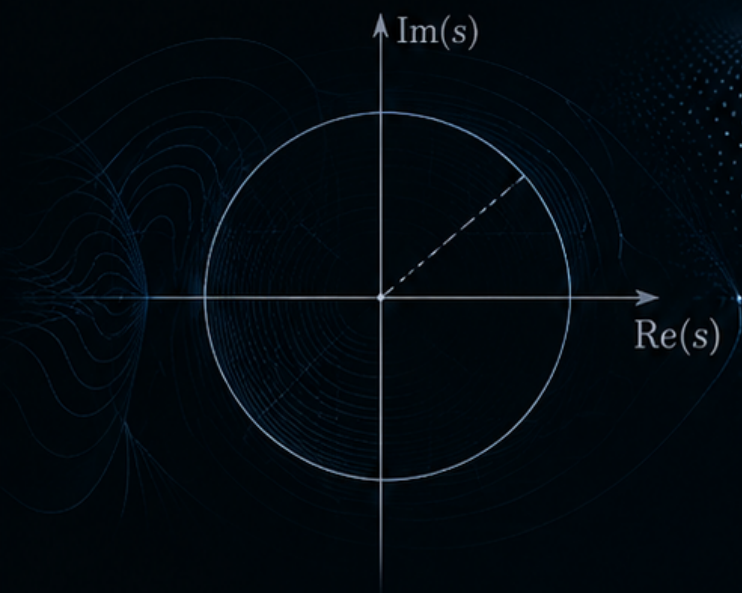
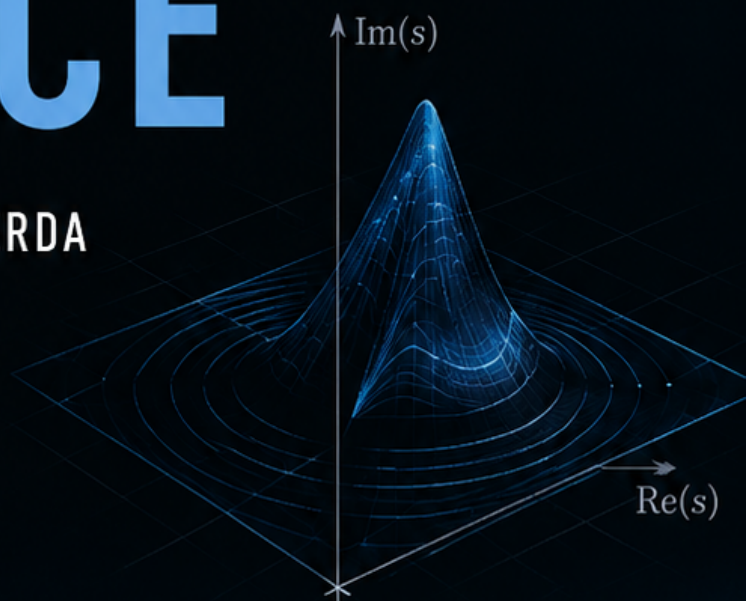


ANÁLISE DE FOURIER E A TRANSFORMADA DE LAPLACE

JOSÉ HÉLIO HENRIQUE DE LACERDA

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$



ANÁLISE DE FOURIER E A TRANSFORMADA DE LAPLACE



ANÁLISE DE FOURIER E A TRANSFORMADA DE LAPLACE

JOSÉ HÉLIO HENRIQUE DE LACERDA

Belém-PA
2026

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

L116

Lacerda, José Hélio Henrique de.

ANÁLISE DE FOURIER E A TRANSFORMADA DE LAPLACE /

- Belém : Home Editora, 2026.

Livro em PDF

164 p.

ISBN 978-65-6089-525-6

DOI 10.46898/home.mr58kx4xetvp

1. Análise de Fourier 2. Transformada de Laplace 3. Equações Diferenciais

I. Lacerda, José Hélio Henrique de. II. Título.

CDD-515.35

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Métodos de resolução de EDP

Ficha catalográfica elaborada conforme ABNT NBR 12899 / CDD 23ª ed.

Conselho Editorial

Home Editora

MEMBROS DO CONSELHO

Prof. Dr. Ednilson Sergio Ramalho de Souza - UFOPA
(Editor-Chefe)

Profa. Dra. Danjone Regina Meira - USP

Profa. Ms. Roberta Seixas - Unesp

Prof. Ms. Gleydson da Paixão Tavares - UESC

Profa. Dra. Monica Aparecida Bortolotti - Unicentro

Profa. Dra. Isabele Barbieri dos Santos - FIOCRUZ

Profa. Dra. Luciana Reusing - IFPR

Profa. Ms. Laize Almeida de Oliveira - UNIFEISSPA

Prof. Ms. John Weyne Maia Vasconcelos - UFC

Profa. Dra. Fernanda Pinto de Aragão Quintino - SEDUC-AM

Profa. Dra. Leticia Nardoni Marteli - IFRN

Prof. Ms. Flávio Roberto Chaddad - SEESP

Prof. Dr. Fábio Nascimento da Silva - CAP/UFAC

Profa. Ms. Sandolene do Socorro Ramos Pinto - UFPA

Profa. Dra. Klenicy Kazumy de Lima Yamaguchi - UFAM

Prof. Dr. Jose Carlos Guimaraes Junior - Governo do Distrito Federal

Prof. Ms. Marcio Silveira Nascimento - UFRR

Prof. Ms. João Filipe Simão Kembo - Escola Superior Pedagógica do
Bengo - Angola

Prof. Ms. Divo Augusto Pereira Alexandre Cavadas - FADISP

Profa. Ms. Roberta de Souza Gomes - NESPEFE - UFRJ

Prof. Ms. Valdimiro da Rocha Neto - UNIFEISSPA

Prof. Dr. Jeferson Stiver Oliveira de Castro - IFPA

Prof. Ms. Artur Pires de Camargos Júnior - UNIVÁS

S U M Á R I O

EPÍGRAFE	6
NOTAÇÕES E SÍMBOLOS	8
PREFÁCIO	10
1 INTRODUÇÃO	13
2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS	22
3 SÉRIES DE FOURIER	52
4 TRANSFORMADAS <i>DE FOURIER E DE LAPLACE</i>	102
5 APLICAÇÕES DA SÉRIE DE FOURIER, DA TRANSFORMADA DE FOURIER E DA TRANSFORMADA DE LAPLACE	135
BIBLIOGRAFIA	161

Análise de Fourier e a Transformada de Laplace

José Hélio Henrique de Lacerda

2026

*“Que os vossos esforços desafiem as impossibilidades,
lembrai-vos de que as grandes coisas do homem
foram conquistadas do que parecia impossível.”*

— Charles Chaplin

Notações e Símbolos

$\mathbb{R}$ Conjunto dos números reais $\mathbb{N}$ Conjunto dos números naturais

$\mathbb{C}$ Conjunto dos números complexos

$\mathcal{L}$ Transformada de Laplace

$\mathfrak{F}$ Transformada de Fourier

$\mathfrak{F}_c$ Transformada cosseno de Fourier

$\mathfrak{F}_s$ Transformada seno de Fourier

$\|\cdot\|$ Norma euclidiana

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ Produto interno

$L^2(\Omega)$ Espaço de funções quadrado-integráveis

$L^1(\mathbb{R})$ Espaço de funções integráveis

$\delta(x)$ Delta de Dirac

$D_n(x)$ Núcleo de Dirichlet

$F_n(x)$ Núcleo de Fejér

$\sigma_n(x)$ Média de Cesàro

$f * g$ Produto convolução

PREFÁCIO

Prefácio

Este livro é resultado de um trabalho de conclusão de curso desenvolvido no Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, sob a orientação do Prof. Dr. Davis Matias de Oliveira. A obra foi completamente reestruturada a partir da monografia original, sendo adaptada para atingir um público mais amplo, incluindo estudantes de graduação, professores e pesquisadores interessados em Análise de Fourier e Transformada de Laplace.

A motivação para este estudo surgiu da necessidade de compreender os fundamentos teóricos que embasam dois dos mais importantes métodos de resolução de equações diferenciais parciais: a Análise de Fourier e a Transformada de Laplace. Embora estas teorias tenham vastas aplicações em física, engenharia e diversas outras áreas, são pouco abordadas nos cursos de licenciatura em Matemática. Acreditamos que é fundamental que o estudante de Matemática tenha contato com este conhecimento, ampliando seu horizonte de possibilidades de atuação nas áreas de pesquisa científica.

O livro está organizado em cinco capítulos. O Capítulo 1 apresenta o contexto histórico e a motivação do estudo. O Capítulo 2 expõe os conceitos preliminares necessários, incluindo funções periódicas, ortogonalidade, funções pares e ímpares, e noções de convergência. O Capítulo 3 desenvolve a teoria das séries de Fourier, abordando coeficientes de Fourier, convergência pontual e uniforme, núcleos de Dirichlet e Fejér, e a Identidade de Parseval. O Capítulo 4 apresenta as transformadas de Fourier e de Laplace, com ênfase em suas propriedades e conexões. Finalmente, o Capítulo 5 exhibe aplicações destas teorias na resolução de equações diferenciais parciais clássicas.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Davis Matias de Oliveira, pela confiança e orientação ao longo de todo o trabalho. Agradeço também aos professores Aldo Trajano Lourêdo e Luciana Roze de Freitas, pela paciência, incentivos e generosidade. Aos professores Manuel Milla Miranda, Maria da Conceição Vieira, Thiciany Iwano e Isabelle Aires, que contribuíram ricamente para o meu aprendizado. Dentre os amigos, cito Naelson Silva, Helder Flaubert, Jonatas Romero, Cícero José da Silva e Mirdy Alves, parceiros de estudos. Agradecimentos especiais à minha mãe, Lúcia de Fátima, que esteve sempre orando para que tudo desse certo; à minha esposa Cláudia, que esteve sempre ao meu lado me apoiando em todos os momentos.

Espero que este livro possa contribuir para a difusão do conhecimento em Análise de

Fourier e Transformada de Laplace, inspirando novas pesquisas e despertando o interesse de mais estudantes por estas fascinantes áreas da Matemática.

Campina Grande, maio de 2016

José Hélio Henrique de Lacerda

INTRODUÇÃO

01

Capítulo 1

Introdução

1.1 Contexto Histórico e a Origem da Matemática

A Matemática, como a conhecemos hoje, é fruto de um longo processo de desenvolvimento que se estende por milênios. Seu surgimento está intimamente ligado às necessidades práticas das civilizações antigas. Registros históricos indicam que, por volta do ano 3000 a.C., na região da Mesopotâmia, os babilônios já utilizavam sistemas numéricos para contar objetos, medir terras e realizar transações comerciais. Este foi o primeiro passo de uma jornada que transformaria a Matemática em uma das mais poderosas ferramentas do pensamento humano.

Com o passar dos séculos, grandes pensadores de diversas culturas — gregos, hindus, árabes e europeus — contribuíram para o desenvolvimento desta ciência. Através da abstração e da formalização, a Matemática tornou-se capaz de sintetizar ideias complexas e descrever fenômenos naturais com precisão notável. No entanto, como observa [1], a Matemática não é apenas um conjunto de fórmulas e teoremas; é uma linguagem que permite modelar a realidade e, muitas vezes, é necessário desenvolver novas teorias para descrever problemas emergentes.

Um exemplo notável deste processo é a *Teoria dos Jogos*, desenvolvida pelo matemático húngaro naturalizado estadunidense John von Neumann (1903-1957). Von Neumann percebeu que a Matemática existente à sua época não era suficiente para modelar situações de competição econômica e estratégica, o que o levou a criar uma nova teoria matemática. Este exemplo ilustra como a Matemática evolui em resposta às necessidades humanas, e como novas áreas do conhecimento frequentemente surgem da interação entre teoria e aplicação.

Observação 1.1. A história da Matemática mostra que o desenvolvimento teórico frequentemente precede ou acompanha as aplicações práticas. A Teoria dos Jogos, por exemplo, foi desenvolvida décadas antes de suas aplicações em economia, ciência política e biologia evolutiva.

1.2 O Surgimento das Equações Diferenciais

A história das equações diferenciais está intrinsecamente ligada ao desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral no final do século XVII. Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), de forma independente, criaram os fundamentos do Cálculo, fornecendo as ferramentas necessárias para descrever matematicamente a variação e o movimento.

Com estas novas ferramentas, tornou-se possível modelar fenômenos naturais que antes eram apenas descritos qualitativamente. Problemas como o movimento dos planetas, a oscilação do pêndulo, a queda dos corpos e o fluxo de fluidos puderam ser estudados com rigor matemático. Cientistas como Johannes Kepler (1571-1630), Galileu Galilei (1564-1642) e Christiaan Huygens (1629-1695) haviam realizado observações detalhadas destes fenômenos, mas lhes faltava a teoria matemática para descrevê-los com precisão.

Com o Cálculo, uma nova área da Matemática emergiu: a teoria das **Equações Diferenciais**. Esta teoria constitui um conjunto de ferramentas indispensáveis não apenas para a Matemática pura, mas também para a Física, Engenharia, Biologia, Economia e diversas outras ciências. Como afirma [1], as equações diferenciais talvez sejam o ramo da Matemática que possui as maiores interações com outras áreas do conhecimento, justamente porque descrevem como as quantidades variam no tempo e no espaço.

Leonhard Euler (1707-1783), um dos mais prolíficos matemáticos da história, foi discípulo de Johann Bernoulli e tornou-se o principal responsável pelo desenvolvimento inicial da teoria das equações diferenciais. Sua obra, que preenche setenta e quatro grandes volumes, abrange praticamente todas as áreas da Matemática conhecidas em sua época, e suas contribuições para a teoria das equações diferenciais são imensuráveis.

Entretanto, mesmo com o avanço proporcionado por Euler e outros matemáticos, logo se percebeu que não seria possível obter métodos gerais de resolução explícita para todas as equações diferenciais em termos de funções elementares. Esta constatação levou ao desenvolvimento de métodos aproximados e à criação de novas teorias. O próprio Euler introduziu técnicas para obter soluções aproximadas, como a aproximação por linhas poligonais e a representação de soluções por séries de potências.

Definição 1.2 (Equação Diferencial). Uma **equação diferencial** é uma equação que envolve uma função desconhecida e suas derivadas. Quando a função desconhecida depende de uma única variável independente, a equação é chamada de **equação diferencial ordinária** (EDO). Quando depende de duas ou mais variáveis independentes, a equação é chamada de **equação diferencial parcial** (EDP).

1.3 As Equações Diferenciais Parciais e os Problemas Clássicos

As **Equações Diferenciais Parciais** (EDPs) não constituem uma simples extensão das Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). Muito pelo contrário, o estudo das EDPs exige uma compreensão muito mais profunda da Análise Matemática e da Álgebra Linear. Enquanto as EDOs envolvem funções de uma única variável e suas derivadas, as EDPs envolvem funções de múltiplas variáveis e suas derivadas parciais, o que as torna significativamente mais complexas.

Três problemas clássicos, que vêm sendo estudados desde o século XVIII, ilustram a importância e a complexidade das EDPs. Como destaca [3], estes problemas são fundamentais para a compreensão de fenômenos físicos e matemáticos.

1.3.1 A Equação da Onda

O primeiro problema clássico é o das **vibrações transversais de uma corda**. Este problema descreve o movimento de uma corda vibrante, como a de um instrumento musical. A posição de um ponto x da corda no tempo t é dada pela função $u(x, t)$, que deve satisfazer a **equação da onda**:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1.1)$$

onde c é a velocidade de propagação da onda na corda. Este problema foi estudado por d'Alembert, Euler e Bernoulli, e suas soluções envolvem séries trigonométricas que deram origem à Análise de Fourier.

Observação 1.3. A equação da onda (1.1) descreve não apenas cordas vibrantes, mas também ondas sonoras, ondas eletromagnéticas e diversos outros fenômenos ondulatórios. Sua solução geral, obtida por d'Alembert, é dada por:

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct), \quad (1.2)$$

onde f e g são funções arbitrárias que representam ondas viajando em direções opostas.

1.3.2 A Equação do Calor

O segundo problema clássico é o da **condução de calor em uma barra**. Este problema descreve como a temperatura se distribui ao longo de uma barra ao longo do tempo. A temperatura $u(x, t)$ em um ponto x da barra no tempo t deve satisfazer a

equação do calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1.3)$$

onde k é a condutividade térmica do material. Este problema foi estudado por Fourier em sua famosa teoria do calor, que deu origem às séries de Fourier.

Nota 1.4. A equação do calor (1.3) é um exemplo de equação parabólica. Ela descreve processos de difusão em geral, incluindo a difusão de partículas, a propagação de calor e a difusão de concentração de substâncias.

1.3.3 A Equação de Laplace

O terceiro problema clássico é o do **equilíbrio de uma membrana**. Este problema descreve a deformação de uma membrana elástica sob a ação de forças externas. A função $u(x, y)$ que descreve a deformação deve satisfazer a **equação de Laplace**:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1.4)$$

em uma determinada região do plano xy . Este problema está relacionado ao estudo de potenciais e tem aplicações em eletrostática, gravitação e dinâmica dos fluidos.

Observação 1.5. A equação de Laplace (1.4) é um exemplo de equação elíptica. Suas soluções, chamadas de **funções harmônicas**, possuem propriedades notáveis, como o princípio do máximo e a propriedade do valor médio. Quando a equação de Laplace é não homogênea, ou seja, $\Delta u = f$, ela é chamada de **equação de Poisson**.

Estes três problemas, apesar de sua aparente simplicidade, trazem consigo desafios significativos relacionados às **condições de fronteira** ou de contorno, que especificam o comportamento da solução nas bordas do domínio. O estudo destas condições é uma tarefa nada fácil e requer ferramentas matemáticas sofisticadas.

1.4 A Análise de Fourier: Fundamentos e Contexto Histórico

Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), físico e matemático francês, foi uma figura central no desenvolvimento da teoria que hoje leva seu nome. Nascido em Auxerre, Fourier inicialmente seguiu a carreira religiosa, mas em 1789 decidiu abandoná-la para tornar-se professor de Matemática na escola militar de Auxerre.

Sua genialidade logo foi reconhecida, e Fourier foi selecionado para estudar na prestigiosa École Normale de Paris, onde teve como professores os maiores Físico-Matemáticos da época: Joseph-Louis Lagrange, Pierre-Simon Laplace e Gaspard Monge. Estes mestres,

que estavam no centro do desenvolvimento científico francês, influenciaram profundamente o pensamento de Fourier.

Em 1811, durante suas pesquisas sobre a teoria do calor, Fourier desenvolveu a obra *La Théorie mathématique de la chaleur*, na qual explicita os coeficientes que permitem descrever funções em séries de senos e cossenos. Como observa [3], Fourier fez a audaciosa afirmação de que *qualquer* função poderia ser expressa na forma da série que hoje tem o seu nome.

Definição 1.6 (Série de Fourier). Dada uma função f periódica de período $2L$, sua **série de Fourier** é a representação:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right], \quad (1.5)$$

onde os coeficientes de Fourier são dados por:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.6)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.7)$$

Embora a afirmação de Fourier sobre a representação de funções arbitrárias não seja verdadeira no sentido estrito — o que foi posteriormente demonstrado por Dirichlet — Fourier teve o mérito de descrever claramente a forma da série que deveria representar uma função, fornecendo assim um poderoso instrumento para a resolução de equações diferenciais.

A teoria de Fourier enfrentou inicialmente resistência por parte de matemáticos como Lagrange, que questionavam seu rigor. No entanto, com o avanço da Análise Matemática no século XIX, com contribuições de Cauchy, Weierstrass, Riemann e outros, a teoria das séries de Fourier pôde ser fundamentada de maneira rigorosa.

Teorema 1.7 (Teorema de Fourier). *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente diferenciável e periódica de período $2L$. Então, a série de Fourier de f converge, em cada ponto $x \in \mathbb{R}$, para a média aritmética dos limites laterais:*

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]. \quad (1.8)$$

Em particular, se f é contínua em x , a série converge para $f(x)$.

Hoje, as séries de Fourier, a integral de Fourier e as transformadas de Fourier constituem um ramo da Análise Matemática de valor incalculável para o estudo de fenômenos ondulatórios, processamento de sinais, óptica, acústica, telecomunicações, e inúmeras outras áreas.

1.5 A Transformada de Laplace: Fundamentos e Contexto Histórico

Pierre-Simon Marquis de Laplace (1749-1827) foi um notório matemático, físico e astrônomo francês, chamado por alguns de seus contemporâneos de “o Newton da França”, conforme relata [11]. Laplace realizou contribuições fundamentais em diversas áreas, incluindo mecânica celeste, teoria das probabilidades e equações diferenciais.

Embora Laplace tenha utilizado a transformada integral em seu trabalho sobre a teoria das probabilidades, é mais provável que a integral que hoje leva seu nome tenha sido descoberta por Euler. No entanto, foi Laplace quem reconheceu seu potencial e a desenvolveu como uma ferramenta sistemática para a resolução de equações diferenciais.

Dentre as publicações mais importantes de Laplace, destacam-se os tratados *Mécanique Céleste*, uma obra monumental sobre mecânica celeste que consolidou as ideias de Newton, e *Théorie Analytique des Probabilités*, que estabeleceu as bases da teoria moderna das probabilidades.

Definição 1.8 (Transformada de Laplace). Seja $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. A **Transformada de Laplace** de f é definida por:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (1.9)$$

desde que a integral imprópria convirja para algum valor de s .

A Transformada de Laplace é uma ferramenta poderosa para a resolução de problemas de valor de contorno e equações diferenciais lineares com coeficientes constantes. Sua principal propriedade é transformar uma equação diferencial, sujeita a condições iniciais, em uma equação algébrica, que é geralmente mais fácil de resolver.

Proposição 1.9 (Transformada da Derivada). Se f é contínua em $[0, \infty)$ e de ordem exponencial, e f' é seccionalmente contínua, então:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0). \quad (1.10)$$

Mais geralmente, para a derivada de ordem n :

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \quad (1.11)$$

Em aplicações, é comum interpretar a Transformada de Laplace como uma transformação do domínio do tempo para o domínio da frequência complexa, onde as operações de derivação e integração se tornam operações algébricas mais simples.

1.6 Objetivos e Justificativa

O objetivo geral desta obra é apresentar um estudo introdutório e sistemático de dois dos mais importantes métodos utilizados na resolução de Equações Diferenciais Parciais: a **Análise de Fourier** e a **Transformada de Laplace**. Embora não estejamos focando na resolução exaustiva das EDPs, damos ênfase às propriedades inerentes às Transformadas e Séries de Fourier e à Transformada de Laplace, pois a compreensão destas propriedades é fundamental para sua correta aplicação.

A motivação para este estudo surgiu da observação de que, embora estas teorias tenham vastas aplicações em física, engenharia, processamento de sinais e diversas outras áreas, elas são pouco abordadas nos cursos de licenciatura em Matemática. Acreditamos que é fundamental que o estudante de Matemática tenha contato com este conhecimento, ampliando seu horizonte de possibilidades de atuação nas áreas de pesquisa científica e aplicada.

