INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO RIO GRANDE DO NORTE

MARLENE GORETE DE ARAÚJO

O USO DO CUBO MÁGICO COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO DE PERMUTAÇÕES E FUNÇÕES

NATAL – RN

2016

MARLENE GORETE DE ARAÚJO

O USO DO CUBO MÁGICO COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO DE PERMUTAÇÕES E FUNÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte, em cumprimento às exigências legais como requisito parcial à obtenção do título de Professor de Matemática.

Orientador: D.r Francisco Batista de Medeiros

NATAL – RN

2016

A663u   Araújo, Marlene Gorete de

O uso do cubo mágico como estratégica de ensino de permutações e funções / Marlene Gorete de Araújo – 2016.

50 f : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte, 2016.

Orientador(a): Profº. D,r Francisco Batista de Medeiros.

1. Álgebra. 2. Permutação - Cubo mágico. 3. Ensino de matemática - Função. I. Medeiros, Francisco Batista de Medeiros. II.

Ficha elaborada pela Seção de Processamento Técnico da Biblioteca Setorial Walfredo Brasil (BSWB) do IFRN.

MARLENE GORETE DE ARAÚJO

O USO DO CUBO MÁGICO COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO DE PERMUTAÇÕES E FUNÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte, em cumprimento às exigências legais como requisito parcial à obtenção do título de Professor de Matemática.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado e aprovado em 12/05/2016, pela seguinte Banca Examinadora:

BANCA EXAMINADORA

Francisco Batista de Medeiros.

Francisco Batista de Medeiros, Dr – Presidente

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte

Neuza Maria Dantas

Neuza Maria Dantas, M.ª – Examinadora

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte

Wharton Martins de Lima

Wharton Martins de Lima, M.e – Examinador

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte

AGRADECIMENTOS

A todos os professores do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte (IFRN) que colaboraram para minha formação docente. Em especial, a meu orientador, Francisco Batista de Medeiros, por todas as contribuições feitas para melhoria deste trabalho.

A toda minha família, pela compreensão das minhas ausências em toda a trajetória acadêmica.

A todos aqueles que acreditaram na realização deste trabalho e deram-me forças e estímulos para dar prosseguimento a esta pesquisa e obter sucesso. Em especial, ao meu parceiro de todas as horas, Ramon Fabricio da Silva Costa.

A Comissão de Aperfeiçoamento de Pessoal do Nível Superior, por todo o investimento feito na minha formação acadêmica e ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), por todas as experiências proporcionadas pelo programa quando bolsista.

Educai as crianças e não será preciso castigar os homens.

(Pitágoras)

RESUMO

O ensino da Matemática, embora tenha apresentado melhoras nos últimos anos, ainda enfrenta dificuldades no que se diz respeito ao ensino e aprendizagem. A utilização de jogos em aulas de Matemática vem sendo uma das possíveis formas de solucionar tais problemas. Este êxito se dá pelas características peculiares desta ferramenta, como a motivação em sala de aula, a ruptura do modelo tradicional do ensino e o despertar da criatividade e da criticidade. Nesta perspectiva, o presente trabalho teve por objetivo mostrar, através de pesquisa bibliográfica, que o Cubo Mágico oferece contribuições para o ensino de Permutações e Funções, visto que através deste jogo é possível construir e/ou encontrar alguns conceitos Matemáticos. Ao final das análises, pôde-se constatar que a utilização do Cubo Mágico, como recurso didático, é uma proposta viável dado sua capacidade de cativar e evidenciar para o aluno que a Matemática está para além dos limites do ambiente escolar.

Palavras-chaves: Educação Matemática. Jogos. Cubo Mágico.

ABSTRACT

The teaching of Math, although presenting improved in recent years, still faces difficulties when it comes to teaching and learning. The use of games in mathematics classes has been one of the possible ways of solving such problems. This success is given by the peculiar features of this tool, as motivation in the classroom, the rupture of the traditional teaching model and the awakening of creativity and criticality. In this perspective, this study aimed to show, through bibliographical research, the Magic Cube offers contributions to teaching of Permutations and Functions, as through this game is possible to build and or find some Mathematical concepts. At the end of the analysis, it could be seen that the use of the Magic Cube, as a didactical resource, is a viable proposal because their capacity to motivate and demonstrate to student that mathematics is beyond the limits of the school environment.

Keywords: Math Education. Games. Magic Cube.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Os estudos sobre Educação Matemática estão avançando a cada dia. Kilpatrick (1998) ressalta que a Matemática e a Psicologia são as influências mais fecundas para este avanço. A Matemática, propriamente dita, pelo fato dos matemáticos estarem, ao longo da história, mostrando-se interessados nos estudos sobre ensino e aprendizagem da Matemática. E a Psicologia pelo fato de estarem, a cada dia, contribuindo com seus estudos a respeito de como, por exemplo, a aprendizagem acontece.

Dentro deste campo de pesquisa em Matemática, tendências como a Etnomatemática, a Psicologia Cognitiva Matemática, a Modelagem Matemática, a História da Matemática, a Didática da Matemática e a Resolução de Problemas fazem-se presentes. Em meio a essas tendências, pesquisas relacionadas a utilização de jogos em aulas de Matemática como recurso pedagógico estão progredindo de maneira significativa nas últimas décadas, podendo ser encontradas pesquisas relacionadas a este assunto desde meados de 367 a.C., quando Platão debatia a importância da utilização dos jogos para o desenvolvimento da aprendizagem de crianças.

Discussões a respeito do uso de jogos em aulas de Matemática objetivam compreender a eficácia desse recurso no processo de ensino e aprendizagem, melhorar a qualidade de ensino, que por sua vez encontra-se defasado, atualizar o ambiente escolar, o qual muitas vezes encontra-se limitados ao livro didático, dentre outros.

De acordo com os dados do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), os resultados do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) não são satisfatórios. No ano de 2000, o PISA referente ao conhecimento matemático foi de 334, já em 2012, o resultado do PISA referente a Matemática foi de 391. Comparando estes resultados, podemos ver que o Brasil teve um grande avanço nessa última década, no entanto, em escala mundial, o país ainda fica nas últimas posições quando o assunto é Matemática. O fracasso no ensino de Matemática permeia todos os níveis de ensino. Tais fracassos vão desde a reprovação no final do ano letivo, até à falta de interesse de professores e alunos, no processo de ensino e aprendizagem de Matemática, respectivamente. Outro fator que influencia neste fracasso se faz presente na intocabilidade da Matemática, visto que, por consequência de uma construção histórica e social, esta disciplina é considerada “para poucos”.

O ensino de Matemática é, muitas vezes, focado em definições, axiomas e postulados e isso, por sua vez, faz com que o aluno considere os conhecimentos matemáticos externos à sua vida, a seu cotidiano. Contudo, ensinar Matemática sem “construir uma ponte” que liga o conhecimento científico ao cotidiano do estudante, é um dos fatores que podem influenciar no fracasso da aprendizagem desta ciência.

Ensinar Matemática tem sido uma tarefa que apresenta vários tipos de dificuldades: as relacionadas a interação entre professor e aluno, as relacionadas a interação entre aluno e conteúdo, as relacionadas a interação entre alunos e conhecimentos prévios exigidos e as advindas de visões distorcidas e errôneas sobre esta área de conhecimento. Tais dificuldades, ameaçam o ensino de Matemática, visto que não são fáceis de serem superadas. É nesta perspectiva que, professores e pesquisadores são desafiados a encontrar soluções para melhorar o ensino de Matemática.

Atualmente, um dos focos privilegiados da pesquisa em Educação Matemática no Brasil voltam-se para a utilização de jogos em sala de aula. A proposta de utilização de jogos para o ensino de conteúdos matemáticos fortaleceu-se de tal forma, no Brasil, que os próprios documentos oficiais de ensino sugerem que eles sejam utilizados por professores de Educação Básica (Brasil, 1997).

Assim, vários pesquisadores, como por exemplo, Tahan (1961), Smole (2008) e Macedo (2005), têm feito investigações sobre o uso de jogos em sala de aula, buscando compreender melhor quais suas contribuições para o ensino de Matemática.

Justando-se a tais pesquisadores, buscaremos analisar a importância e a eficácia da utilização de jogos em aulas de Matemática, uma vez que a utilização deste recurso estimula, hipoteticamente, o processo de aprendizagem dos alunos. Nesta perspectiva, mostraremos que a utilização do Cubo Mágico em aulas de Matemática é uma proposta viável, visto que através deste jogo podemos construir e/ou encontrar alguns conceitos Matemáticos, tais como o conceito de permutação, funções, volume, dentre outros. Além disso, através do Cubo Mágico, construiremos uma ponte entre o cotidiano do aluno e os conceitos matemáticos, mostrando assim que a Matemática pode estar, muitas vezes, onde menos esperamos.

Tom Davis (1983) argumenta em seu texto que uma pessoa pode passar horas e horas mexendo no Cubo Mágico afim de montá-lo. Deste modo, acreditamos que o Cubo Mágico pode aguçar a curiosidade do aluno, fazendo com que o mesmo torne-se mais participativo no processo de ensino e aprendizagem.

Segundo publicação recente do diário paulistano Folha de São Paulo, o Colégio Joana D'arc, localizado na cidade de São Paulo, criou uma disciplina obrigatória sobre o Cubo Mágico. Nesta disciplina é trabalhado, principalmente, o raciocínio lógico. Autores como Cinoto e Dias (2014) e Rodrigues e Silva (2013) já fizeram algum tipo de estudo sobre a utilização do Cubo Mágico no ensino de Matemática. Com isso, nos basearemos através destas pesquisas e de nossos argumentos para afirmarmos que, de fato, é possível fazer uso deste jogo em sala de aula.

Assim, acreditamos que este estudo contribuirá para o cenário de pesquisa que delineamos, pois nos desafiamos a discutir a utilização de jogos no Ensino Médio, nível este que não encontramos muitas pesquisas com este enfoque. Ainda, consideramos que nossa pesquisa apresenta um valor significante para a Educação, tendo em vista que, através do Cubo Mágico, poderemos aliar algo concreto ao conhecimento e estudo de conteúdos abstratos.

Elegemos para este estudo, o uso de Pesquisa Bibliográfica, visto que foi utilizado registros disponíveis, decorrentes de pesquisas anteriores, para falarmos sobre jogos, em especial o Cubo Mágico. Ainda, adotamos o caráter exploratório para esta pesquisa pois foi buscado apenas levantar informações sobre o uso de jogos em aulas de Matemática e a Matemática existente no Cubo.

Este trabalho foi dividido em quatro sessões. Na primeira sessão falamos primeiramente sobre a importância da utilização dos jogos na Educação, em especial no ensino de Matemática. Em seguida, apresentamos parte da história dos jogos, além de falarmos também da história do Cubo Mágico. Na segunda sessão, apresentamos o nosso jogo em questão, falando sobre seu mecanismo de modo geral e sobre suas regras e seu objetivo principal. Para finalizar, falamos de algumas das técnicas utilizadas para montar o Cubo Mágico, dando enfoque também para o número mínimo de movimentos que podem ser aplicados no Cubo para montá-lo. Por fim, na terceira e na quarta sessão, tentamos mostrar, através de algumas situações criadas, que podemos encontrar o conceito de permutação e funções, respectivamente, presentes no Cubo Mágico, mostrando assim que podemos fazer uso deste jogo em sala de aula.

2 JOGO: BASES TEÓRICAS E CONTEXTO HISTÓRICO

Antes de falarmos sobre o Cubo Mágico propriamente digo, precisamos, compreender o que são os jogos em geral. Assim, falaremos inicialmente neste capítulo o que é um jogo e qual sua importância para o ensino, em especial o ensino de Matemática. Por fim, faremos uma explanação sobre a história dos jogos, dando um enfoque a história do Cubo Mágico.

2.1 O QUE É O JOGO?

Todos nós já ouvimos falar sobre jogos, mas será que saberíamos responder o que seria um jogo? Talvez essa pergunta não seja tão fácil de ser respondida, pois achar uma definição exata sobre jogo seria praticamente impossível. De acordo com Brougère (1998, p. 14), ao falarmos de jogos "estamos lidando com uma noção aberta, polissêmica e às vezes ambígua" visto que os jogos envolvem diversas culturas, cada qual com seus modos próprios de conversar e criar formas de jogar.

Muitas são as atividades as quais levam o nome de jogo. No esporte, por exemplo, existem algumas modalidades, como é o caso do jogo de futebol e do jogo de beisebol. Nas brincadeiras infantis, os jogos também fazem-se presente como, por exemplo, a amarelinha. Existem ainda competições de diversos jogos, como o xadrez e o pôquer. Assim, se fossemos avaliar quaisquer destas atividades citadas anteriormente, o que seria classificado como jogo iria depender diretamente da cultura do povo a qual estamos avaliando. Um exemplo disso é que aqui no Brasil, nós consideramos o Ábaco como um brinquedo, ou ainda como um material didático utilizado nas aulas de matemática, enquanto no Japão este mesmo objeto é utilizado como ferramenta de trabalho. Deste modo, para definirmos o que seria um jogo, precisaríamos levar em consideração toda a bagagem cultural e ainda classificar, caracterizar e avaliar a atividade para de fato sabermos se ela se encaixa como jogo, ou não.

De acordo com Huizinga (1990, p. 33)

> O jogo é uma atividade ou ocupação voluntária, exercida dentro de certos limites de tempo e espaço, segundo regras livremente consentidas, mas absolutamente obrigatórias, dotado de um fim em si mesmo, acompanhado de um sentimento de tensão e alegria e de uma consciência de ser diferente da vida cotidiana.

Ainda para o autor, o jogo é um elemento da cultura. No entanto, de acordo com Lima (2008, p. 59)

> Indicar o jogo apenas como um elemento da cultura, atividade não produtiva, incerta, não é suficiente para que ele possa ser transformado em recurso pedagógico. Torna-se essencial revelar justificativas convincentes, que expressem qual o seu papel e a sua importância na aprendizagem e no desenvolvimento das crianças, isto é, pode contribuir, junto com as outras atividades, para que a escola alcance as suas finalidades.

Nesta perspectiva, ainda segundo Lima (2008, p. 59) "devemos considerar o jogo como uma atividade de natureza histórica e social, motivada por uma atividade voluntária, prazerosa, de persistência e submissão às regras e aos resultados", ou seja, devemos considerar o jogo como um elemento que vai para além da cultura.

Autores como Chateau (1987), Piaget (1971) e Tahan (1961) qualificam os jogos em distintas funções. Escolhemos falar aqui sobre a abordagem que Tahan apresenta em seu livro "Didática da Matemática". Os jogos, segundo Malba Tahan (1961) dispõem de distintas funções. O autor os classifica em: passatempo, recurso para descanso, agente do progresso social, e agente de transmissão de ideias e costumes. De fato, muitos usam o jogo como forma de passar o tempo, sendo uma forma de ocupar agradavelmente as horas de lazer. Outros usam o jogo como recurso de descanso. Um bom exemplo disso são os jogos de celulares e computadores, pois muita gente, depois de um dia longo, costuma fazer uso desses tipos de jogos como forma de aliviar seu cansaço. Os jogos agentes de progresso social são aqueles que podem cooperar na ampliação de laços entre pessoas, fazendo-as amigas. Por fim, há também os jogos agentes de transmissão de ideias e costumes que constantemente são utilizados em aulas tendo em vista que são atividades lúdicas que auxiliam na construção de diversos conhecimentos.

O jogo pode ser um trabalho ou puramente um ato para se divertir. Segundo Tahan (1961) um exemplo de jogo que ora é jogo, propriamente dito, ora é trabalho, é a pesca, uma vez que algumas pessoas praticam a pesca como uma atividade recreativa e outras entregam-se à pesca por profissão. Outro exemplo disso é a natação, pois os atletas, embora se divirtam, praticam-na como profissão e os amadores a praticam por diversão ou como defesa pessoal.

Nas dimensões lúdicas, devemos ter em mente a diferença entre o ato de brincar e o ato de jogar. Segundo Macedo (2005) o ato de brincar é agradável por si só, mesmo que existam objetivos, meios e resultados a serem alcançados. Embora este ato seja divertido, ele requer atenção, concentração e disponibilidade. Já o ato de jogar é

> [...] um dos sucedâneos mais importantes do brincar. O jogar é o brincar em um contexto de regras e com um objetivo predefinido. [...] é uma brincadeira organizada, convencional, com papéis e posições demarcadas. O que surpreende no jogar é seu resultado ou certas reações dos jogadores. [...] O jogo é uma brincadeira que evolui. (MACEDO, 2005, p. 14)

Além disso, uma diferença clara entre o ato de brincar e o de jogar são as regras, pois nas brincadeiras as regras podem variar, sendo mais flexíveis e nos jogos, as regras são de extrema importância para o desencadear do jogo. Mastrocola (2013) em seu texto traz um bom exemplo disso, pois brincadeiras populares como o “esconde-esconde” possuem regras de total flexibilidade, e podem variar de grupo para grupo. Já os jogos de tabuleiro apresentam sempre manuais cheios de regras, fazendo com que os jogadores não possam alterar sua forma de jogar. Deste modo, podemos observar uma diferença significativa entre jogar e brincar visto que, enquanto no ato de brincar o sujeito é livre para alterar possíveis regras, no ato de jogar o sujeito será sempre limitado, guiado por regras. Assim, em caso de jogos aplicados à educação, é necessário ter definido o que se pretende ser alcançado, para que o jogo não seja apenas um ato de brincar.

