando superá-los.

O método de elaboração do Ibovespa é construído de acordo com o nível de liquidez dos ativos. Em outras palavras, não é uma carteira otimizada,

logo se pressupõe que o índice possa ser superado. Com essa premissa, acredita-se que o Ibovespa não se encontra na fronteira eficiente do mercado, sendo assim possível superá-lo. Como exemplo, Thomé Neto (2011) apresenta uma estratégia de mínima variância do M-V que supera o índice.

Para avaliação foram utilizados períodos históricos de quatro meses, equivalentes à análise de um quadrimestre com retornos diários, correspondendo ao utilizado na configuração do índice Bovespa. O período dos dados utilizados foi de 2002 a 2009, porém os resultados obtidos para realização da comparação foi de 01 de maio de 2002 a 31 de dezembro de 2009. Para que o retorno pudesse ser comparado de forma fiel com o indicador do mercado, não foram considerados custos de transação, já que o indicador de mercado demonstra uma pontuação bruta.

Na análise *ex post facto* desse item, foram elaboradas simultaneamente carteiras de investimentos com vigência no mesmo período do Ibovespa, de forma quadrimestral, usando tanto o MCB, como o modelo clássico M-V. A Tabela 6.1 apresenta a estatística descritiva do desempenho das carteiras elaboradas por cada modelo, em comparação com o índice de mercado. O retorno exigido para montagem das carteiras foi 0,00%, ou seja, as carteiras de ambos os modelos foram executadas usando a mínima variância.

Coeficientes	MCB	M-V	Ibovespa
Retorno Acumulado (%)	510,10%	239,66%	254,18%
Retorno Diário Médio (%)	0,10%	0,07%	0,08%
Desvio Padrão (%)	1,68%	1,45%	1,98%
VaR 99% sig.	2,66%	2,31%	3,17%
Ret Med / Desv Padrão	0,062105	0,049445	0,041865
Assimetria	0,090775	- 0,310765	- 0,100387
Curtose	2,868287	6,289255	4,666460
Mediana	0,000137	0,000573	0,000782
Retorno Mínimo (%)	-7,73%	-8,36%	-12,10%
Retorno Máximo (%)	9,97%	11,20%	13,68%
Nº Médio de Ativos na Car.	5	14	55

Tabela 6.1 – Estatística dos Retornos das Carteiras de maio 2002 a dezembro 2009
Fonte: Elaboração Própria.

Como demonstrado na Tabela 6.1, o retorno acumulado de 510,10% e o retorno diário médio 0,10% do MCB foi bastante superior ao Ibovespa e ao modelo M-V. Na análise do risco representada pelo desvio padrão e pelo *VaR*,

o modelo clássico M-V continua assumindo a menor volatilidade, em seguida o MCB obteve uma probabilidade de perda aproximada. Considerando o retorno e o risco em conjunto, conforme índice de Mao (1970), o MCB apresentou o melhor indicador na relação de retorno / risco. Esses resultados apresentados demonstram que o MCB consegue superar o índice de mercado, tanto em retorno como em risco, porém o clássico M-V continua alcançando menor risco.

Apesar do MCB não ter apresentado menor risco, a amplitude da série obteve o menor retorno negativo, como também o menor retorno positivo, o que representa junto com as outras observações uma distribuição mais alongada que as outras séries, em formato *leptocúrtica*.

Quanto aos resultados apresentados pelos coeficientes de assimetria, curtose, média e mediana, assim como no teste *Kolmogorov-Smirnov* de normalidade observou-se que os resultados não possuem distribuição normal, o que confirma a proposta do uso de testes não paramétricos para análise comparativa das séries.

O último indicador analisado foi a quantidade média de ativos que fizeram parte das carteiras, o MCB apresentou menor diversificação nas carteiras em termos quantitativos do que o M-V e o indicador de mercado. O modelo M-V foi coerente com os resultados encontrados em Oda *et al* (1998) de quatorze ativos e Ceretta e Costa Junior (2000) de doze no mercado brasileiro. O MCB apresentou carteiras com uma quantidade menor de ativos e com maior objetividade na aplicação dos resultados, o que contribui para redução dos alguns tipos de custos de transação e manutenção (FABOZZI, *et al,* 2006).

A Figura 6.4 apresenta o retorno diário acumulado do Ibovespa, do modelo de covariância bayesiana e do modelo de média variância. O período é Maio de 2002 a 2009. Percebe-se que o comportamento das séries de retornos é bastante semelhante, porém com alguns momentos diferenciados.

No caso do modelo M-V, o período de alta dos retornos em relação ao Ibovespa compreende o período entre 2006 e 2008 e, no caso do MCB o período de alta em relação ao Ibovespa corresponde entre 2008 e 2009. Apesar dos modelos visarem a redução do risco, ambos, juntamente com o mercado tiveram impacto proveniente da crise do *subprime* de início em 2008.

Outra importante constatação da Figura 6.4 é que o MCB além de absorver menos impacto em relação à crise, aconteceu de forma mais tardia. O modelo M-V e o índice de mercado tiveram queda em seus retornos no início de 2008 e o MCB teve impacto apenas a partir do segundo semestre de 2008. Pode-se concluir que, nesse caso, o modelo apresentou menor sensibilidade às turbulências econômicas.

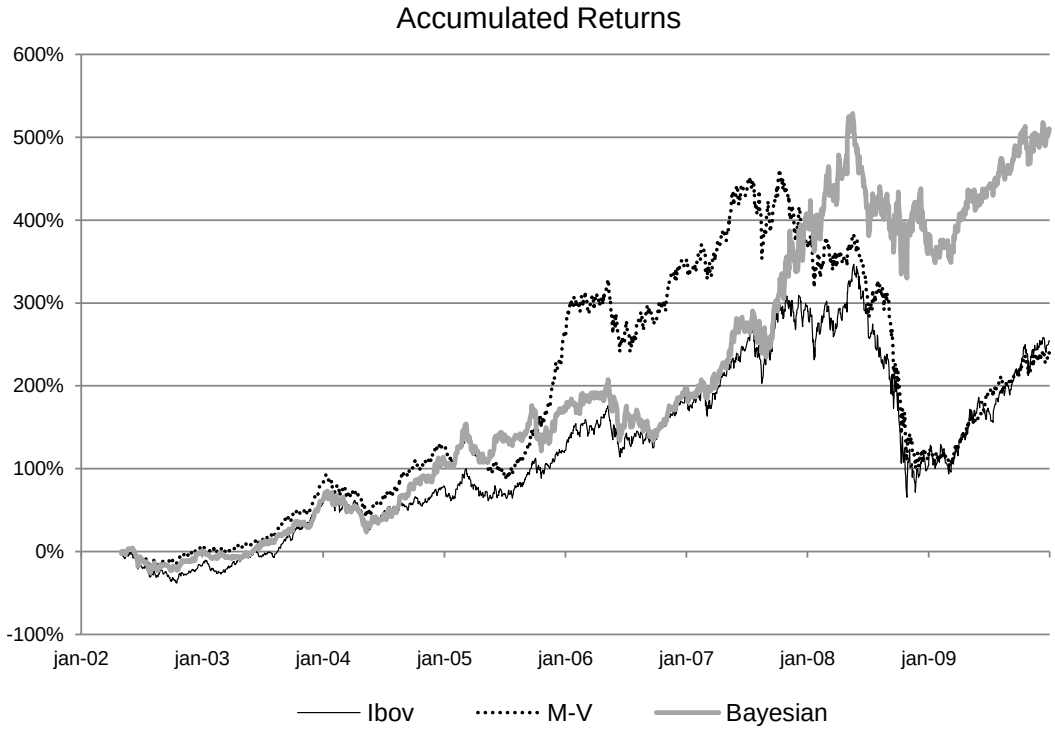


Figura 6.4 – Retornos Acumulados das Carteiras
Fonte: Elaboração Própria.

Para analisar o motivo do comportamento mais estável da série de retornos do modelo, foram elaborados dois gráficos, conforme Figuras 6.5 e 6.6, que demonstram os pesos dos portfólios gerados ao longo do período da Figura 6.4. A Figura 6.5 demonstra que os portfólios gerados pelo Modelo Clássico M-V tende a investir repetidas vezes em determinados ativos como AMBEV-PN e ULTRAPAR-PN, esses que tiveram impacto direto pela situação econômica de 2008, em geral apenas 18% dos ativos que compõe o Ibovespa não obtiveram retornos acumulados positivos entre 2008 e 2009.

Em contrapartida, os portfólios gerados pelo MCB, na Figura 6.6 demonstram que não possuem esse viés de ênfase, apesar de como mencionado ter menor quantidade de ativos na composição das carteiras. Os pesos são demonstrados nos Apêndices 03 e 04. A vantagem da redução na

quantidade de ativos é a redução do custo de transação, contribuindo para retornos líquidos maiores.

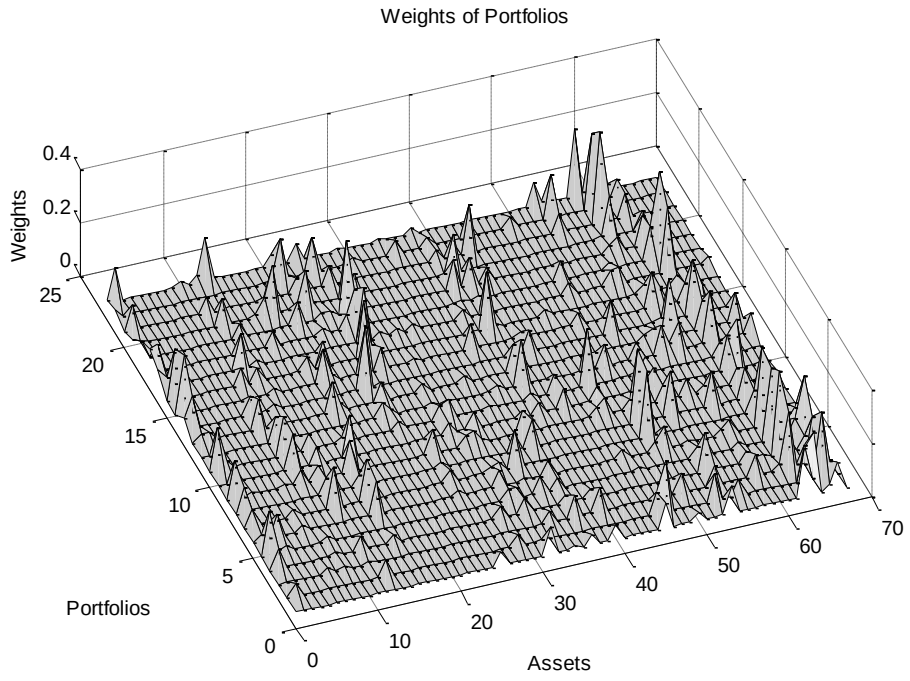


Figura 6.5 – Pesos dos Portfólios do Modelo M-V
Fonte: Elaboração Própria.