1.7 Principais Contribuições

As principais contribuições desta obra podem ser resumidas da seguinte forma:

1. **Contribuição didática:** Apresentação sistemática e acessível dos fundamentos da Análise de Fourier e da Transformada de Laplace, com ênfase na clareza conceitual e na progressão lógica dos conteúdos.
2. **Contribuição teórica:** Detalhamento completo das demonstrações dos principais teoremas, incluindo o Teste de Dini, o Teorema de Fejér, a Identidade de Parseval, o Teste de Jordan, e as propriedades fundamentais das transformadas de Fourier e Laplace.
3. **Contribuição aplicada:** Exemplos detalhados de aplicação na resolução de equações diferenciais parciais clássicas, incluindo a equação do calor, a equação da onda e a equação de Laplace, com todas as etapas de resolução explicitadas.
4. **Contribuição histórica:** Contextualização histórica dos desenvolvimentos teóricos, destacando as contribuições de Fourier e Laplace, bem como de outros matemáticos que fundamentaram estas teorias.

1.8 Organização do Livro

O livro está estruturado em cinco capítulos, além do prefácio e das referências bibliográficas.

- O Capítulo 1 (presente capítulo) apresenta o contexto histórico, a motivação, os objetivos e a organização da obra.
- O Capítulo 2 expõe os conceitos preliminares necessários, incluindo funções periódicas, ortogonalidade, funções pares e ímpares, convergência pontual e uniforme, e o Teste de Weierstrass.
- O Capítulo 3 desenvolve a teoria das séries de Fourier, abordando coeficientes de Fourier, convergência pontual e uniforme, núcleos de Dirichlet e Fejér, o Teste de Dini, o Teste de Jordan, o Teorema de Fejér e a Identidade de Parseval.
- O Capítulo 4 apresenta as transformadas de Fourier e de Laplace, com ênfase em suas propriedades fundamentais, incluindo o espaço de Schwartz, a Transformada de Fourier em Ω , a Transformada Inversa de Fourier, as propriedades da Transformada de Laplace, e as conexões e diferenças entre $\mathfrak{F}$ e $\mathcal{L}$.
- O Capítulo 5 exhibe aplicações destas teorias na resolução de equações diferenciais parciais, incluindo a equação do calor, a equação da onda e a equação de Laplace, com todas as etapas de resolução detalhadas.

Ao final do livro, são apresentadas as referências bibliográficas que fundamentaram este estudo, organizadas em ordem alfabética para facilitar a consulta do leitor.

Observação 1.10. Recomenda-se que o leitor tenha conhecimentos prévios de Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear e noções básicas de Análise Matemática para uma melhor compreensão do conteúdo. As demonstrações são apresentadas de forma detalhada, mas o leitor pode optar por focar nos resultados e aplicações em uma primeira leitura.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

02

Capítulo 2

Fundamentos Teóricos

Antes de iniciarmos o estudo propriamente dito da Análise de Fourier e da Transformada de Laplace, faz-se necessário estabelecer uma base sólida de conceitos fundamentais que serão amplamente utilizados ao longo de todo o livro. Este capítulo tem como objetivo apresentar estes conceitos preliminares de forma clara e detalhada, com exemplos que ilustram cada definição e demonstrações que justificam os principais resultados.

Grande parte das ideias empregadas nas demonstrações dos teoremas e proposições apresentados neste livro foram extraídas da referência [3], que constitui o principal alicerce teórico deste texto. Recomendamos ao leitor que, para um aprofundamento maior, consulte as obras citadas nas referências bibliográficas.

Nesta primeira etapa, abordaremos propriedades fundamentais de certas classes de funções, conceitos de ortogonalidade, funções pares e ímpares, além de noções essenciais de convergência de séries de funções. Estes tópicos são indispensáveis para a compreensão dos capítulos seguintes.

2.1 Funções Periódicas

O conceito de periodicidade é central em toda a teoria de Fourier. Funções periódicas descrevem fenômenos que se repetem no tempo ou no espaço, como ondas sonoras, oscilações eletromagnéticas e movimentos harmônicos.

Definição 2.1 (Funções Periódicas). Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se **periódica** quando existe uma constante $P > 0$ tal que

$$f(x + P) = f(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

A constante P é chamada de **período** da função f .

Observação 2.2. Se P é um período de f , então qualquer múltiplo inteiro positivo de P

também é um período. De fato, para $k \in \mathbb{N}$:

$$f(x + kP) = f(x + (k-1)P + P) = f(x + (k-1)P) = \cdots = f(x). \quad (2.2)$$

O menor valor positivo de P que satisfaz (2.1) é chamado de **período fundamental** da função.

Exemplo 2.3 (Funções Trigonômétricas). As funções $\sin x$ e $\cos x$ são periódicas com período fundamental 2π , pois:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \quad \text{e} \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

Já a função $\tan x$ tem período fundamental π , pois:

$$\tan(x + \pi) = \tan x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}. \quad (2.4)$$

Exemplo 2.4 (Função Constante). A função constante $f(x) = c$, para todo $x \in \mathbb{R}$, é periódica com qualquer $P > 0$. Neste caso, não existe período fundamental.

Uma propriedade fundamental das funções periódicas, que será utilizada repetidamente no cálculo dos coeficientes de Fourier, é a seguinte:

Proposição 2.5 (Invariância da Integral). *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período P , integrável em qualquer intervalo limitado. Então, para qualquer $a \in \mathbb{R}$,*

$$\int_a^{a+P} f(t) dt = \int_0^P f(t) dt. \quad (2.5)$$

Em outras palavras, a integral de uma função periódica sobre um intervalo de comprimento igual ao seu período é independente da posição do intervalo.

Demonstração. Definimos a função auxiliar

$$\phi(x) = \int_x^{x+P} f(t) dt. \quad (2.6)$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, ϕ é diferenciável e

$$\phi'(x) = f(x + P) - f(x). \quad (2.7)$$

Como f é periódica com período P , temos $f(x + P) = f(x)$, logo $\phi'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, ϕ é constante em $\mathbb{R}$. Em particular,

$$\phi(a) = \phi(0) \implies \int_a^{a+P} f(t) dt = \int_0^P f(t) dt. \quad (2.8)$$

□

Exemplo 2.6 (Aplicação da Propriedade). Verifiquemos a propriedade (2.5) para a função $f(x) = \sin x$, que tem período $P = 2\pi$. Para $a = \frac{\pi}{2}$:

$$\int_{\pi/2}^{5\pi/2} \sin t \, dt = [-\cos t]_{\pi/2}^{5\pi/2} = -\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = -0 + 0 = 0, \quad (2.9)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin t \, dt = [-\cos t]_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) + \cos(0) = -1 + 1 = 0. \quad (2.10)$$

Ambas as integrais são iguais, confirmando a propriedade.

Além disso, a combinação linear de funções periódicas com o mesmo período também é periódica:

Proposição 2.7 (Combinação Linear de Funções Periódicas). *Se $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções periódicas com período P , então, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, a função*

$$h(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x) \quad (2.11)$$

também é periódica com período P .

Demonstração. Para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$h(x + P) = \alpha f_1(x + P) + \beta f_2(x + P) \quad (2.12)$$

$$= \alpha f_1(x) + \beta f_2(x) = h(x). \quad (2.13)$$

Portanto, h é periódica com período P . □

Este resultado pode ser generalizado para combinações lineares de um número finito de funções periódicas com o mesmo período.

2.2 Funções Ortogonais

O conceito de ortogonalidade, emprestado da Álgebra Linear, é fundamental para a compreensão das séries de Fourier. Como observa [11], em Matemática avançada, uma função pode ser considerada como uma generalização de um vetor.

2.2.1 Produto Interno de Funções

Definição 2.8 (Produto Interno de Funções). Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções integráveis. O **produto interno** de f e g no intervalo $[a, b]$ é definido como

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) \, dx. \quad (2.14)$$

Observação 2.9. O produto interno de funções satisfaz as mesmas propriedades do produto interno de vetores em $\mathbb{R}^n$:

1. **Simetria:** $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$;
2. **Linearidade:** $\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle$;
3. **Positividade:** $\langle f, f \rangle \geq 0$, com igualdade se, e somente se, $f \equiv 0$ (no sentido de funções integráveis).

Definição 2.10 (Funções Ortogonais). Duas funções f e g são ditas **ortogonais** no intervalo $[a, b]$ quando

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx = 0. \quad (2.15)$$

Definição 2.11 (Sistema Ortogonal). Um conjunto de funções $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots\}$, integráveis em $[a, b]$, é chamado de **sistema ortogonal** se

$$\langle \phi_m, \phi_n \rangle = \int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x) dx = 0, \quad \text{para } m \neq n. \quad (2.16)$$

Se, adicionalmente,

$$\langle \phi_n, \phi_n \rangle = \int_a^b \phi_n^2(x) dx = 1 \quad \text{para todo } n, \quad (2.17)$$

o sistema é chamado de **ortonormal**.

2.2.2 O Sistema Trigonométrico

O exemplo mais importante de sistema ortogonal para a teoria de Fourier é o sistema trigonométrico. Suas propriedades de ortogonalidade são a base para o cálculo dos coeficientes de Fourier.

Exemplo 2.12 (Ortogonalidade do Sistema Trigonométrico). O sistema de funções

$$\left\{ 1, \cos \frac{\pi x}{L}, \sin \frac{\pi x}{L}, \cos \frac{2\pi x}{L}, \sin \frac{2\pi x}{L}, \dots, \cos \frac{n\pi x}{L}, \sin \frac{n\pi x}{L}, \dots \right\} \quad (2.18)$$

é ortogonal no intervalo $[-L, L]$. Vamos demonstrar as relações de ortogonalidade:

1. Ortogonalidade entre seno e cosseno:

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}. \quad (2.19)$$

Demonstração. Usando a identidade trigonométrica

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)],$$

temos:

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[\sin\left(\frac{(m+n)\pi x}{L}\right) + \sin\left(\frac{(m-n)\pi x}{L}\right) \right] dx. \quad (2.20)$$

Para $m, n \in \mathbb{N}$, com $m \neq n$, calculamos separadamente:

$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{(m+n)\pi x}{L}\right) dx = -\frac{L}{(m+n)\pi} \cos\left(\frac{(m+n)\pi x}{L}\right) \Big|_{-L}^L \quad (2.21)$$

$$= -\frac{L}{(m+n)\pi} [\cos((m+n)\pi) - \cos(-(m+n)\pi)] \quad (2.22)$$

$$= -\frac{L}{(m+n)\pi} [\cos((m+n)\pi) - \cos((m+n)\pi)] = 0. \quad (2.23)$$

Analogamente,

$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{(m-n)\pi x}{L}\right) dx = -\frac{L}{(m-n)\pi} [\cos((m-n)\pi) - \cos(-(m-n)\pi)] = 0. \quad (2.24)$$

Para $m = n$, temos $\sin\left(\frac{(m-n)\pi x}{L}\right) = \sin(0) = 0$, e o resultado também é zero. Portanto, a integral é zero em todos os casos. $\square$

2. Ortogonalidade entre cossenos:

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ L, & m = n \geq 1, \\ 2L, & m = n = 0. \end{cases} \quad (2.25)$$

Demonstração. Usando a identidade

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)].$$

Para $m \neq n$:

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[\cos\left(\frac{(m+n)\pi x}{L}\right) + \cos\left(\frac{(m-n)\pi x}{L}\right) \right] dx. \quad (2.26)$$

Como $\int_{-L}^L \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx = 0$ para $k \neq 0$, temos:

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0. \quad (2.27)$$

Para $m = n \geq 1$:

$$\int_{-L}^L \cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[1 + \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\right] dx \quad (2.28)$$

$$= \frac{1}{2} \left[2L + \int_{-L}^L \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx\right] = \frac{1}{2} \cdot 2L = L. \quad (2.29)$$

Para $m = n = 0$, temos $\cos(0) = 1$, logo $\int_{-L}^L 1 \cdot 1 dx = 2L$. $\square$

3. Ortogonalidade entre senos:

$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ L, & m = n \geq 1. \end{cases} \quad (2.30)$$

Demonstração. Usando a identidade

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)].$$

Para $m \neq n$, o resultado é zero. Para $m = n \geq 1$:

$$\int_{-L}^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[1 - \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\right] dx \quad (2.31)$$

$$= \frac{1}{2} \left[2L - \int_{-L}^L \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx\right] = L. \quad (2.32)$$

$\square$

Exemplo 2.13 (Sistema Ortonormal). A partir das relações de ortogonalidade, podemos construir um sistema ortonormal no intervalo $[-L, L]$:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2L}}, \frac{1}{\sqrt{L}} \cos \frac{\pi x}{L}, \frac{1}{\sqrt{L}} \sin \frac{\pi x}{L}, \frac{1}{\sqrt{L}} \cos \frac{2\pi x}{L}, \frac{1}{\sqrt{L}} \sin \frac{2\pi x}{L}, \dots \right\}. \quad (2.33)$$

Verifique que cada função tem norma igual a 1 no intervalo $[-L, L]$.

2.2.3 Representação de Funções em Bases Ortogonais

Assim como em $\mathbb{R}^3$ podemos escrever qualquer vetor como combinação linear de vetores ortogonais, em espaços de funções podemos representar funções como combinações lineares de funções ortogonais.

Proposição 2.14 (Coeficientes em uma Base Ortogonal). *Seja $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots\}$ um sistema ortogonal em $[a, b]$. Suponha que uma função f possa ser representada como*

$$f(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \dots + c_n\phi_n(x) + \dots \quad (2.34)$$

Então, os coeficientes c_n são dados por

$$c_n = \frac{\langle f, \phi_n \rangle}{\langle \phi_n, \phi_n \rangle} = \frac{\int_a^b f(x)\phi_n(x) dx}{\int_a^b \phi_n^2(x) dx}. \quad (2.35)$$

Demonstração. Multiplicando ambos os lados de (2.34) por $\phi_m(x)$ e integrando em $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\phi_m(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x) dx \quad (2.36)$$

$$= c_m \int_a^b \phi_m^2(x) dx, \quad (2.37)$$

pois $\int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x) dx = 0$ para $n \neq m$. Portanto,

$$c_m = \frac{\int_a^b f(x)\phi_m(x) dx}{\int_a^b \phi_m^2(x) dx}. \quad (2.38)$$

□

Este resultado será fundamental para o cálculo dos coeficientes de Fourier no próximo capítulo.

2.3 Funções Pares e Funções Ímpares

As simetrias das funções pares e ímpares simplificam significativamente o cálculo das séries de Fourier, reduzindo o número de coeficientes a serem calculados.

Definição 2.15 (Função Par e Função Ímpar). Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita:

- **Par** se $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$;
- **Ímpar** se $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.16 (Funções Pares e Ímpares). As funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dadas por:

- Funções pares: $f(x) = x^2$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = |x|$;
- Funções ímpares: $f(x) = x^3$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = \tan x$.

Proposição 2.17 (Propriedades de Funções Pares e Ímpares). *Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções com as propriedades indicadas:*

1. A soma de duas funções pares é par;
2. A soma de duas funções ímpares é ímpar;
3. O produto de duas funções pares é par;
4. O produto de duas funções ímpares é par;
5. O produto de uma função par por uma função ímpar é ímpar;
6. Se f é par e integrável em $[-L, L]$, então

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx; \quad (2.39)$$

7. Se f é ímpar e integrável em $[-L, L]$, então

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 0. \quad (2.40)$$

Demonstração. Demonstraremos as propriedades (5), (6) e (7). As demais são análogas e deixadas como exercício.

Propriedade (5): Seja $h(x) = f(x)g(x)$, onde f é ímpar ($f(-x) = -f(x)$) e g é par ($g(-x) = g(x)$). Então:

$$h(-x) = f(-x)g(-x) = (-f(x))g(x) = -f(x)g(x) = -h(x). \quad (2.41)$$

Portanto, h é ímpar.

Propriedade (6): Para f par:

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \int_{-L}^0 f(x) dx + \int_0^L f(x) dx. \quad (2.42)$$

Na primeira integral, fazemos $x = -t$, donde $dx = -dt$:

$$\int_{-L}^0 f(x) dx = \int_L^0 f(-t)(-dt) = \int_0^L f(-t) dt. \quad (2.43)$$

Como f é par, $f(-t) = f(t)$, logo:

$$\int_{-L}^0 f(x) dx = \int_0^L f(t) dt. \quad (2.44)$$

Portanto:

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \int_0^L f(x) dx + \int_0^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx. \quad (2.45)$$

Propriedade (7): Para f ímpar, usando o mesmo raciocínio:

$$\int_{-L}^0 f(x) dx = \int_0^L f(-t) dt = \int_0^L (-f(t)) dt = - \int_0^L f(t) dt. \quad (2.46)$$

Logo:

$$\int_{-L}^L f(x) dx = - \int_0^L f(x) dx + \int_0^L f(x) dx = 0. \quad (2.47)$$

□

Exemplo 2.18 (Aplicação das Propriedades). Calcule $\int_{-2}^2 x^3 dx$.

Como $f(x) = x^3$ é ímpar, pela propriedade (7):

$$\int_{-2}^2 x^3 dx = 0. \quad (2.48)$$

De fato, $\int_{-2}^2 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-2}^2 = \frac{16}{4} - \frac{16}{4} = 0.$

Exemplo 2.19 (Decomposição Par-Ímpar). Toda função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pode ser decomposta como soma de uma função par e uma função ímpar:

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}. \quad (2.49)$$

A primeira parcela é par e a segunda é ímpar. Esta decomposição é útil em diversas aplicações.

2.4 Funções Seccionalmente Contínuas

Na teoria de Fourier, frequentemente trabalhamos com funções que possuem um número finito de descontinuidades. Estas funções são chamadas de seccionalmente contínuas.

Definição 2.20 (Função Seccionalmente Contínua). Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é dita **seccionalmente contínua** (ou contínua por partes) se existe uma partição

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \quad (2.50)$$

tal que f é contínua em cada intervalo aberto (x_{i-1}, x_i) e possui limites laterais finitos em cada ponto de descontinuidade. Ou seja, existem

$$f(x_i^+) = \lim_{x \rightarrow x_i^+} f(x) \quad \text{e} \quad f(x_i^-) = \lim_{x \rightarrow x_i^-} f(x) \quad (2.51)$$

para cada $i = 1, \dots, n - 1$.

Exemplo 2.21 (Função Seccionalmente Contínua). A função

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq x < \pi, \\ 0, & \text{se } -\pi \leq x < 0, \end{cases} \quad (2.52)$$

estendida periodicamente com período 2π , é seccionalmente contínua. Ela possui descontinuidades nos pontos $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, mas os limites laterais existem:

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \phi(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pi^-} \phi(x) = 1. \quad (2.53)$$

Exemplo 2.22 (Função Não Seccionalmente Contínua). A função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad (2.54)$$

não é seccionalmente contínua, pois em $x = 0$ não existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ (o limite é infinito).

Exemplo 2.23 (Função com Infinitas Descontinuidades). A função

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 1, \\ \frac{1}{n}, & \text{se } \frac{1}{n+1} \leq x < \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots, \\ 0, & \text{se } x \leq 0, \end{cases} \quad (2.55)$$

possui infinitas descontinuidades no intervalo $(0, 1)$, portanto não é seccionalmente contínua.

Definição 2.24 (Função Seccionalmente Diferenciável). Uma função f é dita **seccionalmente diferenciável** se f e sua derivada f' são seccionalmente contínuas.

Observação 2.25. Nos pontos de descontinuidade de uma função seccionalmente diferenciável, a derivada pode não existir no sentido usual, mas os limites laterais da derivada existem.

2.5 Convergência de Séries de Funções

O estudo da convergência de séries de funções é essencial para a teoria de Fourier, pois as séries de Fourier são séries de funções trigonométricas. Nesta seção, apresentamos os principais conceitos e resultados.

2.5.1 Séries Numéricas

Recordemos alguns resultados básicos sobre séries numéricas.

Definição 2.26 (Série Numérica). Uma **série numérica** é uma expressão da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots, \quad (2.56)$$

onde $a_n \in \mathbb{R}$. A série converge se a sequência das somas parciais

$$S_N = \sum_{n=1}^N a_n \quad (2.57)$$

converge para algum $S \in \mathbb{R}$. Neste caso, escrevemos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Exemplo 2.27 (Série Geométrica). A série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ converge se, e somente se, $|r| < 1$, e sua soma é

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}, \quad |r| < 1. \quad (2.58)$$

Demonstração. De fato, seja $S_N = \sum_{n=0}^N r^n$. Então:

$$S_N = 1 + r + r^2 + \cdots + r^N.$$

Multiplicando por r :

$$rS_N = r + r^2 + \cdots + r^{N+1}.$$

Subtraindo:

$$(1-r)S_N = 1 - r^{N+1}.$$

Logo, para $r \neq 1$:

$$S_N = \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r}.$$

A série converge se, e somente se, $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N$ existe, o que ocorre se, e somente se, $|r| < 1$. Nesse caso:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \frac{1}{1-r}.$$

Portanto:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}, \quad |r| < 1.}$$

□

Exemplo 2.28 (Série Harmônica). A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, enquanto a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$.

Demonstração. A série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ **diverge**. Agrupando os termos:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots$$

Cada grupo tem soma maior ou igual a $\frac{1}{2}$. Assim, a soma parcial S_{2^m} satisfaz

$$S_{2^m} \geq 1 + m \cdot \frac{1}{2} \rightarrow +\infty.$$

Logo, a série diverge.

A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. Pelo teste da integral, para $p > 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ converge} \iff \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx \text{ converge}.$$

Calculando:

$$\int_1^{\infty} x^{-p} dx = \begin{cases} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_1^{\infty}, & p \neq 1, \\ [\ln x]_1^{\infty}, & p = 1. \end{cases}$$

- Se $p > 1$: a integral converge para $\frac{1}{p-1}$.
- Se $p \leq 1$: a integral diverge.

Portanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{converge,} & p > 1, \\ \text{diverge,} & p \leq 1. \end{cases}$$

□

2.5.2 Convergência Pontual e Uniforme

Antes de mergulharmos na teoria das séries de Fourier, é essencial compreendermos os diferentes modos como uma sequência ou série de funções pode convergir. Diferentemente das sequências numéricas, onde o conceito de limite é único e bem definido, para funções existem várias noções de convergência, cada uma com suas próprias características e aplicações. Duas das mais importantes são a **convergência pontual** e a **convergência uniforme**.

A **convergência pontual** é a noção mais intuitiva e natural: para cada ponto fixado x , a sequência de números reais $f_n(x)$ deve convergir para $f(x)$. No entanto, essa forma de convergência pode ser bastante “fraca” no sentido de que a função limite pode perder propriedades importantes das funções da sequência, como continuidade e integrabilidade. Além disso, a velocidade de convergência pode variar drasticamente de um ponto para outro.

A **convergência uniforme**, por outro lado, é uma noção mais forte e exigente: exige que a convergência ocorra de maneira uniforme em todo o domínio, ou seja, o erro $|f_n(x) - f(x)|$ pode ser controlado simultaneamente para todos os pontos x . Esta propriedade é extremamente valiosa porque preserva a continuidade, permite a troca de limites com integrais e, sob certas condições, com derivadas.

Na teoria de Fourier, a distinção entre esses dois tipos de convergência é fundamental. Por exemplo, a série de Fourier de uma função contínua pode convergir pontualmente para a função, mas a convergência pode não ser uniforme em toda parte, especialmente nas vizinhanças de descontinuidades. Compreender essas diferenças nos ajudará a interpretar corretamente os teoremas de convergência que serão apresentados no próximo capítulo.