Segundo Macedo (apud TEIXEIRA; APRESENTAÇÃO, 2014) para se trabalhar com jogos, o professor deve considerar alguns pontos e características importantes: objetivo, público, material, tempo, espaço, dinâmica, papel do adulto, proximidade de conteúdo, avaliação e continuidade. O primeiro passo quando se vai trabalhar com jogos é definir os objetivos, pois são eles que vão direcionar e atribuir valor a atividade. Conhecer os alunos e suas características é primordial para o sucesso da atividade. Outro ponto importante é definir o material, o tempo e o espaço para aplicação da atividade, visto que estes precisam estar adequados com a realidade da comunidade escolar. Antes da aplicação do jogo, é preciso definir a dinâmica da atividade, prevendo possíveis dúvidas e planejando estratégias que irão compor as ações dos alunos/jogadores. O professor, no ato da aplicação da atividade tem o papel de mediador, fazendo uma ponte entre o jogo e o conteúdo estudado, além de interferir quando houver necessidade. Por fim, o professor precisa avaliar e dar continuidade a atividade de modo geral, buscando compreender melhor a aprendizagem de seus alunos e aperfeiçoar a atividade, evitando possíveis erros.

Tratando-se de educação, o jogo pode ser classificado por modalidades, faixa etária, grau de finalidade, dentre outras. Brenelli (apud TEIXEIRA; APRESENTAÇÃO,

2014) classifica os jogos em jogos de estratégias, jogos de treinamento e jogos geométricos. Os jogos de estratégias objetivam desenvolver habilidades relacionadas ao raciocínio lógico. Nestes jogos o educando apropria-se das regras e busca caminhos para atingir o objetivo final, utilizando assim estratégias e prevendo jogadas do seu adversário, antecipando-se a elas. Já os jogos de treinamento são geralmente aplicados no lugar das listas de exercícios, com o objetivo de reforçar e fixar o conteúdo estudado. Por fim, os jogos geométricos objetivam desenvolver a percepção de espaço e a observação sistematizada das formas geométricas do educando, além de desenvolver o raciocínio dedutivo e da imaginação.

Para Tahan (1961) os jogos utilizados em sala de aula podem se dividir em duas categorias quanto aos seus objetivos. Eles podem ter objetivos morais e/ou objetivos didáticos. O jogo com objetivos morais, quando aplicado corretamente em sala de aula, pode auxiliar o docente no combate a certos complexos, educando a atenção, despertando o interesse pelo estudo, forçando o aluno a ser correto e leal, reavivando a simpatia pelo mestre, dentro outros. Já o jogo com objetivos didático auxilia o docente no ensino de determinado conteúdo, definindo novos conceitos ou revisando conceitos já vistos.

O jogo quando bem orientado e oportuno, é um interessante recurso didático que auxilia numa melhor e mais segura aprendizagem. Malba Tahan (1961) cita algumas finalidades do jogo como recurso didático. Para ele, o jogo pode auxiliar na fixação da aprendizagem, retificar a aprendizagem, motivar, complementar e pode também ser uma atividade lúdica. O jogo com finalidade de fixar a aprendizagem pode ser utilizado logo após a explicação de um determinado conteúdo. O jogo na retificação da aprendizagem ajuda, principalmente, aqueles alunos que estão apresentando um entendimento errôneo sobre o conteúdo estudado. Já o jogo na verificação da aprendizagem ajuda o professor a perceber o quanto os alunos sabem e identificar também os erros, e através dessa identificação intervir posteriormente. O jogo também pode ser aplicado como uma atividade lúdica, com o objetivo, por exemplo, de aquietar a turma quando a mesma se encontra agitada. Já a função motivadora do jogo ajuda o professor a fazer com que o aluno se interesse por determinado conteúdo e/ou disciplina. Por último, e não menos importante, o jogo pode ser apresentado como uma função complementar, utilizado em situações extremas, como por exemplo, na ausência do professor de uma determinada turma.

Em suma, podemos dizer que quando o jogo é utilizado para promover a aprendizagem e o desenvolvimento do aluno, ele passa a ser um aliado importante para o ensino de diversas disciplinas, pois no momento em que o jogo coloca o aluno diante de situações, ele aproxima o aluno tanto de seus colegas de classe, quanto do professor e do conteúdo estudado, além de ajudar no desenvolvimento das estruturas cognitivas.

2.2 A IMPORTÂNCIA DOS JOGOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Na sala de aula, os professores se deparam com múltiplos desafios. No que se diz respeito a disciplina de matemática, sabemos que existem muitas barreiras a serem quebradas. O bloqueio dos alunos em relação a esta disciplina, a falta de alguns conhecimentos primordiais para a aprendizagem de variados conteúdos e o uso excessivo da aula expositiva são alguns exemplos de fatores que não ajudam no desenvolvimento de uma aula proveitosa, tanto para o aluno quanto para o professor.

D'Ambrosio (1989) considera uma atitude falha quando o professor faz uso apenas de aulas expositivas, onde o aluno é um mero receptor de conhecimento. A partir disso, a autora aponta algumas consequências dessa prática educativa. A primeira delas é que esta prática induz o aluno a considerar que a aprendizagem de Matemática só se dá através de acúmulo de algoritmos e fórmulas. A segunda é que o aluno passa a considerar a Matemática como um corpo de conceitos estáticos, verdadeiros e que nunca sofreu, sofre ou sofrerá mudanças. Além disso, o aluno perde a autoconfiança e é bastante comum desistir de solucionar um problema matemático no primeiro obstáculo que aparece, acreditando, pois, que a Matemática é para poucos.

Vale ressaltar que a "culpa" disso tudo não se limita apenas ao professor. Existem inúmeros motivos para isso ocorrer. Às vezes isso acontece pelo fato do professor não ter uma formação docente de qualidade, sendo privado de qualquer conhecimento sobre novas metodologias de ensino ou então ocorre pelo fato da escola exigir do professor que ele dê todo o conteúdo do livro didático, o famoso "bater a capa do livro".

Assim, na tentativa de melhorar as aulas de Matemática e ajudar o aluno no processo de aprendizagem, a utilização de jogos vem sendo uma estratégia bastante usada, visto que

> [...] é importante que os jogos façam parte da cultura escolar, cabendo ao professor analisar e avaliar a potencialidade educativa dos

> diferentes jogos e o aspecto curricular que se deseja desenvolver. (BRASIL, 1997, p. 36).

No entanto, embora sejam conhecidas todas as vantagens adquiridas através da utilização dos jogos, de acordo com Smole (2008, p. 10)

> O sistema educativo de modo geral oferece resistências a esse recurso devido a uma crença bastante difundida na sociedade de que a matemática constitui-se em uma disciplina séria, enquanto a utilização de jogos supõe introduzir nas aulas dessa disciplina um componente divertido, o que comprometeria tal seriedade.

Para mudarmos este cenário precisamos deixar de negligenciar a utilização de jogos no ensino de Matemática, uma vez que eles ajudam, principalmente, a envolver mais o aluno na aula, fazendo com que ele deixe de ser um mero receptor e passe a ser participativo, um agente do processo de ensino e aprendizagem.

Em conformidade com Smole (2008, p. 9),

> Em se tratando de aulas de matemática, o uso de jogos implica uma mudança significativa nos processos de ensino e aprendizagem que permite alterar o modelo tradicional de ensino, que muitas vezes tem no livro exercícios padronizados seu principal recurso.

Além do mais, o uso dos jogos em aulas de Matemática, segundo Borin (1996, apud TEIXEIRA; APRESENTAÇÃO, 2014, p. 304) "é um importante fator que contribui para diminuir os bloqueios apresentados por muitos alunos que temem a matemática e sentem-se incapacitados em aprendê-la" visto que os jogos assumem o papel de motivar o aluno no processo de aprendizagem. Por consequência disso, a aprendizagem torna-se mais significativa e menos mecânica.

É através do jogo que o aluno, de acordo com Smole (2008, p. 9), "têm a oportunidade de resolver problemas, investigar e descobrir a melhor jogada; refletir e analisar as regras, estabelecendo relações entre os elementos do jogo e os conceitos matemáticos", desenvolvendo e estimulando, assim, segundo Teixeira e Apresentação (2014, p. 304) "habilidades de raciocínio lógico e espacial, de concentração, de interpretação, de investigação, de previsão, de análise por comparação e de tomada de decisão lógica e embasada em fatos e argumentos". Com isso, o jogo aproxima o aluno tanto do conhecimento matemático quanto do científico, visto que ao jogar o aluno está produzindo conhecimento e envolvendo-se com a ciência.

A utilização do jogo como material didático no ensino de Matemática tem como objetivo

> Criar um ambiente descontraído que viabilize a aprendizagem significativa por meio da observação, da criatividade, do pensamento lógico, da resolução de situação problema, da articulação com diferentes conhecimentos e da inter-relação com os colegas de sala. (TEIXEIRA; APRESENTAÇÃO, 2014).

Deste modo, percebemos que o jogo liberta o aluno, pois torna-o criativo e ativo no processo de aprendizagem. Ainda, de acordo com Smole (2008, p.10), “o jogo reduz a consequência dos erros e dos fracassos do jogador, permitindo que ele desenvolva iniciativa, autoconfiança e autonomia”, além de proporcionar, através da discussão com os demais jogadores, o “potencial de participação, cooperação, respeito mútuo e crítica” (p. 11).

Os jogos em aulas de Matemática, de acordo com Pedro Neto e Silva (2008), se classificam em: jogos que possuem um fator de sorte, jogos que apresentam informações ocultas - ou seja, jogos em que cada jogador possui informações que o adversário não sabe - e jogos de informações perfeitas, os chamados jogos abstratos. Os jogos de sorte são, por exemplo, jogos que fazem uso de dados, já a batalha naval se classifica como um jogo que apresenta informações ocultas, os jogos de xadrez e dama são ditos abstratos, visto que suas regras são conhecidas por todos os jogadores, além de não trabalhar com nenhum fator de sorte.

Se tratando da aplicação do jogo, Smole (2008, p. 17) aponta que “na primeira vez em que joga, o aluno às vezes mal compreende as regras. Por isso, se para além das regras desejamos que haja aprendizagem por meio do jogo, é necessário que ele seja realizado mais de uma vez”.

Assim, é importante notarmos que a aprendizagem não se encontra no jogo, a mesma torna-se presente no ato de jogar, posto que o aluno começa a refletir sobre seus atos, torna-se autônomo e confiante em si mesmo. Além disso, podemos dizer que o sucesso deste recurso se encontra em como o professor utiliza-o, pois caso ele não seja bem direcionado/planejado e fuja significativamente da realidade dos alunos, não teremos resultados positivos, visto que o professor só pode escolher este recurso caso ele perceba que os alunos serão aptos a esta nova forma de ensinar e aprender. Ao aplicar o jogo, o professor precisa conhecê-lo nos mais minuciosos detalhes, a fim de nada seja passado despercebido. Em suma, acreditamos que o uso de jogos em aulas de Matemática é de grande importância, em primeiro lugar porque sabemos que, quando bem planejados, eles resultam em bons frutos, em segundo porque esta metodologia de ensino torna as aulas mais atrativas, fazendo com que o aluno sinta-se mais atraído em aprender determinado conteúdo, e em terceiro porque a utilização dos jogos trazem ensinamentos que vão para além da ciência, visto que ao jogar o aluno desenvolve diversas habilidades - como por exemplo o desenvolvimento do raciocínio lógico -, tornando-se cidadãos criativos, críticos e sociáveis.

2.3 HISTÓRIA DOS JOGOS

O ato de jogar está presente desde muito cedo na civilização. No entanto, não sabemos ao certo onde, como e por que o jogo surgiu. Segundo Pedro Neto e Silva (2008, p. 16), “as razões profundas que levam a que todas as civilizações desenvolvam jogos são ainda desconhecidas, mas é consensual o seu interesse cultural e educativo”.

Sabendo que os jogos estão presentes em nossa sociedade a muitos séculos, alguns autores, como por exemplo Pedro Neto e Silva (2008), afirmam que provavelmente os jogos são responsáveis pelas primeiras atividades estritamente mentais que o Homem realizou. Ainda, segundo Huizinga (1990) os jogos talvez sejam mais antigos que a própria cultura.

Historicamente, o jogo mais antigo no qual conhecemos as regras é chamado de *Ur* ou *Jogo real de Ur*. Este jogo, segundo Pedro Neto e Silva (2008), floresceu na Mesopotâmia e só foi descoberto nos anos 20 do século passado. Até hoje, apesar de suas regras exatas não terem sido descobertas, sabemos que ele se trata de uma corrida entre dois oponentes e que provavelmente o primeiro jogador que concluir o caminho ordenado pelo jogo seria o vencedor.

Os jogos também fizeram parte do Egito Antigo, pois no *Livro dos Mortos* e no túmulo de Nefertari aparecem evidências de que o ato de jogar esteve presente neste momento da história. Um jogo egípcio bastante conhecido é o *Cães e Chacais*, que se trata de um jogo de corrida. Neste jogo, segundo Pedro Neto e Silva (2008, p. 19) há dois percursos independentes, onde existem “linhas que ligam pares de casas boas e más, que indicam para onde deve deslocar uma peça que nelas caia”. Outro jogo conhecido desde o Egito Antigo é o *jogo do moinho*, antecessor do *jogo da velha*. Neste jogo, cada jogador tem nove peças e seu objetivo é reduzir o oponente a apenas duas peças no tabuleiro, ganhando assim, aquele que conquistar este objetivo primeiro.

Na Civilização Romana, os soldados costumavam jogar o *Ludus Latrunculorum*, também conhecido como o jogo do soldado. Tratava-se, segundo Pedro Neto e Silva (2008, p. 20), “de um jogo de estratégia militar em que o tabuleiro funcionava como um campo de batalha e as peças como soldados, mas não se conhecem as regras originais”. Outro jogo advindo deste período histórico foi o *alquerque*, antecessor do famoso jogo de damas. O *Stomachion* também faz parte deste momento, o qual Arquimedes descreveu como sendo um *puzzle*, ou seja, um quebra cabeça, geométrico e que se assemelha ao *Tangram* que conhecemos hoje. Ainda de acordo com Pedro Neto e Silva (2008), Arquimedes chegou a descrever propriedades combinatórias do *Stomachion*, mas a descrição não sobreviveu até o tempo atual.

Durante a Idade Média, as classes cultas cultivaram diversos jogos. Segundo Pedro Neto e Silva (2008), “alguns tiveram circulação restrita às universidades, conventos e outros meios onde se compreendiam as regras complicadas dos jogos”. Dentre eles, o *Rithmomachia* destaca-se sendo um jogo pedagógico concebido para aprender algumas relações numéricas, como por exemplo, as progressões. É válido lembrar que, naquela época, o conhecimento da aritmética atribuía-se a valores religiosos e morais, sendo assim um dos jogos mais importantes para a educação das classes eruditas.

Durante o decorrer da história, alguns matemáticos também se enveredaram para o mundo dos jogos. Segundo Pedro Neto e Silva (2008), o matemático italiano, Jerónimo Cardano, do século XVI, se dedicou a escrita do livro *Ludo Aleae* falando sobre os jogos de azar existentes até aquele século. Ainda, a ele se atribui a criação do *puzzle* que hoje é conhecido por *anéis chineses*.

Em 1857, o matemático irlandês Hamilton inventou o jogo *Icosian*. Tal jogo não teve muito sucesso na sua comercialização, no entanto, era um jogo de grande potencial matemático pois estava relacionado com os circuitos hamiltonianos, conceito hoje básico da teoria dos grafos.

Em 1883, o matemático francês, Edouard Lucas, inventou as *Torres de Hanói*, *puzzle* este que ainda hoje é muito popular e que está relacionado com alguns conceitos matemáticos, como por exemplo o Princípio da Indução Matemática e a Relação de Recorrência.