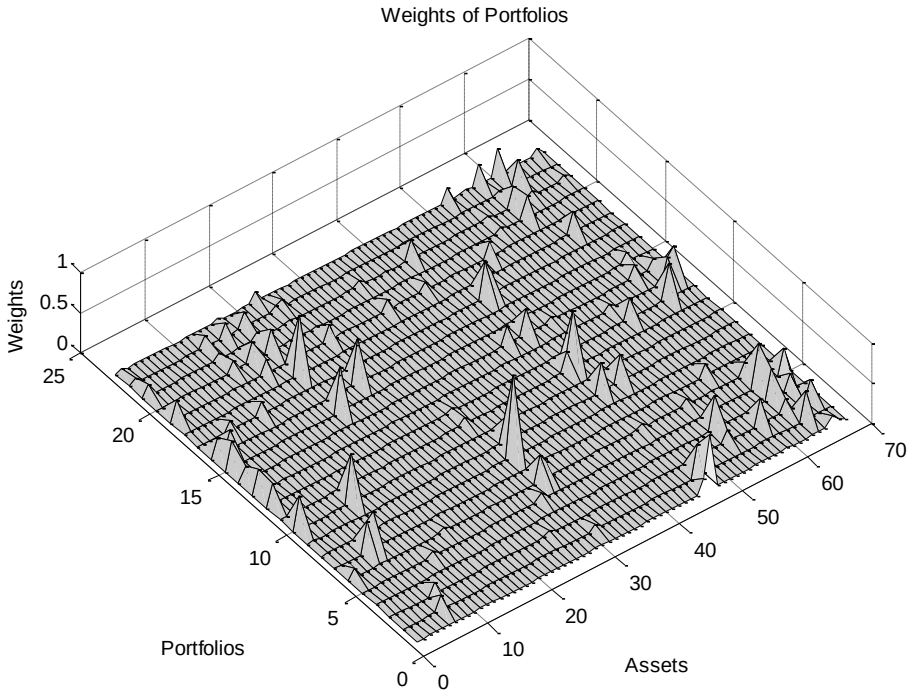


Figura 6.6 – Pesos dos Portfólios do Modelo de Covariância Bayesiana
Fonte: Elaboração Própria.

Apesar do resultado final do modelo durante o período de 2002 a 2009 ter sido superior ao Ibovespa e às carteiras do modelo clássico, realizou-se uma análise mais robusta para comparar os resultados entre os *benchmarks*. Visando descrever o resultado do modelo em relação ao horizonte de tempo, conforme hipótese $H3$, foi construída a Tabela 6.2.

	Horizonte Investimento	Ibov	Dif. Sig.	MCB	Dif. Sig.	M-V
Média do Retorno Acumulado	30 dias	2,12%	*	2,80%	-	2,71%
	60 dias	5,83%	-	5,95%	**	4,38%
	90 dias	9,17%	-	9,44%	***	6,95%
	120 dias	12,41%	**	12,16%	***	9,27%
	150 dias	15,56%	-	15,57%	***	11,17%
	180 dias	18,78%	-	18,68%	***	13,86%
Média do Desvio Padrão	30 dias	1,22%	***	1,80%	***	1,55%
	60 dias	1,82%	***	1,58%	***	1,26%
	90 dias	1,82%	***	1,59%	***	1,28%
	120 dias	1,82%	***	1,60%	***	1,30%
	150 dias	1,82%	***	1,60%	***	1,30%
	180 dias	1,82%	***	1,60%	***	1,32%

\- Não há diferença significativa
* Diferença significativa a 90%
** Diferença significativa a 95%
*** Diferença significativa a 99%

Tabela 6.2 – Retornos Acumulados e Risco em relação ao Horizonte de Investimento
Fonte: Elaboração Própria.

Para a construção da Tabela 6.2, foram otimizados 1960 portfólios de investimento para cada horizonte de tempo, e avaliados por meio do retorno acumulado efetivo no período investido e o desvio padrão dos retornos diários efetivos como forma de representação do risco. A diferença entre as séries dos retornos avaliados foi elaborada por meio do teste de *Wilcoxon*, conforme definição do método.

Na análise da tabela elaborada, percebe-se que o MCB em relação ao modelo M-V apresenta diferenças significativas em relação ao risco e retorno. Em outras palavras, o novo modelo tende a assumir um pouco mais de risco em troca de retornos mais significativos. Em relação ao Ibovespa, observou-se que os retornos médios acumulados das carteiras do MCB não apresentaram diferença significativa, com exceção dos retornos em 30 e 120 dias, o que demonstra que o modelo tende a acompanhar os retornos do índice de mercado. A análise do modelo também demonstra que, apesar de acompanhar

o retorno do indexador, o risco do modelo é significativamente menor que o risco do mercado. Essa conclusão é perceptível no período de 2002 a 2007 na demonstração da Figura 6.4.

A Figura 6.7 foi construída a partir da Tabela 6.2. Foram elaborados os coeficientes médios da relação entre retorno e risco efetivo com o horizonte de tempo investido. O gráfico demonstra que, em prazos mais longos, o modelo proposto MCB, considerando o Mao (1970), tende a ser superior aos *benchmarks*.

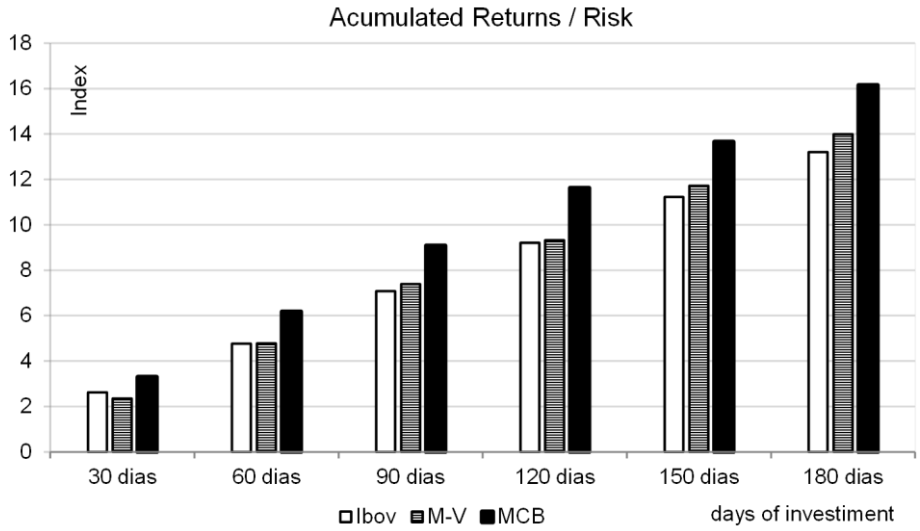


Figura 6.7 – Média do Índice de Mao dos Portfólios pelo Horizonte Investido
Fonte: Elaboração Própria.

O resultado da análise demonstrou que o modelo apresenta resultados significativos na relação do risco e retorno. Com a utilização do estimador bayesiano baseado no índice Ibovespa, o modelo apresentou retornos próximos da série, porém com risco menor, o que demonstrou que o modelo reduziu o risco do índice por meio de sua realocação. Pode-se constatar que o modelo é adequado para construção de carteiras que visem a acompanhar os retornos oferecidos pelo índice, assumindo menor risco que o mercado.

Para complementar a análise do desempenho, na base de dados *Quantum Axis*®, foram coletados 94 fundos de investimentos baseados no Ibovespa. Os filtros selecionados foram fundos de investimentos pertencentes à classificação Ibovespa Ativo e Ibovespa Indexado. O primeiro conjunto de fundos foi escolhido por buscar retornos superiores ao índice de mercado e o segundo busca seguir os retornos do índice, e ambos não admitem vendas a

descoberto. O segundo filtro selecionado foram os índices com cotações no período de 2002 a 2009. Os fundos são classificados pela Associação Nacional de Bancos de Investimentos – Anbid. No Apêndice 01, encontra-se a relação completa dos fundos de investimentos.

	Classificação no Rank de Fundos Investimentos		
	Retornos Acumulados	**Risco Desvio Padrão**	**Ret Acum. / Risco**
MCB	6º	10º	7º
M-V	56º	3º	43º
Ibovespa	51º	95º	58º

Tabela 6.3 – Rank das Carteiras em relação aos Fundos Baseados no Ibovespa
Fonte: Elaboração Própria.

A amostra empregada possui fundos com diversas características, como as cotações dos fundos apresentados são líquidas da taxa de administração, com variação entre 0% a 6% ao ano, optou-se por realizar a avaliação comparativa por meio da aplicação da taxa média de 2% para o modelo proposto MCB, o modelo clássico M-V e o índice Bovespa. A Tabela 6.3 apresenta a classificação no Ranking dos fundos de investimentos selecionados. No Apêndice 02, encontra-se o *Ranking* completo dos 94 fundos, juntamente com os modelos.

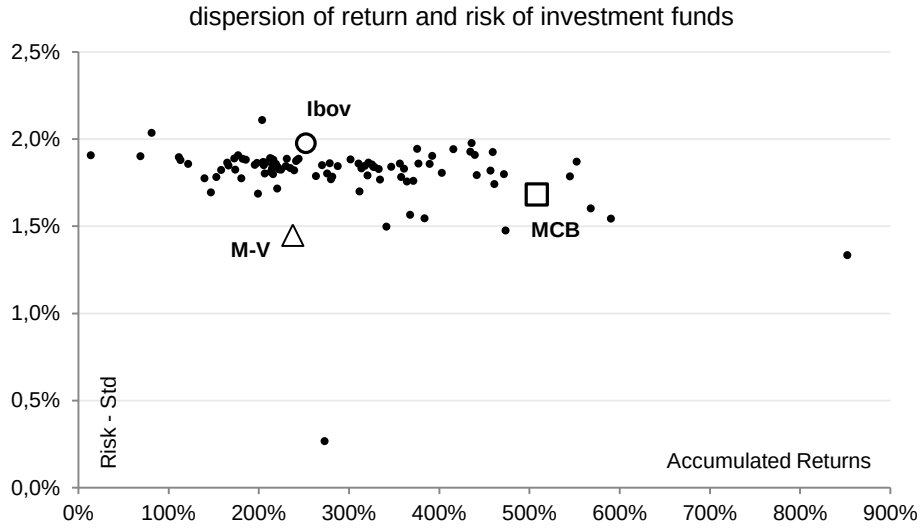


Figura 6.8 – Dispersão entre Retorno e Risco dos Modelos e Fundos de Investimento
Fonte: Elaboração Própria.