Vamos agora formalizar esses conceitos e explorar exemplos que ilustram suas diferenças.

Definição 2.29 (Convergência Pontual). Uma série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ **converge pontualmente** para $f(x)$ em um conjunto $I \subset \mathbb{R}$ se, para cada $x \in I$ fixado, a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge para $f(x)$. Equivalentemente:

$$\forall x \in I, \forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon, x) \in \mathbb{N} \text{ tal que } \left| \sum_{n=1}^N f_n(x) - f(x) \right| < \epsilon. \quad (2.59)$$

Definição 2.30 (Convergência Uniforme). Uma série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ **converge uniformemente** para $f(x)$ em I se

$$\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} \text{ tal que } \left| \sum_{n=1}^N f_n(x) - f(x) \right| < \epsilon, \forall x \in I. \quad (2.60)$$

A diferença crucial é que N não depende de x .

Exemplo 2.31 (Convergência Pontual, Não Uniforme). A série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge pontualmente para $f(x) = \frac{1}{1-x}$ no intervalo $(-1, 1)$. No entanto, a convergência não é uniforme em $(-1, 1)$, pois quanto mais próximo x está de 1, mais termos são necessários para obter uma boa aproximação.

Exemplo 2.32 (Convergência Pontual, Não Uniforme). Considere a sequência de funções $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = x^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.61)$$

Para cada $x \in [0, 1]$ fixado, temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{se } x = 1. \end{cases} \quad (2.62)$$

Portanto, f_n converge pontualmente para

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{se } x = 1. \end{cases} \quad (2.63)$$

No entanto, a convergência não é uniforme em $[0, 1]$. Observe que

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,1]} x^n = 1, \quad (2.64)$$

pois para qualquer n , podemos escolher x suficientemente próximo de 1 para que x^n seja arbitrariamente próximo de 1. Portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1 \neq 0$.

Este exemplo ilustra que a convergência pontual não garante a convergência uniforme. Além disso, note que todas as funções f_n são contínuas, mas a função limite f não é contínua em $x = 1$. Isso mostra que a convergência pontual não preserva a continuidade.

Exemplo 2.33 (Convergência Uniforme). A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(nx)}{n^2}$ converge uniformemente em $\mathbb{R}$, pois

$$\left| \frac{\text{sen}(nx)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}, \quad (2.65)$$

e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

Observação 2.34. A diferença fundamental entre as duas definições está na posição do quantificador “para todo x ”. Na convergência pontual, o N pode depender de x ; na convergência uniforme, o N é escolhido independentemente de x , garantindo que a convergência seja “uniforme” em todo o domínio.

Exemplo 2.35 (Convergência Uniforme). Considere a sequência de funções $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = \frac{x}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.66)$$

Para cada $x \in [0, 1]$ fixado:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} = 0. \quad (2.67)$$

A convergência é uniforme, pois

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - 0| = \sup_{x \in [0,1]} \frac{x}{n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0. \quad (2.68)$$

Portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 0$. Neste caso, todas as funções são contínuas e a função limite também é contínua.

Observação 2.36. A convergência uniforme é mais forte que a convergência pontual: toda

convergência uniforme é pontual, mas a recíproca não é verdadeira, como vimos no exemplo $f_n(x) = x^n$.

2.5.3 O Teste de Weierstrass

O Teste de Weierstrass é uma ferramenta poderosa para verificar a convergência uniforme de séries de funções.

Teorema 2.37 (Teste de Weierstrass). *Seja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ uma série de funções definidas em $I \subset \mathbb{R}$. Se existem constantes $M_n \geq 0$ tais que*

$$|f_n(x)| \leq M_n, \quad \forall x \in I, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (2.69)$$

e a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniforme e absolutamente em I .

Demonstração. Para $m > n$, temos para todo $x \in I$:

$$\left| \sum_{k=n}^m f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n}^m |f_k(x)| \leq \sum_{k=n}^m M_k. \quad (2.70)$$

Como $\sum M_k$ converge, pelo critério de Cauchy, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $m > n \geq N$,

$$\sum_{k=n}^m M_k < \epsilon. \quad (2.71)$$

Portanto,

$$\left| \sum_{k=n}^m f_k(x) \right| < \epsilon, \quad \forall x \in I. \quad (2.72)$$

Isso mostra que a série converge uniformemente em I . A convergência absoluta segue imediatamente. $\square$

Exemplo 2.38 (Aplicação do Teste de Weierstrass). Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ converge uniformemente em $\mathbb{R}$.

Solução: Para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| \frac{\cos(nx)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}. \quad (2.73)$$

A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (série p com $p = 2 > 1$). Portanto, pelo Teste de Weierstrass, a série converge uniformemente em $\mathbb{R}$.

2.5.4 Propriedades da Convergência Uniforme

A convergência uniforme preserva propriedades importantes das funções, como continuidade, integrabilidade e diferenciabilidade.

Teorema 2.39 (Continuidade da Soma). *Se f_n são funções contínuas em I e $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente para $f(x)$ em I , então f é contínua em I .*

Demonstração. De fato, seja $x_0 \in I$ arbitrário. Queremos mostrar que f é contínua em x_0 .

Definimos $S_N(x) = \sum_{n=1}^N f_n(x)$. Pela convergência uniforme, dado $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $N \geq N_0$ e todo $x \in I$,

$$|f(x) - S_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Fixamos $N \geq N_0$. Como cada f_n é contínua, S_N também é contínua. Assim, existe $\delta > 0$ tal que, para $|x - x_0| < \delta$,

$$|S_N(x) - S_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Então, para $|x - x_0| < \delta$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - S_N(x) + S_N(x) - S_N(x_0) + S_N(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - S_N(x)| + |S_N(x) - S_N(x_0)| + |S_N(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, f é contínua em x_0 . Como x_0 é arbitrário, f é contínua em todo I . □

Teorema 2.40 (Integração Termo a Termo). *Se f_n são integráveis em $[a, b]$ e $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente para $f(x)$ em $[a, b]$, então*

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx. \quad (2.74)$$

Demonstração. Com efeito, definimos $S_N(x) = \sum_{n=1}^N f_n(x)$. Pela convergência uniforme, dado $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $N \geq N_0$ e todo $x \in [a, b]$,

$$|f(x) - S_N(x)| < \varepsilon.$$

Como cada f_n é integrável, S_N também é integrável. Além disso, a convergência uniforme garante que f é integrável em $[a, b]$.

Para $N \geq N_0$:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b S_N(x) dx \right| &= \left| \int_a^b (f(x) - S_N(x)) dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x) - S_N(x)| dx \\ &\leq \int_a^b \varepsilon dx = \varepsilon(b-a). \end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, temos:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b S_N(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Mas

$$\int_a^b S_N(x) dx = \sum_{n=1}^N \int_a^b f_n(x) dx.$$

Portanto,

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

□

Teorema 2.41 (Diferenciação Termo a Termo). *Se f_n são diferenciáveis em I , $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ converge uniformemente em I , e $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ converge para algum $x_0 \in I$, então $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente para $f(x)$ e*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x). \quad (2.75)$$

Demonstração. Seja I um intervalo compacto (limitado e fechado) e fixemos $x_0 \in I$. Definimos as somas parciais

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x), \quad T_n(x) = \sum_{k=1}^n f'_k(x).$$

Por hipótese, cada f_k é diferenciável, logo S_n é diferenciável em I . Além disso,

$$T_n \rightarrow g \quad \text{uniformemente em } I, \quad \text{onde } g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x),$$

e

$$S_n(x_0) \rightarrow S(x_0), \quad \text{onde } S(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0).$$

Queremos mostrar que S_n converge uniformemente em I . Para $m > n$, definimos

$$R_{m,n}(x) = S_m(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^m f_k(x).$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, para cada k ,

$$f_k(x) = f_k(x_0) + \int_{x_0}^x f'_k(t) dt.$$

Somando para $k = n+1, \dots, m$, obtemos

$$R_{m,n}(x) = R_{m,n}(x_0) + \int_{x_0}^x (T_m(t) - T_n(t)) dt.$$

Dado $\varepsilon > 0$, como T_n converge uniformemente, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para quaisquer $m, n \geq N_1$,

$$|T_m(t) - T_n(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \in I.$$

Como $S_n(x_0)$ converge, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que para $m, n \geq N_2$,

$$|S_m(x_0) - S_n(x_0)| < \varepsilon.$$

Tomando $N = \max\{N_1, N_2\}$, para $m, n \geq N$ e $x \in I$, temos

$$|R_{m,n}(x)| \leq |R_{m,n}(x_0)| + \int_{x_0}^x |T_m(t) - T_n(t)| dt < \varepsilon + \varepsilon|x - x_0|.$$

Como I é compacto, existe $L > 0$ tal que $|x - x_0| \leq L$ para todo $x \in I$. Logo,

$$|R_{m,n}(x)| < \varepsilon(1 + L), \quad \forall x \in I.$$

Portanto, S_n é uma sequência uniformemente de Cauchy em I , logo converge uniformemente para uma função f em I . Assim,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \text{uniformemente em } I.$$

Agora, como $S_n \rightarrow f$ uniformemente e $S'_n = T_n \rightarrow g$ uniformemente em I , podemos aplicar o teorema da convergência uniforme das derivadas: se uma sequência de funções diferenciáveis converge pontualmente (aqui uniformemente) e a sequência das derivadas converge uniformemente, então o limite é diferenciável e sua derivada é o limite das derivadas. Portanto,

$$f'(x) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x), \quad \forall x \in I.$$

Assim, concluímos que

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$$

e a convergência de $\sum f_n$ para f é uniforme em I . $\square$

Observação 2.1 (Hipótese de compacidade). *Na prova acima, assumimos que I é compacto para garantir que $|x - x_0|$ seja limitado. Se o teorema original não supõe isso, a prova precisa ser adaptada com um argumento de convergência em compactos e depois extensão, mas a versão mais comum do teorema é enunciada para intervalos compactos ou com convergência uniforme em todo I e a convergência pontual em x_0 .*

Exemplo 2.42 (Aplicação da Integração Termo a Termo). Usando a série geométrica $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, para $|x| < 1$, podemos integrar termo a termo:

$$-\ln(1-x) = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt \quad (2.76)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}. \quad (2.77)$$

Obtemos assim a série de Taylor de $-\ln(1-x)$.

2.6 O Lema de Riemann-Lebesgue

O Lema de Riemann-Lebesgue é um resultado fundamental que será utilizado na demonstração do Teste de Dini e na teoria da convergência das séries de Fourier.

Lema 2.43 (Riemann-Lebesgue). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável (no sentido de Riemann). Então*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(\lambda x) dx = 0 \quad (2.78)$$

e

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(\lambda x) dx = 0. \quad (2.79)$$

Esboço da Demonstração. Para funções constantes por partes, o resultado é imediato, pois a integral de $\sin(\lambda x)$ ou $\cos(\lambda x)$ em um intervalo tende a zero quando $\lambda \rightarrow \infty$. Para funções integráveis em geral, aproximamos f por funções constantes por partes e usamos a continuidade da integral. Uma demonstração completa pode ser encontrada em [6]. $\square$

Exemplo 2.44 (Aplicação do Lema). Mostre que $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{\sin(\lambda x)}{1+x} dx = 0$.

Solução: A função $f(x) = \frac{1}{1+x}$ é contínua, portanto integrável em $[0, 1]$. Pelo Lema de Riemann-Lebesgue,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{\sin(\lambda x)}{1+x} dx = 0. \quad (2.80)$$

2.7 A Desigualdade de Cauchy-Schwarz

A desigualdade de Cauchy-Schwarz é uma ferramenta fundamental em Análise, especialmente no estudo de espaços de funções de quadrado integrável.

Teorema 2.45 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções de quadrado integrável. Então*

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (2.81)$$

Demonstração. Para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq \int_a^b (f(x) + \lambda g(x))^2 dx = \int_a^b f^2(x) dx + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x) dx + \lambda^2 \int_a^b g^2(x) dx. \quad (2.82)$$

Este polinômio em λ é não negativo, portanto seu discriminante deve ser ≤ 0 :

$$4 \left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 - 4 \left(\int_a^b f^2(x) dx \right) \left(\int_a^b g^2(x) dx \right) \leq 0. \quad (2.83)$$

Portanto,

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right) \left(\int_a^b g^2(x) dx \right). \quad (2.84)$$

□

Corolário 2.46 (Desigualdade para L^1 e L^2). *Se f é de quadrado integrável em $[a, b]$, então f é integrável e*

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq \sqrt{b-a} \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (2.85)$$

Demonstração. Basta aplicar a desigualdade de Cauchy-Schwarz com $g(x) = 1$:

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq \left(\int_a^b 1^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} = \sqrt{b-a} \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (2.86)$$

□

Exemplo 2.47 (Aplicação da Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Mostre que*

$$\left| \int_0^1 x \sin x dx \right| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Solução: Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$\left| \int_0^1 x \sin x \, dx \right| \leq \left(\int_0^1 x^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 \sin^2 x \, dx \right)^{1/2} \quad (2.87)$$

$$\leq \left(\frac{1}{3} \right)^{1/2} (1)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (2.88)$$

2.8 Espaços de Funções L^1 e L^2

Na teoria de Fourier, frequentemente trabalhamos com funções que são integráveis ou de quadrado integrável. Estes espaços têm propriedades importantes.

Definição 2.48 (Espaço L^1). Dizemos que $f \in L^1([a, b])$ se f é integrável e

$$\int_a^b |f(x)| \, dx < \infty$$

Definição 2.49 (Espaço L^2). Dizemos que $f \in L^2([a, b])$ se f é de quadrado integrável, ou seja, $\int_a^b |f(x)|^2 \, dx < \infty$.

Proposição 2.50 (Relação entre L^1 e L^2). Se $f \in L^2([a, b])$, então $f \in L^1([a, b])$. A recíproca não é verdadeira.

Demonstração. Pelo Corolário 2.46, se $f \in L^2([a, b])$, então

$$\int_a^b |f(x)| \, dx \leq \sqrt{b-a} \left(\int_a^b |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} < \infty. \quad (2.89)$$

Portanto, $f \in L^1([a, b])$. □

Exemplo 2.51 (Função em L^1 mas não em L^2). A função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ em $(0, 1)$ está em L^1 , pois $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = 2$, mas não está em L^2 , pois $\int_0^1 \frac{1}{x} \, dx = \infty$.

Demonstração. De fato, vamos provar que $f \in L^1(0, 1)$ mas $f \notin L^2(0, 1)$.

1. Primeiro, mostramos que $f \in L^1(0, 1)$. Por definição,

$$\int_0^1 |f(x)| \, dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx.$$

Como $f(x) > 0$ em $(0, 1)$, temos $|f(x)| = f(x)$. Calculamos a integral imprópria:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 x^{-1/2} \, dx.$$

Usando a primitiva $\int x^{-1/2} dx = 2x^{1/2} + C$, obtemos

$$\int_{\varepsilon}^1 x^{-1/2} dx = [2x^{1/2}]_{\varepsilon}^1 = 2(1)^{1/2} - 2\varepsilon^{1/2} = 2 - 2\sqrt{\varepsilon}.$$

Portanto,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2.$$

Como a integral é finita, concluímos que

$$\int_0^1 |f(x)| dx = 2 < \infty,$$

logo $f \in L^1(0, 1)$.

2. Agora, mostramos que $f \notin L^2(0, 1)$. Temos

$$|f(x)|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = \frac{1}{x}.$$

Assim,

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx = \int_0^1 \frac{1}{x} dx.$$

Esta é uma integral imprópria divergente:

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [\ln x]_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\ln 1 - \ln \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (-\ln \varepsilon) = +\infty.$$

Portanto,

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx = \infty,$$

o que significa que $f \notin L^2(0, 1)$. □

Observação 2.2. A função $f(x) = 1/\sqrt{x}$ pertence a $L^1(0, 1)$ mas não pertence a $L^2(0, 1)$. Isso mostra que a inclusão $L^2 \subset L^1$ não é válida em espaços de medida finita quando a função não é limitada; na verdade, para intervalos finitos, temos $L^2 \subset L^1$ (pela desigualdade de Hölder), mas a recíproca é falsa, como este exemplo demonstra.

Este exemplo é clássico e mostra que funções com singularidade integrável podem ter quadrado não integrável. A função $1/\sqrt{x}$ tem uma singularidade em 0 "fraca" suficiente para ser integrável em L^1 , mas "forte" suficiente para não ser integrável em L^2 .

Exemplo 2.52 (Função em L^2 e L^1). A função $f(x) = x$ em $[0, 1]$ está em L^1 e L^2 , pois $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$ e $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

Demonstração. Com efeito, vamos provar que $f \in L^1[0, 1]$ e $f \in L^2[0, 1]$.

1. Primeiro, mostramos que $f \in L^1[0, 1]$. Por definição,

$$\int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 |x| dx.$$

Como $x \geq 0$ em $[0, 1]$, temos $|x| = x$. Assim,

$$\int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 x dx.$$

Calculando a integral definida:

$$\int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$\int_0^1 |f(x)| dx = \frac{1}{2} < \infty,$$

logo $f \in L^1[0, 1]$.

2. Agora, mostramos que $f \in L^2[0, 1]$. Temos

$$|f(x)|^2 = |x|^2 = x^2,$$

pois $x \geq 0$ em $[0, 1]$. Assim,

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx = \int_0^1 x^2 dx.$$

Calculando a integral definida:

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

Portanto,

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx = \frac{1}{3} < \infty,$$

logo $f \in L^2[0, 1]$. □

Observação 2.3. A função $f(x) = x$ pertence tanto a $L^1[0, 1]$ quanto a $L^2[0, 1]$. Isso era esperado, pois em espaços de medida finita (como $[0, 1]$ com a medida de Lebesgue) temos a inclusão $L^2 \subset L^1$, e funções contínuas em intervalos compactos são limitadas, portanto pertencem a todos os espaços L^p para $1 \leq p \leq \infty$.

Este exemplo contrasta com o Exemplo 2.51, onde a função $1/\sqrt{x}$ pertence a L^1 mas não a L^2 . Aqui, a função x é suave e limitada em $[0, 1]$, o que garante sua pertença a

ambos os espaços. Na verdade, para qualquer $p \geq 1$, temos

$$\int_0^1 |x|^p dx = \frac{1}{p+1} < \infty,$$

logo $x \in L^p[0, 1]$ para todo $p \in [1, \infty]$.

Como último resultado deste capítulo, apresentamos um resultado também importante para o nosso estudo.

Teorema 2.53. *Seja a função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, L^1 . Então, dado $\epsilon > 0$, arbitrário, existe uma função contínua $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\phi(a) = \phi(b) = 0$ e*

$$\int_a^b |f(x) - \phi(x)| dx < \epsilon.$$

Demonstração. Dividiremos a demonstração em duas partes. Suponhamos inicialmente que f seja limitada e integrável. Assim, dado $\epsilon > 0$ existe uma partição $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_k = b\}$ do intervalo $[a, b]$, com $x_0 < x_1 < \dots < x_k$, tal que vale

$$\int_a^b f(x) dx - \sum_{j=1}^k m_j (x_j - x_{j-1}) < \frac{\epsilon}{2} \quad (2.90)$$

onde $m_j = \inf\{f(x) : x \in [x_{j-1}, x_j]\}$, com $j = 1, 2, \dots$. Agora definimos a função $\gamma(x)$, pondo

$$\gamma(x) = m_j, \text{ para } x_{j-1} \leq x < x_j. \quad (2.91)$$

Com isso o somatório em (2.90) é a integral de $\gamma(x)$ em $[a, b]$, daí podemos reescrever (2.90) da seguinte forma

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b \gamma(x) dx = \int_a^b [f(x) - \gamma(x)] dx < \frac{\epsilon}{2}. \quad (2.92)$$

Faremos uma ilustração gráfica simplificada da ideia que se segue para concluirmos a demonstração. Suponhamos que a partição P tenha apenas quatro pontos ($n = 4$), e que o gráfico da função $\gamma(x)$ seja o da figura abaixo, e para cada n consideremos a função ϕ_n obtida substituindo em tal figura os “retângulos por trapézios”, cujos lados têm inclinação n . Para os pontos x_0 e x_1 , por exemplo, lembrando que área de um trapézio de bases c , d e altura h é dada por $h \frac{c+d}{2}$, como a inclinação de cada trapézio é n , em particular para $n = 1$, temos $\tan 1 = \frac{m_1}{s} \implies s = \frac{m_1}{\tan 1}$. Daí

$$\int_{x_0}^{x_1} |\gamma(x) - \phi_1(x)| dx = \left| m_1(x_1 - x_0) - \frac{m_1[(x_1 - x_0) + (x_1 - x_0 - 2s)]}{2} \right| = sm_1 = \frac{m_1^2}{\tan 1}.$$

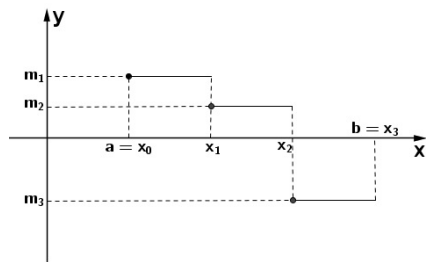


Figura 2.1:

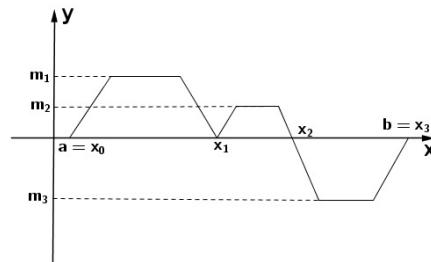


Figura 2.3:

Logo, usando essa ideia para uma função $\gamma(x)$ qualquer, como a definida em (2.91), temos

$$\int_a^b |\gamma(x) - \phi_n(x)| dx = \sum_{j=1}^k \frac{m_j^2}{\tan n}. \quad (2.93)$$

Assim, como f é limitada, seja $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$. Então, de (2.93) segue

$$\int_a^b |\gamma(x) - \phi_n(x)| dx \leq \frac{kM^2}{\tan n}$$

daí, uma vez fixado k , podemos tomar n suficientemente grande tal que

$$\int_a^b |\gamma(x) - \phi_n(x)| dx < \frac{\epsilon}{2}. \quad (2.94)$$

Observemos que de (2.93) e (2.94), segue-se que dado $\epsilon > 0$, existe uma função contínua $\phi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, com $\phi_n(a) = \phi_n(b) = 0$ tal que

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x) - \phi_n(x)| dx &= \int_a^b |f(x) - \phi_n(x) + \gamma(x) - \gamma(x)| dx \\ &\leq \int_a^b |f(x) - \gamma(x)| dx + \int_a^b |\gamma(x) - \phi_n(x)| dx \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Agora, suponhamos que f é ilimitada, porém integrável e absolutamente integrável no sentido das integrais impróprias. Para simplificar as contas, suponhamos que f não seja limitada apenas nas vizinhanças de a e b . Então, dado $\epsilon > 0$, podemos obter um $\delta > 0$ tal que vale

$$\left| \int_a^b |f(x)| dx - \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x)| dx \right| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (2.95)$$

Sendo f limitada e integrável no intervalo $[a + \delta, b - \delta]$, pelo que mostramos acima, existe

uma função contínua $\phi : [a + \delta, b - \delta] \longrightarrow \mathbb{R}$, com $\phi(a + \delta) = \phi(b - \delta) = 0$, tal que

$$\int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - \phi(x)| dx < \frac{\epsilon}{2}. \quad (2.96)$$

Definimos a função $\psi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\psi(x) = \begin{cases} \phi(x), & \text{para } a + \delta \leq x \leq b - \delta \\ 0, & \text{para } a \leq x \leq a + \delta, \text{ e } b - \delta \leq x \leq b. \end{cases} \quad (2.97)$$

Temos

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)| dx &= \int_a^{a+\delta} |f(x)| dx + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x)| dx + \int_{b-\delta}^b |f(x)| dx. \\ \int_a^b |f(x)| dx - \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x)| dx &= \int_a^{a+\delta} |f(x)| dx + \int_{b-\delta}^b |f(x)| dx. \end{aligned}$$

Dai, como $\psi(x)$ é integrável em $[a, b]$, usando os cálculos acima, temos

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x) - \psi(x)| dx &= \int_a^{a+\delta} |f(x)| dx + \int_{b-\delta}^b |f(x)| dx + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - \phi(x)| dx \\ &\leq \left| \int_a^b |f(x)| dx - \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x)| dx \right| + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - \phi(x)| dx \\ &\leq \left| \int_a^{a+\delta} |f(x)| dx - \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x)| dx \right| + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - \phi(x)| dx \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

□

Na realidade, de acordo com o Teorema 2.53, dada uma função $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, L^1 , existe uma sucessão de funções contínuas $\phi_n : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, com $\phi_n(a) = \phi_n(b) = 0$, e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x) - \phi_n(x)| dx = 0.$$

Se uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é periódica de período $2L$ e L^1 , no intervalo $[-L, L]$, então podemos obter uma sucessão de funções contínuas $\phi_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, periódicas de período $2L$. Para tanto, pelo que vimos acima, basta que tomemos $\phi_n(-L) = \phi_n(L) = 0$, para todo n tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^L |f(x) - \phi_n(x)| dx = 0.$$

Observação 2.4. Dando ênfase ao que afirma Figueiredo (2014), dada uma sucessão de funções contínuas $\phi_n : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, dizemos que ela converge no sentido L^1 , quando se tem $\lim_{m, n \rightarrow \infty} \int_a^b |\phi_m(x) - \phi_n(x)| dx = 0$. Podendo, nesse caso, existir uma função $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, integrável e absolutamente integrável, no sentido de integrabilidade que estamos estudando,

tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x) - \phi_n(x)| dx = 0$ e com isso dizemos que f é o limite de ϕ_n no sentido L^1 . Ainda de acordo com o autor, em geral tal função f não existe. Porém, se considerarmos o conceito mais amplo de **integral de Lebesgue**, então tal f integrável à Lebesgue existe, de tal forma que o último limite acima seja verdadeiro, dentro do contexto de integrabilidade à Lebesgue, e por conseguinte as funções integráveis à Lebesgue em $[a, b]$ são os limites no sentido L^1 de sucessões de funções contínuas neste intervalo.