Um dos mais antigos antepassados do xadrez é o *Chaturanga*, que era jogado no século VI, na Índia. Com o desenvolvimento das regras, após o século XVII o xadrez se impôs no mundo dos jogos, tornando-se assim conhecido e praticado mundialmente.

Com o avanço da tecnologia, a criação de jogos eletrônicos ganhou destaque no mercado mundial. Hoje, jogos de cartas e tabuleiros podem ser jogados facilmente em aparelhos eletrônicos. Além disso, a criação de jogos eletrônicos está a cada dia mais surpreendendo os usuários, visto que novos jogos são criados e disponibilizados a seus possíveis jogadores diariamente.

Atualmente, existem diversas categorias de jogos, tais como: jogos de tabuleiro, jogos de carta, jogos eletrônicos, jogos de dados, etc. A criação e venda destes não param, assim cabe ao jogador escolher o jogo no qual mais o agrade.

2.4 CRIAÇÃO DO CUBO MÁGICO

Todos os dias diversas coisas são criadas. Algumas fazem sucesso, outras não. Algumas cumprem seu objetivo inicial, outras vão para além dele e algumas fracassam. Diante dessas diversas criações, muitas vezes não nos interessamos em saber como, por exemplo, nosso jogo favorito foi criado ou muito menos de onde surgiu a ideia para criação daquele nosso filme predileto.

Aqui, acreditamos que a história da criação é parte fundamental para conhecermos melhor sobre diversos assuntos. A história nos informa, nos faz conhecer algo que jamais imaginaríamos. Foi diante disso que escolhemos falar aqui de como, onde e com qual objetivo o Cubo Mágico foi criado.

O Cubo Mágico, com todo seu esplendor, surgiu em 1974. Segundo Frans Johansson (2013) este *puzzle* foi a mania que chegou a vencer todas as manias daquela época. É considerado um dos brinquedos mais bem sucedidos da história, sendo vendidas mais de 350 milhões de unidades para todo o mundo, o que fez com que o seu criador se tornasse um dos homens mais ricos da Hungria.

Ainda segundo Frans Johansson (2013), seu criador, Erno Rubik, não fazia absolutamente nenhuma ideia do que estava criando. O Cubo não foi uma obra planejada e pesquisada cuidadosamente, mas sim um resultado de uma criatividade gigantesca.

Erno Rubik nasceu na Hungria, na cidade de Budapeste. Era professor universitário de designer de interiores e buscava criar uma peça que o ajudasse a explicar perfeitamente para seus alunos de arquitetura o conceito de terceira dimensão. De acordo com Frans Johansson (2013), aos 29 anos de idade Rubik encheu um cômodo do apartamento de sua mãe com objetos presos a blocos por meio de tiras de elásticos. Os blocos eram separados entre si, mas quando montados formavam um cubo. Quando Rubik girava os cubos de lugar, os elásticos que o prendiam começavam a romper. No entanto, ele conseguiu solucionar este problema da seguinte forma: conectou os cubos entalhando pequenas fendas dentro dos quadrados e pregando adesivos coloridos para identificá-los. Com o cubo montado, ele verificou que sua forma continuava intacta e que as peças do cubo se moviam individualmente dentro dele. Foi assim que, de certa forma sem querer, Erno Rubik criou o jogo que o deixaria rico futuramente.

Com o Cubo criado, Erno percebeu que além de ter criado um objeto tridimensional, ele também havia inventado um quebra-cabeça. Deste modo, ele precisou de um pouco mais de um mês para conseguir solucionar seu quebra-cabeça.

A comercialização do Cubo Mágico demorou um pouco pois, segundo o *site* norte-americano *Rubik's*, nos anos 70 a Hungria fazia parte do Regime Comunista e qualquer tipo de importação ou exportação era extremamente controlada. Assim, para a exportação do Cubo Mágico acontecer, seria necessário que ele ganhasse reconhecimento mundial. Para isso, alguns matemáticos húngaros começaram a levar o Cubo para Conferências Internacionais e também alguns empresários o levavam para feiras de brinquedos. Foi assim que em 1979, na feira de brinquedos de Nuremberg, que Tom Kremer, especialista em brinquedos, concordou em vender este *puzzle* para o mundo inteiro. Assim, a partir daí os Cubos Mágicos começaram a ser fabricados pela fábrica de brinquedos “Ideal Toy Company” e, além disso, passou a ser comercializado com o nome de “Cubo de Rubik”, em homenagem a seu criador.

O Cubo de Rubik, que no Brasil é chamado de Cubo Mágico, vinha sendo esquecido, porém nos últimos anos sua popularidade ressurgiu e hoje é fabricado por diversas marcas, inclusive brasileiras.

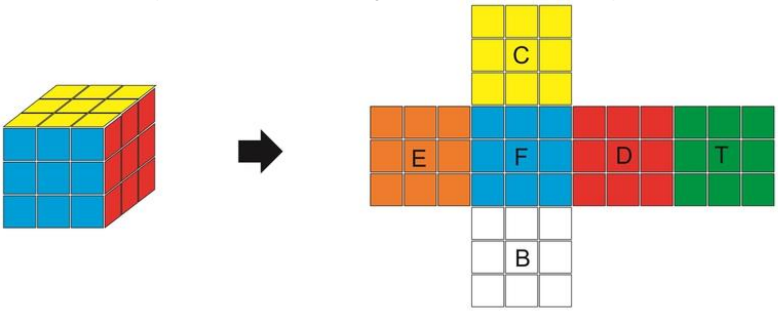
Para seu criador, o que ainda o interessava não era, contudo, o Cubo Mágico como um objeto, mas sua relação com o usuário. Tais relações com os usuários foram tão significativas que o Cubo, de acordo com o *site Rubik's*, iniciou movimentos de arte, como por exemplo o Rubik Cubismo, vídeos famosos, filmes de Hollywood e ainda teve seu próprio programa de TV. Do mesmo modo que o Cubo representava genialidade, ele também representava confusão. Este jogo deu início a um novo esporte, chamado de *speedcubing*, e inclusive já foi levado para o espaço.

Com a popularidade deste jogo, o mercado começou a desenvolver várias versões para ele. Além da versão 3x3x3, criada por Rubik, as versões 2x2x2, 4x4x4 e 5x5x5 surgiram para desafiar àqueles que queiram ser desafiados, cabendo assim ao jogador escolher a versão que mais o interesse.

3 CONHECENDO O CUBO MÁGICO

O Cubo Mágico, também conhecido como Cubo de Rubik, é um *puzzle* formado por 6 faces, 12 arestas e 8 vértices. Cada face, com o Cubo montado, é composta por uma cor diferente. De acordo com o padrão estabelecido mundialmente, a face de cima (C) é da cor amarela, a face de baixo (B) é da cor branca, a da direita (D) é da cor vermelha, a da esquerda (E) da cor laranja, a da frente (F) é da cor azul e a de trás (T) é da cor verde (vide Figura 1). Além disso, nos Cubos tradicionais, a cor branca sempre fica oposta a cor amarela, a cor vermelha sempre será oposta a cor laranja e a cor azul sempre será oposta a cor verde.

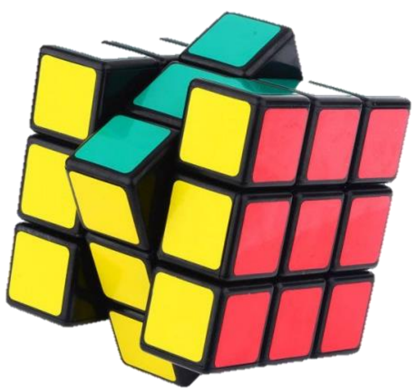
Figura 1 Planificação do Cubo Mágico



Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2016)

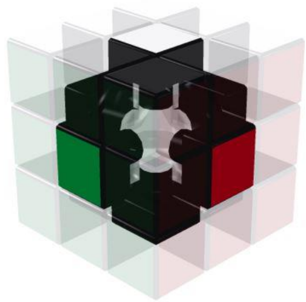
O Cubo possui três camadas (vide Figura 2), sendo duas camadas compostas por 9 cubos menores e a camada do meio composta por 8 cubos menores, somando assim um total de 26 cubos menores. Porém, em alguns materiais, como Colmez (2010), encontramos a informação de que o Cubo Mágico possui 27 cubos menores. Tais documentos contam com a existência de um cubo central, no entanto, este cubo é inexistente como podemos ver na Figura 3.

Figura 2 As três camadas do Cubo Mágico



Fonte: Vsimportados

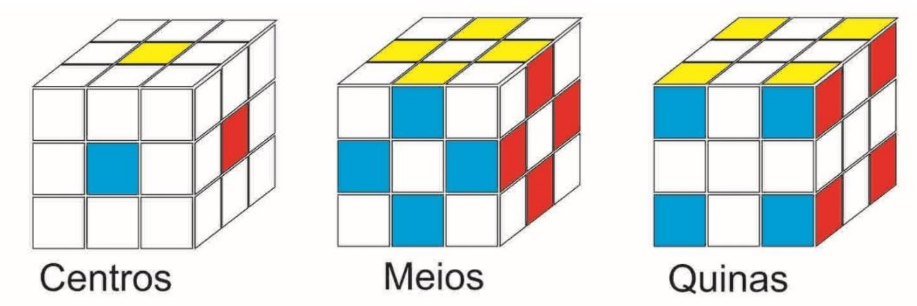
Figura 3 Centro do Cubo Mágico



Fonte: Walter Pereira Rodrigues de Souza

Dos 26 cubos menores que compõem o Cubo Mágico, 6 deles são fixos, tendo em vista que embora a camada que eles pertençam sofra algum movimento, eles nunca trocarão de lugar com outra peça, e 20 são móveis. Os cubos fixos no mecanismo, chamados centrais, estão localizados no centro de cada uma das faces e possuem apenas uma cor. São estes cubos que determinam a cor de cada face do Cubo Mágico. Os cubos móveis são classificados como cubos de meios e cubos de quinas. Os *meios*, como são mais conhecidos, são as peças que possuem duas cores. E as *quinas* são as peças que literalmente localizam-se nas quinas do Cubo. Estas peças possuem três corres diferentes. Para melhor compreensão, vide Figura 4.

Figura 4 Identificando os centros, os meios e as quinas



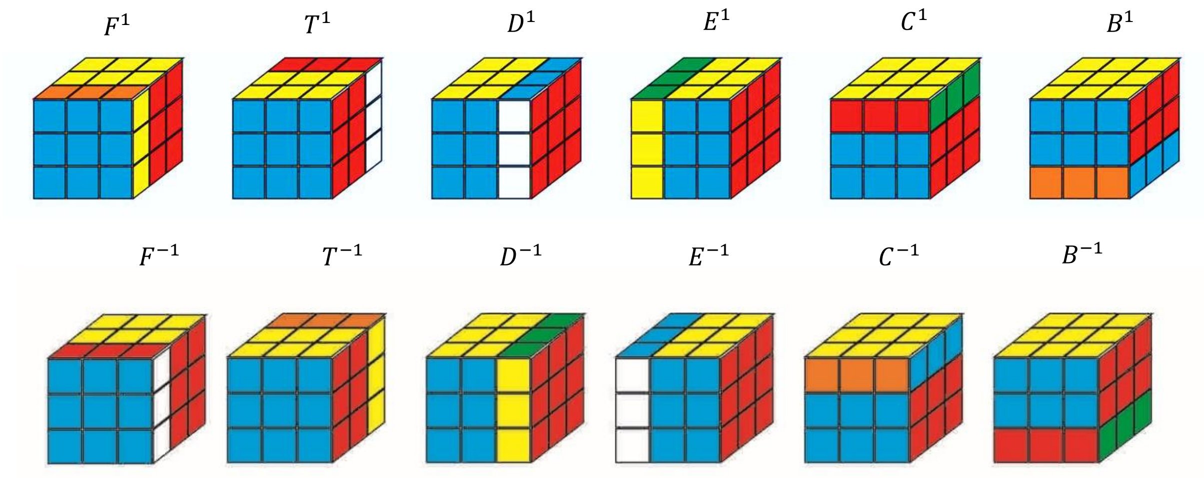
Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2016)

Os movimentos realizados em cada camada do Cubo Mágico são sempre de 90°, 180°, 270° e 360°. No entanto, é importante destacarmos que quando alguma face é movimentada em 360°, seu estado inicial não é alterado, tendo em vista que uma rotação de 360° equivale a uma de 0°. É pertinente destacarmos que os movimentos/rotações são realizados no sentido horário ou no sentido anti-horário.

Anteriormente, denominamos cada face por uma letra, agora além das letras representarem as faces, elas representarão também os movimentos realizados nelas. Tais letras sempre virão acompanhadas por expoentes de 1 a 4. Quando a letra tiver expoente 1, por exemplo, isto indicará que a face sofrerá uma rotação de 90°, quando o expoente for 2, isto indicará que será aplicado à face dois movimentos de 90°, ou seja, um movimento de 180°. Os expoentes variam de 1 a 4 dado que os movimentos são múltiplos de 90°, assim, teremos, por exemplo, que um expoente 6 implica num movimento de $6x90° = 540° = 360° + 180°$, ou seja, uma rotação de 360 graus seguida de uma rotação de 180 graus. Porém, como já observamos anteriormente, uma rotação de 360 graus numa camada do Cubo leva todas as peças na mesma posição, ou seja, equivale a uma rotação de 0 graus. Portanto, uma rotação de 540 graus equivale a uma rotação de 180 graus, que equivale a duas rotações de 90 graus, ou seja, um expoente 6 equivale a um expoente 2. Além disso, os expoentes positivos indicarão que a face será movimentada no sentido horário, caso o expoente seja negativo isso implicará numa rotação no sentido anti-horário.

Vejamos agora, através da Figura 5, o comportamento de cada face quando é movimentada no sentido horário e no sentido anti-horário.

Figura 5 Movimentos do Cubo Mágico



Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2016)

Ainda sobre movimentos que podemos fazer no Cubo Mágico, é relevante observarmos que as peças de meios serão sempre peças de meios, quaisquer que sejam as transformações dadas no Cubo. O mesmo ocorre para as outras peças. Por isso não há problemas em nomeá-las.

3.1 REGRAS E OBJETIVOS

O principal objetivo deste puzzle é basicamente montá-lo de maneira que cada face fique apenas de uma cor. Para chegar a este dado objetivo não é permitido desmontar o Cubo Mágico. É permitido, apenas, que sejam aplicados movimentos no sentido horário e/ou anti-horário nas faces do Cubo.

Já conhecendo a estrutura física, as regras e os objetivos do Cubo Mágico, podemos dizer que este jogo entra na categoria dos jogos abstratos, tendo em vista que todas as informações são apresentadas aos jogadores, não tendo nenhuma informação oculta.

3.2 MÉTODOS DE RESOLUÇÃO

Devido à complexidade de organização das cores do Cubo Mágico, quando suas faces estão embaralhadas, muitas pessoas acabam desistindo de tentar resolvê-lo. No entanto, existem alguns métodos/técnicas que podem ser seguidas para resolução deste *puzzle*. Vale lembrar que uma pessoa pode vir a conseguir solucionar o Cubo Mágico sem seguir nenhuma técnica, porém, esta é uma tarefa muito mais difícil do que seguir os passos que são dados nas técnicas de resolução do Cubo Mágico.

Apesar da simplicidade de suas regras, é necessário muita paciência e determinação pois só a prática proporcionará um melhor aperfeiçoamento. Assim, para quem deseja aprender a montar o Cubo, recomendamos o treinamento diário afim de que seja criada uma familiaridade com a técnica escolhida.

Existem muitos métodos de resolução do Cubo, eles vão dos mais fáceis aos mais complexos, dos mais rápidos aos mais devagar. Geralmente, cada método ensina uma determinada sequência, deste modo, uma sequência dada por um método “x” possivelmente será diferente de uma sequência determinada por um método “y”.

Em *sites* de pesquisas, ou até mesmo no mais famoso *site* de compartilhamento de vídeos, o *YouTube*, podemos encontrar diversos tutoriais ensinando, através de diversos método, montar o Cubo Mágico. No Brasil, um dos *sites* mais conceituados sobre o assunto é o CuboVelocidade, desenvolvido pelo cubista brasileiro Renan Cerpe. Já em escala mundial, o *site* francês Francocube é um dos que mais se destaca, por apresentar diversos métodos para se montar o Cubo Mágico. Assim, falaremos aqui, de forma abreviada, de alguns desses métodos. Para descrição dos métodos a seguir, fizemos uso das informações disponibilizadas pelo site Francocube.

O Método de Camadas é tido como o método mais simples e destina-se àqueles que estão tendo o primeiro contato com o Cubo. De fato, ele requer apenas quatro ou cinco sequências a serem seguidas para completar o Cubo camada por camada. Uma vez que as sequências dadas forem realizadas corretamente, o *puzzle* estará montado.