Na análise do ranking, percebe-se que o modelo proposto fica em 6º lugar em valor de retorno, perdendo apenas para cinco fundos de investimento do tipo Ibovespa ativo. Apesar do modelo de covariância tradicional ter obtido

3º lugar em volatilidade, foi possível avaliar novamente que, em custo benefício, o MCB está em um ponto próximo à fronteira eficiente, pois é classificado em 7º no critério retorno sobre risco. Em outras palavras, a nova matriz assume um pouco mais de risco diversificável para obter um ganho maior em retornos acumulados, se destacando entre as maiores composições de fundos do mercado. Essa relação também pode ser visualizada na Figura 6.8, em que se observa a dispersão dos fundos na relação entre risco e retorno.

Vale salientar que, apesar do desempenho significativo do novo modelo de covariância bayesiana, é possível que a matriz seja aperfeiçoada. O modelo apresentou maior objetividade e desempenho entre os *benchmarks* utilizados, inclusive em comparação com os melhores fundos de investimento do mercado baseados no Ibovespa. Conforme proposto por Sharpe (1963), os modelos híbridos tendem a obter resultados mais significativos que o modelo clássico M-V. Para isso, novos modelos tendem a ser desenvolvidos, como forma de alcançar maiores retornos e com menor risco.

CAPÍTULO 7 CONCLUSÃO

O presente trabalho teve como objetivo a elaboração de um novo modelo para seleção de portfólios de investimentos. Nesse modelo foi desenvolvida uma nova matriz para substituição da covariância, servindo como novo *input* na estrutura de Markowitz (1959). O modelo da nova matriz foi construído com base na Teoria da Decisão fundamentada em Berger (1985) e pela Teoria da Utilidade fundamentada em Friedman e Savage (1948). A nova proposta foi denominada de MCB – Modelo de Covariância Bayesiana, como forma de associação a substituição da matriz de covariância.

Para avaliação do modelo, algumas hipóteses foram analisadas por meio do método *ex post facto* e por análise de sensibilidade, considerando a formatação dos parâmetros e os resultados em termos de retorno e risco. Os *benchmarks* utilizados como referência foram: (1) o modelo Markowitz (1952a, 1959) clássico de Média Variância; (2) o Índice de mercado da Bovespa; e, (3) como complemento 94 Fundos de Investimento Ibovespa Ativo e Ibovespa Indexado.

Na análise realizada, o modelo de média variância apresentou os problemas destacados por Michaud (1989) e Black e Litterman (1992), como a deficiência na estimação dos parâmetros e a ênfase em ativos com baixa capitalização pela matriz de covariância. O resultado foi que o modelo de Markowitz (1952a) não apresentou superioridade nos retornos em relação ao índice de mercado, o que exige segundo Michaud (1989), o uso de restrições artificiais para minimizar o erro de estimação e obter maiores retornos conforme resultados de Thomé Neto (2011).

Esses problemas de estimação da matriz de covariância tradicional motivou o desenvolvimento de novos modelos, como os denominados híbridos por Sharpe (1963), Cohen e Pogue (1967) e Almeida (2008) que promovem alterações na matriz tradicional. Para tentar corroborar com essas novas soluções, este trabalho desenvolveu uma nova modelagem para a matriz de covariância.

Conforme pesquisa desenvolvida por Mendes e Leal (2005), a construção de bons modelos depende do uso de um bom estimador. Por isso, conforme resultados de Polson e Tew (2000), foi utilizado o Índice Bovespa como estimador do próprio conjunto de ativos. A expectativa foi que a correlação entre as séries contribuísse para uma predição significativa de retornos e da covariância.

A modelagem da matriz foi fundamentada em Ferreira *et al* (2009), que transforma o estimador e as séries de retornos dos ativos em classificações binárias. A partir dessa formatação, com o teorema de bayes foi possível elaborar probabilidades preditivas para estimar o comportamento da utilidade esperada dos ativos, individualmente e em conjunto.

Esses coeficientes foram sistematizados na forma de uma matriz de covariância. A matriz apresentou características diferentes da tradicional em sua estrutura, principalmente na configuração de coeficientes, que reduzem o esforço computacional. Apesar de melhorar o processo de otimização, a matriz apresentou coeficientes atípicos em mais de um ativo, diferentemente da covariância tradicional, contudo os portfólios não apresentaram ênfases em ativos com baixa capitalização (MICHAUD, 1989).

Com o desenvolvimento da nova matriz, foi possível encontrar as respostas para os questionamentos desenvolvidos na pesquisa. Na primeira hipótese, o comportamento do estimador se demonstrou satisfatório por conduzir a diferentes portfólios, sem prejuízo na obtenção de retornos. Como o estimador obteve menor sensibilidade na escolha da expectativa do mercado, os retornos absorveram menos impactos à depressão no ano de 2008. Os resultados complementam os resultados de Polson e Tew (2000).

Para avaliação do modelo, os retornos simulados durante o período de Maio de 2002 e Dezembro de 2009 demonstraram superioridade em relação ao modelo clássico M-V e o Índice Bovespa, porém assumindo um pouco mais de

risco diversificável que o modelo de Markowitz (1959). A análise robusta do modelo, considerando o horizonte de tempo, constatou retornos são próximos ao Ibovespa, considerando menor risco que o mercado. Em geral, o índice de Mao (1970) utilizado como comparativo demonstrou que o modelo se tornou satisfatório, em retorno e risco, principalmente em prazos mais longos. Esses resultados corroboram com o conceito tradicional de que, se pode assumir um pouco mais de risco em troca de maiores retornos, encontrado por Boyle e Tian (2007) e refuta o pensamento de que para obter maiores retornos não é necessário assumir maior risco, como em Clarke *et al* (2006).

É importante destacar que os resultados da redução da quantidade de ativos dos portfólios e o ganho obtido em retorno e risco do modelo contribuem com um questionamento realizado por Black e Litterman (1992), sobre o que realmente é diversificação. Esses autores afirmam que o pensamento no qual o aumento do número de ativos proporciona mais diversificação é uma percepção errônea do conceito de diversificação, o que se caracteriza com base nos resultados em um paradigma da área de construção de portfólios.

Outro resultado significativo é em relação aos momentos de depressão do mercado. O modelo clássico, conforme demonstrado na Figura 6.4 e mencionado em Michaud (1989), possui sensibilidade a perturbações no mercado. Por isso, segundo Bauer (2004), os modelos necessitam de elementos que considerem fatores atípicos do mercado. O resultado do modelo MCB demonstrou que, com o uso de um bom estimador, é possível reduzir a sensibilidade e/ou postergar o impacto do mercado. Isto pode proporcionar tempo hábil para reação e realocação do investimento.

Como avaliação complementar, foram coletados 94 séries de fundos de investimentos baseados na carteira teórica do Ibovespa. A análise foi realizada para o mesmo período de Maio de 2002 a Dezembro de 2009 dos modelos com fundos Ibovespa Ativo e Ibovespa Indexado. Os resultados apresentados demonstraram que o modelo proposto MCB, dentre os fundos, alcançou classificação de 6º lugar em retorno, em 10º lugar em risco e 7º lugar na relação entre Retorno sobre Risco. Os resultados demonstram que tanto o estimador, como a matriz gerada obtiveram resultados significativos em comparação com carteiras do mercado, o que demonstrou a aplicabilidade

prática do modelo, na qual estratégia é compatível com os maiores fundos de investimentos do mercado baseados no Ibovespa.

Como orientação prática, é possível que esse trabalho possa servir de base para criação de um *ETF Exchange-Traded Fund* baseado no modelo de covariância proposto. Esta é uma opção de fácil acesso e não demanda, por parte do investidor, conhecimento ou tempo necessários para manutenção de um portfólio baseado no MCB, com a garantia de no mínimo acompanhar o desempenho do mercado.

Dentre as limitações desse trabalho, é importante destacar que a análise foi limitada aos ativos pertencentes ao Índice Bovespa. Para outros estudos, sugere-se a análise do modelo com outros conjuntos de dados, como forma de reavaliar o desempenho do modelo. Para trabalhos futuros, algumas sugestões foram elaboradas a fim de motivar melhorias no desenvolvimento do modelo e de outros que abordem a teoria da decisão e o teorema de Bayes.

Na caracterização do modelo proposto, é necessário avaliar, de forma comparativa, outras opções de estimadores, incluindo a possibilidade de tornar o modelo autoregressivo, em que os próprios retornos possam servir como estimador. Pode-se sugerir também, o uso de modelos dinâmicos de otimização e/ou tornar as variáveis em formato discreto, como forma de considerar os pesos em lotes padronizados. A abrangência do tema permite o desenvolvimento de novos trabalhos explorando tanto o mercado brasileiro como o internacional. Além de alteração de alguns dos parâmetros do modelo, outros incrementos artificiais podem ser inseridos como forma de minimizar os erros de estimação.

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, G.U.V. *Um estudo do problema de escolha de portfólio ótimo*. São Carlos, SP: ICMC, 2009. Dissertação de Mestrado — Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação USP.

ALDAIHANI, M. M.; AL-DEEHANI, T. M. Portfolio optimization models and a tabu search algorithm for the Kuwait Stock Exchange. *Investment Management and Financial Innovations*, v. 5, n. 2, p. 31-40, 2008

ALEXANDER, G. J.; BAPTISTA, A. M. Economic implications of using a mean-VaR model for portfolio selection: A comparison with mean-variance analysis. *Journal of Economic Dynamics and Control*, v. 26, n. 7-8, p. 1159-1193, 2002.

ALMEIDA, V. S. Are Betas Best? The Correlation Structure on Brazilian Equity Market. *SSRN eLibrary*, 2008.

ANAGNOSTOPOULOS, K. P.; MAMANIS, G. A portfolio optimization model with three objectives and discrete variables. *Computers & Operations Research*, v. 37, n. 7, p. 1285-1297, 2010a.

_____. Using Multiojective Algorithms to Solve the Discrete Mean-Variance Portfolio Selection. *International journal of economics and finance*. V.2, n.3, p. 152-162, 2010b.

ARAUJO, M.V. *Seleção dinâmica de portfólios em média-variância com saltos markovianos*. São Paulo, SP: DETC, 2007. Tese de Doutorado — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

ATKINSON, C.; PAPAKOKKINOU, M. Theory of optimal consumption and portfolio selection under a Capital-at-Risk (CaR) and a Value-at-Risk (VaR) constraint. *IMA Journal of Management Mathematics*, v. 16, n. 1, p. 37-70, January 1, 2005.

AVRAMOV, D.; ZHOU, G. Bayesian Portfolio Analysis. *Annual Review of Financial Economics*, v. 2, n. 1, p. 25-47, 2010.

BACHELIER, L. *Thèorie de la speculation*. Paris: Gauthier Villars, 1900. p.17-78.

BADE, A. *et al*. A general approach to Bayesian portfolio optimization. *Mathematical Methods of Operations Research*, v. 70, n. 2, p. 337-356, 2009.

BAMBERG, G.; SPREMANN, K. Implications of constant risk aversion. *Zeitschrift für Operations Research*, v. 25, n. 7, p. 205-224, 1981.

BARRY, C. B.; WINKLER, R. L. Nonstationarity and Portfolio Choice. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 11, n. 2, p. 217-235, 1976.