Apresentaremos a seguir um resultado semelhante àquele do Teorema 2.53, sendo este para funções L^2 , ou seja, funções de quadrado integrável.

Teorema 2.54. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de quadrado integrável. Então, existe uma sucessão de funções contínuas $\psi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, com $\psi_n(a) = \psi_n(b) = 0$, tais que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x) - \psi_n(x)|^2 dx = 0.$$

Demonstração. Dividiremos a demonstração em duas partes. Inicialmente suponhamos que f seja limitada, isto é, existe $k > 0$ tal que $|f(x)| \leq k$, para todo $x \in [a, b]$. Sendo $f \in L^2$, segue-se que f é L^1 . Assim, da desigualdade de Cauchy-Schwarz resulta:

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq (b-a)^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Por outro lado, pelo Teorema 2.53 existe uma função contínua $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, com as seguintes propriedades: $\psi(a) = \psi(b) = 0$, $|\psi(x)| \leq k$, para todo $x \in [a, b]$, e dado $\epsilon > 0$ vale

$$\int_a^b |f(x) - \psi(x)| dx < \frac{\epsilon}{2k}.$$

Assim

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x) - \psi(x)|^2 dx &= \int_a^b |f(x) - \psi(x)| |f(x) - \psi(x)| dx \\ &\leq \int_a^b [|f(x)| + |\psi(x)|] |f(x) - \psi(x)| dx \\ &\leq 2k \int_a^b |f(x) - \psi(x)| dx < 2k \frac{\epsilon}{2k} = \epsilon, \end{aligned}$$

e com isso concluímos a demonstração neste caso.

Agora, se for f ilimitada, suponhamos para facilitar a demonstração, que f seja ilimitada nas vizinhanças de a e b , pois para o caso geral o raciocínio é análogo. Então, dado $\epsilon > 0$ podemos escolher $\delta > 0$ de tal forma que tenhamos

$$\int_a^{a+\delta} |f(x)|^2 dx < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{e} \quad \int_{b-\delta}^b |f(x)|^2 dx < \frac{\epsilon}{3}.$$

Assim, usamos a parte do teorema, já demonstrada, para determinar uma função contínua $\psi : [a + \delta, b - \delta] \longrightarrow \mathbb{R}$, com $\psi(a + \delta) = \psi(b - \delta) = 0$ tal que

$$\int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - \psi(x)|^2 dx < \frac{\epsilon}{3}.$$

Agora, definimos a função

$$\bar{\psi}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } a \leq x \leq a + \delta \\ \psi(x), & \text{se } a + \delta \leq x \leq b - \delta. \\ 0, & \text{se } b - \delta \leq x \leq b \end{cases} \quad (2.98)$$

Como a função $\bar{\psi}$ é contínua, obtemos

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x) - \bar{\psi}(x)|^2 dx &= \int_a^{a+\delta} |f(x)|^2 dx + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - \psi(x)|^2 dx + \int_{b-\delta}^b |f(x)|^2 dx \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

□

Vale observar que se uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ for periódica de período $2L$ e L^2 em $[-L, L]$, então existe uma sucessão de funções contínuas $\psi_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, também periódicas e com o mesmo período de f , satisfazendo o teorema acima. Para isso, basta que tomemos $\psi_n(-L) = \psi_n(L) = 0$ para todo n .

2.9 Conclusão do Capítulo

Neste capítulo, estabelecemos os fundamentos teóricos necessários para o estudo da Análise de Fourier e da Transformada de Laplace. Vimos:

- Funções periódicas e suas propriedades fundamentais;
- O conceito de ortogonalidade para funções e o sistema trigonométrico;
- Funções pares e ímpares e suas propriedades de integração;
- Funções seccionalmente contínuas e diferenciáveis;
- Convergência pontual e uniforme de séries de funções;
- O Teste de Weierstrass e suas aplicações;
- O Lema de Riemann-Lebesgue;
- A desigualdade de Cauchy-Schwarz e os espaços L^1 e L^2 .

Estes conceitos serão aplicados nos capítulos seguintes, especialmente no estudo das séries de Fourier, onde a ortogonalidade do sistema trigonométrico permite o cálculo dos coeficientes de Fourier, e as noções de convergência garantem que a série de Fourier realmente representa a função original.

No próximo capítulo, desenvolveremos a teoria das séries de Fourier, incluindo o cálculo dos coeficientes, os teoremas de convergência e as aplicações.

SÉRIES DE FOURIER

03

Capítulo 3

Séries de Fourier

Neste capítulo, desenvolveremos a teoria das séries de Fourier, um dos pilares da Análise Matemática e uma ferramenta indispensável na resolução de equações diferenciais parciais. A ideia central, introduzida por Jean-Baptiste Joseph Fourier no início do século XIX, é representar funções periódicas como somas infinitas de senos e cossenos.

A importância desta teoria transcende a Matemática pura, encontrando aplicações em Física, Engenharia, Processamento de Sinais, Acústica, Óptica e inúmeras outras áreas. Compreender os fundamentos das séries de Fourier é essencial para qualquer estudante ou profissional que trabalhe com fenômenos ondulatórios ou periódicos.

Ao longo deste capítulo, desenvolveremos a teoria de forma rigorosa, mas sempre acompanhada de exemplos que ilustram os conceitos e resultados apresentados. Iniciaremos com o cálculo dos coeficientes de Fourier, seguido pelo estudo da convergência das séries, e concluiremos com resultados importantes como a Identidade de Parseval e o Teorema de Fejér.

3.1 Coeficientes de Fourier

A pergunta fundamental que motiva toda a teoria de Fourier é: dada uma função periódica f , podemos representá-la como uma combinação linear infinita de senos e cossenos? Para responder a esta questão, precisamos primeiro determinar como calcular os coeficientes dessa combinação.

3.1.1 Dedução dos Coeficientes

Suponhamos que uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, periódica com período $2L$, possa ser expressa como uma série trigonométrica da forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]. \quad (3.1)$$

A escolha de escrever o termo constante como $\frac{a_0}{2}$ em vez de a_0 é puramente por conveniência, como veremos adiante. Nosso objetivo agora é determinar expressões para os coeficientes a_n e b_n em termos da função f .

Para isso, vamos supor que a série em (3.1) converge uniformemente para f no intervalo $[-L, L]$. Sob esta hipótese, podemos integrar termo a termo e utilizar as propriedades de ortogonalidade do sistema trigonométrico, que foram demonstradas no Capítulo 2.

Proposição 3.1 (Cálculo de a_0). *O coeficiente a_0 é dado por*

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx. \quad (3.2)$$

Demonstração. Integrando ambos os lados de (3.1) de $-L$ a L :

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + b_n \int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right]. \quad (3.3)$$

Calculando cada integral:

$$\int_{-L}^L \frac{a_0}{2} dx = \frac{a_0}{2} \cdot 2L = a_0 L, \quad (3.4)$$

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \left[\frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_{-L}^L = \frac{L}{n\pi} [\sin(n\pi) - \sin(-n\pi)] = 0, \quad (3.5)$$

$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \left[-\frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_{-L}^L = -\frac{L}{n\pi} [\cos(n\pi) - \cos(-n\pi)] = 0. \quad (3.6)$$

Portanto:

$$\int_{-L}^L f(x) dx = a_0 L \implies a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx. \quad (3.7)$$

□

Proposição 3.2 (Cálculo de a_n). *Para $n \geq 1$, o coeficiente a_n é dado por*

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (3.8)$$

Demonstração. Multiplicamos (3.1) por $\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ e integramos de $-L$ a L :

$$\int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \quad (3.9)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \right] \quad (3.10)$$

$$+ b_n \int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \Big]. \quad (3.11)$$

Pelas relações de ortogonalidade demonstradas no Capítulo 2:

- $\int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0$ para $m \geq 1$;
- $\int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0$ para todos m, n ;
- $\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0$ para $m \neq n$, e $= L$ para $m = n$.

Portanto, todos os termos se anulam, exceto quando $n = m$:

$$\int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = a_m \int_{-L}^L \cos^2\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = a_m L. \quad (3.12)$$

Assim:

$$a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx. \quad (3.13)$$

□

Proposição 3.3 (Cálculo de b_n). *Para $n \geq 1$, o coeficiente b_n é dado por*

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (3.14)$$

Demonstração. Multiplicamos (3.1) por $\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ e integramos de $-L$ a L :

$$\int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \quad (3.15)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \right. \quad (3.16)$$

$$\left. + b_n \int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \right]. \quad (3.17)$$

Pelas relações de ortogonalidade:

- $\int_{-L}^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0$ para $m \geq 1$;
- $\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0$ para todos m, n ;
- $\int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0$ para $m \neq n$, e $= L$ para $m = n$.

Portanto:

$$\int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = b_m L. \quad (3.18)$$

Assim:

$$b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{L} \right) dx. \quad (3.19)$$

□

Definição 3.4 (Coeficientes de Fourier). Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável em $[-L, L]$. Os **coeficientes de Fourier** de f são definidos por:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.20)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.21)$$

As expressões acima são conhecidas como **fórmulas de Euler-Fourier**.

Observação 3.1. A condição de integrabilidade absoluta $\int_{-L}^L |f(x)| dx < \infty$ garante que as integrais que definem os coeficientes de Fourier existem, pois:

$$\left| \int_{-L}^L f(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \right| \leq \int_{-L}^L |f(x)| dx < \infty. \quad (3.22)$$

3.1.2 Estimativas dos Coeficientes de Fourier

Obter estimativas para os coeficientes de Fourier é importante para estudar a convergência das séries. Quanto mais regular for a função, mais rapidamente seus coeficientes de Fourier decaem a zero.

Proposição 3.5 (Estimativas para a_n e b_n). Seja f periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável em $[-L, L]$. Então:

$$|a_n| \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)| dx \quad e \quad |b_n| \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)| dx. \quad (3.23)$$

Ou seja, $|a_n| \leq K$ e $|b_n| \leq K$, com $K = \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)| dx$.

Demonstração.

$$|a_n| = \left| \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \right| \quad (3.24)$$

$$\leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)| \left| \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right| dx \quad (3.25)$$

$$\leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)| dx. \quad (3.26)$$

A demonstração para b_n é análoga. □

Proposição 3.6 (Estimativas Melhoradas). *Se f é periódica de período $2L$, derivável, com f' integrável em $[-L, L]$, então para $n \geq 1$:*

$$|a_n| \leq \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L |f'(x)| dx \quad e \quad |b_n| \leq \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L |f'(x)| dx. \quad (3.27)$$

Demonstração. Usamos integração por partes para a_n :

$$La_n = \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (3.28)$$

Tomando $u = f(x)$ e $dv = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$, temos $du = f'(x)dx$ e $v = \frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$:

$$La_n = \left[f(x) \frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_{-L}^L - \int_{-L}^L \frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) f'(x) dx \quad (3.29)$$

$$= \frac{L}{n\pi} [f(L) \sin(n\pi) - f(-L) \sin(-n\pi)] - \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (3.30)$$

Como f é periódica, $f(L) = f(-L)$. Além disso, $\sin(n\pi) = 0$ e $\sin(-n\pi) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Portanto, o termo avaliado se anula:

$$La_n = -\frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (3.31)$$

Logo:

$$|a_n| = \left| -\frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right| \quad (3.32)$$

$$\leq \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L |f'(x)| \left| \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right| dx \quad (3.33)$$

$$\leq \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L |f'(x)| dx. \quad (3.34)$$

Analogamente para b_n :

$$Lb_n = \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (3.35)$$

Tomando $u = f(x)$ e $dv = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$, temos $du = f'(x)dx$ e $v = -\frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$:

$$Lb_n = \left[-f(x) \frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_{-L}^L + \int_{-L}^L \frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) f'(x) dx \quad (3.36)$$

$$= -\frac{L}{n\pi} [f(L) \cos(n\pi) - f(-L) \cos(-n\pi)] + \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (3.37)$$

Como f é periódica e $\cos(n\pi) = \cos(-n\pi)$, o termo avaliado se anula:

$$Lb_n = \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (3.38)$$

Logo:

$$|b_n| = \left| \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right| \quad (3.39)$$

$$\leq \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L |f'(x)| dx. \quad (3.40)$$

□

Proposição 3.7 (Estimativas de Segunda Ordem). *Se f é periódica de período $2L$, duas vezes derivável, com f'' integrável em $[-L, L]$, então para $n \geq 1$:*

$$|a_n| \leq \frac{L}{n^2\pi^2} \int_{-L}^L |f''(x)| dx \quad e \quad |b_n| \leq \frac{L}{n^2\pi^2} \int_{-L}^L |f''(x)| dx. \quad (3.41)$$

Demonstração. De $La_n = -\frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$, aplicamos integração por partes novamente.

Tomando $u = f'(x)$ e $dv = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$, temos $du = f''(x) dx$ e $v = -\frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$:

$$La_n = -\frac{L}{n\pi} \left[-f'(x) \frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_{-L}^L \quad (3.42)$$

$$+ \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L \frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) f''(x) dx \quad (3.43)$$

$$= \frac{L^2}{n^2\pi^2} [f'(L) \cos(n\pi) - f'(-L) \cos(-n\pi)] + \frac{L^2}{n^2\pi^2} \int_{-L}^L f''(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (3.44)$$

Como f' é periódica (pois f é duas vezes derivável), $f'(L) = f'(-L)$ e $\cos(n\pi) = \cos(-n\pi)$, o termo avaliado se anula:

$$La_n = \frac{L^2}{n^2\pi^2} \int_{-L}^L f''(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (3.45)$$

Logo:

$$|a_n| = \left| \frac{L}{n^2\pi^2} \int_{-L}^L f''(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right| \quad (3.46)$$

$$\leq \frac{L}{n^2\pi^2} \int_{-L}^L |f''(x)| dx. \quad (3.47)$$

A demonstração para b_n é análoga, partindo de $Lb_n = \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$ e

aplicando integração por partes mais uma vez. $\square$

As Proposições 3.5, 3.6 e 3.7 formam uma sequência hierárquica de estimativas para os coeficientes de Fourier, revelando um princípio fundamental da análise de Fourier: **a regularidade da função no domínio espacial se reflete na taxa de decaimento dos coeficientes na frequência.**

- A Proposição 3.5 é a mais geral e exige apenas integrabilidade absoluta. Ela estabelece que os coeficientes são **uniformemente limitados** ($a_n, b_n = O(1)$: *limitado(constante)*). Embora seja uma estimativa grosseira, é universal e garante a existência e a limitação dos coeficientes de Fourier para qualquer função L^1 .
- A Proposição 3.6 exige diferenciabilidade com derivada integrável e refina a estimativa para $a_n, b_n = O(1/n)$ (*decai como $1/n$*). Este decaimento é significativo, pois implica que a série de Fourier converge absolutamente se f' for suficientemente regular (por exemplo, se $f' \in L^2$). Além disso, este resultado é um passo crucial para provar a convergência uniforme da série de Fourier via teste M de Weierstrass.
- A Proposição 3.7 exige duas derivadas integráveis e fornece a estimativa ainda mais forte $a_n, b_n = O(1/n^2)$ (*decai como $1/n^2$*). Este decaimento quadrático garante a convergência absoluta e uniforme da série de Fourier, independentemente de condições adicionais, desde que $\int |f''| < \infty$. Funções com essa regularidade têm séries de Fourier que convergem uniformemente para a função em todo o intervalo.

Padrão geral: Se f possui k derivadas integráveis (com $f^{(k)} \in L^1$), então

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^k}\right) \quad \text{e} \quad b_n = O\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

Este princípio é conhecido como o **lema de Riemann-Lebesgue generalizado** ou **decaência dos coeficientes de Fourier com a regularidade**. Quanto mais suave a função, mais rápido os coeficientes tendem a zero.

Interpretação qualitativa:

1. A primeira estimativa é *qualitativa*: afirma que os coeficientes não explodem.
2. A segunda estimativa é *quantitativa de primeira ordem*: mostra que o decaimento é pelo menos $1/n$.
3. A terceira estimativa é *quantitativa de segunda ordem*: mostra que o decaimento é pelo menos $1/n^2$.

Aplicações práticas:

- Para funções contínuas e seccionalmente suaves, as estimativas de primeira ordem garantem a convergência pontual (mas não necessariamente uniforme).
- Para funções com derivada contínua (C^1), a estimativa de primeira ordem já pode garantir convergência uniforme se a derivada for limitada.
- Para funções com segunda derivada contínua (C^2), a convergência uniforme é automática, e a série converge rapidamente, sendo útil em aplicações numéricas.

Relação com a teoria de espaços de Sobolev: Essas estimativas mostram que, se $f \in H^k$ (espaço de Sobolev de ordem k), então os coeficientes de Fourier pertencem a ℓ^2 com peso n^{2k} , ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2k}(|a_n|^2 + |b_n|^2) < \infty.$$

Isso estabelece uma ponte entre a regularidade analítica da função e a decaimento espectral, fundamental em equações diferenciais parciais e processamento de sinais.

Em resumo, as três proposições exibem, de forma progressiva, como a suavidade da função é traduzida em propriedades quantitativas dos coeficientes de Fourier.

Exemplo 3.8 (Decaimento dos Coeficientes). Para a função $f(x) = x^2$ em $[-L, L]$, estendida periodicamente, os coeficientes de Fourier decaem como $1/n^2$. De fato, como $f''(x) = 2$:

$$|a_n| \leq \frac{L}{n^2\pi^2} \int_{-L}^L 2 \, dx = \frac{4L^2}{n^2\pi^2}. \quad (3.48)$$

Este decaimento rápido garante a convergência uniforme da série de Fourier.

Exemplo 3.9 (Comparação de Decaimentos). Considere as seguintes funções e seus decaimentos:

- $f(x)$ contínua por partes $\implies |a_n|, |b_n| \leq \frac{K}{n}$ (se f' integrável);
- $f(x)$ contínua com f' contínua por partes $\implies |a_n|, |b_n| \leq \frac{K}{n^2}$ (se f'' integrável);
- $f(x)$ infinitamente diferenciável $\implies |a_n|, |b_n|$ decaem mais rápido que qualquer potência de $1/n$.

Aqui, observa-se que sendo f seccionalmente contínua, certamente f' não estará definida nos pontos de descontinuidade de f , podendo até, não estar definida mesmo em pontos onde f é contínua.

3.2 Séries de Fourier

Com os coeficientes de Fourier definidos, podemos agora introduzir a série de Fourier de uma função.

Definição 3.10 (Série de Fourier). Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável em $[-L, L]$. A **série de Fourier** de f é a série trigonométrica

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right], \quad (3.49)$$

onde a_n e b_n são os coeficientes de Fourier de f dados por (3.20) e (3.21).

Observação 3.2. Usamos o símbolo $\sim$ (til) em vez de $=$ porque a série de Fourier pode não convergir para $f(x)$ em todos os pontos. Em pontos de descontinuidade, a série converge para a média dos limites laterais. Isso é o que diz o importante resultado a seguir.

Teorema 3.11 (Teorema de Fourier). Seja a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seccionalmente diferenciável e periódica de período $2L$. Então a série de Fourier de f dada em 3.49 converge, em cada ponto x de $\mathbb{R}$, para $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ (onde a expressão $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ significa a média aritmética dos limites laterais de f , à direita e à esquerda, no ponto x), ou seja, vale

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right]. \quad (3.50)$$

Devemos enfatizar que as condições dadas no teorema acima são apenas suficientes para a convergência de uma série de Fourier; elas não são, de modo algum, necessárias.

3.2.1 Exemplos Fundamentais

Exemplo 3.12 (Função Dente de Serra). Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período $2L$, definida por

$$f(x) = x, \quad -L < x < L, \quad (3.51)$$

com $f(x+2L) = f(x)$.