O Método Intermediário é uma extensão do método anteriormente falado. Fazendo uso de algumas sequências adicionais será possível montar o Cubo em menos tempo. Este método é mais rápido cerca de 30 a 40 segundos do anterior. Nele, é ensinado também como usar os dedos para agilizar as movimentações seguintes.

O Método *Jessica Fridrich*, mais conhecido como Método *Fridrich*, é atualmente o método mais rápido para a resolução do Cubo Mágico. Em compensação, é considerado o método mais difícil, pois requer uma aprendizagem de, aproximadamente, uma centena de sequência. Os movimentos realizados neste método são em alta velocidade, o que diminui significativamente o tempo total da resolução do Cubo. Além disso, é este o método mais utilizado pelos cubistas do mundo.

O Método de *Lars Petrus*, ou simplesmente, Método Petrus, foi desenvolvido nos anos 80 e destina-se a pessoas que queiram resolver o Cubo com poucos movimentos (*FMC)* ou com o número mínimo de movimentos (*speedcubing*). Um fato curioso sobre o *speedcubing* é que foi na tentativa de se descobrir o menor número de movimentos possíveis para se montar o Cubo Mágico que se descobriu o Número de Deus, número este que falaremos mais adiante. Por se tratar de um método onde se realiza poucos movimentos, este é um método complexo. Permite resoluções um pouco mais lenta do que o Método Fridrich, no entanto, este também é um método frequentemente usado pelos cubistas nas competições de *speedcubing* ou *FMC*.

O Método *Ofapel* é do tipo um por todos e todos por um, no sentido de ser um método que resolve Cubos 3x3x3, 4x4x4 e 5x5x5 de forma bem semelhante. No entanto, não é um método frequentemente usado na resolução de Cubos 3x3x3, porém, quando se é usado, o tempo de resolução em relação ao Método de Camadas cai em 40 segundos.

Há ainda o Método *Blind*, ou simplesmente Método Cego. Este, é destinado para aqueles que acham que resolver o Cubo não é suficiente e que é preciso de um pouco mais de dificuldades, pois o Método *Blind* é utilizado por cubistas na resolução do Cubo com os olhos vendados. Neste método, são utilizadas algumas sequências com o objetivo de colocar as peças em ciclos para que assim, a pessoa na qual está montado o cubo não se perca.

Em suma, é possível observarmos que embora a resolução do Cubo Mágico não seja algo tão simples, existem vários caminhos para montá-lo. Deste modo, cabe ao jogador escolher o método que mais o agrade. Vale lembrar que caso seja dado qualquer passo errado, em qualquer método, isso poderá ocasionar a não resolução do Cubo.

3.3 O NÚMERO DE DEUS

Existem 43 252 003 274 489 856 000 combinações possíveis com o Cubo Mágico. Algebricamente, este número pode ser expresso por

$$\frac{8! \cdot 12! \cdot 3^8 \cdot 2^{12}}{2 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{12} \cdot 8! \cdot 12! \cdot 3^8 \cdot 2^{12} \tag{1}$$

O chamado “Número de Deus” é o menor número de movimentos possíveis para se resolver quaisquer destas combinações do Cubo Mágico. A busca para resolver este enigma durou mais de 30 anos.

Segundo o *site* Cube 20, em junho de 1981 o matemático Morwen Thistlewaite provou que 52 movimentos era suficiente para resolver o Cubo em qualquer posição. Passaram-se quase dez anos para que este fato fosse contestado. Então, em dezembro 1990, Hans Kloosterman, diminuiu este número para 42 movimentos.

Podemos dizer que, nos anos 90, este número começou a diminuir ainda mais, pois, de acordo com informações disponibilizadas no *site* Cube 20, em maio de 1992 Michael Reid provou que 39 movimentos eram suficientes para resolver o Cubo. No entanto, também em maio de 1992, Dik Inverno afirma que seria preciso aplicar apenas 37 movimentos no Cubo, derrubando assim as afirmações de Reid. Passando-se aproximadamente três anos, em janeiro de 1995, Michael Reid ressurge na história e afirma que seriam necessários apenas 29 movimentos.

Passam-se alguns anos para que este número sofresse alterações. Então, ainda segundo o *site* Cube 20, em 2005 Silviu Radu reduziu o número de movimentos para 28. Em abril do ano seguinte, Silviu Radu diminuiu ainda mais este número, afirmando que seriam necessários apenas 27 movimentos para se resolver o Cubo Mágico. Perceba que, após 1981, este número diminuiu 25 movimentos, praticamente a metade no primeiro número estimado. Ainda nos anos 2000, em maio de 2007, Dan Kunkle e Gene Cooperman provaram que seria necessários apenas 26 movimentos. Em março de 2008, Tomas Rokicki cortou o limite para 25 movimentos. No mês seguinte, Tomas Rikicki, juntamente com John Welborn reduziu o número analisado para 23 movimentos. Em agosto do mesmo ano, novamente Tomas Rikicki e John Welborn diminuiu ainda mais este movimento, agora para 22. E em julho de 2012, Tomas Rokicki, Herbert Kociemba, Morley Davidson e John Dethridge, com toda ajuda da tecnologia dos computadores da empresa *Google*, provaram que o número de movimentos para se resolver o Cubo Mágico é 20, ou seja, foi provado que são suficientes e necessários apenas 20 movimentos para se resolver este *puzzle*.

4 O CUBO MÁGICO NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Muitas vezes os conceitos matemáticos não são fáceis de serem compreendidos, então os professores de Matemática devem buscar novos métodos para que seus alunos consigam compreender tais conceitos por mais abstratos que eles possam ser/aparentar. Hoje em dia existem diversas técnicas e metodologias que ajudam na resolução de tal problema. Aqui faremos uso do Cubo Mágico na tentativa de ajudar professores e alunos no ensino e compreensão, respectivamente, de conteúdos tidos, muitas vezes, como difíceis.

Através do Cubo Mágico, é possível ensinar diversos conteúdos matemáticos. No Ensino Básico, por exemplo, é possível trabalhar algumas noções de funções, volume, simetria, permutação, etc. Além de ensinar também o conceito aresta, vértices e lados. Já no Ensino Superior, o Cubo pode ser utilizado em aulas de Álgebra Abstrata, quando se estuda Grupos e Subgrupos, por exemplo. No presente trabalho buscaremos definir de uma forma mais concreta e menos abstrata os conceitos de permutação e função.

O Cubo Mágico vem sendo um recurso utilizado em sala de aula. Cinoto e Dias (2014) desenvolveram uma sequência didática para o ensino de Análise Combinatória. Ao final deste trabalho os autores afirmam que a proposta é válida, mas no entanto, não é possível utilizar o *puzzle* em questão para ensinar tudo sobre Análise Combinatória.

Já Rodrigues e Silva (2013) fizeram uso do Cubo Mágico para ensinar conceitos relacionados a Álgebra, tais como: operações comutativas e não comutativas, operações inversas e ordem de operações. Ao final de sua pesquisa, os autores afirmam que a proposta de atividade desenvolvidas por eles é viável e que, assim como todo jogo, o Cubo Mágico pode ser um agente transformador no ensino de Matemática.

Em entrevista para o portal de notícias g1, o arquiteto e cubista Fabio Bini Graciose aponta que jogar o Cubo Mágico requer atenção e concentração. Além disso, com a prática deste jogo, o jogador pode melhorar seu poder de observar os fatos. Assim, o Cubo Mágico vem sendo utilizado também para o desenvolvimento do raciocínio lógico, visto que para se montar este *puzzle* é preciso muita reflexão sobre o que se está fazendo.

Tendo mais familiaridade com o Cubo Mágico, percebemos que ao manuseá-lo se está produzindo Matemática, por mais estranho que isso possa parecer. E o mais interessante disso é que inconscientemente aprendemos Matemática. Assim, iremos aliar este jogo, que é conhecido em escala mundial, ao ensino de Matemática. Vale destacar que cabe ao professor avaliar se esta é ou não um recurso que facilitará a aprendizagem de seus alunos. Deste modo, para usar o Cubo Mágico no ensino de Matemática, o professor precisará conhecer bem sua turma, saber se seus alunos gostam deste tipo de recurso e se, principalmente, este os ajudará no processo de aprendizagem. No entanto, acreditamos que tal estratégia pode ser bastante significativa quando bem planejada e trabalhada, afinal, como já havíamos falado anteriormente, os jogos no ensino de matemática é uma ferramenta facilitadora.

4.1 AS PERMUTAÇÕES DO CUBO MÁGICO

O estudo das permutações no Ensino Médio é muito voltado para o uso de fórmulas. E este modo de ensinar, muitas vezes, pode prejudicar a aprendizagem do aluno, pois quando o "decorar a fórmula" é mais importante do que entender o conceito em si e suas aplicações, a aprendizagem deixa de ser significativa e passa a ser mecânica. Não que a utilização da fórmula não seja permitida e importante, o que não podemos deixar acontecer é limitar o estudo de um conteúdo à apenas a decorar as fórmulas. Foi pensando nisto que buscamos uma forma de ensinar o conceito de permutações, não o resumindo à fórmula.

A palavra "permutação" é um substantivo feminino e apresenta vários significados. Segundo o dicionário Houaiss, por exemplo, "permutação" pode ser conceituado como "ato de permutar", "substituição de uma coisa por outra" ou "alteração dos elementos que formam um todo, a fim de se obter nova combinação". Assim, quando mudamos, por exemplo, os móveis do nosso quarto de lugar, estamos fazendo permutando esses objetos.

Matematicamente, o significado de "permutação" não é muito diferente do significado apresentado no dicionário, no entanto, antes de conhecermos seu significado matemático, mostraremos, através de um exemplo concreto, algumas "permutações" existentes no Cubo Mágico, visando facilitar a compreensão desse conceito.

Situação 1: Com o Cubo Mágico montado, vamos movimentar sua camada de cima em 90°, 180°, 270° e 360° graus. A cada movimento aplicado à camada, analisaremos o que acontece com cada uma de suas peças. Para tal, consideraremos, por definição, a cor amarela como a face de cima, a cor vermelha como a face da direita e a cor azul com a face da frente.

Visando melhor compreensão, vejamos na Figura 6 a camada de cima e sua planificação:

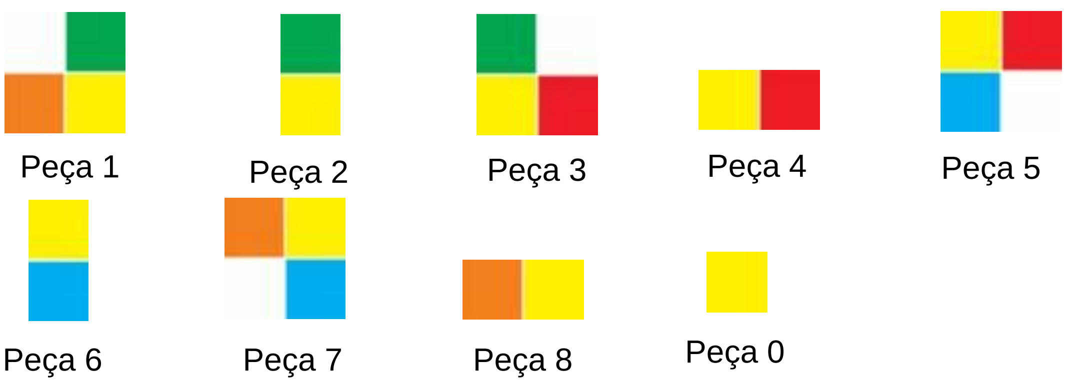
Figura 6 Planificação da Camada de Cima

Fonte: Elaboração do autor

Observando a figura acima, podemos perceber que esta camada é composta por nove cubos menores, sendo quatro de quinas, quatro de meios e um de centro. Percebemos também que estes cubos menores são formados por peças da face de cima, da face da esquerda, da face da direita, da face da frente e da face de trás.

Para melhor manipulação quando formos aplicar os movimentos nesta camada, daremos a cada uma destas peças um devido número. Faremos a numeração destas no sentido horário, iniciando a contagem na peça ECT, ou seja, na peça que possui um cubo menor da face de cima, um cubo menor da face da esquerda e um cubo menor da face de trás. A contagem será finalizada na peça C, ou seja, na peça do centro da face de cima que será numerada com o zero, visto que nada ocorrerá com esta peça. Vejamos isto na Figura 7 a seguir:

Figura 7 Peças da camada de cima do Cubo Mágico



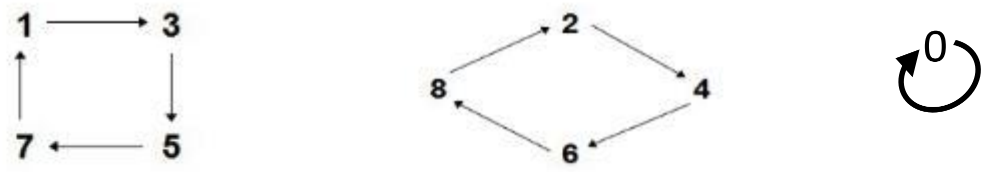
Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2016)

Através desta numeração, podemos representar a camada de cima da forma:

$$C \to \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 0 & 4. \\ 7 & 6 & 5 \end{matrix} \qquad (2)$$

Assim, chamaremos o conjunto dessas peças de C, ou seja, $\mathrm{C} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Por se tratar de um Cubo Mágico, podemos dizer que as peças de quinas só trocarão de lugar com as peças de quinas, as peças de meios só trocarão de lugar entre si e a peça de centro não trocará de lugar com ninguém. Uma maneira simples de entender este fato é observar o formato de cada peça, pois as peças que apresentam suas estruturas físicas semelhantes, trocarão de lugar entre si. Deste modo, temos que a Peça 1 só poderá permutar com as peças 3,5 e 7, a peça 2 só poderá ocupar o lugar da peça 4,6 e 8 e a peça 0 não trocará de lugar com nenhuma peça, permanecendo sempre no mesmo lugar. Para melhor compreensão e abstração do que estamos falando, vide Figura 8:

Figura 8 Movimentos das peças da camada de cima



Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2016)

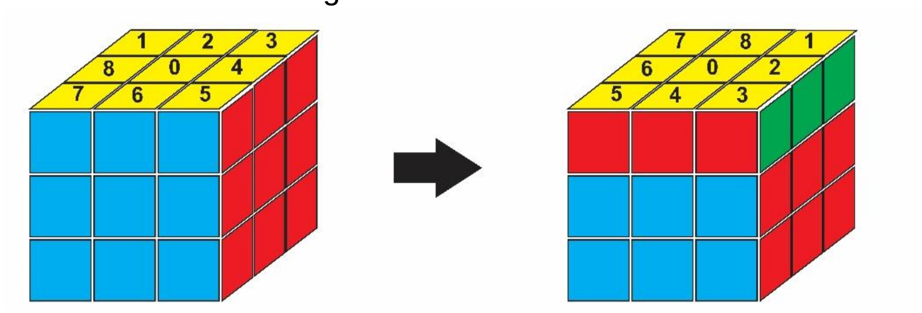
É importante notarmos que se a peça 1, por exemplo, sofrer um rearranjamento, ou seja, se a peça 1 trocar de lugar com outra peça, as demais peças da camada de cima obrigatoriamente se rearranjarão, tendo em vista que as peças da camada de cima são “coladas” umas nas outras. Assim, quando qualquer peça desta camada trocar de lugar com outra peça, todas as demais peças trocarão de lugar.

Feito as observações acima, já conhecemos melhor a camada de cima do Cubo e suas características. Com isso, podemos dar início a nossa análise, estudando assim o que acontece com as peças da camada de cima quando a movimentamos em 90°, 180°, 270° e 360°. É válido lembrarmos que podemos escrever estes movimentos da forma C^1, C^2, C^3 e C^4, onde C^1 representa o movimento de 90° na camada de cima, C^2 representa o movimento de 180° na camada de cima e assim sucessivamente. Em outras palavras, podemos dizer que C significa “camada de cima” e o expoente indica o número de vezes que se aplicará uma rotação de 90° na camada.

Para melhor compreendermos, analisaremos cada rotação por vez, de modo que nenhuma informação seja passada despercebida. Primeiro, faremos a análise dos movimentos por meio de ilustrações e em seguida faremos esta análise algébrica. Assim, vamos iniciar nossa análise com a rotação C^1.

Vejamos, na Figura 9, o que acontece com a camada de cima quando aplicamos o movimento C^1.