BAUER, R. *et al*. Asset allocation in stable and unstable times. *Journal of Investing*, v. 13, n. 3, p.72-80, 2004.

BERGER, J. O. *Statistical decision theory and Bayesian analysis*. 2nd ed. ed. New York: Springer-Verlag, 1985.

BERNARDO, J.M.; SMITH, A.F.M. *Bayesian Theory*. Chichester: John Wiley & Sons, 1994.

BERTSIMAS, D.; SHIODA, R. Algorithm for cardinality-constrained quadratic optimization. *Computational Optimization and Applications*, v. 43, n. 1, p. 1-22, 2009.

BERTSIMAS, D. *et al*. Shortfall as a risk measure: properties, optimization and applications. *Journal of Economic Dynamics and Control*, v. 28, n. 7, p. 1353-1381, 2004.

BIENSTOCK, D. Computational study of a family of mixed-integer quadratic programming problems. In: BALAS, E.; CLAUSEN, J. (Ed.). *Integer Programming and Combinatorial Optimization*: Springer Berlin / Heidelberg, 1995. p. 80-94.

BLACK, F. *et al*. The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical Tests. *Michael C. Jensen, Studies in Theory of Capital Markets*, Praeger Publishers Inc., 1972.

BLACK, F; LITTERMAN, R. Global Portfolio Optimization. *Financial Analysts Journal*, v. 48, n. 5, p. 28-43, 1992.

BOYLE, P.; TIAN, W. Portfolio management with constraints. *Mathematical Finance*. v.17, n. 3, p. 319-343, 2007.

BOLLERSLEV, T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, v. 31, n. 3, p. 307-327, 1986.

BOVESPA. Bolsa de Valores de São Paulo. São Paulo: Bovespa, 2011. Disponível em: <http://www.bmfbovespa.com.br>. Acesso em: 21 jan. 2011.

BRANDT, M. W.; SANTA-CLARA, P. Dynamic Portfolio Selection by Augmenting the Asset Space. *The Journal of Finance*, v. 61, n. 5, p. 2187-2217, 2006.

CAI, X. *et al*. Portfolio Optimization under a Minmax Rule. *Management Science*, v. 46, n. 7, p. 16, 2000.

CERETTA, P.S.; COSTA JUNIOR, N.C.A. Quantas ações tornam um portfólio diversificado no mercado de capitais brasileiro? In: COSTA JUNIOR, N.C.A., LEAL, R.P.C., LEMGRUBER, E.F. *Mercado de Capitais: Análise Empírica no Brasil*, Coleção Coppead de Administração. São Paulo: Atlas, 2000.

CHAN, L. K. C. *et al*. On Portfolio Optimization: Forecasting Covariances and Choosing the Risk Model. *The Review of Financial Studies*, v.12, n.5, p. 937-974, 1999.

CHANG, T.-J. *et al*. Heuristics for cardinality constrained portfolio optimization. *Computational Operations Research*, v. 27, n. 13, p. 1271-1302, 2000.

_____. *et al*. Portfolio optimization problems in different risk measures using genetic algorithm. *Expert Systems with Applications*, v. 36, n. 7, p. 10529-10537, 2009

CHEN, A. H. Y. *et al*. The Optimal Portfolio Revision Policy. *Journal of Business*, v. 44, n. 1, p. 51-61, 1971.

CHEN, N.-F. *et al*. A Comparison of Single and Multifactor Portfolio Performance Methodologies. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 22, n. 4, p. 401-417, 1987.

CHEN, S.-N.; BROWN, S. J. Estimation Risk and Simple Rules for Optimal Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, v. 38, n. 4, p. 1087-1093, 1983.

CHEN, Y. *et al*. A portfolio selection strategy using Genetic Relation Algorithm. In: *Evolutionary Computation (CEC), 2010 IEEE Congress on*, 18-23 July 2010.

CHENG, P. L. Efficient Portfolio Selections beyond the Markowitz Frontier. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 6, n. 05, p. 1207-1234, 1971.

CHIODI, L. *et al*. Semi-Absolute Deviation Rule for Mutual Funds Portfolio Selection. *Annals of Operations Research*, v. 124, n. 1, p. 245-265, 2003.

CLARKE, R. *et al*. Minimum-variance portfolios in the U.S. equity market. *Journal of Portfolio Management*. v. 33, n.1, p. 10-24, 2006.

CLARKSON, G.P.; MELTZER, A.H. Portfolio selection: a heuristic approach. *The journal of finance*, v.15, n.4, p. 465-480, 1960.

COHEN, K. J.; POGUE, J. A. An Empirical Evaluation of Alternative Portfolio-Selection Models. *The Journal of Business*, v. 40, n. 2, p. 166-193, 1967.

COPELAND, T. E.; WESTON, J. F. *Financial theory and corporate policy*. 3 ed, Mass.: Addison-Wesley, 1988.

COSTA, O.L.V.; NABHOLZ, R.B. Otimização robusta de carteiras utilizando desigualdades matriciais lineares. *Revista Controle & Automação*, v.15, n.1, p.41-52, jan-mar, 2004.

CRAMA, Y.; SCHYNS, M. *Simulated Annealing for Complex Portfolio Selection Problems*. UNIVERSITE DE LIEGE, Faculte d'economie, de gestion et de sciences sociales, Groupe d'Etude des Mathematiques du Management et de l'Economie. 1999.

DISATNIK, D. J.; BENNINGA, S. Estimating the covariance matrix for portfolio optimization. *Tel Aviv University*. Working paper, 2006.

_____. Shrinking the covariance matrix. *Journal of Portfolio Management*. v. 33, n. 4, p. 55-63, 2007.

DI GASPERO, L. *et al*. Hybrid Local Search for Constrained Financial Portfolio Selection Problems. In: VAN HENTENRYCK, P.; WOLSEY, L. (Ed.). *Integration of AI and OR Techniques in Constraint Programming for Combinatorial Optimization Problems*: Springer Berlin / Heidelberg, 2007. p. 44-58.

DUMAS, B.; JACQUILLAT, B. Performance of currency portfolios chosen by a Bayesian technique: 1967–1985. *Journal of Banking and Finance*. v.14, n. 2-3, p. 539-558, 1990.

DYBVIG, P. H.; ROSS, S. A. Portfolio Efficient Sets. *Econometrica*, v. 50, n. 6, p. 1525-1546, 1982.

ELTON, E. J.; GRUBER, M. J. Portfolio theory when investment relatives are lognormally distributed. *The journal of finance*, v. 29, n.4, p. 1265-1273, Sep, 1974.

_____. *Modern portfolio theory and investment analysis*. 6 ed. New York: Wiley, 2004.

_____. Modern Portfolio Theory, 1950 to Date. *SSRN eLibrary*, 1998.

ELTON, E. J. *et al*. Simple Rules for Optimal Portfolio Selection: The Multi Group Case. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 12, n. 3, p. 329-345, 1977a.

_____. Simples Criteria for Optimal Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, v.3, n.5, p.1341-1357, 1976.

_____. Simples Criteria for Optimal Portfolio Selection with upper bounds. *Operations Research*, v.25, n.6, p.952-967, 1977b.

_____. Simples Criteria for Optimal Portfolio Selection: Tracing Out the Efficient Frontier. *The Journal of Finance*, v.33, n.1, p.296-302, 1978.

ENGLE, R. F. Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*, v. 50, n. 4, p. 987-1007, 1982.

EVANS, J. L. An analysis of portfolio maintenance strategies. *The Journal of Finance*, v. 25, n. 3, p. 561-571, 1970.

EWALD, R. *et al*. Selecting Simulation Algorithm Portfolios by Genetic Algorithms. In: *Principles of Advanced and Distributed Simulation (PADS), 2010 IEEE Workshop on*, 17-19 May 2010.

FABOZZI, F.J. *et al*. *Financial modeling of the equity market – from CAPM to cointegration*. Hoboken: John Wiley & Sons, 2006.

FABOZZI, F.J. *et al*. The legacy of modern portfolio theory. *The Journal of Investing*, v. 11, n.3, p. 7-22, 2002.

FAMA, E. F.; FRENCH, K. R. Business conditions and expected returns on stocks and bonds. *Journal of Financial Economics*, v. 25, n. 1, p. 23-49, 1989.

FAMA, E. F.; FRENCH, K. R. Common risk factors in the returns on stocks and bonds. *Journal of Financial Economics*, v. 33, n. 1, p. 3-56, 1993.

FAMA, E.F. The behavior of stock-market prices. *The journal of business*. v.38, n.1, p. 34-105, 1965.

FAMA, E.F.; MACBETH, J. D. Tests of The Multiperiod Two-Parameter Model. *Journal of Financial Economics*, v. 1, p. 43-66, 1974.

FAMA, E.F.; MILLER, M.H. *The theory of finance*. New York: Holt, 1972.

FERREIRA, R.J.P. *et al*. A decision model for portfolio selection. *Pesquisa Operacional*, v.29, n.2, p. 403-417, 2009.

FOCARDI, S.; FABOZZI, F. J. *The mathematics of financial modeling and investment management*. New Jersey: Wiley, 2004.

FOUSKAKIS, D.; DRAPER, D. Stochastic Optimization: a Review. *International Statistical Review*, v. 70, n. 3, p. 315-349, 2002.

FRIEDMAN, M.; SAVAGE, L. J. The utility analysis of choice involving risk. *Journal of Political Economy*, v.56, n. 4, ago, p. 279-304, 1948.

FROST, P. A.; SAVARINO, J. E. An Empirical Bayes Approach to Efficient Portfolio Selection. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 21, n. 3, p. 293-305, 1986.

GARLAPPI, L. *et al*. Portfolio Selection with Parameter and Model Uncertainty: A Multi-Prior Approach. *Review of Financial Studies*, v. 20, n. 1, p. 41-81, January, 2007.

GENNOTTE, G. Optimal Portfolio Choice Under Incomplete Information. *The Journal of Finance*, v. 41, n. 3, p. 733-746, 1986.

GILLI, M.; SCHUMANN, E. Heuristic Optimisation in Financial Modelling. *Annals of Operations Research*, Forthcoming, 2010.

GLOVER. F.; KOCHENBERGER, G.A. *handbook of metaheuristics*. New York: Kluwer Academic Publishers, 2003.

GOLMAKANI, H. R.; FAZEL, M. Constrained Portfolio Selection using Particle Swarm Optimization. *Expert Systems with Applications*, v. 38, n. 7, p. 8327-8335, 2011.

GREYSERMAN, A. *et al*. Portfolio selection using hierarchical Bayesian analysis and MCMC methods. *Journal of Banking & Finance*, v. 30, n. 2, p. 669-678, 2006.

_____. *et al*. Portfolio Selection Using Bayesian Analysis and Gibbs Sampling. *Mint Investment Management Company*, p. 23, 2010.

GRUBEL, H. G. Internationally Diversified Portfolios: Welfare Gains and Capital Flows. *The American Economic Review*, v. 58, n. 5, p. 1299-1314, 1968.