Resolução: Como f é ímpar, temos $a_n = 0$ para todo $n \geq 0$. Calculamos b_n :

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (3.52)$$

Usando integração por partes com $u = x$ e $dv = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$:

$$b_n = \frac{2}{L} \left[-\frac{L}{n\pi} x \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \Big|_0^L + \frac{L}{n\pi} \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right] \quad (3.53)$$

$$= \frac{2}{L} \left[-\frac{L^2}{n\pi} \cos(n\pi) + \frac{L^2}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \Big|_0^L \right] \quad (3.54)$$

$$= \frac{2}{L} \left[-\frac{L^2}{n\pi} (-1)^n + 0 \right] = -\frac{2L}{n\pi} (-1)^n. \quad (3.55)$$

Portanto:

$$b_n = \frac{2L}{n\pi} (-1)^{n+1}. \quad (3.56)$$

Assim, a série de Fourier de f é:

$$f(x) = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (3.57)$$

A figura abaixo representa uma aproximação do gráfico de f pela soma de $n = 10$ termos de sua série de Fourier.

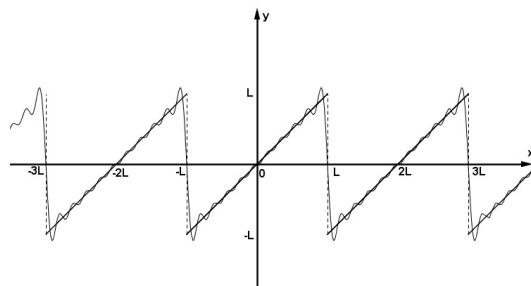


Figura 3.1:

Verificação: Em $x = L/2$, temos:

$$f(L/2) = \frac{L}{2} = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right). \quad (3.58)$$

Para $n = 2k - 1$ (ímpar), $\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2}\right) = (-1)^{k-1}$. Para $n = 2k$ (par), $\sin(k\pi) = 0$.

Portanto:

$$\frac{L}{2} = \frac{2L}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k}}{2k-1} (-1)^{k-1} = \frac{2L}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}. \quad (3.59)$$

Logo:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad (3.60)$$

Esta é a **série de Gregory-Leibniz** para $\pi/4$.

Exemplo 3.13 (Função Triangular). Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período $2L$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} L - x, & 0 \leq x \leq L, \\ L + x, & -L \leq x \leq 0. \end{cases} \quad (3.61)$$

Resolução: Como f é par, temos $b_n = 0$ para todo $n \geq 1$. Calculamos a_0 e a_n :

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L (L - x) dx = \frac{2}{L} \left[Lx - \frac{x^2}{2} \right]_0^L \quad (3.62)$$

$$= \frac{2}{L} \left(L^2 - \frac{L^2}{2} \right) = \frac{2}{L} \cdot \frac{L^2}{2} = L. \quad (3.63)$$

Para $n \geq 1$:

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L (L - x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (3.64)$$

Usando integração por partes com $u = L - x$ e $dv = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$:

$$a_n = \frac{2}{L} \left[(L - x) \frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \Big|_0^L + \frac{L}{n\pi} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right] \quad (3.65)$$

$$= \frac{2}{L} \left[0 - \frac{L^2}{n^2\pi^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \Big|_0^L \right] \quad (3.66)$$

$$= \frac{2}{L} \left[-\frac{L^2}{n^2\pi^2} (\cos(n\pi) - 1) \right] \quad (3.67)$$

$$= \frac{2L}{n^2\pi^2} (1 - \cos(n\pi)). \quad (3.68)$$

Se n é par, $\cos(n\pi) = 1$, logo $a_n = 0$. Se n é ímpar, digamos $n = 2k-1$, $\cos((2k-1)\pi) = -1$, logo:

$$a_{2k-1} = \frac{2L}{(2k-1)^2\pi^2} (1 - (-1)) = \frac{4L}{(2k-1)^2\pi^2}. \quad (3.69)$$

Portanto, a série de Fourier é:

$$f(x) = \frac{L}{2} + \frac{4L}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi x}{L}\right). \quad (3.70)$$

Observação: Esta série converge uniformemente para f em $\mathbb{R}$, pois $|a_n| \leq \frac{C}{n^2}$ e $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. Isso é consistente com o fato de f ser contínua.

Consequência: Fazendo $x = 0$ na série (3.70):

$$f(0) = L = \frac{L}{2} + \frac{4L}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}. \quad (3.71)$$

Portanto:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \quad (3.72)$$

É importante salientar que dada uma função num intervalo $[0, L]$, esta pode ser representada por mais de uma série de Fourier. Nos dois exemplos anteriores definimos as funções em intervalos cujo o ponto médio é a origem. Definimos ainda, o período de tais funções como sendo o período fundamental. Entretanto, em muitas aplicações é interessante que tenhamos certa liberdade de escolher o período da função para que possamos atingir determinados objetivos. Se, por exemplo, apresentarmos a função no intervalo $[0, L]$ e nada falarmos sobre o período, podemos determiná-lo da maneira que nos seja conveniente, digamos, um período $P > L$. Neste caso, podemos definir a função no intervalo (L, P) de forma a cumprir certas condições desejadas, ou ainda, podemos estender a função ao intervalo $(-L, 0)$ de muitas maneiras, por exemplo: se refletirmos o gráfico da função em relação ao eixo y , sobre $(-L, 0)$, teremos uma função par no intervalo $(-L, L)$; ou ainda, se refletirmos o gráfico, com relação à origem sobre $(-L, 0)$, obteremos uma função ímpar em $(-L, L)$; ou f pode ser definida como $f(x) = f(x+L)$, em $(-L, 0)$.

3.2.2 Expansões em Meio-Intervalo

Uma aplicação importante das séries de Fourier é a representação de funções definidas apenas em um intervalo $[0, L]$. Neste caso, podemos estender a função de diferentes maneiras para obter diferentes séries de Fourier.

Exemplo 3.14 (Série de Cossenos). Dada $f(x) = x$ para $0 \leq x \leq \pi$, represente f como uma série de cossenos.

Resolução: Para obter uma série de cossenos, estendemos f como uma função par no intervalo $[-\pi, \pi]$:

$$f_e(x) = |x|, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad (3.73)$$

com período 2π .

Como f_e é par, $b_n = 0$. Calculamos:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \pi. \quad (3.74)$$

Para $n \geq 1$:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx. \quad (3.75)$$

Usando integração por partes com $u = x$ e $dv = \cos(nx)dx$:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x}{n} \operatorname{sen}(nx) \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(nx) dx \right] \quad (3.76)$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[0 + \frac{1}{n^2} \cos(nx) \Big|_0^{\pi} \right] \quad (3.77)$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{n^2} (\cos(n\pi) - 1) \right] \quad (3.78)$$

$$= \frac{2}{n^2\pi} (\cos(n\pi) - 1). \quad (3.79)$$

Se n é par, $\cos(n\pi) = 1$, logo $a_n = 0$. Se n é ímpar, $n = 2k - 1$, $\cos((2k - 1)\pi) = -1$, logo:

$$a_{2k-1} = \frac{2}{(2k-1)^2\pi} (-2) = -\frac{4}{(2k-1)^2\pi}. \quad (3.80)$$

Portanto:

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos((2k-1)x), \quad 0 \leq x \leq \pi. \quad (3.81)$$

Exemplo 3.15 (Série de Senos). Dada $f(x) = x$ para $0 \leq x \leq \pi$, represente f como uma série de senos.

Resolução: Estendemos f como uma função ímpar no intervalo $[-\pi, \pi]$:

$$f_o(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ x, & -\pi \leq x < 0, \end{cases} \quad (3.82)$$

com período 2π .

Como f_o é ímpar, $a_n = 0$. Calculamos b_n :

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \operatorname{sen}(nx) dx. \quad (3.83)$$

Usando integração por partes com $u = x$ e $dv = \operatorname{sen}(nx)dx$:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x}{n} \cos(nx) \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx \right] \quad (3.84)$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\pi}{n} \cos(n\pi) + 0 \right] = -\frac{2}{n} (-1)^n = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}. \quad (3.85)$$

Portanto:

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(nx), \quad 0 \leq x < \pi. \quad (3.86)$$

Observação 3.3. A mesma função $f(x) = x$ em $[0, \pi]$ pode ser representada por duas séries diferentes: uma de cossenos e outra de senos. A escolha da série depende do tipo de problema que se deseja resolver. Em problemas de condução de calor com condições de contorno do tipo Neumann (isolamento), usamos séries de cossenos; com condições de Dirichlet (temperatura fixa), usamos séries de senos.

3.3 Integração da Série de Fourier

Uma propriedade importante das séries de Fourier é que podem ser integradas termo a termo, mesmo quando a convergência não é uniforme.

Teorema 3.16 (Integração da Série de Fourier). *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período $2L$, seccionalmente contínua, com série de Fourier*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]. \quad (3.87)$$

Então, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_a^b \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + b_n \int_a^b \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right]. \quad (3.88)$$

Demonstração. Definimos

$$F(x) = \int_0^x \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt. \quad (3.89)$$

A função F será a primitiva de $f(x) - a_0/2$. Ela é introduzida porque f pode não ser integrável termo a termo diretamente, e F será contínua e periódica, permitindo aplicar o Teorema de Fourier.

Como f é seccionalmente contínua, ela é integrável em intervalos compactos. A função

$$g(t) = f(t) - \frac{a_0}{2}$$

também é seccionalmente contínua. Portanto, sua integral indefinida F é **contínua** (de fato, absolutamente contínua, pois é integral de uma função integrável). Isso é importante porque o Teorema de Fourier se aplica a funções contínuas por partes.

Mostramos que $F(x + 2L) = F(x)$. De fato:

$$F(x + 2L) - F(x) = \int_x^{x+2L} \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt \quad (3.90)$$

$$= \int_{-L}^L \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt, \quad (3.91)$$

pois $g(t) = f(t) - a_0/2$ é periódica de período $2L$ e a integral sobre qualquer intervalo de comprimento $2L$ é constante.

Agora calculamos essa integral:

$$\int_{-L}^L \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt = \int_{-L}^L f(t) dt - \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L 1 dt \quad (3.92)$$

$$= a_0 L - \frac{a_0}{2} \cdot 2L \quad (3.93)$$

$$= a_0 L - a_0 L = 0. \quad (3.94)$$

Portanto, $F(x + 2L) = F(x)$, ou seja, F é periódica de período $2L$.

Observação: A constante $a_0/2$ foi escolhida exatamente para garantir que a integral da função g sobre um período seja zero, tornando F periódica. Essa é a chave do argumento.

Como F é contínua e seccionalmente diferenciável (pois $F' = g$ nos pontos de continuidade de f), o Teorema de Fourier (convergência pontual) garante que a série de Fourier de F converge para $F(x)$ em **todos os pontos** (inclusive nos pontos de descontinuidade de f , onde F' não existe, mas F é contínua).

Seja

$$F(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]. \quad (3.95)$$

Sabemos que, nos pontos onde f é contínua:

$$F'(x) = f(x) - \frac{a_0}{2}. \quad (3.96)$$

Mas a série de Fourier de F' pode ser obtida derivando formalmente a série de F :

$$F'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left[-A_n \frac{n\pi}{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + B_n \frac{n\pi}{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]. \quad (3.97)$$

Por outro lado, $f(x) - a_0/2$ tem série de Fourier:

$$f(x) - \frac{a_0}{2} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]. \quad (3.98)$$

Comparando os coeficientes das duas expansões (pela unicidade da série de Fourier),

obtemos:

$$B_n \frac{n\pi}{L} = a_n \Rightarrow B_n = \frac{L}{n\pi} a_n, \quad (3.99)$$

$$-A_n \frac{n\pi}{L} = b_n \Rightarrow A_n = -\frac{L}{n\pi} b_n. \quad (3.100)$$

Essas relações são fundamentais e válidas para $n \geq 1$.

O coeficiente A_0 não é determinado pela derivada (pois a derivada elimina a constante).

Usamos a condição $F(0) = 0$:

$$0 = F(0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n. \quad (3.101)$$

Substituindo $A_n = -\frac{L}{n\pi} b_n$:

$$0 = \frac{A_0}{2} - \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}. \quad (3.102)$$

Portanto:

$$\frac{A_0}{2} = \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}. \quad (3.103)$$

Observação: Esta série converge porque $b_n = O(1/n)$ (decaimento de coeficientes de Fourier de funções seccionalmente contínuas), e $\sum 1/n^2$ converge.

Substituímos A_n e B_n na série de F :

$$F(x) = \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{L}{n\pi} b_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \frac{L}{n\pi} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \quad (3.104)$$

$$= \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} + \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{b_n}{n} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \frac{a_n}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]. \quad (3.105)$$

Pela definição de F :

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt - \frac{a_0}{2} x. \quad (3.106)$$

Portanto:

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{a_0 x}{2} + \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \quad (3.107)$$

$$+ \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{b_n}{n} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \frac{a_n}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]. \quad (3.108)$$

Agora, para obter $\int_a^b f(x) dx$, basta fazer:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_0^b f(x) dx - \int_0^a f(x) dx. \quad (3.109)$$

Agora, para $x = b$ e $x = a$, e subtraindo, obtemos:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{a_0}{2}(b-a) \quad (3.110)$$

$$+ \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{b_n}{n} \left(\cos\left(\frac{n\pi b}{L}\right) - \cos\left(\frac{n\pi a}{L}\right) \right) \right. \quad (3.111)$$

$$\left. + \frac{a_n}{n} \left(\sin\left(\frac{n\pi b}{L}\right) - \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right) \right) \right]. \quad (3.112)$$

Usando as identidades trigonométricas para a diferença de senos e cossenos, ou simplesmente observando que:

$$\cos\left(\frac{n\pi b}{L}\right) - \cos\left(\frac{n\pi a}{L}\right) = -\int_a^b \frac{n\pi}{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad (3.113)$$

$$\sin\left(\frac{n\pi b}{L}\right) - \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right) = \int_a^b \frac{n\pi}{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad (3.114)$$

obtemos:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{a_0}{2}(b-a) \quad (3.115)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_a^b \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + b_n \int_a^b \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right]. \quad (3.116)$$

Que é exatamente o resultado desejado:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_a^b \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + b_n \int_a^b \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right]. \quad (3.117)$$

□

Por que F é contínua? Porque é a integral de uma função seccionalmente contínua (portanto integrável). Isso garante que a série de Fourier de F converge em todos os pontos. Este teorema é uma versão do “teorema da integração termo a termo” e é extremamente útil para calcular integrais de funções usando suas séries de Fourier, especialmente em aplicações físicas e engenharia.

Exemplo 3.17 (Integração da Série do Dente de Serra). A série do dente de serra é:

$$f(x) = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (3.118)$$

Como f é ímpar, $a_0 = 0$. Pelo teorema da integração:

$$\int_0^x f(t)dt = \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} + \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{b_n}{n} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \frac{a_n}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]. \quad (3.119)$$

Como $a_n = 0$ e $b_n = \frac{2L}{n\pi}(-1)^{n+1}$:

$$\int_0^x t dt = \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L}{n^2\pi} (-1)^{n+1} + \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{2L}{n^2\pi} (-1)^{n+1} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \quad (3.120)$$

$$\frac{x^2}{2} = \frac{2L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \left[1 - \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]. \quad (3.121)$$

Para $x = L$:

$$\frac{L^2}{2} = \frac{2L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} [1 - \cos(n\pi)]. \quad (3.122)$$

Para n par, $\cos(n\pi) = 1$, logo $1 - \cos(n\pi) = 0$. Para n ímpar, $\cos(n\pi) = -1$, logo $1 - \cos(n\pi) = 2$.

Portanto:

$$\frac{L^2}{2} = \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k}}{(2k-1)^2} = \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}. \quad (3.123)$$

Logo:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \quad (3.124)$$

3.4 Forma Complexa da Série de Fourier

A forma complexa da série de Fourier é particularmente útil em aplicações da Física e Engenharia, pois simplifica a notação e revela a estrutura da série como uma soma de exponenciais complexas. A vantagem da forma complexa é: a unificação dos coeficientes a_n e b_n em um único coeficiente complexo c_n , a série é escrita como uma soma bilateral ($-\infty$ a ∞), que é mais simétrica, facilita operações como derivação, integração e convolução.

Proposição 3.18 (Forma Complexa). *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período $2L$, integrável em $[-L, L]$. Então sua série de Fourier pode ser escrita como*

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}, \quad (3.125)$$

onde

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx. \quad (3.126)$$

Demonstração. Lembramos as fórmulas de Euler:

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad (3.127)$$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}. \quad (3.128)$$

Substituindo (3.127) e (3.128) na série trigonométrica:

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \frac{e^{in\pi x/L} + e^{-in\pi x/L}}{2} + b_n \frac{e^{in\pi x/L} - e^{-in\pi x/L}}{2i} \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{2} e^{in\pi x/L} + \frac{a_n}{2} e^{-in\pi x/L} + \frac{b_n}{2i} e^{in\pi x/L} - \frac{b_n}{2i} e^{-in\pi x/L} \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \right) e^{in\pi x/L} + \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i} \right) e^{-in\pi x/L} \right]. \end{aligned} \quad (3.129)$$

Como $1/i = -i$, temos:

$$\frac{b_n}{2i} = -\frac{ib_n}{2}. \quad (3.130)$$

Portanto:

$$\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad (3.131)$$

$$\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i} = \frac{a_n + ib_n}{2}. \quad (3.132)$$

Assim, a expressão (3.129) se torna:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n - ib_n}{2} e^{in\pi x/L} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-in\pi x/L} \right]. \quad (3.133)$$

Definição dos coeficientes complexos c_n .

Definimos os coeficientes complexos da seguinte forma:

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad n \geq 1. \quad (3.134)$$

Com esta definição, a expressão (3.133) pode ser reescrita como:

$$f(x) \sim c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n e^{in\pi x/L} + c_{-n} e^{-in\pi x/L}]. \quad (3.135)$$

Observando que o termo $c_0 = c_0 e^{i \cdot 0 \cdot \pi x / L}$, podemos unificar a soma:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}. \quad (3.136)$$

Esta é a forma complexa da série de Fourier.

Cálculo explícito de c_n para $n \geq 1$.

Agora, vamos verificar que a definição (3.134) é consistente com a fórmula integral (3.126).

Para $n \geq 1$, usando as definições de a_n e b_n :

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{a_n - ib_n}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx - i \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right] \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \left[\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - i \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] dx. \end{aligned} \quad (3.137)$$

Agora, usamos a fórmula de Euler na forma:

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta. \quad (3.138)$$

Aplicando (3.138) com $\theta = n\pi x/L$ em (3.137):

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx. \quad (3.139)$$

Cálculo explícito de c_{-n} .

Analogamente, para c_{-n} com $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} c_{-n} &= \frac{a_n + ib_n}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + i \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right] \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \left[\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + i \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] dx \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{in\pi x/L} dx. \end{aligned} \quad (3.140)$$

Observe que (3.140) é exatamente a fórmula (3.126) com n substituído por $-n$:

$$c_{-n} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i(-n)\pi x/L} dx = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{in\pi x/L} dx. \quad (3.141)$$

Cálculo de c_0 .

Para $n = 0$, a fórmula (3.126) nos dá:

$$c_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i \cdot 0 \cdot \pi x / L} dx = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx. \quad (3.142)$$

Mas sabemos que $a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx$. Portanto:

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad (3.143)$$

que coincide com a definição (3.134).

Relação entre coeficientes complexos e reais.

Resumindo as relações:

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad (3.144)$$

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad n \geq 1, \quad (3.145)$$

$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad n \geq 1. \quad (3.146)$$

□

Vale destacar que, geometricamente, cada termo $c_n e^{in\pi x/L}$ representa uma **onda viajante** no plano complexo, com frequência $n\pi/L$. A soma de ondas com frequências positivas e negativas produz ondas estacionárias reais.

Para verificar que a forma complexa reproduz a forma real, calculamos:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L} &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{in\pi x/L} + c_{-n} e^{-in\pi x/L}) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n - ib_n}{2} e^{in\pi x/L} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-in\pi x/L} \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \frac{e^{in\pi x/L} + e^{-in\pi x/L}}{2} + b_n \frac{e^{in\pi x/L} - e^{-in\pi x/L}}{2i} \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.147)$$

Que é exatamente a série trigonométrica original.

Exemplo 3.19 (Forma Complexa da Função Dente de Serra). Para a função dente de serra $f(x) = x$, $-L < x < L$, com período $2L$, temos:

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L x e^{-in\pi x/L} dx. \quad (3.148)$$

Para $n = 0$:

$$c_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L x dx = \frac{1}{2L} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-L}^L = 0. \quad (3.149)$$

Para $n \neq 0$:

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L x e^{-in\pi x/L} dx. \quad (3.150)$$

Usando integração por partes com $u = x$ e $dv = e^{-in\pi x/L} dx$:

$$c_n = \frac{1}{2L} \left[x \frac{e^{-in\pi x/L}}{-in\pi/L} \Big|_{-L}^L - \int_{-L}^L \frac{e^{-in\pi x/L}}{-in\pi/L} dx \right] \quad (3.151)$$

$$= \frac{1}{2L} \left[\frac{iL}{n\pi} x e^{-in\pi x/L} \Big|_{-L}^L - \frac{iL}{n\pi} \cdot \frac{-iL}{n\pi} e^{-in\pi x/L} \Big|_{-L}^L \right] \quad (3.152)$$

$$= \frac{1}{2L} \left[\frac{iL}{n\pi} (L e^{-in\pi} + L e^{in\pi}) - \frac{L^2}{n^2 \pi^2} (e^{-in\pi} - e^{in\pi}) \right] \quad (3.153)$$

$$= \frac{1}{2L} \left[\frac{iL^2}{n\pi} (2 \cos(n\pi)) - \frac{L^2}{n^2 \pi^2} (-2i \sin(n\pi)) \right] \quad (3.154)$$

$$= \frac{1}{2L} \left[\frac{2iL^2}{n\pi} (-1)^n - 0 \right] = \frac{iL}{n\pi} (-1)^n. \quad (3.155)$$

Portanto:

$$c_n = \frac{iL}{n\pi} (-1)^n, \quad n \neq 0. \quad (3.156)$$

Assim:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \frac{iL}{n\pi} (-1)^n e^{in\pi x/L}. \quad (3.157)$$

3.5 Convergência Pontual da Série de Fourier

O estudo da convergência das séries de Fourier é fundamental para entender em que sentido a série representa a função original. Nesta seção, apresentamos condições suficientes para a convergência pontual.

3.5.1 Núcleo de Dirichlet

Para estudar a convergência, é útil reescrever as somas parciais da série de Fourier como uma integral.

Definição 3.20 (Núcleo de Dirichlet). O **núcleo de Dirichlet** de ordem n é definido

por

$$D_n(x) = \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right]. \quad (3.158)$$

O núcleo de Dirichlet possui as seguintes propriedades:

Proposição 3.21 (Propriedades do Núcleo de Dirichlet). 1. D_n é par, contínua e periódica de período $2L$;

2. $\int_{-L}^L D_n(x) dx = 1$;

3. $D_n(0) = \frac{n+1/2}{L}$;

4. Para $x \neq 0, \pm 2L, \pm 4L, \dots$,

$$D_n(x) = \frac{1}{2L} \frac{\sin \left((n + \frac{1}{2}) \frac{\pi x}{L} \right)}{\sin \left(\frac{\pi x}{2L} \right)}. \quad (3.159)$$

Demonstração. (1) Segue diretamente da definição.