Figura 9 Movimento C^1



Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2016)

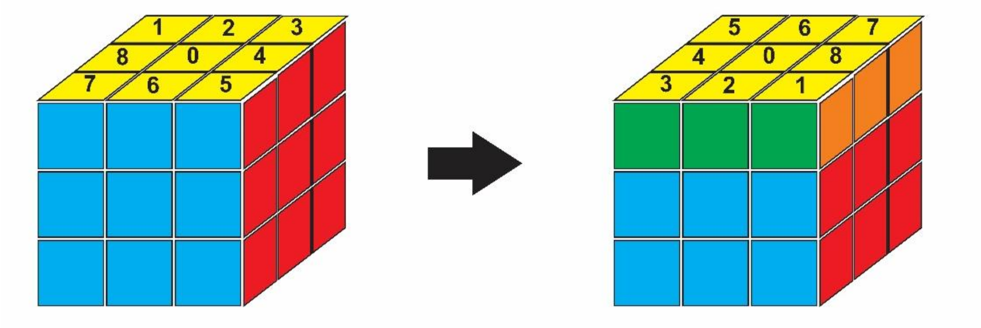
Note que utilizamos as setas, apenas, para indicar para onde foram as peças de quinas quando o movimento C^1 foi aplicado. Não fizemos o mesmo procedimento para as demais peças pois acreditamos que a imagem ficaria muito carregada de informação, o que não facilitaria a nossa compreensão.

Interpretando algebricamente o movimento C^1, temos que:

$$C^1 \rightarrow \begin{matrix} 7^1 & 8^2 & 1^3 \\ 6^8 & 0^0 & 2^4 \\ 5^7 & 4^6 & 3^5 \end{matrix}. \tag{3}$$

Ou seja, suas peças se rearranjaram, de modo que a peça 1 foi levada para o lugar que a peça 3 ocupava anteriormente, a peça 2 foi levada para o lugar da peça 4, a peça 3 foi levada para o lugar da peça 5 e assim sucessivamente. Observe que, para melhor compreendermos, no movimento C^1 utilizamos a notação X^y, onde X expressa o número da peça da camada de cima e y expressa o lugar que a peça X ocupou depois de receber uma rotação de 90°. Ressaltamos que essa notação foi utilizada apenas para C^1, porém no caso de C^2, C^3 e C^4 os expoentes continuarão no mesmo lugar que ocupou quando C^1, de modo que não há necessidade de mostrá-los. Assim, dando continuidade à nossa análise, temos que C^2 se comporta, graficamente, da forma a seguir (vide Figura 10):

Figura 10 Movimento C^2



Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2016)

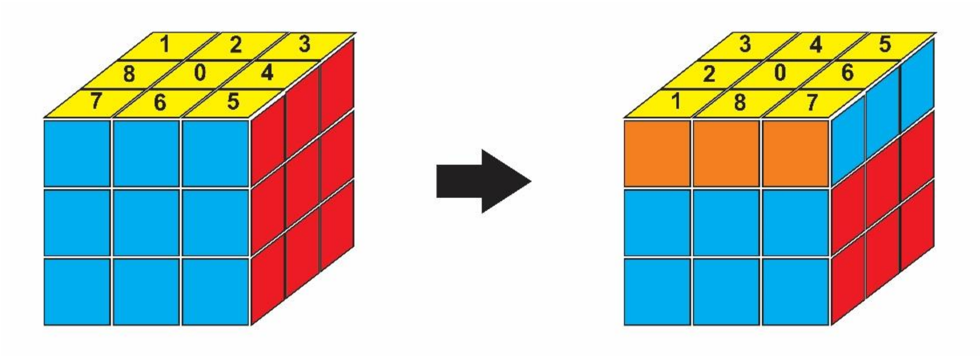
Ou algebricamente, da forma:

$$C^2 \rightarrow \begin{array}{ccc} 5 & 6 & 7 \\ 4 & 0 & 8. \\ 3 & 2 & 1 \end{array} \qquad (4)$$

De modo que, quando aplicamos o movimento C^2, temos que os elementos da camada de cima também se reorganizaram, uma vez que a peça 1 passou a ocupar o lugar que a peça 5 ocupava antes da rotação, a peça 2 passou a ocupar o lugar que a peça 6 ocupava, a peça 3 passou a ocupar o lugar que a peça 7 ocupava e assim sucessivamente.

Já quando aplicamos o movimento C^3, graficamente a camada se comporta da forma (vide Figura 11):

Figura 11 Movimento C^3



Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2016)

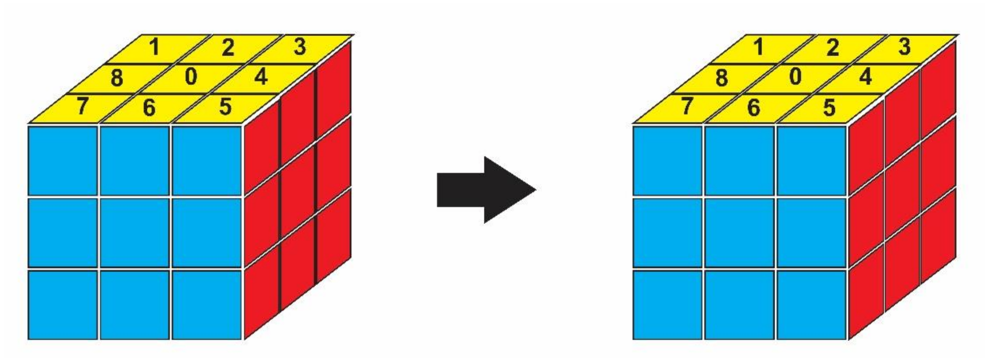
Ou algebricamente da forma:

$$C^3 \rightarrow \begin{array}{ccc} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 6. \\ 1 & 8 & 7 \end{array} \qquad (5)$$

De modo que, quando aplicamos o movimento C^3 observamos também que as peças trocaram de lugar, pois a peça 1 foi levada para o lugar que a peça 7 ocupava anteriormente, a peça 2 foi levada para o lugar da peça 8, a peça 3 foi levada para o lugar da peça 1 e assim sucessivamente.

Por fim, quando aplicamos o movimento C^4, graficamente o objeto estudado se comporta da seguinte forma (vide Figura 12):

Figura 12 Movimento C^4



Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2016)

Ou algebricamente da forma:

$$C^4 \rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 0 & 4. \\ 7 & 6 & 5 \end{matrix} \qquad (6)$$

Onde, se observarmos a camada de cima quando aplicamos o movimento C^4 teremos que, embora seja aplicada uma rotação de 360° na camada, as peças continuam nas mesmas posições iniciais. Com isso podemos dizer que o movimento de C^4 equivale a uma rotação de 0°.

Assim, analisando os movimentos C^1, C^2, C^3 e C^4, temos que C^4 rearranja os elementos do conjunto C deixando-os na mesma posição inicial. Já os movimentos C^1, C^2, C^3 rearranjam os elementos do conjunto C, de modo que nesses movimentos, todos os elementos, com exceção da peça 0, trocam de lugar. Com isso, podemos dizer que dadas as condições do Cubo Mágico, os elementos do conjunto C permitem quatro rearranjamentos.

Podemos algebricamente escrever os rearranjamentos C^1, C^2, C^3 e C^4 também da seguinte forma:

$$C^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad (7)$$

$$C^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad C^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Onde as primeiras linhas das matrizes indicam a posição inicial das peças da camada de cima do Cubo Mágico e as segundas linhas indicam os lugares que as peças irão após o movimento ser aplicado à camada. Como a primeira linha das matrizes é a mesma em todos os casos, podemos omiti-la e escrever simplesmente:

$$C^1 = (3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 1 \quad 2 \quad 0) \qquad C^2 = (5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 0) \qquad (9)$$

$$C^3 = (7 \quad 8 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 0) \qquad C^4 = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 0) \qquad (10)$$

Deste modo, podemos dizer que os elementos do conjunto C permite os rearranjamentos C^1, C^2, C^3 e C^4 ou $R = \{C^1, C^2, C^3, C^4\}$, onde R é o conjunto de rearranjamentos possíveis dos elementos da camada de cima do Cubo Mágico, tendo em vista que quando aplicamos estes movimentos na camada de cima do Cubo, seus elementos trocam de lugar entre si.

Interpretando, matematicamente, estes rearranjamentos, podemos dizer que ambos são permutações, uma vez que a cada movimento realizado no objeto analisado, uma nova maneira de se reescrever o conjunto C é encontrada. Deste modo, podemos dizer que o conjunto R é, nada mais nada menos, que o conjunto das possíveis permutações da camada de cima, uma vez que dadas as condições do Cubo, foram escritas todas as possíveis possibilidades de se reordenar/reescrever o conjunto C.

Assim, através da **Situação 1**, percebemos que permutar consiste em rearranjar os elementos de um dado conjunto. Ainda, por meio desta situação observamos que as rotações de 90°, 180°, 270° e 360° rearranjam o conjunto C, conjunto este que é formado pelas peças da camada de cima do Cubo Mágico. Por fim, nos é permitido verificar também que, quando movimentamos a camada em 360°, nada é ocorrido pois dado qualquer objeto, uma rotação de 360° equivale a uma rotação de 0°, ou seja, por mais que as peças sejam movimentadas, as mesmas voltam a posição inicial, que é como se não tivesse havido nenhum movimento aplicado.

Em suma, por meio da **Situação 1**, podemos definir que permutar consiste em reescrever um dado conjunto sempre de maneiras diferentes, pois embora o conjunto permaneça com os mesmos elementos, a ordem na qual eles aparecem, ou seja, são listados, é diferente. Definimos também que o conjunto de permutações são as formas/maneiras nas quais podemos reescrever o conjunto analisado. Assim, voltando à camada de cima, podemos dizer que os movimentos C^1, C^2, C^3 e C^4 são as possíveis permutações da camada de cima, e que $P = \{C^1, C^2, C^3, C^4\}$ é o conjunto de permutações que o conjunto C permite, ou seja, o conjunto C permite apenas quatro permutações.

É importante observarmos que se continuarmos a rotacionar a camada de cima do Cubo, continuaremos a permutar os elementos desta camada, no entanto, devemos notar que após 360° todas as permutações se repetirão, pois movimentar a camada de cima do Cubo em 450°, consiste em rotacioná-la em 90°, uma vez que $450° = 360° + 90°$; rotacionar a camada de cima em 540° equivale a rotacioná-la em 180°, pois $540° = 360° + 180°$; e assim sucessivamente.

Já sabemos que se aplicarmos rotações de 90°, 180°, 270° e 360° na camada de cima do Cubo Mágico estaremos permutando os elementos desta camada, no entanto, podemos generalizar as informações adquiridas na **Situação 1** dizendo que, se aplicarmos rotações de 90°, 180°, 270° e 360° em qualquer camada, estaremos permutando seus elementos. Com isso, podemos observar que tanto a camada da direita, a camada da esquerda, a camada de trás, camada da frente e a camada de baixo, todas permitem quatro permutações, pois independentemente da camada, as rotações serão aplicadas da mesma maneira.

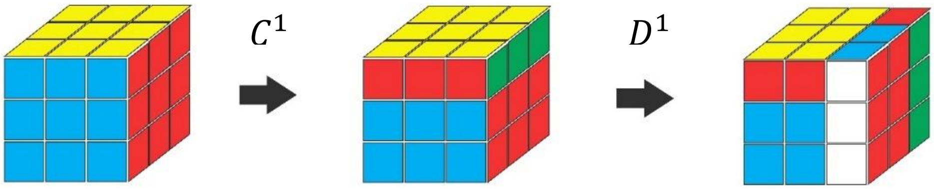
Conhecendo a ideia geral sobre permutação, podemos fazer estudos mais avançados sobre o assunto. Com isso, vamos analisar agora de quantas maneiras podemos intercalar os movimentos que são realizados no Cubo Mágico. Para a situação a seguir, embora tenhamos definido que todo movimento realizado no Cubo Mágico é uma permutação, as trataremos apenas como movimentos.

Situação 2: Se pudermos realizar no Cubo Mágico apenas dois movimentos, digamos C^1 e D^1. De quantas maneiras podemos aplicar esses movimentos de modo que, depois de realizarmos todos os movimentos, as disposições das peças sejam sempre diferentes? E se pudermos aplicar no Cubo os movimentos C^1, D^1 e F^1, de quantas maneiras podemos aplicar esses movimentos? E se aplicarmos no Cubo os movimentos C^1, D^1, F^1 e E^1, quantas formas poderemos aplicar estes movimentos?

Para respondermos a estas perguntas, primeiramente analisaremos de quantas maneiras podemos aplicar os movimentos C^1 e D^1, em seguida os movimentos C^1, D^1 e F^1 e por fim os movimentos C^1, D^1, F^1 e E^1, de modo que o resultado final seja diferente.

Vejamos, na Figura 13, que se aplicarmos C^1 e depois D^1 teremos que o Cubo Mágico ficará da seguinte forma:

Figura 13 Movimentos (C^1D^1)

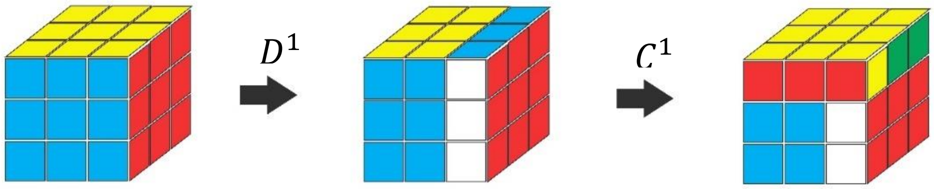


Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2016)

Perceba que o primeiro Cubo Mágico está montado, o segundo é o resultado de quando aplicamos o movimento C^1 e o terceiro representa o resultado final das duas rotações aplicadas, ou seja, é o resultado de quando aplicamos os movimentos C^1 e D^1.

Na Figura 14, podemos ver o que acontece com o Cubo se aplicarmos D^1 e depois C^1:

Figura 14 Movimentos (D^1C^1)



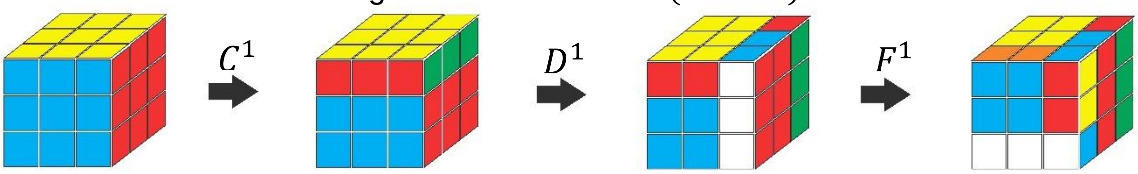
Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2016)

Nesta figura, o segundo Cubo representa o resultado de quando aplicamos o movimento D^1 e o terceiro Cubo representa o resultado final das duas rotações realizadas.

Dado que há somente duas opções para aplicar os movimentos C^1 e D^1, um em cada ordem, e a ordem de aplicação desses movimentos interfere na disposição final do Cubo (vide figuras 13 e 14), então existem dois rearranjamentos diferentes.

Agora, vamos ver o que acontece com o Cubo quando aplicamos os três movimentos C^1, D^1 e F^1. Assim, vejamos na Figura 15 o que ocorre quando aplicamos C^1, em seguida D^1 e depois F^1:

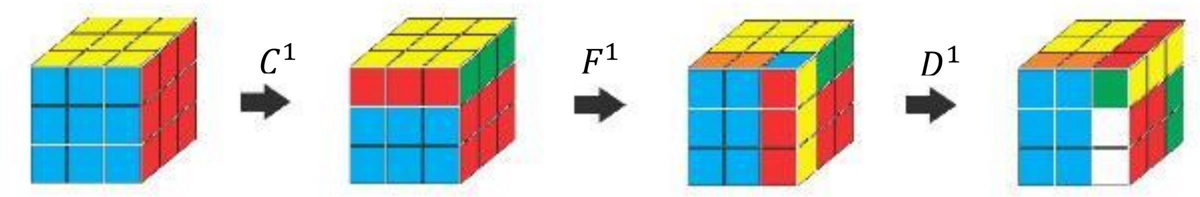
Figura 15 Movimentos ($C^1D^1F^1$)



Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2016)

Se aplicarmos agora o movimento C^1 primeiramente, em seguida F^1 e por fim D^1 teremos o seguinte rearranjamento (vide Figura 16):

Figura 16 Movimentos ($C^1F^1D^1$)

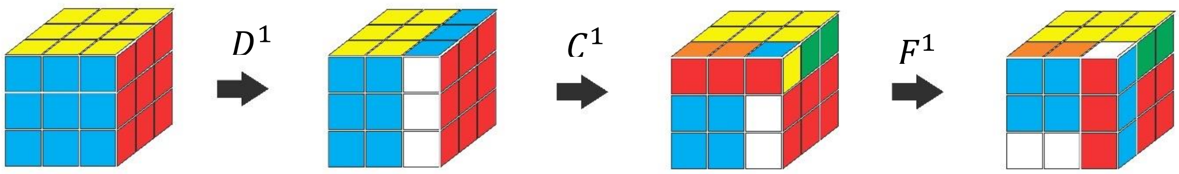


Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2016)

Deste modo, percebemos que quando aplicamos inicialmente o movimento C^1, temos dois rearranjamentos. Para verificar a veracidade desta afirmação, nos basta olhar os últimos Cubos das figuras 15 e 16, nelas nós percebemos que as configurações dos Cubos são diferentes.