HAKANSSON, N. H. Multi-Period Mean-Variance Analysis: Toward a General Theory of Portfolio Choice. *The Journal of Finance*, v. 26, n. 4, p. 857-884, 1971.

HAMZA, F.; JANSSEN, J. The mean semivariances approach to realistic portfolio optimization subject to transaction costs. *Applied Stochastic Models and Data Analysis*, v. 14, n. 4, p. 275-283, 1998.

HARLOW, W.V. Ass*et al*location in a downside-risk framework. *Financial Analysts Journal*, v. 47, n. 5, p. 28-40, 1991.

HARVEY, C. R.; ZHOU, G. Bayesian Inference in Asset Pricing Tests. *SSRN eLibrary*, 1990.

HERSTEIN, I.N.; MILNOR, J. An axiomatic approach to measurable utility. *Econometrica*, v.21, n.2, p. 291-297, abr. 1953.

HUANG, D. *et al*. Portfolio selection under distributional uncertainty: A relative robust CVaR approach. *European Journal of Operational Research*, v. 203, n. 1, p. 185-194, 2010.

JACOB, N. L. A Limited-Diversification Portfolio Selection Model for the Small Investor. *Journal of Finance*, v. 29, n. 3, p. 847-56, 1974.

JOBSON, J. D.; KORKIE, B. Estimation for Markowitz Efficient Portfolios. *Journal of the American Statistical Association*, v. 75, n. 371, p. 544-554, 1980.

JONKER, J.; PENNINK, B. W. *The essence of ressearch methodology:* a concise guide for master and PHD students in management science. New York: Springer, 2010.

JORION, P. Bayes-Stein Estimation for Portfolio Analysis. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 21, n. 3, p. 279-292, 1986.

_____. Portfolio Optimization with Tracking-Error Constraints. *SSRN eLibrary*, v. 59, n. 5, p. 12, 2003.

KALYMON, B. A. Estimation Risk in the Portfolio Selection Model. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 6, n. 1, p. 559-582, 1971.

KANE, A. *et al*. Forecast Precision and Portfolio Performance. *Journal of Financial Econometrics*, v. 8, n. 3, p. 265-304, July 1, 2010.

KANDEL, S. *et al*. Bayesian inference and portfolio efficiency. *Review of Financial Studies*, v. 8, n. 1, p. 1-53, 1995.

KANDEL, S.; STAMBAUGH, R. F. On the Predictability of Stock Returns: An Asset-Allocation Perspective. *Journal of Finance*, v. 51, n. 2, p. 385-424, 1996.

KENDALL, M. G. The Analysis of Economic Time-Series .1. Prices. *Journal of the Royal Statistical Society Series a-Statistics in Society*, v. 116, n. 1, p. 11-34, 1953.

KISSEL, R.; GLANTZ, M. *Optimal trading strategies*: quantitative approaches for managing market impact and trading risk. New York: AMACOM, 2003.

KONNO, H. Piecewise linear risk function and portfolio optimization. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, v. 33, n. 2, p. 139-156, 1990.

KONNO, H.; YAMAZAKI, H. Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Applications to Tokyo Stock Market. *Management Science*, v. 37, n.5, p. 519-531, 1991.

KONNO, H.; WIJAYANAYAKE, A. Mean absolute deviation portfolio optimization model under transaction costs. *Journal of the operations research*, v. 42, n.4, p. 422-435, 1999.

KWAN, C. C. Y. Portfolio Analysis Using Single Index, Multi-Index, and Constant Correlation Models A Unified Treatment. *The Journal of Finance*, v. 39, n. 5, p. 1469-1483, 1984.

LAI, K. *et al*. A Double-Stage Genetic Optimization Algorithm for Portfolio Selection. In: KING, I. *et al* (Ed.). *Neural Information Processing*: Springer Berlin / Heidelberg, 2006. p. 928-937.

LATANÉ, H. A. Individual Risk Preference in Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, v. 15, n. 1, p. 45-52, 1960.

_____. Rational Decision-Making in Portfolio Management. *The Journal of Finance*, v. 14, n. 3, p. 429-430, 1959.

LATANÉ, H. A.; TUTTLE, D. L. Criteria for Portfolio Building. *The Journal of Finance*, v. 22, n. 3, p. 359-373, 1967.

LATANÉ, H. A.; YOUNG, W. E. Test of Portfolio Building Rules. *The Journal of Finance*, v. 24, n. 4, p. 595-612, 1969.

LEVY, H.; KROLL, Y. Stochastic Dominance with Riskless Assets. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 11, n. 05, p. 743-777, 1976.

LIMA JUNIOR, M.P. *et al*. Seleção de Portfólios por Meio de Busca Tabu Híbrida: modelo de média variância em lotes. In: *XLIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, 2011, Ubatuba, 2011. v. XLIII.

LI, H.-L.; TSAI, J.-F. A distributed computation algorithm for solving portfolio problems with integer variables. *European Journal of Operational Research*, v. 186, n. 2, p. 882-891, 2008.

LIN, C.-C.; LIU, Y.-T. Genetic algorithms for portfolio selection problems with minimum transaction lots. *European Journal of Operational Research*, v. 185, n. 1, p. 393-404, 2008.

LINS, G.C.N.; SOUZA, F.M.C. A protocol for elicitation of prior distributions. In: *2nd International Symposium on Imprecise Probabilities and Their Applications*, Ithaca, New York, 2001.

LINTNER, J. The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets. *Review of Economics and Statistics*, v. 47, n. 1, p. 13-37, 1965.

LUENBERGER, D. G. *Investment science*. New York: Oxford University Press, 1998.

MAHONEY, J.; GOERTZ, G. A Tale of Two Cultures: Contrasting Quantitative and Qualitative Research. *Political Analysis*, v. 14, n. 3, p. 227-249, Summer, 2006.

MANSINI, R. *et al*. Conditional value at risk and related linear programming models for portfolio optimization. *Annals of Operations Research*, v. 152, n. 1, p. 227-256, 2007.

MANSINI, R.; SPERANZA, M. G. Heuristic algorithms for the portfolio selection problem with minimum transaction lots. *European Journal of Operational Research*, v. 114, n. 2, p. 219-233, 1999.

_____. An exact approach for portfolio selection with transaction costs and rounds. *IEE transaction*, n. 37, p. 919-929, 2005.

MAO, J. C. T. Essentials of portfolio diversification strategies. *The Journal of Finance*, v. 25, n. 5, p. 1109-1121, 1970.

MAO, J.C.T.; SARNDAL, E. A Decision Theory Approach to Portfolio Selection. *Management Science*. v.12, n.8, p. 323-333, 1966.

MARINGER, D.G. *Portfolio Management with Heuristic Optimization*. Netherlands: Springer, 2005.

MARKOWITZ, H. M. *Portfolio selection: efficient diversification of investments*. New York: Wiley, 1959.

_____. Portfolio Selection. *Journal of Finance*. p. 77-91, mar. 1952a.

_____. The utility of wealth. Chicago: The University of Chicago, *Cowles Commission for Research in Economics*, 1952b.

_____. The optimization of a quadratic function subject to linear constraints. *Naval Research Logistics Quarterly*, v. 3, n. 1-2, p. 111-133, 1956.

_____. Market efficiency: A theoretical distinction and so what? *Financial Analysts Journal*, v. 61, n. 5, p. 17-30, Sep-Oct 2005.

_____. CAPM investors do not get paid for bearing risk: A linear relation does not imply payment for risk. *Journal of Portfolio Management*, v. 34, n. 2, p. 91-94, Win 2008.

_____. Portfolio Theory: As I Still See It. *Annual Review of Financial Economics*, v. 2, n. 1, p. 1-23, 2010.

MARTIN, A.D. Mathematical programming of portfolio selections. *Management Science*. V.1, n.2, p. 152-166, 1955.

MATLAB. User guides: mathematics. The Mathworks inc. 2004.

MENDES, B.V.M.; LEAL, R.P.C. Robust multivariate modeling in finance. *International Journal of Managerial Finance*, v. 1, n. 2, p. 95-107, 2005.

MERTON, R. C. Intertemporal Capital Asset Pricing Model. *Econometrica*, v. 41, n. 5, p. 867-887, 1973.

_____. Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-Time Case. *The Review of Economics and Statistics*, v. 51, n. 3, p. 247-257, 1969.

MICHAUD, R.O. The Markowitz Optimization Enigma: Is 'Optimized' Optimal?. *Financial Analysts Journal*, v. 45, n. 1, p. 31-42, 1989.

MITROFF, I. I. *et al*. Managing Science in Systems Age - two Schemas for Study of Science as a Whole Systems Phenomenon. *Interfaces*, v. 4, n. 3, p. 46-58, 1974.

MODIGLIANI, F.; POGUE, G. A. *An introduction to risk and return concepts and evidence*. Massachusetts Institute of Technology (MIT), Sloan School of Management, 1973.

MORGAN, G.A.; et al. *SPSS For Introductory Statistics*: use and interpretation. 2 ed. London: Lawrence Erlbaum Associates, 2004.

MOSSIN, J. Equilibrium in a Capital Asset Market. *Econometrica*, v. 34, n. 4, p. 768-783, 1966.

_____. Optimal multiperiod portfolio policies. *The journal of business*, v. 41, n.2, p.215-229, Apr, 1968.

ODA, A.L. *et al*. Um estudo sobre diversificação na bolsa de valores de São Paulo. *In: Encontro da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Administração*, 22, Foz do Iguaçú, PR, 1998.

OECD. *Economic Policy Reforms 2010*. OECD Publishing. 2010a.

_____. *Tackling Inequalities in Brazil, China, India and South Africa*. OECD Publishing. 2010b.

OGRYCZAK, W.; SLIWINSKI, T. On solving the dual for portfolio selection by optimizing Conditional Value at Risk. *Computational Optimization and Applications*, 2010.

PÁSTOR, L. Portfolio selection and asset pricing models. *Journal of Finance*, v. 55, n. 1, p. 179-223, 2000.

PEROLD, A.F. Large-scale portfolio optimization. *Management Science*, v. 30, n. 10, p. 1143-1160, 1984.

POLSON, N. G.; TEW, B. V. Bayesian Portfolio Selection: An Empirical Analysis of the S&P 500 Index 1970-1996. *Journal of Business & Economic Statistics*, v. 18, n. 2, p. 164-73, 2000.

PORTER, R. B.; GAUMNITZ, J. E. Stochastic Dominance vs. Mean-Variance Portfolio Analysis: An Empirical Evaluation. *American Economic Review*, v. 62, n. 3, p. 438-46, 1972.

POSKITT, D. S.; TREMAYNE, A. R. Determining a portfolio of linear time series models. *Biometrika*, v. 74, n. 1, p. 125-137, March 1, 1987.

RIBEIRO, T.S.; LEAL, R.P.C. Estrutura fractal em mercados emergentes. *Revista de Administração Contemporânea*. v.6, n.3, p. 97-108, 2002.