(2)

$$\int_{-L}^L D_n(x) dx = \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} \int_{-L}^L dx + \sum_{k=1}^n \int_{-L}^L \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) dx \right] \quad (3.160)$$

$$= \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} \cdot 2L + 0 \right] = 1. \quad (3.161)$$

(3)

$$D_n(0) = \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n 1 \right] = \frac{n + \frac{1}{2}}{L}. \quad (3.162)$$

(4) Para demonstrar, usamos a identidade:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k\theta) = \frac{\sin \left((n + \frac{1}{2})\theta \right)}{2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right)}. \quad (3.163)$$

Para a verificação de (3.163), consideremos a expressão

$$s_n(\beta) = 1 + \sum_{k=1}^n \cos k\beta.$$

Usando a fórmula de Euler, observamos que $s_n(\beta)$ é a parte real de $[1 + \sum_{k=1}^n e^{ik\beta}]$, ou seja,

$$s_n(\beta) = \operatorname{Re} \left[1 + \sum_{k=1}^n e^{ik\beta} \right].$$

Além disso, para $\beta \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$, temos

$$1 + e^{i\beta} + e^{(i\beta)^2} + \dots + e^{(i\beta)^k} = \frac{1 - e^{i(n+1)\beta}}{1 - e^{i\beta}} = \frac{e^{-\frac{i\beta}{2}} - e^{i(n+\frac{1}{2})\beta}}{e^{-\frac{i\beta}{2}} - e^{\frac{i\beta}{2}}}.$$

Assim

$$\begin{aligned} s_n(\beta) &= \operatorname{Re} \frac{e^{-\frac{i\beta}{2}} - e^{i(n+\frac{1}{2})\beta}}{e^{-\frac{i\beta}{2}} - e^{\frac{i\beta}{2}}} = \operatorname{Re} \frac{\cos \frac{\beta}{2} - i \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} - \cos \frac{(n+\frac{1}{2})\beta}{2} - i \operatorname{sen} \frac{(n+\frac{1}{2})\beta}{2}}{\cos \frac{\beta}{2} - i \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} - \cos \frac{\beta}{2} - i \operatorname{sen} \frac{\beta}{2}} \\ &= \frac{\operatorname{sen} \frac{\beta}{2} + \operatorname{sen}(n + \frac{1}{2})\beta}{2 \operatorname{sen} \frac{\beta}{2}}. \end{aligned}$$

Usando este resultado em (3.158) com $\beta = \frac{\pi x}{L}$, e observando que $\frac{1}{2} = (1 - \frac{1}{2})$, obtemos o resultado. $\square$

Agora, podemos expressar a soma parcial $S_n(x)$ da série de Fourier como uma integral de convolução com o núcleo de Dirichlet.

Proposição 3.22 (Representação Integral de S_n). *A soma parcial de ordem n da série de Fourier de f pode ser escrita como*

$$S_n(x) = \int_{-L}^L D_n(x-y)f(y)dy = \int_0^L D_n(t)[f(x+t) + f(x-t)]dt. \quad (3.164)$$

Demonstração. Substituindo os coeficientes de Fourier:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[a_k \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) + b_k \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right] \quad (3.165)$$

$$= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(y) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \left(\frac{k\pi(x-y)}{L} \right) \right] dy \quad (3.166)$$

$$= \int_{-L}^L D_n(x-y)f(y)dy. \quad (3.167)$$

Para a segunda igualdade, usamos a periodicidade e a paridade de D_n :

$$S_n(x) = \int_{-L}^0 D_n(x-y)f(y)dy + \int_0^L D_n(x-y)f(y)dy \quad (3.168)$$

$$= \int_0^L D_n(x+t)f(-t)dt + \int_0^L D_n(x-t)f(t)dt, \quad (3.169)$$

onde na primeira integral fizemos $y = -t$.

Como D_n é par, $D_n(x+t) = D_n(-(x+t))$? Vamos verificar melhor:

$$\int_{-L}^0 D_n(x-y)f(y)dy = \int_0^L D_n(x+t)f(-t)dt. \quad (3.170)$$

Como D_n é par: $D_n(x+t) = D_n(-x-t)$. Isso não simplifica diretamente. Vamos usar a periodicidade:

$$S_n(x) = \int_{-L}^0 D_n(x-y)f(y)dy + \int_0^L D_n(x-y)f(y)dy. \quad (3.171)$$

Fazendo $y = -t$ na primeira integral:

$$S_n(x) = \int_0^L D_n(x+t)f(-t)dt + \int_0^L D_n(x-t)f(t)dt. \quad (3.172)$$

Agora, usando a paridade de D_n : $D_n(x+t) = D_n(-x-t)$ e $D_n(x-t) = D_n(t-x)$.

Pela periodicidade de D_n : $D_n(x+t) = D_n(x+t+2L)$ e $D_n(x-t) = D_n(x-t+2L)$.

Na verdade, a forma mais simples é:

$$S_n(x) = \int_{-L}^L D_n(x-y)f(y)dy. \quad (3.173)$$

Fazendo $u = x - y$, $dy = -du$:

$$S_n(x) = \int_{x+L}^{x-L} D_n(u)f(x-u)(-du) = \int_{x-L}^{x+L} D_n(u)f(x-u)du. \quad (3.174)$$

Como D_n e f são periódicas de período $2L$:

$$S_n(x) = \int_{-L}^L D_n(u)f(x-u)du. \quad (3.175)$$

Agora, separando a integral:

$$S_n(x) = \int_{-L}^0 D_n(u)f(x-u)du + \int_0^L D_n(u)f(x-u)du. \quad (3.176)$$

Na primeira integral, fazendo $u = -t$:

$$S_n(x) = \int_0^L D_n(-t)f(x+t)dt + \int_0^L D_n(t)f(x-t)dt. \quad (3.177)$$

Como D_n é par:

$$S_n(x) = \int_0^L D_n(t)[f(x+t) + f(x-t)]dt. \quad (3.178)$$

□

3.5.2 O Teste de Dini

O Teste de Dini fornece uma condição suficiente para a convergência da série de Fourier em um ponto.

Teorema 3.23 (Teste de Dini). *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período $2L$ e L^1 em $[-L, L]$. Fixado $x \in [-L, L]$, suponha que existam $f(x+0)$ e $f(x-0)$ (os limites laterais) e que exista $\eta > 0$ tal que*

$$\int_0^\eta \frac{|g(x, t)|}{t} dt < \infty, \quad (3.179)$$

onde

$$g(x, t) = f(x+t) + f(x-t) - f(x+0) - f(x-0). \quad (3.180)$$

Então, $S_n(x) \rightarrow \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ quando $n \rightarrow \infty$.

Demonstração. Precisamos mostrar que

$$e_n(x) = S_n(x) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \rightarrow 0. \quad (3.181)$$

Usando a representação integral de S_n e o fato de que $\int_0^L D_n(t) dt = \frac{1}{2}$:

$$e_n(x) = \int_0^L D_n(t) [f(x+t) + f(x-t)] dt - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \quad (3.182)$$

$$= \int_0^L D_n(t) [f(x+t) + f(x-t) - f(x+0) - f(x-0)] dt \quad (3.183)$$

$$= \int_0^L D_n(t) g(x, t) dt. \quad (3.184)$$

Para $0 < t \leq L$, usando a forma do núcleo de Dirichlet:

$$D_n(t) = \frac{1}{2L} \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})\frac{\pi t}{L}\right)}{\sin\left(\frac{\pi t}{2L}\right)}. \quad (3.185)$$

Como $|\sin \theta| \leq 1$ e $\frac{\pi t}{2L} \leq \frac{\pi}{2}$ para $t \leq L$, temos:

$$|tD_n(t)| \leq \frac{t}{2L \sin\left(\frac{\pi t}{2L}\right)} \leq C, \quad (3.186)$$

onde C é uma constante (pois $\frac{\theta}{\sin \theta}$ é limitado em $[0, \pi/2]$).

Dado $\epsilon > 0$, pela condição de Dini, existe $\delta > 0$ tal que

$$\int_0^\delta \frac{|g(x, t)|}{t} dt < \frac{\epsilon}{2C}. \quad (3.187)$$

Então:

$$\left| \int_0^\delta D_n(t)g(x,t)dt \right| \leq \int_0^\delta |D_n(t)||g(x,t)|dt \quad (3.188)$$

$$\leq C \int_0^\delta \frac{|g(x,t)|}{t} dt < \frac{\epsilon}{2}. \quad (3.189)$$

Para a integral de δ a L , definimos:

$$h(t) = \frac{g(x,t)}{2L \sin\left(\frac{\pi t}{2L}\right)}, \quad t \in [\delta, L]. \quad (3.190)$$

Como g é integrável e o denominador não se anula em $[\delta, L]$, h é integrável. Pelo Lema de Riemann-Lebesgue (apresentado no Capítulo 2):

$$\int_\delta^L \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{L}\right) h(t)dt \rightarrow 0. \quad (3.191)$$

Portanto, para n suficientemente grande:

$$\left| \int_\delta^L D_n(t)g(x,t)dt \right| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (3.192)$$

Assim, $|e_n(x)| < \epsilon$ para n suficientemente grande, o que prova o teorema. $\square$

Exemplo 3.24 (Aplicação do Teste de Dini). Considere $f(x) = |x|$ em $[-L, L]$, estendida periodicamente. Em $x = 0$, $f(0+) = f(0-) = 0$, e $g(0,t) = f(t) + f(-t) = t + t = 2t$. Então:

$$\int_0^\eta \frac{|g(0,t)|}{t} dt = \int_0^\eta 2 dt = 2\eta < \infty. \quad (3.193)$$

Portanto, a série de Fourier converge para $f(0) = 0$.

Exemplo 3.25 (Teste de Dini Não Aplicável). Considere $f(x) = \frac{1}{\log|x|}$ perto de $x = 0$. Então:

$$\int_0^\eta \frac{|f(t)|}{t} dt \approx \int_0^\eta \frac{1}{t|\log t|} dt = \infty. \quad (3.194)$$

O Teste de Dini não pode ser aplicado, embora a série de Fourier possa convergir (por outros critérios).

3.5.3 O Teste de Jordan

O Teste de Jordan fornece outra condição suficiente para a convergência, baseada na variação limitada da função.

Definição 3.26 (Variação Limitada). Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é de **variação limitada** se existe $M > 0$ tal que, para toda partição $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$,

$$\sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})| \leq M. \quad (3.195)$$

Teorema 3.27 (Teste de Jordan). *Seja f uma função periódica de período $2L$ e de variação limitada em $[-L, L]$. Então, sua série de Fourier converge para $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ em todo ponto x .*

Esboço da Demonstração. Se f é de variação limitada, pode ser escrita como diferença de duas funções monótonas não decrescentes: $f = f_1 - f_2$. Para funções monótonas, a condição de Dini é satisfeita. Portanto, a série de Fourier converge para a média dos limites laterais. $\square$

Exemplo 3.28 (Aplicação do Teste de Jordan). A função $f(x) = x$ em $[-L, L]$ é de variação limitada, pois:

$$\sum_{j=1}^n |x_j - x_{j-1}| = L - (-L) = 2L. \quad (3.196)$$

Portanto, a série de Fourier converge para $f(x)$ em todos os pontos de continuidade, e para $\frac{x+0+x-0}{2} = x$ em todo ponto, o que confirma que a série converge para f em toda parte.

Exemplo 3.29 (Comparação: Dini vs Jordan). Considere $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$ perto de $x = 0$. Esta função não é de variação limitada, mas satisfaz o Teste de Dini? Verificamos:

$$\int_0^\eta \frac{|f(t)|}{t} dt = \int_0^\eta \frac{1}{t\sqrt{t}} dt = \int_0^\eta t^{-3/2} dt = \infty. \quad (3.197)$$

Portanto, nenhum dos dois testes se aplica. De fato, a série de Fourier desta função diverge em $x = 0$.

3.6 Convergência Uniforme da Série de Fourier

A convergência uniforme é mais forte que a convergência pontual e é necessária para poder integrar a série termo a termo.

Teorema 3.30 (Convergência Uniforme). *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período $2L$, contínua, com derivada f' de quadrado integrável em $[-L, L]$. Então, a série de Fourier de f converge uniformemente para f em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Precisamos mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$ converge. Pelo Teste de Weierstrass (demonstrado no chapter 2), isso implica convergência uniforme.

Das estimativas para os coeficientes em termos de f' :

$$a_n = -\frac{L}{n\pi} b'_n, \quad b_n = \frac{L}{n\pi} a'_n, \quad (3.198)$$

onde a'_n e b'_n são os coeficientes de Fourier de f' .

Então:

$$\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|) = \frac{L}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (|a'_k| + |b'_k|). \quad (3.199)$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (|a'_k| + |b'_k|) \leq \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n (|a'_k| + |b'_k|)^2 \right)^{1/2}. \quad (3.200)$$

Sabemos que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$.

Além disso, $(|a'_k| + |b'_k|)^2 \leq 2(|a'_k|^2 + |b'_k|^2)$, pois $0 \leq (|a| - |b|)^2 = |a|^2 - 2|a||b| + |b|^2 \Rightarrow 2|a||b| \leq |a|^2 + |b|^2$. Daí $(|a| + |b|)^2 = |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \leq 2(|a|^2 + |b|^2)$. Pela desigualdade de Bessel:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a'_k|^2 + |b'_k|^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f'(x)|^2 dx < \infty. \quad (3.201)$$

Portanto, $\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) < \infty$, o que garante a convergência uniforme. $\square$

Exemplo 3.31 (Convergência Uniforme). A função triangular $f(x) = L - |x|$ em $[-L, L]$ é contínua, e sua derivada $f'(x) = -\text{sgn}(x)$ é de quadrado integrável. Portanto, sua série de Fourier converge uniformemente para f em $\mathbb{R}$.

Demonstração. A função triangular é definida em $[-L, L]$ por:

$$f(x) = L - |x| = \begin{cases} L + x, & \text{se } -L \leq x \leq 0, \\ L - x, & \text{se } 0 \leq x \leq L. \end{cases} \quad (3.202)$$

Para $x \neq 0$, a derivada é:

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } -L < x < 0, \\ -1, & \text{se } 0 < x < L. \end{cases} \quad (3.203)$$

Podemos escrever de forma compacta:

$$f'(x) = -\text{sgn}(x), \quad x \neq 0, \quad (3.204)$$

onde $\text{sgn}(x)$ é a função sinal:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases} \quad (3.205)$$

No ponto $x = 0$, a derivada não existe (há um “bico” ou cúspide). No entanto, para a teoria de Fourier, isso não é um problema, pois precisamos apenas da derivada em quase toda parte.

Calculamos a integral do quadrado de f' :

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L |f'(x)|^2 dx &= \int_{-L}^0 1^2 dx + \int_0^L (-1)^2 dx \\ &= \int_{-L}^0 1 dx + \int_0^L 1 dx \\ &= L + L = 2L < \infty. \end{aligned} \quad (3.206)$$

Portanto, $f' \in L^2[-L, L]$. □

3.6.1 O Fenômeno de Gibbs

O fenômeno de Gibbs é um comportamento peculiar da série de Fourier próximo a uma descontinuidade: a soma parcial da série ultrapassa o valor da função em cerca de 9% do salto.

Observação 3.32 (Fenômeno de Gibbs). Seja f uma função com uma descontinuidade de salto em $x = x_0$. Então, a soma parcial $S_n(x)$ da série de Fourier de f apresenta uma oscilação próxima a x_0 que não desaparece quando $n \rightarrow \infty$. Especificamente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [x_0, x_0 + \epsilon]} S_n(x) = f(x_0+) + 0,0894 \cdot (f(x_0+) - f(x_0-)). \quad (3.207)$$

Exemplo 3.33 (Fenômeno de Gibbs para a Função Dente de Serra). Considere a função dente de serra definida por

$$f(x) = x, \quad -L < x < L,$$

e estendida periodicamente com período $2L$. Embora a função seja contínua no intervalo $(-L, L)$, sua extensão periódica apresenta uma descontinuidade em cada extremidade do intervalo fundamental. Em particular,

$$\lim_{x \rightarrow L^-} f(x) = L, \quad \text{enquanto} \quad \lim_{x \rightarrow L^+} f(x) = -L.$$

Assim, o salto de descontinuidade é

$$\Delta = f(L^-) - f(L^+) = L - (-L) = 2L.$$

Como f é ímpar, sua série de Fourier contém apenas senos:

$$f(x) \sim 2L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

A soma parcial de ordem N é dada por

$$S_N(x) = 2L \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

À medida que N aumenta, $S_N(x)$ aproxima-se de $f(x)$ em todos os pontos de continuidade. Entretanto, nas vizinhanças da descontinuidade em $x = L$, surge uma oscilação característica denominada **fenômeno de Gibbs**.

Um resultado clássico afirma que, mesmo quando $N \rightarrow \infty$, a maior ultrapassagem da soma parcial não desaparece. O excesso tende aproximadamente a $0,08949\Delta$, onde Δ é a altura do salto.

Como, neste exemplo, $\Delta = 2L$, segue que a ultrapassagem máxima é aproximadamente

$$0,08949(2L) = 0,17898L.$$

Portanto, o valor máximo atingido pelas somas parciais é aproximadamente

$$L + 0,17898L = 1,17898L \approx 1,179L.$$

De modo análogo, ocorre uma ultrapassagem inferior de mesma magnitude no outro lado da descontinuidade, atingindo aproximadamente $-1,179L$.

Esse comportamento persiste independentemente do número de termos da série: aumentar N reduz apenas a largura da região oscilatória, mas não sua amplitude relativa, que permanece próxima de 8,949% da altura do salto.

3.7 Núcleos de Dirac e o Teorema de Fejér

Em algumas aplicações é necessário tratar fenômenos de natureza impulsiva. Os sistemas mecânicos, por exemplo, estão frequentemente sujeitos a ações de forças externas de grande amplitude que agem apenas por um curto período de tempo. Como é o caso de uma bola de futebol quando chutada; as cordas de um piano quando atingidas pelo martelo; ou uma bola de tênis quando atingida pela raquete etc.

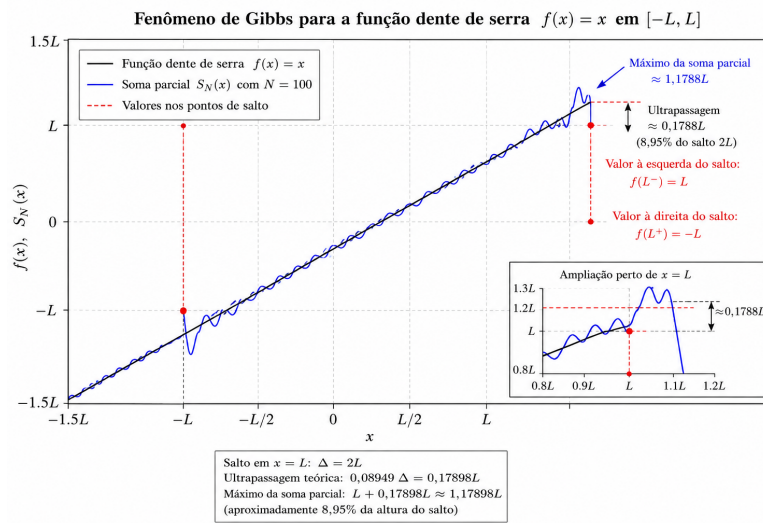


Figura 3.2: Fenômeno de Gibbs para a função dente de serra. A soma parcial da série de Fourier com $N = 100$ apresenta uma ultrapassagem próxima a 17,9% da amplitude L , equivalente a aproximadamente 8,95% da altura do salto $2L$.

A função **impulso unitário**, também chamada de função **Delta de Dirac** traz na sua definição as seguintes propriedades.

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq 0 \\ +\infty, & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1.$$

Observe que $\delta(x)$ não é uma função no sentido usual, pois se fosse, a cada $x \in \mathbb{R}$ deveria associar um número real e não $+\infty$. Além disso, sendo $\delta(x) = 0$ para todo $x \neq 0$ deveríamos ter $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 0$ em vez de $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$. Por estas propriedades um tanto estranhas para uma função no sentido comum, segundo Figueiredo (2014), a Delta de Dirac encontrou inicialmente severas restrições por parte dos matemáticos, embora produzisse resultados corretos. De modo geral, como afirma o autor, uma propriedade importante da função Delta de Dirac, que em alguns textos da literatura é chamada de **propriedade de separação**, visto que tem o efeito de separar o valor $f(x_0)$ dos demais valores de uma determinada função f , é a seguinte: se uma função real contínua $f(x)$ se anula fora de um conjunto limitado, então vale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0). \quad (3.208)$$

De acordo com Bassanezi (1988), no que se refere a expressão (3.208), Dirac raciocinou da seguinte forma: sendo $\delta(x) = 0$, para todo $x \neq 0$, então os limites de integração poderiam ser substituídos por $-\epsilon$ e ϵ , para um $\epsilon > 0$ convenientemente pequeno. Além disso, sendo $f(x)$ contínua em $x = 0$, seus valores no intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$ são aproxima-

mente iguais a $f(0)$. Entretanto, (3.208) também foi alvo de muitas críticas por parte dos matemáticos. Porém, tais controvérsias sobre a função Delta de Dirac foram formalizadas de maneira rigorosa pelo matemático francês Laurent Schwartz em seu trabalho *La Théorie de Distribution*.

Objetivamos agora, justificar a expressão (3.208), e para isso, consideraremos a sucessão de funções contínuas $k_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com as características seguintes:

- N_1 : $k_n(x) \geq 0$.
- N_2 : $\int_{-\infty}^{\infty} k_n(x) dx = 1$.
- N_3 : Dados $\epsilon > 0$ e $\eta > 0$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ vale

$$\int_{|x|>\eta} k_n(x) dx < \epsilon.$$

Como mostra a figura abaixo, temos uma sucessão de funções $k_n(x)$, cujos gráficos tendem a se acumularem próximo ao eixo dos y , desde que se tome n suficientemente grande, o que intuitivamente sugere que as funções $k_n(x)$ se aproximam da função Delta de Dirac. E isto nos direciona a escrever (3.208) como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_n(x) f(x) dx. \quad (3.209)$$

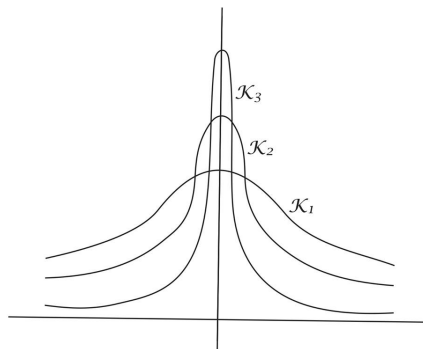


Figura 3.3:

O teorema seguinte contém a propriedade básica dos núcleos de Dirac. Além disso, nos ajudará a justificar a veracidade de (3.209). Antes porém, apresentaremos as seguintes definições.

Definição 3.34. Uma sucessão de funções $k_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seccionalmente contínuas e satisfazendo as propriedades N_1 , N_2 e N_3 descritas acima, é chamada uma **sucessão de núcleos de Dirac**.