Agora, vejamos os rearranjamentos possíveis quando aplicamos primeiramente o movimento D^1. Para tal, observemos o que acontece quando aplicamos D^1, em seguida C^1 e por fim F^1 na Figura 17 abaixo:

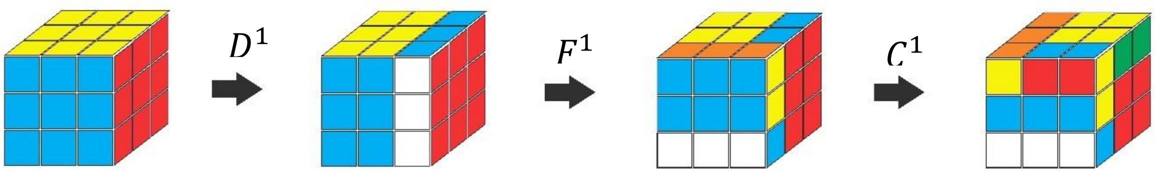
Figura 17 Movimentos ($D^1C^1F^1$)



Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2016)

Se aplicarmos agora D^1, em seguida F^1 e por fim C^1, teremos o rearranjamento indicado pela Figura 18 abaixo:

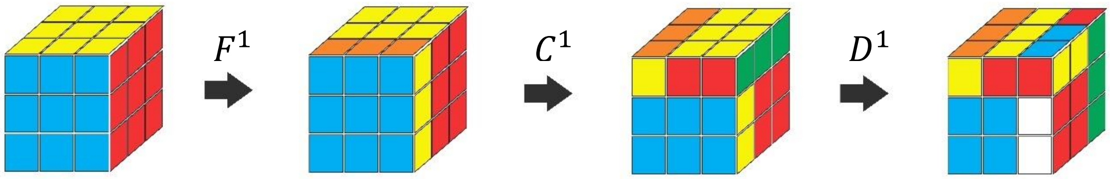
Figura 18 Movimentos ($D^1F^1C^1$)



Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2016)

Com isso, podemos observar que se aplicarmos inicialmente o movimento D^1, teremos mais dois rearranjamentos para o conjunto analisado. Através disso, só nos resta analisarmos o que ocorre quando aplicamos inicialmente o movimento F^1. Para isso, vamos analisar primeiramente o que ocorre quando aplicamos F^1, em seguida C^1 e por fim D^1 (vide Figura 19):

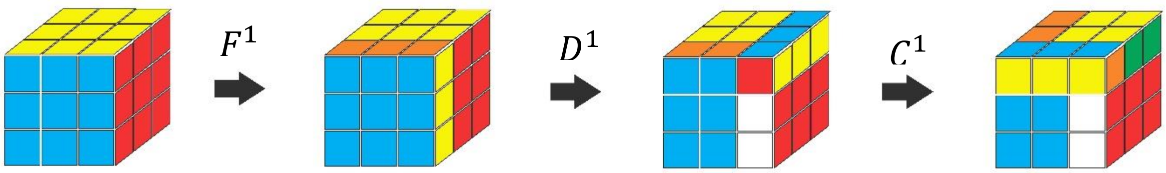
Figura 19 Movimentos ($F^1C^1D^1$)



Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2016)

Se aplicarmos agora F^1, em seguida D^1 e por fim C^1 teremos que (vide Figura 20):

Figura 20 Movimentos ($F^1D^1C^1$)



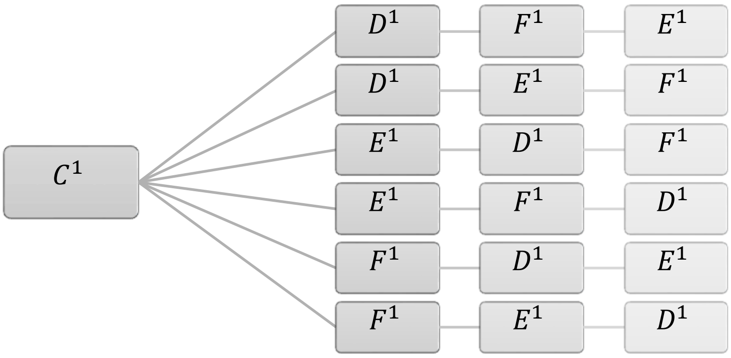
Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2016)

Deste modo, podemos observar que se aplicarmos a princípio o movimento F^1 teremos mais dois rearranjamentos para o conjunto analisado. Assim, podemos afirmar que se tivermos os movimentos C^1, D^1 e F^1 teremos seis formas de aplicarmos estes movimentos para que o rearranjamento final seja único.

Antes de irmos para o último caso da **Situação 2** é importante percebermos que quando aplicamos pelo menos um movimento em camadas diferentes temos que os rearranjamentos formados serão sempre diferentes, no entanto, quando aplicamos, por exemplo, dois movimentos na mesma camada eles resultarão no mesmo rearranjamento, pois quando movimentamos apenas uma camada, a ordem na qual o movimento é aplicado não importa. Porém, quando aplicamos rotações em camadas diferentes, a ordem na qual é aplicada as rotações é quem vai determinar o rearranjamento resultante. Feito esta observação, vamos para o último caso desta situação. Para encontrarmos os possíveis rearranjamentos para os movimentos C^1, D^1, F^1 e E^1, vamos apenas diagramar um dos rearranjamentos.

Se iniciarmos com o movimento C^1 teremos os possíveis rearranjamentos a seguir:

Figura 21 Movimentos C^1, D^1, C^1 e F^1



Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2016)

Através do diagrama acima, percebemos que existem seis rearranjamento se iniciarmos os movimentos com o movimento C^1. Analogamente, existirão seis rearrajamentos para D^1, mais seis para F^1 e mais seis para E^1. Assim, podemos afirmar que para os movimentos C^1, D^1, F^1 e E^1 existirão vinte e quatro rearranjamentos diferentes.

Se observarmos a **Situação 2**, perceberemos que para dois movimentos existem duas formas de aplica-los, para três movimentos existem seis formas de aplica-los e para quatro movimentos existem vinte e quatro formas de aplica-los. E então fica-nos a pergunta: o que, de fato, está acontecendo nesta situação? Qual sequência lógica esta situação segue?

Para respondermos tais indagações, nos basta observarmos atentamente a **Situação 2** e percebermos que o fatorial dos números de movimentos possíveis para ser aplicados resulta no número de disposições dos cubos menores do Cubo Mágico. De fato, quando tínhamos C^1 e D^1, os rearranjamentos (C^1D^1) e (D^1C^1) produziam $2 = 2! = 2 \cdot 1$ disposições diferentes para as peças do Cubo (compare as figuras 4.8 e 4.9). Analogamente, os movimentos C^1, D^1 e F^1 produziram $6 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$ disposições diferentes. Quando tínhamos quatro movimentos existiam vinte e quatro possibilidades pois $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Deste modo, se pudermos aplicar no Cubo os movimentos C^1, B^1, D^1, E^1, F^1 e T^1 teremos setecentos e vinte formas de aplicar estes movimentos, pois $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

Assim, já tendo uma noção intuitiva sobre o conceito de permutação, podemos introduzir aqui seu conceito matemático. Desta forma, vamos definir permutações como:

Definição 1: Seja E um conjunto finito, tal que $E = \{1,2,3,\dots,n\}$. Uma permutação deste conjunto E será uma lista $i_1, i_2, \dots, i_n$ dos elementos de E, onde $i_r \neq i_s$ sempre que $r \neq s$.

Sabemos que existe $n!$ permutações de E. Note também que cada permutação $i_1, i_2, \dots, i_n$ define uma função $f: E \to E$ dada por

$$f: \begin{array}{c} 1 \to f(1) = i_1 \\ 2 \to f(2) = i_2 \\ \vdots \\ n \to f(n) = i_n \end{array} \quad (11)$$

Por exemplo, a permutação 321 do conjunto $\{1,2,3\} = E$ define a função $f: \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$, dada por

$$f: \begin{array}{c} 1 \to 3 \\ 2 \to 2 \\ 3 \to 1 \end{array} \quad (12)$$

Assim, podemos ver que cada uma das funções "α" determinada por uma permutação é uma função bijetora. Em particular, cada permutação pode ser associado a um elemento do conjunto $S(E) = \{f: E \to E \;/\; f \text{ é } bijetora\}$.

Ainda supondo que E é um conjunto finito, note que cada bijeção $\alpha: E \to E$ pode ser associada a uma permutação de E. De fato, o rearranjamento de E é dado pela lista de elementos do conjunto imagem de α, como a ilustração abaixo:

$$\begin{array}{c} f: E \to E \\ 1 \to f(1) = i_1 \\ 2 \to f(2) = i_2 \\ \vdots \\ n \to f(n) = i_n \end{array} \quad (13)$$

Em particular, cada bijeção de um conjunto finito em si próprio está associada a uma permutação, e vice-versa.

Em suma, através das situações 1 e 2 percebemos que a utilização do Cubo Mágico no ensino de Permutações é possível, tendo em vista que alguns conceitos sobre o assunto podem ser vistos neste objeto conhecido mundialmente. Vimos também que existem uma relação estreita entre as noções de permutação e de bijeção, de modo que podemos reescrever uma permutação como sendo uma bijeção e vice versa. Assim, acreditamos que esta seja uma proposta viável para o ensino de

Permutações, cabendo ao professor avaliar de qual maneira a utilização no Cubo seria mais significativa para o ensino e aprendizagem de seus alunos.

5 FUNÇÕES E BIJEÇÕES DO CUBO MÁGICO

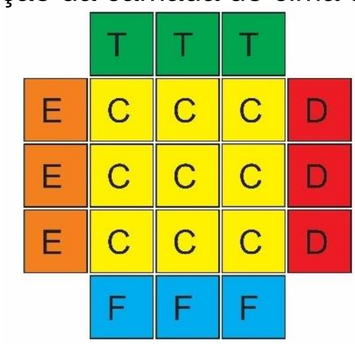
Outro assunto matemático que é dito abstrato é o estudo das funções, visto que seus conceitos não são muito fáceis de serem compreendidos. Muitas vezes, por diversos fatores, os professores de Matemática não ensinam seu conceito de forma mais concreta e isso, por sua vez, acaba atrapalhando no processo de aprendizagem do aluno, pois quando o aluno não entende o que ele está estudando, sua aprendizagem passa a ser apenas mecânica.

De acordo com o provérbio Chinês “Eu ouço, eu esqueço. Eu vejo, me lembro. Eu faço e entendo”, quando entramos em contato direto com o objeto de estudo, as chances de se aprender são inúmeras. Deste modo, acreditamos que se aliarmos o conceito ao concreto, teremos uma aprendizagem reflexiva e significativa.

Assim, utilizando o Cubo Mágico buscaremos conceituar o que é o domínio, o contradomínio e a imagem de uma função. Além de entendermos também os conceitos de função bijetora, função inversa e função composta.

Para esta parte sobre funções, continuaremos a trabalhar com a camada de cima do Cubo Mágico. No entanto, ao invés de notarmos as peças por números, as notaremos de acordo com o lugar que elas ocupam na camada. Para melhor compreensão, vejamos a Figura 22 abaixo.

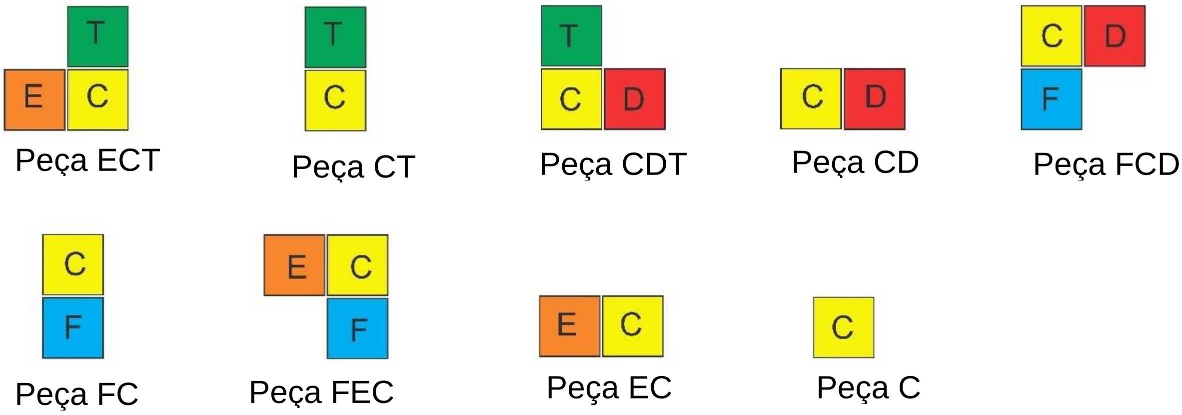
Figura 22 Planificação da camada de cima do Cubo Mágico com letras



Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2016)

Notaremos cada peça desta camada, de acordo com as letras as faces que a compõem, vejamos isso na Figura 23:

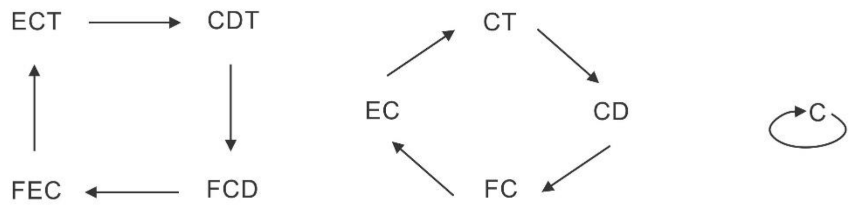
Figura 23 Peças da camada de cima com letras



Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2016)

Aqui ao invés de dizermos que as peças com as mesmas características trocarão de lugar entre si, diremos que as peças que apresentam as mesmas características se transformarão em uma nova peça, apenas mudando sua configuração inicial, de maneira que suas características não alterem. Por exemplo, se movimentarmos a camada de cima em 90°, teremos que a peça ECT se transformará na peça CDT, a peça CT se transformará na peça CD, a peça CDT se transformará na peça FCD e assim sucessivamente. Através disso, podemos dizer que a peça ECT poderá ser transformada na peça CDT, FCD e/ou FEC, a Peça CT poderá ser transformada na peça CD, FC e/ou EC e a Peça C sempre será transformada nela mesma. Podemos representar isso da seguinte forma (vide Figura 24).

Figura 24 Movimentos das peças da camada de cima em letras



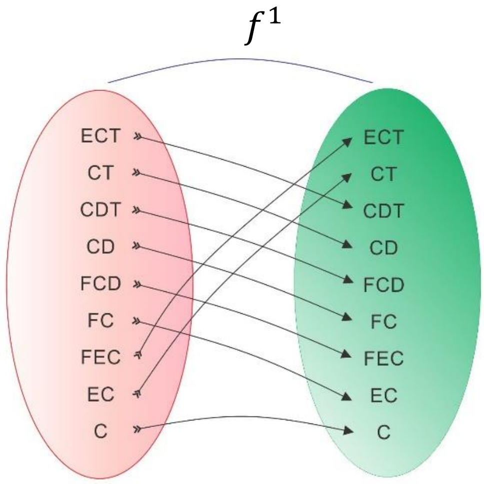
Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2016)

Assim, já conhecendo um pouco sobre a camada de cima do Cubo Mágico, podemos partir para nossa situação concreta sobre função bijetora.

Situação 3: Já sabemos que os movimentos C^1, C^2, C^3 e C^4 são permutações e que para toda permutação podemos associar uma função bijetora a ela. Então, podemos dizer que os movimentos citados acima são também bijeções. Com isso, vamos diagramar algumas dessas bijeções e entender o que é uma função e o que significa dizer que uma função é bijetora.