ROSS, S. A. Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing. *Journal of Economic Theory*, v. 13, n. 3, p. 341-360, 1976.

RUDOLF, M. *et al*. A linear model for tracking error minimization. *Journal of Banking & Finance*, v. 23, n. 1, p. 85-103, 1999.

SAMUELSON, P. A. Lifetime Portfolio Selection By Dynamic Stochastic Programming. *The Review of Economics and Statistics*, v. 51, n. 3, p. 239-246, 1969.

SCHAERF, A. Local Search Techniques for Constrained Portfolio Selection Problems. *Computational Economics*, v. 20, n. 3, p. 177-190, 2002.

SCHERER, B.M. Introduction to modern portfolio optimization with NUOPT and S-PLUS. New York: Springer, 2005.

SHANKEN, J. A Bayesian approach to testing portfolio efficiency. *Journal of Financial Economics*, v. 19, n. 2, p. 195-215, 1987.

SHARPE, W. F. A Linear Programming Approximation for the General Portfolio Analysis Problem. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 6, n. 05, p. 1263-1275, 1971.

_____. Capital-Asset Prices - a Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk. *Journal of Finance*, v. 19, n. 3, p. 425-442, 1964.

_____. A linear programming algorithm for mutual fund portfolio selection. *Management Science*. v.13, n.7, p. 499-510, 1967.

_____. A simplified model for portfolio analysis. *Management Science*. V.9, n.2, p. 277-293, 1963.

_____. Mutual Fund Performance. *The Journal of Business*, v. 39, n. 1, p. 119-138, 1966.

SHEFRIN, H.; STATMAN, M. Behavioral Portfolio Theory. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 35, n. 2, p. 127-151, 2000.

SHI-QI, Y.; YONG, P. The optimal strategy of portfolio selection with transaction costs. In: *Machine Learning and Cybernetics*, 2005. Proceedings of 2005 International Conference on, 18-21 Aug. 2005. 2005. V. 6, p.3480-3485.

SMITH, K. V. A Transition Model for Portfolio Revision. *The Journal of Finance*, v. 22, n. 3, p. 425-439, 1967.

SOUZA, M.A.O. *Algoritmos para a maximização da utilidade esperada*: uma aplicação na seleção de portfólios ótimos. Rio de Janeiro, RJ: IM, 2009. Dissertação de Mestrado — Instituto de Matemática da UFRJ.

SPERANZA, M. G. A heuristic algorithm for a portfolio optimization model applied to the Milan stock market. *Computers and Operations Research*, v. 23, n. 5, p. 433-441, 1996.

STATMAN, M. How Many Stocks Make a Diversified Portfolio? *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 22, n. 3, p. 353-363, 1987.

STREICHERT, F.; YAMAWAKI, M.T. The Effect of Local Search on the Constrained Portfolio Selection Problem. In: *Evolutionary Computation*, 2006. CEC 2006. IEEE Congress on. 2006. p.2368-2374.

TALEBI, A. *et al*. Performance investigation and comparison of two evolutionary algorithms in portfolio optimization: Genetic and particle swarm optimization. In: *Information and Financial Engineering (ICIFE), 2010 2nd IEEE International Conference on*, 17-19 Sept. 2010. p.430-437.

THOMÉ NETO, C. *Criação de um índice de mínima variância de ações brasileiras*. Rio de Janeiro, RJ: UFRJ, 2011. Dissertação de Mestrado — Instituto Coppead de Administração.

TOBIN, J. Liquidity Preference as Behavior Towards Risk. *Review of Economic Studies*, London, v. 26, n. 1, p. 65-86, 1958.

TSAI, R.S. *Analysis of Financial Time Series*. 2 ed. Chicago: Wiley, 2005.

TU, J.; ZHOU, G. Incorporating Economic Objectives into Bayesian Priors: Portfolio Choice under Parameter Uncertainty. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 45, n. 4, p. 28, 2010.

TU, J.; ZHOU, G. Markowitz meets Talmud: A combination of sophisticated and naive diversification strategies. *Journal of Financial Economics*, v. 99, n. 1, p. 204-215, 2011.

VARIAN, H. R. *Intermediate microeconomics: a modern approach*. 2 ed. New York: Norton, 1990.

WALLINGFORD, B. A. A Survey and Comparison of Portfolio Selection Models. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 2, n. 2, p. 85-106, 1967.

WINKLER, R. L.; BARRY, C. B. A Bayesian Model for Portfolio Selection and Revision. *The Journal of Finance*, v. 30, n. 1, p. 179-192, 1975.

WOLFE, P. The Simplex Method for Quadratic Programming. *Econometrica*, v. 27, n. 3, p. 382-398, 1959.

WORKING, H. A random difference series for the use in analysis of time series. *Journal of the American Statistical Association*, Boston: Lancaster Press, v.29, p.11-24, Mar 1934.

YOUNG, M. R. A Minimax Portfolio Selection Rule with Linear Programming Solution. *Management Science*, v. 44, n. 5, p. 11, 1998.

APÊNDICE

Apêndice 01 – Relação de Fundos utilizados com Código Anbid

Código Anbid	Descrição	Código Anbid	Descrição	Código Anbid	Descrição
190357	ALFA DINÂMICO	90794	CREDIT SUISSE FIDIAS	26311	OPPORTUNITY LÓGICA II
185302	ALFA	75639	CREDIT SUISSE FIG INSTITUCIONAL	43648	PREVIDÊNCIA B
190330	ALFA SPECIAL	1848	CREDIT SUISSE FIG PREMIUM	43923	PRÓSPERO ADINVEST
190349	ALFAMAIS	86010	CSHG STRATEGY II	108154	RAPSAG
164501	ARGOS	1643	ELITE	16918	RT GALÁXIA
9202	ÁTICO AÇÕES	153966	ELO	128775	SAFRA AÇÕES
6211	BANCO DO NORDESTE	24813	FAMA CHALLENGER	44563	SAFRA INDICIAL
48550	BANRISUL ÍNDICE	41671	FATOR INSTITUCIONAL	49336	SAFRA PRIVATE
21636	BB IBOVESPA ATIVO	47872	FATOR JAGUAR	60984	SANTANDER ATIVO II
11320	BB INDEXADO IBOVESPA	43915	FIBRA VIC	1856	SANTANDER
145017	BELLS	64841	FOCUS	93701	SANTANDER IBOVESPA PASSIVO
45942	BICBANCO STOCK INDEX	111521	HSBC AÇÕES PLUS	41475	SANTANDER INSTITUCIONAL BR IBOVESPA
93386	BNY MELLON ARX	143804	HSBC	55840	SANTANDER INSTITUCIONAL
94196	BRADESCO BJ 157	145734	HSBC NITE	275190	SANTANDER OLINDA
205753	BRADESCO	111538	HSBC PRIVATE PLUS	174734	SANTANDER ÔNIX I
54321	BRADESCO IBOVESPA ATIVO	2224	HSBC TOP IBOVESPA	10642	SANTANDER PLUS
205559	BRADESCO IDEAL	84484	INVESTCENTER OPPORTUNITY	13986	SLW
56553	BRADESCO III	51195	ITAPOÃ	43540	SUL AMÉRICA EQUILIBRIUM
13730	BRADESCO INDEXADO IBOVESPA	13684	ITAÚ CARTEIRA LIVRE	2331	UNIBANCO BLUE
205664	BRADESCO IV	69450	ITAÚ INDEX IBOVESPA	73441	UNIBANCO INDEX IBOVESPA
71757	BRADESCO PLUS IBOVESPA	26255	ITAÚ ÍNDICE IBOVESPA	23272	UNIBANCO PREVIDÊNCIA IBOVESPA
231	BRADESCO PRIME ACTIVE	51152	ITAÚ INSTITUCIONAL IBOVESPA ATIVO	75167	UNIBANCO PRIVATE INDEX IBOVESPA
981	BRADESCO PRIME INDEX	7412	ITAÚ PERSONNALITÉ IBOVESPA ATIVO	190756	UNIBANCO SELEÇÃO AÇÕES BRASIL
15741	BRADESCO PRIVATE ALAVANCADO	7420	ITAÚ PERSONNALITÉ IBOVESPA INDEX	16713	UNIBANCO STRATEGY
96326	BRADESCO PRIVATE	99597	ITAÚ PERSONNALITÉ MULTIFUNDOS	41602	UNIBANCO TIMING
96245	BRADESCO PRIVATE IBOVESPA	13978	ITAÚ PRIVATE ATIVO	7471	VOTORANTIM
95664	BRADESCO SELECTION	220256	ITAÚ SELECT IBOVESPA		
12882	BRADESCO SUPER AÇÃO	46345	LEGG MASON PORTFÓLIO		
231738	BRAM FIB	26999	LEGG MASON PRIVATE FOCUS		
108081	BTG PACTUAL ANDRÔMEDA	7439	LEGG MASON SILVER IBOVESPA ATIVO		
41025	CAIXA IBOVESPA	43575	LUXOR		
41173	COINVALORES	247766	MAGLIANO		
57241	COMERCIAL MASTER	266892	MULTIPLY VARIABLE		
85065	CREDIT AGRICOLE SELECTION	62146	MYSTIQUE		