Definição 3.35 (Produto Convolução). Sejam as funções $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, absolutamente integráveis e uma delas limitada. Então o **produto convolução** de f por g ,

denotado por $f * g$ é definido como sendo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-s)g(s)ds.$$

O produto convolução tem ainda a seguinte propriedade: $f * g = g * f$, isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-s)g(s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(x-s)ds \quad (3.210)$$

Demonstração. De fato, fazendo $u = x - s$ e $du = -ds$, e observado os limites de integração, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-s)g(s)ds = - \int_{\infty}^{-\infty} f(u)g(x-u)du = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)du,$$

donde segue o resultado. $\square$

Teorema 3.36. *Seja (k_n) uma sucessão de núcleos de Dirac e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente contínua e limitada. Então*

(i) *As funções f_n abaixo estão bem definidas*

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k_n(x-s)f(s)ds.$$

(ii) *Supondo que cada k_n seja uma função par, para cada x , temos*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

(iii) *A sucessão (f_n) converge uniformemente para f , em todo intervalo fechado e limitado I que não contém pontos de descontinuidade de f .*

Demonstração. (i) Sendo f seccionalmente contínua e limitada, digamos $|f(s)| \leq M$, $\forall s \in \mathbb{R}$ e para algum $M > 0$, como $k_n(y) \geq 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$, usando N_2 , temos

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} k_n(x-s)f(s)ds \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |k_n(x-s)||f(s)|ds \leq M \int_{-\infty}^{\infty} k_n(y)dy = M.$$

(ii) Com o intuito de simplificar a escrita denotaremos por $f^*(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. Então para demonstrar este item, devemos mostrar que $|f_n(x) - f^*(x)| < \epsilon$, $\forall \epsilon > 0$. Usando a comutatividade da convolução e a propriedade N_2 do núcleo de Dirac, ou seja,

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k_n(s)f(x-s)dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} k_n(s)ds = 1,$$

temos

$$\begin{aligned}
 f_n(x) - f^*(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} k_n(s)f(x-s)ds - \int_{-\infty}^{\infty} k_n(s)f^*(x)ds \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} k_n(s)[f(x-s) - f^*(x)]ds \\
 &= \int_{|s|>\delta} k_n(s)[f(x-s) - f^*(x)]ds + \int_{|s|\leq\delta} k_n(s)[f(x-s) - f^*(x)]ds \\
 &= I_1 + I_2.
 \end{aligned}$$

Onde $\delta > 0$ será escolhido convenientemente mais a diante. Agora, lembrando que k_n é par e qual é a expressão de f^* , isto é,

$$k_n(-s) = k_n(s), \quad \int_{-\delta}^{\delta} k_n(s)ds = 2 \int_0^{\delta} k_n(s)ds \quad \text{e} \quad f^*(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

vem

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_{|s|\leq\delta} k_n(s)[f(x-s) - f^*(x)]ds = \int_{-\delta}^{\delta} k_n(s)f(x-s)ds - \int_{-\delta}^{\delta} k_n(s)f^*(x)ds \\
 &= \int_{-\delta}^0 k_n(s)f(x-s)ds + \int_0^{\delta} k_n(s)f(x-s)ds - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} 2 \int_0^{\delta} k_n(s)ds \\
 &= - \int_{\delta}^0 k_n(-s)f(x+s)ds + \int_0^{\delta} k_n(s)f(x-s)ds - \int_0^{\delta} k_n(s)[f(x+0) + f(x-0)]ds \\
 &= \int_0^{\delta} k_n(s)[f(x+s) + f(x-s)]ds - \int_0^{\delta} k_n(s)[f(x+0) + f(x-0)]ds \\
 &= \int_0^{\delta} k_n(s)[f(x+s) - f(x+0)]ds + \int_0^{\delta} k_n(s)[f(x-s) - f(x-0)]ds.
 \end{aligned}$$

Como f é limitada, digamos $|f(s)| \leq M$, $\forall s \in \mathbb{R}$, seccionalmente contínua, isto é, existem os limites laterais, tem-se que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para $0 < s < \delta$, vale

$$|f(x+s) - f(x+0)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad |f(x-s) - f(x-0)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Logo, usando a propriedade N_2 ,

$$\begin{aligned}
 |I_2| &\leq \int_0^{\delta} k_n(s)|f(x+s) - f(x+0)|ds + \int_0^{\delta} k_n(s)|f(x-s) - f(x-0)|ds \\
 &\leq \frac{\epsilon}{2} \int_0^{\delta} k_n(s)ds + \frac{\epsilon}{2} \int_0^{\delta} k_n(s)ds \leq 2 \cdot \frac{\epsilon}{2} \int_0^{\delta} k_n(s)ds \\
 &\leq \frac{\epsilon}{2} \int_{-\infty}^{\infty} k_n(s)ds = \frac{\epsilon}{2}.
 \end{aligned}$$

Agora, usando o δ que acabamos de determinar acima, vamos majorar I_1 , observando que

também vale $|f^*(s)| \leq M, \forall s \in \mathbb{R}$. Além disso, da propriedade N_3 do núcleo de Dirac, segue que existe n_0 tal que para $n \geq n_0$, temos $\int_{|s|>\delta} k_n(s)ds < \frac{\epsilon}{4M}$, daí

$$|I_1| \leq \int_{|s|>\delta} k_n(s)|f(x-s) - f^*(x)|ds \leq 2M \int_{|s|>\delta} k_n(s)ds \leq 2M \frac{\epsilon}{4M} = \frac{\epsilon}{2}.$$

Portanto, dado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que para $n \geq n_0$

$$|f_n(x) - f^*(x)| < |I_1| + |I_2| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

o que prova (ii).

Por fim, para demonstrar (iii), do mesmo modo como fizemos no item (ii), vamos decompor a expressão

$$f_n(x) - f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k_n(s)[f(x-s) - f(x)]ds$$

em duas partes, visto que $f^*(x) = f(x)$ nos pontos onde f é contínua. Inicialmente, sejam os números a e b os extremos do intervalo I onde f é contínua, ou seja, $I = [a, b]$. Agora, tomemos $\eta > 0$ tal que o intervalo fechado $I' = [a - \eta, b + \eta]$ também não contenha pontos de descontinuidade de f . Com isso, segue-se que f é uniformemente contínua em I' . Logo dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para $x_1, x_2 \in I'$ e $|x_1 - x_2| < \delta$ temos $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\epsilon}{2}$. Assim,

$$f_n(x) - f(x) = \int_{|s|>\delta} k_n(s)[f(x-s) - f(x)]ds + \int_{|s|\leq\delta} k_n(s)[f(x-s) - f(x)]ds.$$

Como f é limitada por M , temos

$$|f_n(x) - f(x)| \leq 2M \int_{|s|>\delta} k_n(s)ds + \int_{|s|\leq\delta} k_n(s)|f(x-s) - f(x)|ds = 2MJ_1 + J_2.$$

Daí, tomando $\delta < \eta$, vemos que quando x varia em I , então $x - s$ varia em I' , assim, usando a continuidade uniforme de f neste intervalo, temos

$$J_2 = \int_{|s|\leq\delta} k_n(s)|f(x-s) - f(x)|ds \leq \frac{\epsilon}{2} \int_{|s|\leq\delta} k_n(s)ds \leq \frac{\epsilon}{2} \int_{-\infty}^{\infty} k_n(s)ds = \frac{\epsilon}{2},$$

onde no último passo usamos N_2 . Agora, segue de N_3 que para n suficientemente grande vale $\int_{|s|>\delta} k_n(s)ds < \frac{\epsilon}{4M}$, então

$$2MJ_1 = 2M \int_{|s|>\delta} k_n(s)ds < 2M \frac{\epsilon}{4M} = \frac{\epsilon}{2}.$$

Portanto, dado $\epsilon > 0$, e o correspondente $\delta > 0$, existe n_0 tal que para todo $x \in I$ e para

todo $n \geq n_0$ vale

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

O que nos mostra a convergência uniforme de (f_n) em I . $\square$

Com isso, observando agora a função Delta de Dirac e a expressão (3.208), pelo que acabamos de provar, sendo f contínua e limitada, se os núcleos forem também funções pares temos

$$f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_n(-s)f(s)ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_n(s)f(s)ds,$$

que é exatamente a expressão (3.209).

O Teorema de Fejér introduz um novo tipo de convergência: a convergência de Cesàro. Este teorema é importante porque a convergência de Cesàro ocorre sob condições mais gerais que a convergência pontual da série de Fourier.

3.7.1 Núcleo de Fejér

O Teorema de Fejér, o qual enunciaremos logo mais, nos traz informações sobre a convergência da série de Fourier de uma determinada função f , nos seus pontos de descontinuidade. Além disso, tal teorema aborda ainda, um outro conceito de convergência pouco conhecido nos estudos iniciais de Análise. Trata-se das séries **Cesàro-somáveis** que são séries convergentes no sentido de que as médias aritméticas das reduzidas convergem. Por exemplo, a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$, que sabemos ser divergente, no contexto usual de convergência, de acordo com Figueredo (2014), Euler e outros matemáticos, observaram que a média aritmética da sucessão de reduzidas converge para $\frac{1}{2}$. Para ver isto, observamos as reduzidas desta série, que são: $D_1 = 1, D_2 = 0, D_3 = 1, D_4 = 0, D_5 = 1, D_6 = 0, \dots$ e as médias aritméticas

$$\sigma_n = \frac{D_1 + \dots + D_n}{n}, \quad \sigma_{2n-1} = \frac{n}{2n-1} \text{ e } \sigma_{2n} = \frac{n}{2n}$$

onde certamente a sucessão (σ_n) converge para $\frac{1}{2}$. Ainda segundo o autor, Fejér estudou algumas propriedades importantes da relação entre a somabilidade à Cesàro e a série de Fourier. Vejamos algumas destas propriedades.

Seja a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seccionalmente contínua e periódica de período $2L$, e, seja $S_n(x)$ a sua reduzida de ordem n , isto é,

$$S_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n \left[a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right].$$

Denotemos por σ_{n+1} a média aritmética de $S_0, S_1, \dots, S_n$, ou seja

$$\sigma_{n+1} = \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_n}{n+1} = \frac{1}{n+1}(S_0 + S_1 + \dots + S_n).$$

Agora, usando a expressão do núcleo de Dirichlet, para $x \neq 0, \pm 2L, \pm 4L, \dots$

$$D_n(x) = \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi x}{L} \right) = \frac{1}{2L} \frac{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi x}{L} \right]}{\sin \frac{\pi x}{2L}},$$

onde também podemos escrever

$$S_n(x) = \int_{-L}^L D_n(x-y) f(y) dy.$$

Assim, é possível representar as médias aritméticas na forma de uma integral

$$\sigma_{n+1}(x) = \int_{-L}^L F_{n+1}(x-y) f(y) dy \quad (3.211)$$

em que

$$F_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(x),$$

é chamado **núcleo de Fejér**.

Definição 3.37 (Núcleo de Fejér). O **núcleo de Fejér** de ordem n é definido como a média aritmética dos núcleos de Dirichlet D_k :

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x). \quad (3.212)$$

Proposição 3.38 (Propriedades do Núcleo de Fejér). *O núcleo de Fejér possui as seguintes propriedades:*

1. F_n é par, contínua e periódica de período $2L$;
2. $\int_{-L}^L F_n(x) dx = 1$;
3. $F_n(0) = \frac{n}{2L}$;
4. Para $x \neq 0, \pm 2L, \pm 4L, \dots$,

$$F_n(x) = \frac{1}{2Ln} \left[\frac{\sin \left(\frac{n\pi x}{2L} \right)}{\sin \left(\frac{\pi x}{2L} \right)} \right]^2 \geq 0. \quad (3.213)$$

Demonstração. Como o núcleo de Dirichlet é uma função par, periódica de período $2L$ e contínua, segue-se imediatamente da definição que F_{n+1} possui tais propriedades. Ademais,

$$\int_{-L}^L F_n(x) dx = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-L}^L D_k(x) dx = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1 = 1. \quad (3.214)$$

Por outro lado, pelo que vimos acima sobre $D_k(x)$, podemos escrever

$$F_{n+1}(x) = \frac{1}{2L(n+1)} \sum_{k=0}^n \frac{\operatorname{sen} \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi x}{L} \right]}{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{2L}}.$$

Portanto, seguindo um raciocínio semelhante àquele da demonstração da forma complexa da série de Fourier, procuremos uma representação para

$$A(\beta) = \sum_{k=0}^n \operatorname{sen} \left(k + \frac{1}{2} \right) \beta.$$

Agora, usando mais uma vez a formula de Euler $e^{ik\beta} = \cos k\beta + i \operatorname{sen} k\beta$, observamos que para $\beta \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$, $A(\beta)$ é a parte imaginária da expressão

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n e^{i(k+\frac{1}{2})\beta} &= e^{\frac{i\beta}{2}} \sum_{k=0}^n e^{ik\beta} = e^{\frac{i\beta}{2}} \frac{1 - e^{i(n+1)\beta}}{1 - e^{i\beta}} = \frac{1}{e^{-\frac{i\beta}{2}}} \cdot \frac{1 - e^{i(n+1)\beta}}{1 - e^{i\beta}} = \\ &= \frac{1 - e^{i(n+1)\beta}}{e^{-\frac{i\beta}{2}} - e^{\frac{i\beta}{2}}} = \frac{1 - \cos(n+1)\beta - i \operatorname{sen}(n+1)\beta}{-2i \operatorname{sen} \frac{\beta}{2}} = \\ &= \frac{i[1 - \cos(n+1)\beta]}{2 \operatorname{sen} \frac{\beta}{2}} + \frac{\operatorname{sen}(n+1)\beta}{2 \operatorname{sen} \frac{\beta}{2}}. \end{aligned}$$

Assim, usando a identidade trigonométrica $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$, temos

$$A(\beta) = \frac{[1 - \cos(n+1)\beta]}{2 \operatorname{sen} \frac{\beta}{2}} = \frac{[1 - \cos \frac{2(n+1)\beta}{2}]}{2 \operatorname{sen} \frac{\beta}{2}} = \frac{2 \operatorname{sen}^2 \left[\left(\frac{n+1}{2} \right) \beta \right]}{2 \operatorname{sen} \frac{\beta}{2}}.$$

Fazendo $\beta = \frac{\pi x}{L}$, obtemos

$$F_{n+1}(x) = \frac{1}{2L(n+1)} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{2L}} A\left(\frac{\pi x}{L}\right) = \frac{1}{2L(n+1)} \left[\frac{\operatorname{sen} \frac{(n+1)\pi x}{2L}}{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{2L}} \right]^2.$$

Finalmente

$$\begin{aligned} F_{n+1}(0) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(0) = \frac{1}{L(n+1)} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^k \cos \frac{j\pi 0}{L} \right) \\ &= \frac{1}{L(n+1)} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2} + k \right) = \frac{(n+1)^2}{2L(n+1)} = \frac{(n+1)}{2L}. \end{aligned}$$

□

3.7.2 O Teorema de Fejér

Teorema 3.39 (Teorema de Fejér). *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente contínua e periódica de período $2L$. Seja $\sigma_n(x)$ a média de Cesàro das somas parciais da série de Fourier:*

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(x). \quad (3.215)$$

Então:

1. Para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}; \quad (3.216)$$

2. A convergência é uniforme em todo intervalo fechado que não contenha pontos de descontinuidade de f .

Demonstração. Usando expressão (3.211), e, pela comutatividade da convolução podemos escrever

$$\sigma_{n+1}(x) = \int_{-L}^L F_{n+1}(y) f(x-y) dy.$$

Definindo as funções

$$\phi_{n+1}(x) = \begin{cases} F_{n+1}(x), & \text{se } -L \leq x \leq L, \\ 0, & \text{se } |x| > L \end{cases} \quad (3.217)$$

temos,

$$\sigma_{n+1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{n+1}(y) f(x-y) dy. \quad (3.218)$$

Se provarmos que (ϕ_{n+1}) é uma sucessão de núcleos de Dirac, podemos utilizar o Teorema 3.36 e concluir imediatamente a demonstração deste resultado. Para tanto, verifiquemos as propriedades N_1 , N_2 e N_3 . N_1 segue imediatamente do Lema anterior. Para verificar N_2 , observemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{n+1}(x) dx = \int_{-L}^L F_{n+1}(x) dx = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \int_{-L}^L D_k(x) dx = \frac{1}{n+1} (n+1) = 1$$

visto que

$$\int_{-L}^L D_k(x) dx = 1.$$

Por fim, dados $\epsilon, \delta > 0$, como $\phi_{n+1}(x) = 0$ para $|x| > L$, temos

$$\int_{|x|>\delta} \phi_{n+1}(x) dx = 2 \int_{\delta}^L F_{n+1}(x) dx = \frac{2}{2L(n+1)} \int_{\delta}^L \left[\frac{\sin \frac{(n+1)\pi x}{2L}}{\sin \frac{\pi x}{2L}} \right]^2 dx.$$

Como para $x \in [\delta, L]$ vale

$$\left[\frac{\sin \frac{(n+1)\pi x}{2L}}{\sin \frac{\pi x}{2L}} \right]^2 \leq \frac{1}{\left(\sin \frac{\pi \delta}{2L} \right)^2},$$

tem-se

$$\int_{|x|>\delta} \phi_{n+1}(x) dx \leq \frac{1}{L(n+1)} \cdot \frac{1}{\left(\sin \frac{\pi \delta}{2L} \right)^2} \int_{\delta}^L dx \leq \frac{L-\delta}{L(n+1) \left(\sin \frac{\pi \delta}{2L} \right)^2}.$$

Logo, para n suficientemente grande a propriedade N_3 se verifica. Donde pela aplicação imediata do Teorema 3.36 segue o resultado. $\square$

Exemplo 3.40 (Aplicação do Teorema de Fejér). Considere novamente a função dente de serra definida por $f(x) = x$, $-L \leq x \leq L$, estendida periodicamente para toda a reta real com período $2L$. As somas parciais da série de Fourier são definidas por

$$S_N(x) = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right).$$

As **médias de Cesàro** (ou médias de Fejér) são definidas como a média aritmética das primeiras N somas parciais:

$$\sigma_N(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \cdots + S_{N-1}(x)}{N}, \quad \text{onde } S_0(x) = 0.$$

Equivalentemente, podemos escrever

$$\sigma_N(x) = \sum_{n=1}^{N-1} \left(1 - \frac{n}{N} \right) \frac{2L(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right).$$

O Teorema de Fejér estabelece que, para qualquer função contínua por partes f com período $2L$, as médias de Cesàro $\sigma_N(x)$ convergem para $f(x)$ em todo ponto de continuidade, e nos pontos de descontinuidade convergem para a média dos limites laterais:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

Além disso, a convergência é uniforme em qualquer intervalo fechado que não contenha pontos de descontinuidade.

Para a função $f(x) = x$ em $[-L, L]$:

1. Pontos de continuidade: Para $x \in (-L, L)$, temos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N(x) = f(x) = x.$$

A convergência é uniforme em qualquer intervalo $[a, b] \subset (-L, L)$, ou seja, em qualquer

intervalo fechado que não contenha as extremidades $\pm L$.

2. Pontos de descontinuidade: Nos pontos $x = \pm L$ (e seus equivalentes periódicos), a função tem salto. Por exemplo, em $x = L$:

$$f(L^-) = L \quad \text{e} \quad f(L^+) = -L.$$

Pelo Teorema de Fejér, as médias de Cesàro convergem para a média dos limites laterais:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N(L) = \frac{f(L^+) + f(L^-)}{2} = \frac{-L + L}{2} = 0.$$

Uma das grandes vantagens das médias de Fejér é que elas **não sofrem** com o fenômeno de Gibbs. Enquanto as somas parciais $S_N(x)$ oscilam e ultrapassam o valor da função próximo às descontinuidades (com overshoot de cerca de 9% do salto), as médias de Cesàro $\sigma_N(x)$ convergem suavemente, sem overshoot significativo.

A Figura 3.4 ilustra esse comportamento comparando as somas parciais $S_N(x)$ com as médias de Fejér $\sigma_N(x)$ para diferentes valores de N .

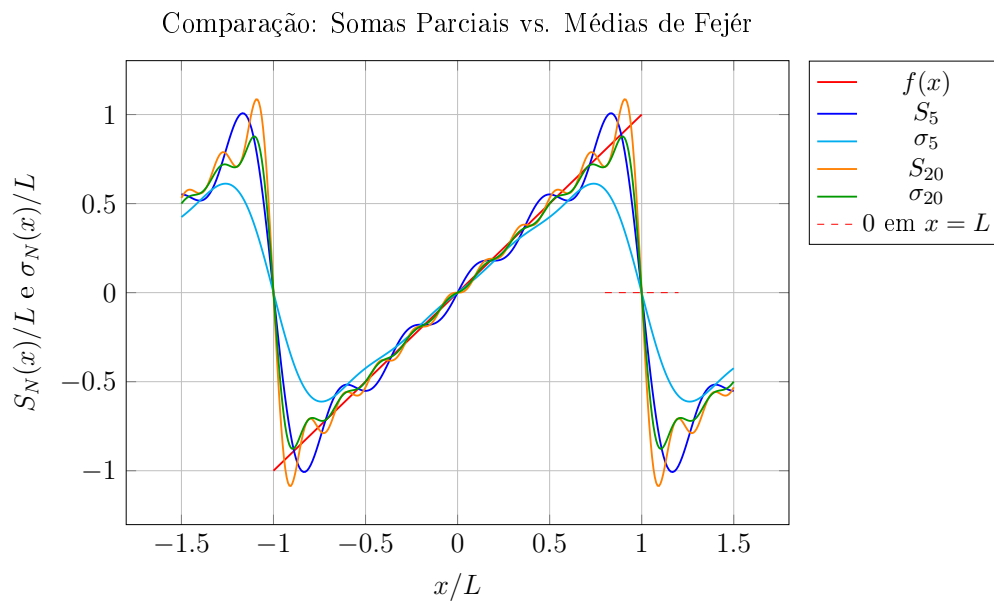


Figura 3.4: Comparação entre as somas parciais $S_N(x)$ e as médias de Fejér $\sigma_N(x)$ para a função dente de serra. Observe que as médias de Fejér convergem suavemente, sem o overshoot característico do fenômeno de Gibbs. Em $x = L$, as médias de Cesàro convergem para 0 (média dos limites laterais).

O Teorema de Fejér oferece uma alternativa poderosa ao estudo da convergência de séries de Fourier. Enquanto as somas parciais podem apresentar fenômenos indesejados (como o fenômeno de Gibbs), as médias de Cesàro proporcionam uma convergência mais

estável e uniforme, especialmente em aplicações práticas onde a suavidade da aproximação é desejável.

Este exemplo ilustra claramente a diferença fundamental entre a convergência pontual (somadas parciais) e a convergência no sentido de Cesàro (médias de Fejér), destacando a importância do Teorema de Fejér na teoria das séries de Fourier.

3.8 Identidade de Parseval

Vimos anteriormente que dada uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período $2L$, com f , $|f|$ e $|f|^2$ integráveis, podemos calcular e obter estimativas para os seus coeficientes de Fourier a_n e b_n . Além disso, o erro médio quadrático $E_n = \int_{-L}^L |S_n(x) - f(x)|^2 dx$ na aproximação de f pelas reduzidas $S_n(x)$ de sua série de Fourier, pode ser representado pela seguinte expressão

$$0 \leq E_n = -\frac{a_0^2 L}{2} - L \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) + \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx.$$

Se tomarmos o limite em E_n , quando $n \rightarrow \infty$, o que será que ocorre? Veremos a seguir que a partir de certas condições impostas a função f , $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = 0$ (também conhecido como limite em média), o que resultará na **Identidade de Parseval**.