Para início de conversa, vamos associar a permutação C^1 à função f^1, dada por (vide Figura 25):

Figura 25 Função f^1



Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2016)

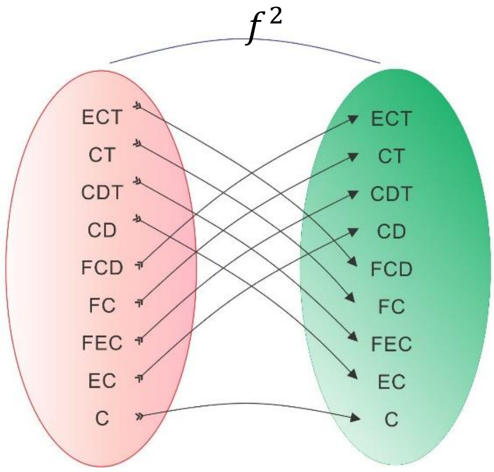
Deste modo, podemos ver na figura acima que, quando aplicamos uma rotação de 90° na camada analisada, seus elementos, com exceção da peça C, sofrem transformações, pois a peça que outrora pertencia a quina ECT, agora se transformou na quina CDT, a peça que antes ocupava o meio CT, agora foi transformada na peça de meio CD e assim sucessivamente. Observando a figura anterior, é possível enxergar também que todas os elementos do "conjunto cor de rosa" são levados a um único elemento do "conjunto de cor verde". Portanto, a partir destas observações, mesmo que não soubéssemos que toda permutação pode ser associada a uma função, podemos concluir que, de fato, f^1 é uma função, porque como bem sabemos, para que "algo" seja considerado uma função, cada elemento do conjunto de saída, chamado de domínio da função, é levado (ou transformado) por uma dada função num único elemento do conjunto de chegada, chamado de contradomínio da função.

Por f^1 ser uma função, através da figura 25 identificamos que o domínio desta função é o "conjunto cor de rosa", formado pelas peças da camada de cima do Cubo. O contradomínio é o "conjunto de cor verde", que também é formado pelas peças da camada de cima do Cubo. Em outras palavras, podemos dizer que o domínio da função é o "conjunto de saída", ou seja, o conjunto no qual as flechas partem e o contradomínio é o conjunto onde as peças chegam. Já a imagem desta função são todas os elementos do contradomínio que são "flechados" pelos elementos do domínio da função dada. Com isso, no caso de f^1, o domínio, a imagem e o contradomínio são os mesmos conjuntos.

Para mostrarmos que realmente a função f^1 é uma bijeção, nos basta observar a figura anterior, pois uma função é considerada bijetora, ou seja, injetora e sobrejetora ao mesmo tempo, quando todos os elementos do domínio são associados a um, e apenas um, elemento do contradomínio, de modo que todos os elementos do contradomínio sejam ligados a um elemento do domínio da função.

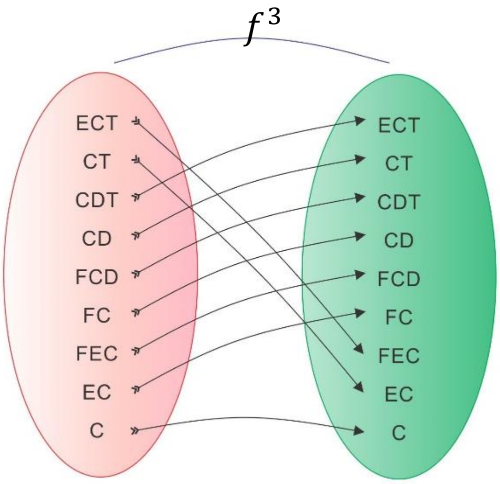
Seguindo a notação acima, associaremos a permutação C^2 à função f^2 e a permutação C^3 à função f^3. Para analisarmos o que acontece com essas funções, vejamos as Figuras 26 e 27, respectivamente:

Figura 26 Função f^2



Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2016)

Figura 27 Função

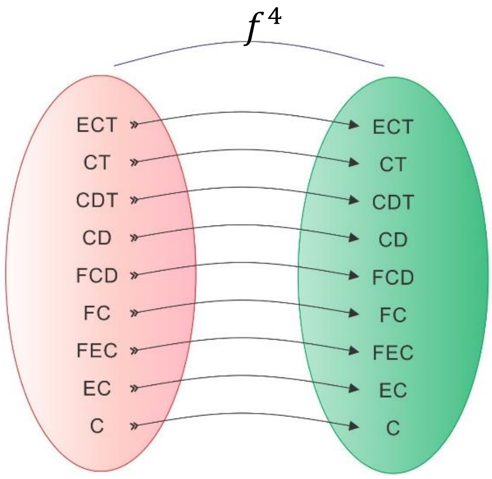


Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2016)

Como podemos ver nas figuras acima, em ambas as funções as peças sofrem transformações. Ainda, podemos ver também que o domínio destas funções é representado pelo "conjunto cor de rosa" que é composto pelos elementos da camada de cima do Cubo, e o contradomínio e a imagem é o "conjunto de cor verde", composto pelos elementos da camada de cima do Cubo.

Por fim, associando a permutação C^4 à função f^4, temos que (vide Figura 28):

Figura 28 Função f^4



Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2016)

Podemos ver que diferentemente das funções anteriores, a função f^4 basicamente não transforma os elementos que compõem a camada de cima do Cubo Mágico, uma vez que todos os elementos são transformados em si próprio, o que é o mesmo que não haver transformação. Funções deste tipo são chamadas de função identidade.

Já conhecendo todas as funções, podemos dizer que o domínio, o contradomínio e a imagem destas funções é o mesmo, ou seja, o conjunto dos elementos da camada de cima do Cubo Mágico.

Assim sendo, através desta **Situação 3** percebemos que, de fato, as permutações C^1, C^2, C^3 e C^4 são funções bijetoras e que podemos reescrevê-las por f^1, f^2, f^3 e f^4, respectivamente. Além disso, nos foi possível também ver de forma concreta o que é o domínio, o contradomínio e a imagem de uma função, apesar de não ser possível distinguir contradomínio de imagem, visto que o conjunto em todos os casos da situação analisada é o mesmo.

Já possuindo conhecimentos sobre função bijetora, podemos prosseguir nossos estudos. Deste modo, vejamos agora que também é possível definir uma lei de formação para cada uma das funções acima. Neste momento, estaremos fazendo transição do concreto para o abstrato.

Situação 4: Já vimos que f^1, f^2, f^3 e f^4 são funções bijetoras, e com isso fica-nos a seguinte pergunta: será que existe uma forma de escrever matematicamente uma regra para cada uma dessas funções? Se sim, como?

Para respondermos tais questionamentos, precisaremos utilizar alguns dados que se encontram nas situações 1 e 3 analisadas anteriormente, pois a partir de dados encontrados nestas situações poderemos enxergar que existe sim uma forma de definir uma regra para cada uma destas funções. Iniciaremos esta construção pela função f^1, em seguida construiremos as regras para as funções f^2, f^3 e f^4 respectivamente.

Para criarmos a regra da função f^1 precisamos, primeiramente, notar cada peça da camada de cima por um número, como já havíamos feito na **Situação 1**. Assim, precisamos observar que, embora na **Situação 1** tenhamos utilizado número para descrever as peças e na **Situação 3** tenhamos usado letras, as peças são as mesmas, diferenciando apenas a notação. Deste modo, podemos dizer que a peça ECT é igual a peça 1, a peça CT é igual peça 2, a peça CDT é igual a peça 3, a peça EC é igual a peça 4, FCD é igual a peça 5, FC é igual a peça 6, FEC é igual a peça 7, EC é igual a peça 8 e C é igual a peça 0.

Recordando o que ocorre quando aplicamos a função f^1, percebemos que as peças de quinas 1, 3, 5 e 7 são transformadas em 3, 5, 7 e 1, respectivamente, as peças de meios 2, 4, 6 e 8 são transformadas pela função f^1 nas peças de meios 4, 6, 8 e 2 e a peça de centro 0 é transformada nela própria, pela função f^1. Notando estes dados matematicamente, temos que:

$$\begin{matrix} f^1\,(1) = 3 & f^1\,(2) = 4 & \\ f^1\,(3) = 5 & f^1\,(4) = 6 & f^1(0) = 0 \\ f^1\,(5) = 7 & f^1\,(6) = 8 & \\ f^1\,(7) = 1 & f^1\,(8) = 2 & \end{matrix} \qquad (14)$$

Com isso, precisamos notar que as peças que, de fato, sofrem algum tipo de transformação são as peças que variam de 1 a 8, sendo a peça 0 fixa. Ainda, se observarmos o que ocorre com as peças da camada de cima quando sofrem uma rotação de 90° perceberemos que as peças que permutam, trocam de lugar de dois em dois, melhor dizendo, as peças “pulam” um lugar, ficando assim no próximo lugar. Vejamos bem: a peça 1 precisou “pular” o lugar da peça 2 para chegar assim, no lugar

3, a peça 2 teve que “pular” a peça 3 para chegar no lugar 4 e assim respectivamente. Se observarmos numericamente isto, é como se estivéssemos somando 2 a cada uma destas peças, pois $1+2=3, 2+2=4, 3+2=5$ e assim sucessivamente.

Feito estas observações, podemos definir a lei de formação para a função f^1 da seguinte forma:

$$f^1(x)=\begin{cases} x+2, \ se\ x\ \acute{e}\ quina\ ou\ meio \\ x, \ se\ x\ \acute{e}\ o\ centro \end{cases}, \tag{15}$$

onde as quinas são representadas pelo conjunto $Q=\{1,3,5,7\}$, os meios são representados pelo conjunto $M=\{2,4,6,8\}$ e o centro é representado pelo conjunto $C=\{0\}$.

Note que a partir da quina 7, as imagens serão valores maiores ou iguais a 9, deste modo, observamos que quando o resultado da soma for maior que oito, o dividiremos por oito, o resto da divisão será a imagem da função. Lembramos que dividiremos o resultado por oito pelo fato de existirem apenas oito lugares nas quais as peças permutam entre si.

Analisando agora a função f^2, temos que as peças de quinas 1, 3, 5 e 7 são transformadas nas peças 5, 7, 1 e 3, respectivamente; as peças 2, 4, 6 e 8 são transformadas nas peças de meios 6, 8,2 e 4, respectivamente; e a peça 0 continua sendo transformada nela própria. Escrevendo isto matematicamente, temos que:

$$\begin{array}{lll} f^2\ (1)=5 & f^2\ (2)=6 & \\ f^2\ (3)=7 & f^2\ (4)=8 & f^2(0)=0 \\ f^2\ (5)=1 & f^2\ (6)=2 & \\ f^2\ (7)=3 & f^2\ (8)=4 & \end{array} \tag{16}$$

Aqui nesta função, percebemos que as peças “pulam” três lugares, ficando assim no próximo lugar, pois a peça 1 “pulou” as peças 2, 3 e 4, ficando assim no lugar 5, a peça 2 “pulou” as peças 3, 4 e 5, ficando no lugar da peça 6 e assim sucessivamente. Em outras palavras, é como se fosse sempre somado 4 a cada uma das peças, pois $1+4=5, 2+4=6, 3+4=7$ e assim por diante.

Deste modo, podemos definir a regra para da função da seguinte forma:

$$f^2(x)=\begin{cases} x+4, se\ x\ \acute{e}\ quina\ ou\ meio \\ x, se\ x\ \acute{e}\ o\ centro \end{cases}, \tag{17}$$

onde $Q=\{1,3,5,7\}$, $M=\{2,4,6,8\}$ e $C=\{0\}$.

Analogamente, na função f^3 os elementos são acrescentados 6 posições. Assim, a regra para esta função será a seguinte:

$$f^3(x) = \begin{cases} x + 6, se\ x\ \text{é}\ quina\ ou\ meio \\ x, se\ x\ \text{é}\ o\ centro \end{cases}, \quad (18)$$

onde $Q = \{1,3,5,7\}$, $M = \{2,4,6,8\}$ e $C = \{0\}$.

Por fim, por f^4 ser a função identidade, a ela não somamos nada. Deste modo, sua lei de formação é dada por $f(x) = x$, onde x pode ser quina, meio ou centro.

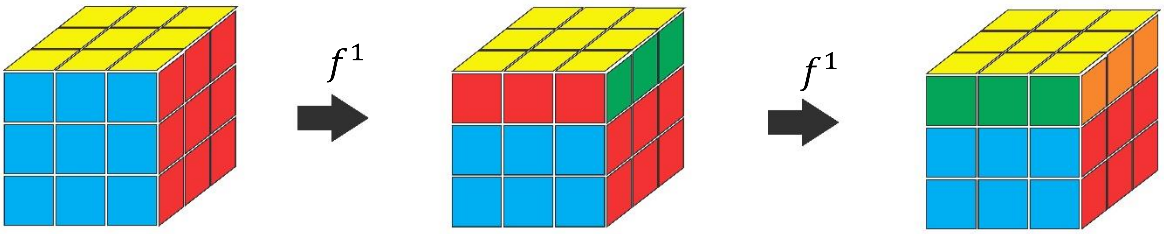
A partir destas leis de formação, percebemos que para cada rotação de 90°, 180° e 270°, as peças "andam" duas, quatro e seis peças, respectivamente.

Agora, partiremos para o estudo da noção de composição de funções, que podemos observar no Cubo Mágico.

Situação 5: Vamos fazer algumas composições das funções f^1, f^2, f^3 e f^4 e em seguida analisarmos o que acontece com a composta dessas funções.

Inicialmente, faremos a composição das funções f^1 e f^1, em seguida faremos a composição de f^1 e f^2, depois f^2 e f^3 e por fim faremos f^3 e f^4. Assim, vejamos na Figura 29 abaixo a composta de f^1 com f^1:

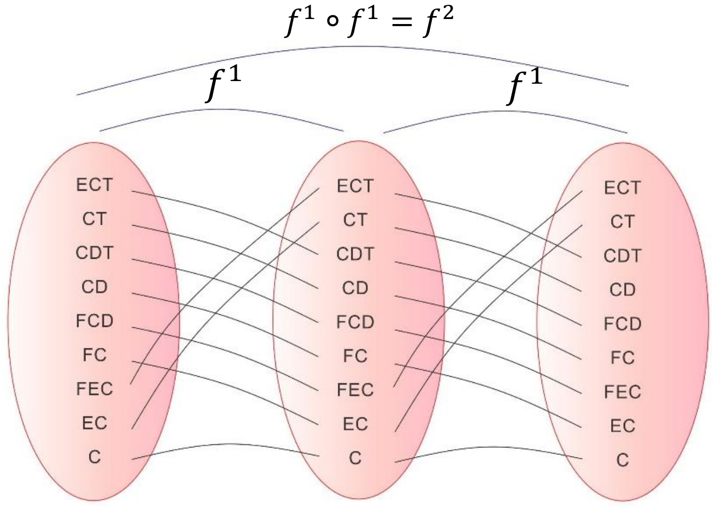
Figura 29 Composição de f^1 com f^1



Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2016)

Se observarmos atentamente a figura acima, perceberemos que $f^1 \circ f^1$ resulta na função f^2, pois a peça ECT foi transformada na peça FCD, a peça CT foi transformada na peça FC e assim por diante. Para compreendermos melhor isto, observemos a Figura 30 abaixo:

Figura 30 Função composta $f^1 \circ f^1$

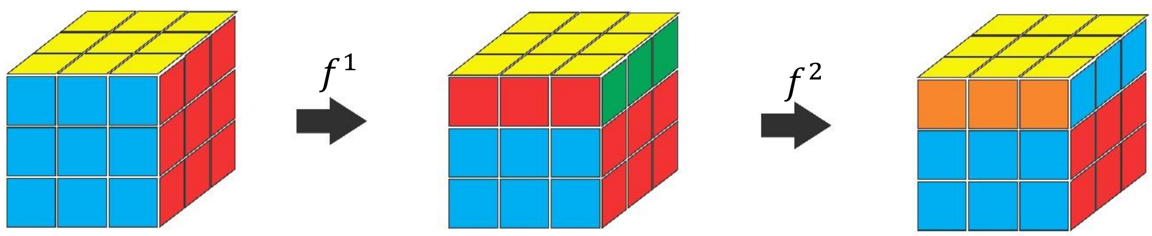


Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2016)

Assim, percebemos que aplicarmos a função f^2 na camada de cima do Cubo Mágico é o mesmo que aplicarmos f^1 e em seguida f^1.