Fonte: Quantum Axis®

Apêndice 02 – Rank de Fundos de Investimentos

Rank Ret	Código	Descrição	Ret Acm	Risco (Std)	Ret Acm / Risco	Rank Std	Rank Ret/Risk
1	153966	ELO FI AÇÕES	852,46%	1,33%	639,43	2	2
2	43923	PRÓSPERO ADINVEST FI AÇÕES	590,74%	1,54%	383,00	6	3
3	62146	MYSTIQUE FI AÇÕES	568,19%	1,60%	354,99	9	4
4	85065	CREDIT AGRICOLE SELECTION FI AÇÕES	552,63%	1,87%	295,82	71	8
5	15741	BRADESCO PRIVATE ALAVANCADO IBOVESPA FI AÇÕES	545,05%	1,78%	305,37	25	6
6		**MCB - Modelo de Covariância Bayesiana**	**508,10%**	**1,68%**	**301,95**	**10**	**7**
7	24813	FAMA CHALLENGER FIC AÇÕES	473,87%	1,47%	321,31	4	5
8	95664	BRADESCO SELECTION FI AÇÕES	472,16%	1,80%	262,63	30	10
9	86010	CSHG STRATEGY II FIC AÇÕES	461,22%	1,74%	265,08	15	9
10	90794	CREDIT SUISSE FIDIAS FI AÇÕES	459,64%	1,92%	238,80	90	14
11	93386	BNY MELLON ARX FI AÇÕES	457,14%	1,82%	251,63	35	11
12	231	BRADESCO PRIME ACTIVE FIC AÇÕES	441,99%	1,79%	246,61	28	13
13	84484	INVESTCENTER OPPORTUNITY LÓGICA II FIC AÇÕES	439,56%	1,91%	230,39	89	16
14	75639	CREDIT SUISSE FIG INSTITUCIONAL FI AÇÕES	436,18%	1,97%	220,86	94	20
15	26311	OPPORTUNITY LÓGICA II FIC AÇÕES	434,72%	1,93%	225,65	91	18
16	1848	CREDIT SUISSE FIG PREMIUM FI AÇÕES	415,93%	1,94%	214,24	92	21
17	96326	BRADESCO PRIVATE FI AÇÕES	403,12%	1,81%	223,28	33	19
18	108081	BTG PACTUAL ANDRÔMEDA FI AÇÕES	392,51%	1,90%	206,44	86	25
19	145017	BELLS FI AÇÕES	389,50%	1,86%	209,94	60	23
20	1643	ELITE FI AÇÕES	384,01%	1,54%	248,59	7	12
21	7471	VOTORANTIM FI AÇÕES	377,20%	1,86%	202,94	64	26
22	64841	FOCUS FI AÇÕES	375,71%	1,94%	193,46	93	29
23	16918	RT GALÁXIA FI AÇÕES	371,68%	1,76%	211,35	17	22
24	9202	ÁTICO AÇÕES FI AÇÕES	367,98%	1,56%	235,37	8	15
25	41671	FATOR INSTITUCIONAL FI AÇÕES	364,47%	1,76%	207,58	16	24
26	57241	COMERCIAL MASTER FI AÇÕES	361,36%	1,83%	197,56	42	28
27	43575	LUXOR FI AÇÕES	358,21%	1,78%	201,18	23	27
28	47872	FATOR JAGUAR FI AÇÕES	356,77%	1,86%	192,07	63	30
29	41475	SANTANDER INSTITUCIONAL BR IBOVESPA FI AÇÕES	347,13%	1,84%	188,75	47	32
30	99597	ITAÚ PERSONNALITÉ MULTIFUNDOS FIC AÇÕES	341,62%	1,50%	228,20	5	17
31	205559	BRADESCO IDEAL FI AÇÕES	334,58%	1,77%	189,35	18	31
32	231738	BRAM FIB FI AÇÕES	333,30%	1,83%	182,46	41	34
33	13978	ITAÚ PRIVATE ATIVO FI AÇÕES	328,62%	1,84%	178,79	46	36
34	43915	FIBRA VIC FI AÇÕES	327,27%	1,84%	177,95	49	37
35	41173	COINVALORES FI AÇÕES	325,84%	1,85%	175,82	58	38
36	46345	LEGG MASON PORTFÓLIO FI AÇÕES	321,91%	1,86%	172,73	67	39
37	266892	MULTIPLY VARIABLE FI AÇÕES	320,81%	1,79%	179,14	27	35
38	60984	SANTANDER ATIVO II FI AÇÕES	317,86%	1,85%	172,20	52	40
39	23272	UNIBANCO PREVIDÊNCIA IBOVESPA FI AÇÕES	314,07%	1,83%	171,67	43	41
40	49336	SAFRA PRIVATE FI AÇÕES	311,80%	1,70%	183,56	13	33
41	51152	ITAÚ INSTITUCIONAL IBOVESPA ATIVO FI AÇÕES	310,84%	1,86%	167,34	62	42
42	69450	ITAÚ INDEX IBOVESPA FI AÇÕES	301,89%	1,88%	160,38	77	44
43	7412	ITAÚ PERSONNALITÉ IBOVESPA ATIVO FI AÇÕES	287,81%	1,84%	156,12	50	47
44	190756	UNIBANCO SELEÇÃO AÇÕES BRASIL FI AÇÕES	281,91%	1,78%	158,14	24	46
45	43648	PREVIDÊNCIA B FI AÇÕES	280,36%	1,77%	158,52	19	45
46	93701	SANTANDER IBOVESPA PASSIVO FI AÇÕES	278,77%	1,86%	149,92	65	49
47	43540	SUL AMÉRICA EQUILIBRIUM FI AÇÕES	275,96%	1,80%	153,18	31	48
48	275190	SANTANDER OLINDA FIC AÇÕES	273,28%	0,26%	1.032,36	1	1
49	55840	SANTANDER INSTITUCIONAL FI AÇÕES	270,50%	1,85%	146,28	55	51
50	12882	BRADESCO SUPER AÇÃO FI AÇÕES	263,51%	1,79%	147,55	26	50

Rank	Código	Descrição	Ret Acm	Risco (Std)	Ret Acm / Risco	Rank Std	Rank Ret/Risk
51		**Ibovespa**	**252,18%**	**1,98%**	**127,58**	**95**	**58**
52	71757	BRADESCO PLUS IBOVESPA FI AÇÕES	244,34%	1,88%	129,63	78	53
53	7420	ITAÚ PERSONNALITÉ IBOVESPA INDEX FIC AÇÕES	242,84%	1,88%	129,29	74	54
54	73441	UNIBANCO INDEX IBOVESPA FI AÇÕES	241,59%	1,87%	129,02	72	55
55	145734	HSBC NITE FI AÇÕES	239,48%	1,82%	131,59	36	52
56		**M-V Média Variância**	**237,66%**	**1,45%**	**164,09**	**3**	**43**
57	16713	UNIBANCO STRATEGY FI AÇÕES	235,40%	1,83%	128,46	45	57
58	96245	BRADESCO PRIVATE IBOVESPA FIC AÇÕES	231,30%	1,89%	122,66	79	61
59	220256	ITAÚ SELECT IBOVESPA FIC AÇÕES	230,21%	1,84%	124,86	51	59
60	54321	BRADESCO IBOVESPA ATIVO FIC AÇÕES	225,11%	1,82%	123,48	38	60
61	111521	HSBC AÇÕES PLUS FI AÇÕES	222,64%	1,82%	122,04	40	62
62	10642	SANTANDER PLUS FIC AÇÕES	220,90%	1,84%	120,11	48	64
63	247766	MAGLIANO FI AÇÕES	220,58%	1,72%	128,62	14	56
64	44563	SAFRA INDICIAL FI AÇÕES	219,17%	1,86%	118,08	61	66
65	26255	ITAÚ ÍNDICE IBOVESPA FIC AÇÕES	216,36%	1,88%	115,11	75	70
66	56553	BRADESCO III FIC AÇÕES	215,97%	1,80%	120,13	29	63
67	2224	HSBC TOP IBOVESPA FI AÇÕES	215,53%	1,85%	116,41	57	69
68	21636	BB IBOVESPA ATIVO FIC AÇÕES	214,82%	1,83%	117,41	44	68
69	981	BRADESCO PRIME INDEX FIC AÇÕES	214,17%	1,89%	113,54	81	72
70	111538	HSBC PRIVATE PLUS FIC AÇÕES	213,59%	1,81%	118,03	34	67
71	51195	ITAPOÃ FI AÇÕES	212,82%	1,89%	112,63	83	73
72	26999	LEGG MASON PRIVATE FOCUS FIC AÇÕES	208,00%	1,86%	111,58	68	74
73	45942	BICBANCO STOCK INDEX FI AÇÕES	206,89%	1,80%	114,82	32	71
74	6211	BANCO DO NORDESTE FI AÇÕES	205,75%	1,85%	111,34	54	75
75	75167	UNIBANCO PRIVATE INDEX IBOVESPA FIC AÇÕES	205,15%	1,87%	109,89	70	76
76	41602	UNIBANCO TIMING FI AÇÕES	203,85%	2,11%	96,68	97	81
77	128775	SAFRA AÇÕES FI AÇÕES	199,33%	1,69%	118,27	11	65
78	1856	SANTANDER FI AÇÕES	198,23%	1,86%	106,44	66	77
79	13684	ITAÚ CARTEIRA LIVRE FI AÇÕES	195,72%	1,85%	105,81	56	78
80	41025	CAIXA IBOVESPA FI AÇÕES	185,75%	1,88%	98,81	76	80
81	11320	BB INDEXADO IBOVESPA FIC AÇÕES	182,18%	1,89%	96,59	80	82
82	205753	BRADESCO FIC AÇÕES	180,96%	1,77%	102,05	21	79
83	190330	ALFA SPECIAL FI AÇÕES	177,22%	1,91%	92,96	88	84
84	143804	HSBC FIC AÇÕES	174,26%	1,82%	95,57	39	83
85	13730	BRADESCO INDEXADO IBOVESPA FIC AÇÕES	173,00%	1,89%	91,70	82	85
86	48550	BANRISUL ÍNDICE FI AÇÕES	166,55%	1,85%	90,13	53	86
87	7439	LEGG MASON SILVER IBOVESPA ATIVO FIC AÇÕES	165,19%	1,86%	88,60	69	87
88	2331	UNIBANCO BLUE FI AÇÕES	158,50%	1,82%	87,01	37	88
89	94196	BRADESCO BJ 157 FIC AÇÕES	153,38%	1,78%	86,16	22	90
90	13986	SLW FI AÇÕES	147,14%	1,69%	86,95	12	89
91	205664	BRADESCO IV FIC AÇÕES	140,26%	1,77%	79,11	20	91
92	174734	SANTANDER ÔNIX FIC AÇÕES I	122,10%	1,86%	65,81	59	92
93	190357	ALFA DINÂMICO FIC AÇÕES	113,35%	1,88%	60,38	73	93
94	108154	RAPSAG FI AÇÕES	111,67%	1,89%	58,96	84	94
95	164501	ARGOS FI AÇÕES	81,37%	2,03%	40,00	96	95
96	190349	ALFAMAIS FIC AÇÕES	68,94%	1,90%	36,29	85	96
97	185302	ALFA FIC AÇÕES	14,20%	1,91%	7,45	87	97

Fonte: Quantum Axis®

Apêndice 03 – Portfólios Construídos pelo Modelo M-V

Portfólios Gerados Modelo M-V	Quadrimestres do Período de Maio de 2002 a Dezembro 2009																						
Descrição Ativo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**
ALL AMER LAT ON	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,04	0,00	-	0,07	0,09	0,07	0,02	-	0,03	0,01
AMBEV PN	-	0,05	-	0,07	0,16	0,02	0,06	0,09	0,14	-	0,16	-	0,03	0,12	0,22	0,19	0,03	0,10	-	0,01	0,09	-	0,13
B2W VAREJO ON	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,03	-	0,03	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BANCO BRASIL ON	-	-	-	-	0,02	0,08	-	-	0,01	-	-	-	-	-	-	-	0,01	-	-	-	-	-	-
BMF BOVESPA ON	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BRADESCO PN	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BRADESPAR PN	-	-	0,02	-	-	0,02	0,03	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BRASIL TELECOM PN	-	-	-	-	-	-	-	-	0,01	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BRASKEM PNA	-	-	0,01	0,01	0,02	-	-	-	-	-	-	-	0,11	0,07	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BRF FOODS ON	-	-	-	-	-	-	-	-	0,05	0,13	0,14	0,09	-	-	-	0,06	-	-	-	-	-	-	0,02
BROOKFIELD ON	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,13	-	-	-	0,06	-	-
CCR RODOVIAS ON	-	-	0,01	0,05	-	-	0,15	0,06	0,05	-	-	-	-	0,02	-	0,05	-	-	-	0,10	0,00	-	0,03
CEMIG PN	-	0,06	-	-	-	-	-	-	-	0,06	0,06	-	-	-	0,02	-	0,02	-	0,05	-	-	-	0,16
CESP PNB	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,00	-	-	0,01
CIELO ON NM	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
COMPANHIA BRASL.DISTB. PNA	-	-	-	0,03	-	0,12	0,15	0,04	0,12	-	-	-	-	-	-	-	-	0,05	-	0,01	-	-	-
COPEL PNB	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,15	0,02	-	-	-	-	-	-	-	-	0,07	-	-	-
COSAN ON	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,11	-	-	0,05	-	-	-	0,18	-	-	-
CPFL ENERGIA ON	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,03	-	0,12	-	-	-	-	-	-	-	-
CYRELA REALT ON	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,02	0,09	-	-	0,08	-	-	-	-
DURATEX ON	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,15	0,04
ECODIESEL ON	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,02	-	0,13	0,05	0,01	-
ELETROBRAS ON	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,05	-	0,23	-	-	-	-	0,02	0,01	-	-	-
ELETROBRAS PNB	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,03	0,02	0,07	-	-	-	-	-	0,02	-	-	-	0,06
ELETROPAULO PN N2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,21	-	0,05	-	-	-	0,13	-
EMBRAER ON	0,05	-	-	-	-	0,02	0,04	0,02	0,09	-	-	-	-	-	0,08	0,04	0,20	0,14	0,27	-	0,07	-	-
FIBRIA ON	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
GAFISA ON	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,00	-	0,02	-	-	0,08	-	-	-
GERDAU PN	-	0,04	-	0,04	-	-	-	-	-	0,04	0,05	0,01	0,03	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,01
GOL PN	-	-	-	-	-	-	-	-	0,04	-	0,07	-	-	-	0,01	-	0,02	-	-	-	-	0,02	-
ITAUSA PN	-	-	-	-	0,04	0,06	0,02	-	0,05	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
ITAUUNIBANCO PN	0,10	-	-	0,05	0,04	-	0,03	-	0,01	0,06	-	-	-	-	-	-	0,02	-	-	-	-	-	-
JBS ON	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
KLABIN SA PN	-	-	0,04	-	-	0,01	0,14	-	-	-	-	-	0,02	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,01
LIGHT ON	0,01	-	-	-	0,06	-	-	-	-	-	0,01	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,05	0,00
LLX LOG ON	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
LOJAS AMERIC PN	0,04	-	0,08	0,03	0,04	0,05	-	0,10	0,08	-	-	0,02	-	-	0,09	-	-	-	-	-	-	-	-
LOJAS RENNER ON	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,03	-	-	-	-	-	0,02
MARFRIG ON	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,01	0,11	-	0,04	0,03	-
METALURGICA GERDAU PN	0,05	-	0,09	0,03	-	-	-	-	-	0,04	0,02	0,17	0,10	-	-	0,21	-	-	-	0,14	-	-	-
MMX MINER ON	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,01	0,06	0,01	0,10	-	-	-	-
MRV ON	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,00	-	-	-
NATURA ON	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,07	0,07	-	-	0,08	0,02	-	-	-	0,05	-	0,18	-	-
OGX PETROLEO ON	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
PDG REALT	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
PETROBRAS ON	0,09	0,08	-	-	-	0,03	-	-	0,03	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
PETROBRAS PN	-	0,19	-	0,00	0,01	-	-	-	0,06	0,05	0,21	-	-	-	-	0,02	-	-	-	-	-	-	-
PORTX ON NM	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
REDECARD ON	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,04	-
ROSSI RESID ON	0,03	-	0,07	-	-	0,03	0,24	0,27	0,03	-	-	0,08	-	-	0,04	-	-	-	-	-	-	-	-
SABESP ON	-	-	-	-	-	0,08	-	-	0,02	-	-	-	-	-	-	-	0,04	0,07	-	-	-	-	-
SANTANDER BR UNT	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
SIDER.NACIONAL ON	-	0,10	-	-	-	-	-	-	-	0,03	0,01	-	-	0,12	-	-	-	-	-	-	-	-	0,09
SOUZA CRUZ ON	0,10	-	0,07	0,14	0,04	0,01	-	0,16	0,06	0,07	0,06	0,06	-	-	-	-	-	-	-	-	0,07	0,16	0,01
TAM PN	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,01
TELE NRLES.PARTP.ON	-	0,06	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,02	-	-	-	0,05	-	-	-	-	-	-
TELE NRLES.PARTP.PN	-	-	-	-	-	-	-	-	0,06	-	-	0,10	0,04	-	-	-	0,06	0,02	-	-	-	-	-
TELEMAR NRLES.PNA	-	-	-	-	-	0,02	-	-	-	-	-	0,03	-	-	-	-	-	0,00	0,03	0,01	-	-	0,25
TELESP PN	-	-	0,08	0,04	0,02	0,05	-	0,13	0,02	-	-	0,10	0,21	0,01	0,13	0,03	-	-	0,05	0,15	0,34	0,28	0,01
TIM PART ON	-	-	-	0,01	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,07	-	-	-	-	-	-	-	-
TIM PART PN	-	-	-	0,01	-	-	-	-	-	-	-	0,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,10
TRAN PAULIST PN	-	-	0,02	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,00	-	0,00	-	-	0,12	0,11	-	0,09	0,09	0,02
ULTRAPAR PARTP.PN	0,18	-	0,21	0,31	0,27	0,29	0,08	0,11	0,06	0,13	0,05	0,19	0,10	0,20	0,06	0,04	0,24	0,32	0,03	0,07	-	-	-
USIMINAS ON	0,23	0,13	0,01	0,02	0,00	0,07	-	-	-	0,18	-	-	-	0,10	0,10	-	-	-	-	-	-	-	-
USIMINAS PNA	-	-	-	0,00	0,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
VALE ON	0,02	0,24	0,17	0,05	0,06	-	0,06	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
VALE PNA	0,10	0,05	0,11	0,11	0,21	0,04	-	0,02	-	-	-	-	0,10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
VIVO PN	-	-	-	-	-	-	-	-	0,01	-	-	0,07	-	-	-	-	0,02	-	-	-	-	-	0,00
Soma Total	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**

Apêndice 04 – Portfólios Construídos pelo Modelo MCB

Portfólios Gerados Modelo Bayes	Quadrimestres do Período de Maio de 2002 a Dezembro 2009																					
Descrição Ativo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**
ALL AMER LAT ON	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
AMBEV PN	-	-	-	-	-	0,11	-	-	0,02	0,40	-	0,27	0,28	0,17	0,34	0,22	-	-	0,24	-	0,13	0,06	0,03
B2W VAREJO ON	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BANCO BRASIL ON	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,24	-	-	-	-	-	-	-
BMF BOVESPA ON	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BRADESCO PN	-	-	-	-	-	-	0,39	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,12	-	-	-	-	-	-
BRADESPAR PN	-	0,18	-	-	-	-	0,45	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BRASIL TELECOM PN	-	-	0,14	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,01	-	-
BRASKEM PNA	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BRF FOODS ON	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,60	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BROOKFIELD ON	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,16	-	-	-	-	-	-
CCR RODOVIAS ON	-	-	-	-	0,06	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CEMIG PN	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,12	0,07	0,13	-
CESP PNB	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CIELO ON NM	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
COMPANHIA BRASL.DISTB. PNA	-	-	-	-	-	0,04	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,17	0,24	-	0,16	-
COPEL PNB	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,03	-	-	0,04
COSAN ON	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CPFL ENERGIA ON	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,55	-	-	0,74	-	0,26	0,08	0,18	-
CYRELA REALT ON	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
DURATEX ON	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
ECODIESEL ON	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
ELETROBRAS ON	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,01	-	0,11
ELETROBRAS PNB	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,54	-	-	-	-	0,03	0,05	-
ELETROPAULO PN N2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,09	-
EMBRAER ON	-	-	0,05	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,18	0,01	-	-	-
FIBRIA ON	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
GAFISA ON	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
GERDAU PN	-	-	-	-	0,09	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
GOL PN	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,07	0,04	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
ITAUSA PN	-	0,06	-	-	-	0,32	-	1,00	-	-	-	-	0,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
ITAUUNIBANCO PN	-	-	-	-	-	0,20	-	-	0,30	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
JBS ON	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
KLABIN SA PN	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
LIGHT ON	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,12	-	0,07	-	-
LLX LOG ON	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
LOJAS AMERIC PN	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
LOJAS RENNER ON	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
MARFRIG ON	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,01	-	-
METALURGICA GERDAU PN	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
MMX MINER ON	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,09	-	-	-	-
MRV ON	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
NATURA ON	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,22	-	-	-	-	-	-	0,23	-	-
OGX PETROLEO ON	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
PDG REALT	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
PETROBRAS ON	0,16	-	-	-	-	0,02	-	-	-	-	0,24	-	-	0,31	-	-	0,44	-	-	-	-	-	-
PETROBRAS PN	0,66	0,40	-	-	-	0,06	-	-	0,35	-	0,69	-	-	-	-	-	0,28	-	0,00	-	-	-	-
PORTX ON NM	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
REDECARD ON	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
ROSSI RESID ON	-	-	-	-	-	-	-	-	0,34	-	-	-	-	0,04	-	-	-	-	-	-	-	-	-
SABESP ON	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,19	-	-	-	-
SANTANDER BR UNT	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
SIDER.NACIONAL ON	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,16
SOUZA CRUZ ON	-	-	0,14	0,42	-	0,08	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
TAM PN	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,06	0,04	-	-
TELE NRLES.PARTP.ON	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,02
TELE NRLES.PARTP.PN	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,07	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
TELEMAR NRLES.PNA	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,25	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,26
TELESP PN	0,02	-	0,31	-	-	-	0,15	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,28	0,24	0,03	-
TIM PART ON	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
TIM PART PN	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,32
TRAN PAULIST PN	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,26	-	-	0,05	0,30	-
ULTRAPAR PARTP.PN	-	-	0,15	0,38	0,53	0,16	-	-	-	-	-	-	-	0,15	-	-	-	-	-	-	-	-	-
USIMINAS ON	-	0,36	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,43	-	-	0,11	-	-	-	-	-	-	-	-
USIMINAS PNA	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
VALE ON	0,12	-	-	0,20	-	-	-	-	-	-	-	-	0,28	0,11	-	-	-	-	-	-	-	-	-
VALE PNA	0,04	-	0,22	-	0,32	-	-	-	-	-	-	-	0,37	-	-	-	-	-	-	-	0,04	-	0,07
VIVO PN	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Soma Total	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**	**1,00**