Agora, vamos ver o que acontece quando fazemos a compostas das funções f^1 e f^2. Observemos na Figura 31:

Figura 31 Composição de f^1 com f^2

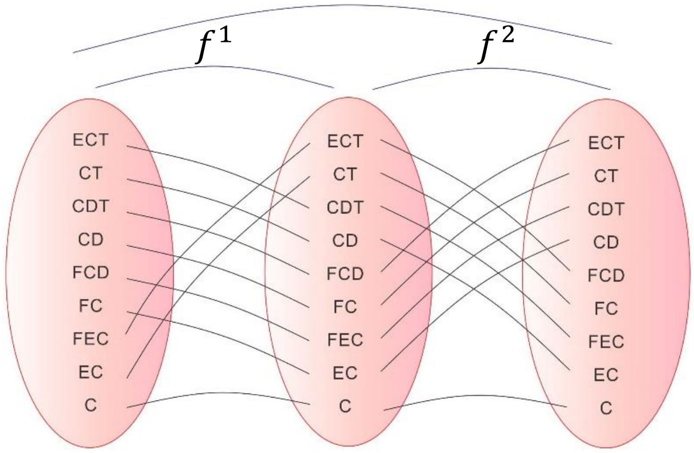


Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2016)

Analisando a figura acima, percebemos que $f^2 \circ f^1$ resulta na função f^3, pois a peça ECT foi transformada na peça FEC, a peça CT foi transformada na peça EC e assim sucessivamente. Diagramando isso, temos que (vide Figura 32):

Figura 32 Função composta $f^2 \circ f^1$

$$f^2 \circ f^1 = f^3$$

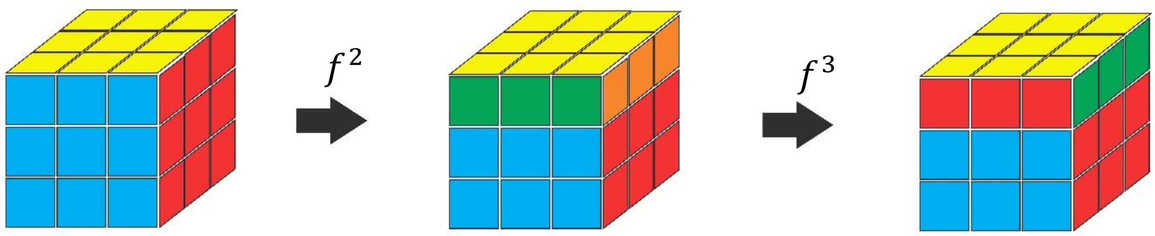


Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2016)

Com isso, podemos dizer que, aplicarmos a função f^3 na camada de cima do Cubo Mágico equivale ao mesmo que aplicarmos a função f^1 e em seguida a função f^2, ou vice-versa, pois quando movimentamos em apenas uma camada, a ordem de aplicação destes são importa.

Neste momento, vejamos o que ocorre quando compomos as funções f^2 e f^3. Para isso, observemos a Figura 33 a seguir:

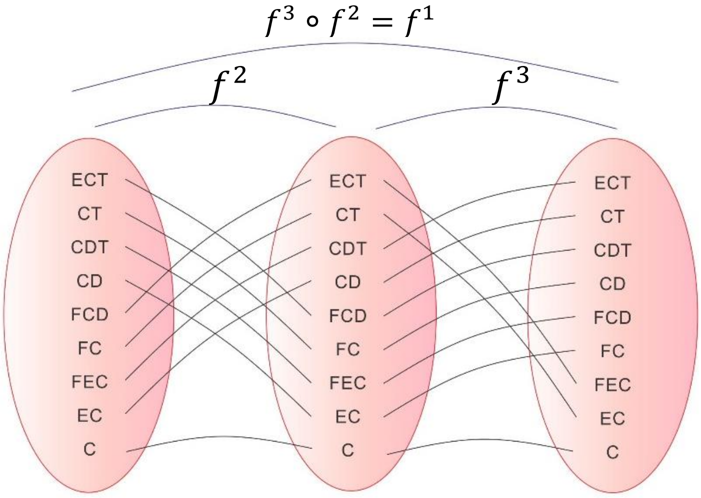
Figura 33 Composição de f^2 com f^3



Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2016)

Através da figura acima, percebemos que $f^3 \circ f^2$ resulta na função f^1, pois a peça ECT foi transformada na peça CDT, a peça CT foi transformada na peça CD e assim por diante. Fazendo o diagrama desta função composta, temos que (vide Figura 34):

Figura 34 Função composta $f^3 \circ f^2$

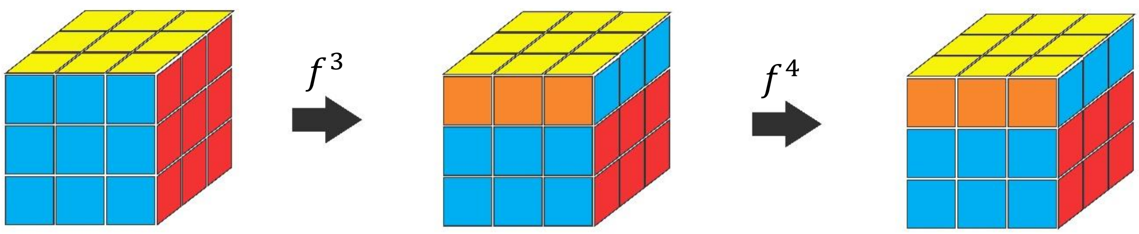


Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2016)

Ou seja, aplicarmos na camada de cima a função f^2 e em seguida f^3, ou vice-versa, é equivalente a aplicarmos, apenas, a função f^1.

Por fim, vamos ver o que acontece quando aplicamos a função f^3 e em seguida a função f^4 na camada de cima do Cubo (vide Figura 35)

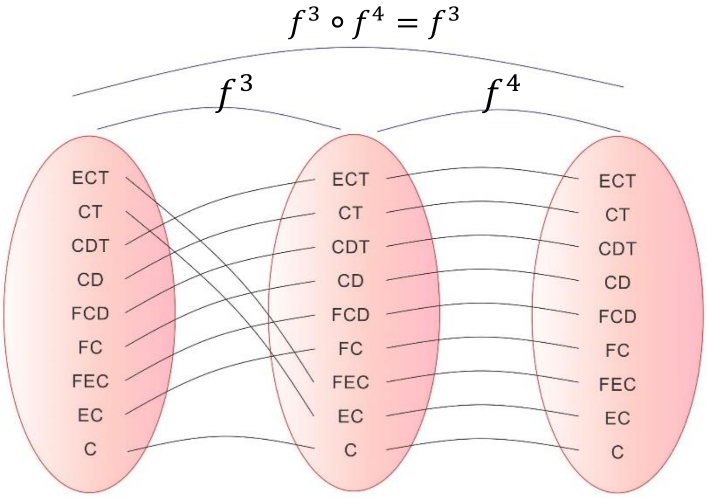
Figura 35 Composição de f^3 com f^4



Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2016)

Através da figura acima, percebemos que $f^3 \circ f^4$ resulta na função f^3, ou seja, como era de se esperar, a composição da função identidade com "qualquer função" resulta nesta última função. Analisando, através de diagrama esta composição, temos que (vide Figura 36):

Figura 36 Função composta $f^3 \circ f^4$



Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2016)

Ou seja, percebemos que aplicar f^3 e em seguida f^4 é o mesmo que aplicar apenas a função f^3.

Assim, através desta situação percebemos o que acontece concretamente quando fazemos a composta de uma função. Devemos notar que, só conseguimos fazer a composição de $g \circ f$ porque a imagem da função f está contida do domínio da função g.

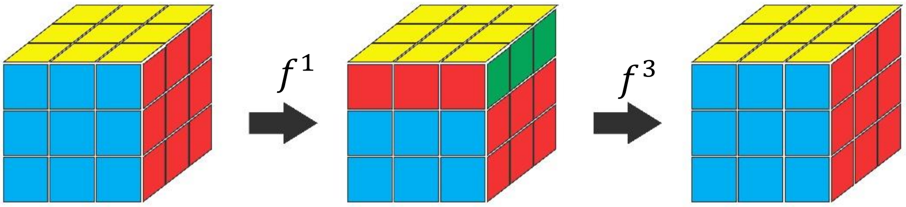
Agora, para finalizarmos nossos estudos sobre as funções existentes no Cubo Mágico, vamos compreender o que é e como se comporta concretamente uma função inversa de uma dada função bijetora.

Situação 5: Vamos calcular todas as funções inversas das funções f^1, f^2, f^3 e f^4.

Primeiramente, precisamos compreender que, em se tratando de função bijetora, a função inversa de uma função “f”, será a função de desfará tudo que a função “f” fez. Nesta situação, sabemos que f^1, f^2, f^3 e f^4 são rotações de 90°, 180°, 270° e 360°, respectivamente. Deste modo, para calcularmos as funções inversas destas funções, nos basta encontrar a rotação “y” que desfará o que a rotação “z” fez.

Como a função f^1 equivale a uma rotação de 90°, precisamos desfazer esta rotação, que é o equivalente a trazer a função para uma rotação de zero graus. Assim, existem duas formas de fazermos isso: poderíamos aplicar a função f^{-1}, ou seja, poderíamos aplicar uma rotação de 90° no sentido anti-horário, ou poderíamos encontrar uma função “g” de modo que a composição da função f^1 com a função “g” resulte na função identidade. Optaremos aqui por encontrar esta função “g”. Deste modo, para que uma rotação de 90° ser desfeita, precisamos somar a ela uma rotação 270°, pois 90° + 270° = 360°, e como sabemos uma rotação de 360° equivale a uma rotação de 0°. Com isso, para que a função f^1 seja desfeita, precisaremos aplicar a função f^3, pois é a função que equivale a uma rotação de 270°. Para ficar mais claro, vejamos isto na Figura 37 abaixo:

Figura 37 Aplicação de f^1 e em seguida f^3

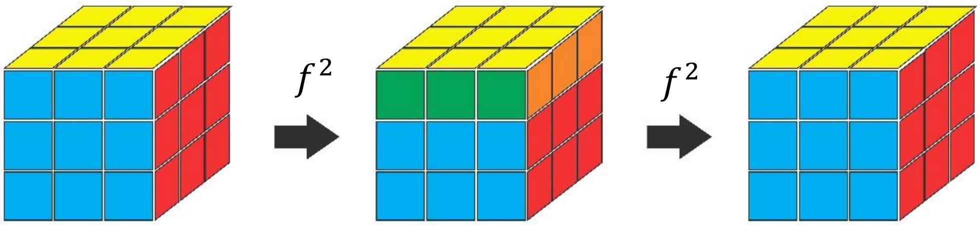


Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2016)

Assim, como podemos ver, a inversa da função f^1 é, sem dúvidas, a função f^3. Ainda, podemos dizer que a inversa da função f^3 é a função f^1, pois como estamos rotacionando apenas uma camada, a ordem na qual é feita a aplicação das rotações não importa.

Já a função f^2, que é equivalente a uma rotação de 180°, para ser desfeita, é preciso aplicar mais uma rotação de 180°, pois 180° + 180° = 360°. Deste modo, para que a função f^2 seja desfeita, é necessário aplicar mais uma vez a função f^2. Para facilitarmos nossa compreensão, vejamos a Figura 38 a seguir:

Figura 38 Aplicação de f^2 e em seguida f^2



Fonte: Elaborado pelo autor deste trabalho (2016)

Assim, temos que, de fato, a inversa da função f^2 é a própria função f^2.

A função f^4 é equivalente a uma rotação de 360°. Por se tratar da função identidade, temos que a inversa da função f^4 é ela mesma, pois 360° + 360° = 720° e 720° também é equivalente a uma rotação de 0°.

Deste modo, temos que a inversa da função f^1 é a função f^3, a inversa da função f^2 é a própria função f^2, a inversa da função f^3 é a função f^1 e a inversa da função f^4 é a função f^4. Com isso, podemos ver que é possível utilizar o Cubo Mágico para compreendermos, de forma concreta, o que é e como se comporta uma função inversa.

Assim, por meio das situações 3, 4 e 5 percebemos que é possível utilizar o Cubo Mágico no ensino de funções, visto que, podemos, através de situações, mostrar alguns conceitos referentes a este assunto no Cubo. Além disso, acreditamos que este seja um recurso viável pois mostrar concretamente um assunto abstrato poderá facilitar a compreensão e aprendizagem dos alunos.

6 CONCLUSÃO

Com nossa investigação, percebemos que, a utilização dos jogos em sala de aula apresenta inúmeras contribuições para o ensino de Matemática, visto que ao fazer uso desse recurso o aluno torna-se agente participativo do processo de ensino aprendizagem, transformando, assim, o cenário da educação que muitas vezes é centrado apenas no professor e nos conteúdos.

Percebemos ainda que, de fato, alguns conceitos relacionados ao estudo de Permutações e Funções estão presentes no Cubo Mágico. Com isso, defendemos a ideia de utilizar este jogo para ensino destes conteúdos, pois acreditamos que, por se tratar de um jogo, o uso do Cubo Mágico em aulas de Matemática poderá render grandes frutos no processo de ensino aprendizagem.

Além disso, ao utilizar o Cubo Mágico em aulas de Matemática, poderemos mostrar aos alunos que a Matemática pode estar presente onde menos imaginamos, de modo os alunos percebam que os conhecimentos adquiridos nas aulas desta disciplina poderão ser aplicados para além das provas bimestrais.

REFERÊNCIAS

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BROUGÈRE, G. **Jogo e educação**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998

CHATEAU, J. **O jogo e a criança**. São Paulo: Summus, 1987.

CINOTO, Rafael Werneck; DIAS, David Pires. **Ensino de análise combinatória usando o cubo mágico**. 2014. Disponível em: <http://vjornadalicenciaturas.icmc.usp.br/CD/EIXO 2/210.pdf>. Acesso em: 15 set. 2015.

CUBE20. **God's number is 20.** Disponível em: <http://www.cube20.org/>. Acesso em: 25 mar. 2016.

D'AMBROSIO, Beatriz S. Como ensinar matemática hoje? **Temas e Debates**, SBEM. Ano II. n2. Brasília. 1989. p. 15-19

DAVIS, Tom. **Teaching Mathematics with Rubik's Cube**. 1983. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/3027317?seq=1#page_scan_tab_contents>. Acesso em: 14 set. 2015.

FRANCOCUBE. **Présentation des différentes méthodes.** Disponível em: <http://www.francocube.com/rubik_index>. Acesso em: 12 ago. 2015.

FAJARDO, Vanessa. Cubo mágico ajuda a aprender mais sobre a matemática, diz colecionador. **G1**, São Paulo. Disponível em: <http://g1.globo.com/educacao/noticia/2013/01/cubo-magico-ajuda-aprender-mais-sobre-matematica-diz-colecionador.html>. Acesso em: 25 abr. 2016.

HUIZINGA, J. **Homo ludens**: O jogo como elemento da cultura. 2.ed. São Paulo: Perspectiva, 1990.

Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br>.

JOHANSSON, Frans. **Clique:** como nascem as grandes ideias. São Paulo: Portfolio-penguin, 2013.

KILPATRICK, Jeremy. Investigación en educación matemática: su historia y algunos temas de actualidad. In: KILPATRICK, Jeremy; GÓMEZ, Pedro; RICO, Luis. **Educación matemática.** Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica, 1998. p. 1-18.

LIMA, José Milton. **O jogo como recurso pedagógico no contexto educacional.** São Paulo: Cultura Acadêmica: Universidade Estadual Paulista, 2008.

MACEDO, Lino PETTY; Ana Lúcia PASSOS, Norimar Christe. **Os jogos e o lúdico na aprendizagem escolar**. Porto Alegre: Artmed, 2005.

MASTROCOLA, Vicente Martin. **Doses lúdicas**: breves textos sobre o universo dos jogos e entretenimento. São Paulo: Independente, 2013.

NETO, João Pedro; SILVA, Jorge Nulo. **Jogos matemáticos, jogos abstractos**. Portugal: RBA, 2008.

CUBO MÁGICO vira disciplina obrigatória em colégio de São Paulo. Folha de São Paulo, São Paulo. [s.n] 2014. Disponível em: <http://www1.folha.uol.com.br/folhinha/2014/04/1437273-cubo-magico-vira-disciplina-obrigatoria-em-colegio-de-sao-paulo.shtml>. Acesso em: 14 set. 2015.

PIAGET, J. **A formação do símbolo na criança**. Rio de Janeiro: Zahar, 1971.

RODRIGUES, Vânia Cristina da Silva; SILVA, Brunno Freitas. **Trabalhando alguns conceitos de álgebra com o cubo mágico.** 2013. Disponível em: <http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/1175.pdf>. Acesso em: 12 jan. 2016.

RUBIK'S. **The history of the rubik's cube.** Disponível em: <http://www.rubiks.com/about/the-history-of-the-rubiks-cube/>. Acesso em: 12 fev. 2016.

SMOLE, Kátia Stocco et al. Os jogos nas aulas de matemática do ensino médio. In: SMOLE, Kátia Stocco et al. **Jogos de matemática**: de 1° a 3° ano. Porto Alegre: Grupo A, 2008. cap. 1. p. 9-27.

TAHAN, Malba. **Didática da matemática**. 2. ed. São Paulo: Saraiva, 1961.

TEIXEIRA, Ricardo Roberto Plaza; APRESENTAÇÃO, Katia Regina dos Santos da. Jogos em sala de aula e seus benefícios para a aprendizagem da matemática. **Revista Linhas**, Florianópolis, v. 15, n. 28, p. 302-323, jan./jun. 2014.