A Identidade de Parseval é um resultado fundamental que relaciona a integral do quadrado da função com a soma dos quadrados de seus coeficientes de Fourier.

Antes de enunciarmos a Identidade de Parseval, apresentaremos dois importantes resultados que utilizaremos a seguir.

Proposição 3.41 (Desigualdade de Minkowski). *Sejam f e g , funções de quadrado integráveis no intervalo $[a, b]$. Então*

$$\left[\int_a^b |f(x) + g(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int_a^b |g(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Demonstração. Para demonstrar a desigualdade de Minkowski, utilizaremos a desigualdade de Cauchy-Schwarz como ferramenta principal. Como todos os termos são não negativos, é suficiente provar a desigualdade equivalente:

$$\int_a^b |f(x) + g(x)|^2 dx \leq (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2,$$

onde definimos $\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$.

Pela definição de módulo de número complexo, temos:

$$|f(x) + g(x)|^2 = (f(x) + g(x)) \overline{(f(x) + g(x))} = |f(x)|^2 + f(x) \overline{g(x)} + \overline{f(x)} g(x) + |g(x)|^2.$$

Observando que $f(x)\overline{g(x)} + \overline{f(x)}g(x) = 2\operatorname{Re}(f(x)\overline{g(x)})$, obtemos:

$$|f(x) + g(x)|^2 = |f(x)|^2 + |g(x)|^2 + 2\operatorname{Re}(f(x)\overline{g(x)}).$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz, sabemos que:

$$\left| \int_a^b f(x)\overline{g(x)} dx \right| \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Como $\operatorname{Re}(z) \leq |z|$ para todo número complexo z , temos:

$$\int_a^b \operatorname{Re}(f(x)\overline{g(x)}) dx = \operatorname{Re} \left(\int_a^b f(x)\overline{g(x)} dx \right) \leq \left| \int_a^b f(x)\overline{g(x)} dx \right| \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Obtemos

$$\int_a^b |f(x) + g(x)|^2 dx = \int_a^b |f(x)|^2 dx + \int_a^b |g(x)|^2 dx + 2 \int_a^b \operatorname{Re}(f(x)\overline{g(x)}) dx.$$

Logo,

$$\int_a^b |f(x) + g(x)|^2 dx \leq \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + 2\|f\|_2 \|g\|_2 = (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2.$$

Como todos os termos são não negativos, podemos extrair a raiz quadrada de ambos os lados substituindo a definição de $\|f\|_2$ e $\|g\|_2$, obtemos exatamente a desigualdade desejada:

$$\left[\int_a^b |f(x) + g(x)|^2 dx \right]^{1/2} \leq \left[\int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{1/2} + \left[\int_a^b |g(x)|^2 dx \right]^{1/2}.$$

□

Teorema 3.42 (Convergência em Média Quadrática). *Seja a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período $2L$ e de quadrado integrável no intervalo $[-L, L]$. Então a série de Fourier de f converge em média quadrática para f . Ou seja:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^L |S_n(x) - f(x)|^2 dx = 0. \quad (3.219)$$

Demonstração. Devemos mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = \int_{-L}^L |S_n(x) - f(x)|^2 dx = 0.$$

Para tanto, assim como já fizemos em outras demonstrações, dividiremos esta em duas partes:

Parte (1): Suponhamos f contínua. Então, segue do Teorema de Fejér que a sucessão (σ_n)

das médias aritméticas das reduzidas $S_n(x)$ converge uniformemente para f no intervalo $[-L, L]$, ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max |\sigma_n(x) - f(x)| = 0, \forall x \in [-L, L]. \quad (3.220)$$

Sendo f contínua no compacto $[-L, L]$, f é limitada neste intervalo, então

$$\int_{-L}^L |\sigma_n(x) - f(x)|^2 dx \leq 2L [\max |\sigma_n(x) - f(x)|^2], \forall x \in [-L, L].$$

Mas, $\sigma_n(x)$ é um polinômio trigonométrico de ordem n , e já vimos que o polinômio trigonométrico que melhor aproxima f é $S_n(x)$, com isso devemos ter

$$\int_{-L}^L |S_n(x) - f(x)|^2 dx \leq \int_{-L}^L |\sigma_n(x) - f(x)|^2 dx.$$

Assim

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{-L}^L |S_n(x) - f(x)|^2 dx &\leq \int_{-L}^L |\sigma_n(x) - f(x)|^2 dx \\ &\leq 2L [\max |\sigma_n(x) - f(x)|^2], \quad \forall x \in [-L, L]. \end{aligned}$$

Desse modo, tal majoração junto com (3.220), nos diz que tomando o limite temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^L |S_n(x) - f(x)|^2 dx = 0.$$

Parte (2): Para o caso geral, lembremos que de acordo com o Teorema 2.54, toda função f de quadrado integrável pode ser aproximada em média quadrática por funções contínuas ψ . Observamos também que se f for periódica de período $2L$, assim também será a função ψ , ou seja, dado $\epsilon > 0$, existe $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, contínua e periódica de período $2L$, satisfazendo

$$\int_{-L}^L |f(x) - \psi(x)|^2 dx < \frac{\epsilon}{4}. \quad (3.221)$$

Agora, sendo ψ contínua e considerando $\overline{S}_n(x)$ a reduzida de ordem n da sua série de Fourier, podemos utilizar a parte já demonstrada do teorema para concluir que existe n_0 tal que, para $n \geq n_0$ vale

$$\int_{-L}^L |\psi(x) - \overline{S}_n(x)|^2 dx < \frac{\epsilon}{4}. \quad (3.222)$$

Por outro lado, usando a desigualdade de Minkowski, para $n \geq n_0$ segue-se:

$$\begin{aligned} \left[\int_{-L}^L |f(x) - \overline{S}_n(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} &= \left[\int_{-L}^L |f(x) - \psi(x) + \psi(x) - \overline{S}_n(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left[\int_{-L}^L |f(x) - \psi(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int_{-L}^L |\psi(x) - \overline{S}_n(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \\ &< \left(\frac{\epsilon}{4} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\epsilon}{4} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}}}{2} = \epsilon^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Logo, para todo $n \geq n_0$, temos

$$\int_{-L}^L |f(x) - \overline{S}_n(x)|^2 dx < \epsilon.$$

Mas, como já observamos, sendo $\overline{S}_n(x)$ um polinômio trigonométrico, vale

$$\int_{-L}^L |f(x) - S_n(x)|^2 dx < \int_{-L}^L |f(x) - \overline{S}_n(x)|^2 dx < \epsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, concluimos a demonstração do teorema. $\square$

Teorema 3.43 (Identidade de Parseval). *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período $2L$ e de quadrado integrável em $[-L, L]$. Então:*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx. \quad (3.223)$$

Demonstração. Consideramos o erro médio quadrático:

$$E_n = \int_{-L}^L |S_n(x) - f(x)|^2 dx. \quad (3.224)$$

Expandindo:

$$E_n = \int_{-L}^L S_n^2(x) dx - 2 \int_{-L}^L S_n(x) f(x) dx + \int_{-L}^L f^2(x) dx. \quad (3.225)$$

Calculamos as integrais:

$$\int_{-L}^L S_n^2(x) dx = \int_{-L}^L \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) + b_k \sin \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right) \right]^2 dx. \quad (3.226)$$

Pelas relações de ortogonalidade:

$$\int_{-L}^L S_n^2(x) dx = \frac{La_0^2}{2} + L \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2). \quad (3.227)$$

Também:

$$\int_{-L}^L S_n(x)f(x)dx = \int_{-L}^L S_n(x) \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right) \right] dx \quad (3.228)$$

$$= \frac{La_0^2}{2} + L \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2). \quad (3.229)$$

Portanto:

$$E_n = \int_{-L}^L f^2(x)dx - \frac{La_0^2}{2} - L \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2). \quad (3.230)$$

Pelo Teorema de Convergência em Média Quadrática, $E_n \rightarrow 0$. Logo:

$$\int_{-L}^L f^2(x)dx = \frac{La_0^2}{2} + L \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2). \quad (3.231)$$

Dividindo por L , obtemos a Identidade de Parseval. $\square$

Exemplo 3.44 (Aplicação da Identidade de Parseval). Para a função triangular $f(x) = L - |x|$ em $[-L, L]$, temos:

$$f(x) = \frac{L}{2} + \frac{4L}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi x}{L}\right). \quad (3.232)$$

A Identidade de Parseval dá:

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L (L - |x|)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}^2. \quad (3.233)$$

Calculando o lado esquerdo:

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L (L - |x|)^2 dx = \frac{2}{L} \int_0^L (L - x)^2 dx \quad (3.234)$$

$$= \frac{2}{L} \left[-\frac{(L-x)^3}{3} \right]_0^L \quad (3.235)$$

$$= \frac{2}{L} \cdot \frac{L^3}{3} = \frac{2L^2}{3}. \quad (3.236)$$

O lado direito:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}^2 = \frac{L^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16L^2}{(2k-1)^4 \pi^4}. \quad (3.237)$$

Portanto:

$$\frac{2L^2}{3} = \frac{L^2}{2} + \frac{16L^2}{\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}. \quad (3.238)$$

Logo:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}. \quad (3.239)$$

Corolário 3.45 (Desigualdade de Bessel). *Para qualquer função f de quadrado integrável:*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx. \quad (3.240)$$

A Identidade de Parseval mostra que a série de Fourier preserva a energia (norma L^2) da função. Esta propriedade é fundamental em processamento de sinais e em Mecânica Quântica.

3.9 Unicidade da Série de Fourier

Uma propriedade importante das séries de Fourier é a unicidade: duas funções com os mesmos coeficientes de Fourier são essencialmente iguais.

Teorema 3.46 (Unicidade da Série de Fourier). *Seja f e g funções periódicas de quadrado integrável em $[-L, L]$, com os mesmos coeficientes de Fourier. Então $f = g$ em quase todos os pontos (ou seja, exceto em um conjunto de medida zero).*

Demonstração. A diferença $h = f - g$ tem todos os coeficientes de Fourier iguais a zero. Pela Identidade de Parseval:

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L h^2(x) dx = 0. \quad (3.241)$$

Como $h^2 \geq 0$, temos $h = 0$ em quase todos os pontos. $\square$

Exemplo 3.47 (Unicidade). Duas funções que diferem em um número finito de pontos têm a mesma série de Fourier. Por exemplo, a função $f(x) = x$ e $g(x) = x$ para $x \neq 0$, com $g(0) = 1$, têm a mesma série de Fourier, pois diferem apenas em um ponto.

3.10 Considerações Finais do Capítulo

Neste capítulo, desenvolvemos a teoria das séries de Fourier de forma rigorosa e detalhada. Vimos:

- A dedução dos coeficientes de Fourier usando a ortogonalidade do sistema trigonométrico;
- As estimativas para os coeficientes em função da regularidade da função;
- A definição da série de Fourier e exemplos fundamentais (dente de serra, triangular);

- As expansões em meio-intervalo (séries de cossenos e senos);
- A integração termo a termo da série de Fourier;
- A forma complexa da série de Fourier;
- O estudo da convergência pontual (Teste de Dini, Teste de Jordan);
- A convergência uniforme e o fenômeno de Gibbs;
- O Teorema de Fejér e os núcleos de Dirac;
- A Identidade de Parseval e a unicidade da série de Fourier.

No próximo capítulo, estenderemos estas ideias para as transformadas de Fourier e de Laplace, que são ferramentas ainda mais poderosas para a resolução de equações diferenciais.

TRANSFORMADAS

DE FOURIER E DE LAPLACE

04

Capítulo 4

Transformadas: de Fourier e de Laplace

Neste capítulo, ampliaremos nosso campo de investigação abordando duas transformadas integrais de grande relevância em aplicações no estudo das Equações Diferenciais. São elas: a **Transformada de Fourier**, que é muito utilizada para tratar problemas de vibrações de cordas infinitas e semi-infinitas, problemas de condução de calor em barras infinitas e semi-infinitas, e a **Transformada de Laplace**, que é muito útil na resolução de problemas relacionados a sistemas físicos tais como: Sistema Massa-Mola, Circuito Elétrico em Série e em problemas de valor de contorno, entre outros.

A Transformada de Fourier e a série de Fourier desempenham um papel importante na Engenharia Elétrica e em outras áreas de processamento de sinais, enquanto a Transformada de Laplace é uma ferramenta indispensável em sistemas de controle e análise de circuitos. Procuraremos ainda investigar algumas aplicações e as conexões entre estas duas transformadas.

Inicialmente estudaremos a Transformada de Fourier, e começamos lembrando que até agora abordamos, em boa parte do estudo, a Teoria de Fourier sobre determinadas funções f de período $2L$, em intervalos do tipo $[-L, L]$. Surge então a seguinte pergunta: o que ocorre quando $L \rightarrow \infty$? Como observa [8], veremos a seguir que, sob certas condições, a série se torna uma **Integral de Fourier**.

4.1 Transformada de Fourier

4.1.1 Da Série à Integral de Fourier

A princípio, vamos construir, de forma não rigorosa, a Integral de Fourier a partir da série de Fourier. Consideremos a função f , de período $2L$ e L^1 em $[-L, L]$. A ideia é a seguinte: supondo a igualdade entre f e sua série de Fourier, isto é,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right], \quad (4.1)$$

onde

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) dt, \quad (4.2)$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt, \quad (4.3)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt. \quad (4.4)$$

Fazendo $\lambda_n = \frac{n\pi}{L}$ e $\Delta\lambda = \lambda_{n+1} - \lambda_n = \frac{\pi}{L}$, $f(x)$ pode ser representada pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} f(x) = & \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-L}^L f(t) dt \right] \Delta\lambda + \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos(\lambda_n x) \int_{-L}^L f(t) \cos(\lambda_n t) dt + \sin(\lambda_n x) \int_{-L}^L f(t) \sin(\lambda_n t) dt \right] \Delta\lambda. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Percebemos que quando $L \rightarrow \infty$, $\Delta\lambda \rightarrow 0$. Daí, tomando o limite, o somatório acima toma a forma $\lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} F(\lambda_n) \Delta\lambda$, que intuitivamente sugere, pela soma de Riemann, $\int_0^{\infty} F(\lambda) d\lambda$.

Agora, se a integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$ converge, então $\frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \right] \Delta\lambda$ vale zero quando $\Delta\lambda \rightarrow 0$. Desse modo, tem-se:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\cos(\lambda x) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\lambda t) dt + \sin(\lambda x) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\lambda t) dt \right] d\lambda. \quad (4.6)$$

Finalmente, fazendo

$$A(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\lambda t) dt, \quad (4.7)$$

$$B(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\lambda t) dt, \quad (4.8)$$

obtemos a **Integral de Fourier** da função f no intervalo $(-\infty, \infty)$:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [A(\lambda) \cos(\lambda x) + B(\lambda) \sin(\lambda x)] d\lambda. \quad (4.9)$$

4.1.2 Casos Particulares: Funções Pares e Ímpares

Segue das propriedades de paridade que, se f é par em $(-\infty, \infty)$, a Integral de Fourier da função f é a **integral cosseno**:

$$A(\lambda) = \int_0^{\infty} f(x) \cos(\lambda x) dx, \quad (4.10)$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} A(\lambda) \cos(\lambda x) d\lambda. \quad (4.11)$$

Do mesmo modo, se f é ímpar em $(-\infty, \infty)$, a Integral de Fourier de f é uma **integral seno**:

$$B(\lambda) = \int_0^{\infty} f(x) \sin(\lambda x) dx, \quad (4.12)$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} B(\lambda) \sin(\lambda x) d\lambda. \quad (4.13)$$

A seguir, apresentamos um teorema que é um dos pilares da teoria da Análise de Fourier, estabelecendo as condições sob as quais uma função não periódica pode ser representada por sua integral de Fourier. Este teorema é o análogo contínuo (não periódico) do teorema de Dirichlet para séries de Fourier, estendendo o conceito de decomposição em frequências para funções definidas em toda a reta real.

O Teorema de Convergência da Integral de Fourier é um resultado fundamental que estabelece as condições para representar funções não periódicas como uma superposição contínua de ondas senoidais, fornece o arcabouço matemático para a transformada de Fourier e suas aplicações, conecta a teoria de Fourier com a análise funcional e a teoria das distribuições e tem aplicações práticas em engenharia, física, processamento de sinais, óptica, mecânica quântica e muitas outras áreas.

Sua importância transcende a matemática pura, sendo uma ferramenta indispensável na ciência e tecnologia modernas. A compreensão deste teorema é essencial para qualquer estudante ou profissional que trabalhe com análise de sinais, sistemas lineares ou equações diferenciais. Para provar tal teorema, faremos uso do seguinte lema:

Lema 4.1 (Riemann-Lebesgue Generalizado). *Seja $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em $(-\infty, \infty)$ tal que $\lim_{u \rightarrow 0} \phi(u) = 0$ (com $\phi(0)$ definido apropriadamente) e $\frac{\phi(u)}{u}$ é integrável para $|u| \geq \delta$, com $\delta > 0$. Então:*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u) \frac{\sin(Ru)}{u} du = 0. \quad (4.14)$$

Demonstração. A demonstração será dividida em várias etapas, utilizando a decomposição do domínio de integração em duas regiões: uma vizinhança da origem (onde $\phi(u)/u$ pode ser problemática) e o restante da reta.

Inicialmente, fixemos $\delta > 0$ e escrevemos:

$$I(R) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u) \frac{\text{sen}(Ru)}{u} du = \int_{|u| < \delta} \phi(u) \frac{\text{sen}(Ru)}{u} du + \int_{|u| \geq \delta} \phi(u) \frac{\text{sen}(Ru)}{u} du.$$

Denotemos:

$$I_1(R) = \int_{|u| < \delta} \phi(u) \frac{\text{sen}(Ru)}{u} du, \quad I_2(R) = \int_{|u| \geq \delta} \phi(u) \frac{\text{sen}(Ru)}{u} du.$$

Agora, vamos fazer a análise de $I_1(R)$ - A Vizinhança da Origem. Seja $\psi(u) = \phi(u)/u$ para $u \neq 0$. Então:

$$I_1(R) = \int_{|u| < \delta} \psi(u) \text{sen}(Ru) du.$$

Pelo Lema de Riemann-Lebesgue clássico, se ψ for integrável em $|u| < \delta$, então $I_1(R) \rightarrow 0$. No entanto, ψ pode não ser integrável na origem.

Mas observe que podemos escrever:

$$\phi(u) \frac{\text{sen}(Ru)}{u} = \phi(u) \int_0^R \cos(tu) dt,$$

pois $\int_0^R \cos(tu) dt = \frac{\text{sen}(Ru)}{u}$ para $u \neq 0$.

Portanto:

$$I_1(R) = \int_{|u| < \delta} \phi(u) \int_0^R \cos(tu) dt du.$$

Pelo teorema de Fubini:

$$I_1(R) = \int_0^R \int_{|u| < \delta} \phi(u) \cos(tu) du dt.$$

Para cada t fixo, a função $u \mapsto \phi(u) \cos(tu)$ é integrável. Além disso, como $\phi(u) \rightarrow 0$ quando $u \rightarrow 0$, temos que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{|u| < \delta} \phi(u) \cos(tu) du = 0,$$

pelo Lema de Riemann-Lebesgue clássico.

Assim, para cada $\varepsilon > 0$, existe $T_0 > 0$ tal que:

$$\left| \int_{|u| < \delta} \phi(u) \cos(tu) du \right| < \varepsilon \quad \text{para } t > T_0.$$

Portanto:

$$|I_1(R)| \leq \int_0^R \left| \int_{|u| < \delta} \phi(u) \cos(tu) du \right| dt \leq \int_0^{T_0} M dt + \int_{T_0}^R \varepsilon dt,$$

onde $M = \int_{|u|<\delta} |\phi(u)| du < \infty$.

Dividindo por R e tomando o limite $R \rightarrow \infty$:

$$\limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{|I_1(R)|}{R} \leq \varepsilon.$$

Isto mostra que $I_1(R)/R \rightarrow 0$. No entanto, precisamos mostrar que $I_1(R) \rightarrow 0$, não apenas que $I_1(R)/R \rightarrow 0$.

Agora, usando a hipótese $\lim_{u \rightarrow 0} \phi(u) = 0$ e o fato que $\lim_{u \rightarrow 0} \phi(u) = 0$, podemos definir $\phi(0) = 0$ por continuidade. Então a função

$$g(u) = \begin{cases} \frac{\phi(u)}{u}, & u \neq 0, \\ \phi'(0), & u = 0, \end{cases}$$

é contínua em $u = 0$ (se ϕ for diferenciável na origem). Mas mesmo sem diferenciabilidade, podemos usar o seguinte argumento: para $|u| < \delta$, temos:

$$\left| \phi(u) \frac{\text{sen}(Ru)}{u} \right| = |\phi(u)| \left| \frac{\text{sen}(Ru)}{u} \right| \leq |\phi(u)| \cdot R.$$

Para $|u| \leq 1/R$, temos $|\text{sen}(Ru)/u| \leq R$. Portanto:

$$\int_{|u| \leq 1/R} \left| \phi(u) \frac{\text{sen}(Ru)}{u} \right| du \leq R \int_{|u| \leq 1/R} |\phi(u)| du.$$

Como $\lim_{u \rightarrow 0} \phi(u) = 0$, temos que $\int_{|u| \leq 1/R} |\phi(u)| du = o(1/R)$. Portanto:

$$R \int_{|u| \leq 1/R} |\phi(u)| du \rightarrow 0.$$

Para $1/R < |u| < \delta$, usamos a estimativa $|\text{sen}(Ru)/u| \leq 1/|u|$:

$$\int_{1/R < |u| < \delta} \left| \phi(u) \frac{\text{sen}(Ru)}{u} \right| du \leq \int_{1/R < |u| < \delta} \frac{|\phi(u)|}{|u|} du.$$

Usando o Lema de Riemann-Lebesgue clássico para a função $u \mapsto \phi(u)/u$ (que é integrável em $|u| \geq 1/R$), obtemos:

$$\int_{1/R < |u| < \delta} \frac{\phi(u)}{u} \text{sen}(Ru) du \rightarrow 0.$$

Assim, $I_1(R) \rightarrow 0$.

Por fim, para a análise de $I_2(R)$ - A Região $|u| \geq \delta$, notemos que para $|u| \geq \delta$, temos

$\psi(u) = \phi(u)/u$ é integrável por hipótese. Portanto:

$$I_2(R) = \int_{|u| \geq \delta} \phi(u) \frac{\text{sen}(Ru)}{u} du = \int_{|u| \geq \delta} \psi(u) \text{sen}(Ru) du.$$

Pelo Lema de Riemann-Lebesgue clássico, se ψ é integrável em $\mathbb{R}$ (ou em um conjunto da forma $|u| \geq \delta$), então:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|u| \geq \delta} \psi(u) \text{sen}(Ru) du = 0.$$

Portanto:

$$I_2(R) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad R \rightarrow \infty.$$

Combinando os resultados acima, obtemos

$$I(R) = I_1(R) + I_2(R) \rightarrow 0 + 0 = 0.$$

Isto completa a demonstração. □

Teorema 4.2 (Condições para Convergência da Integral de Fourier). *Sejam f e f' seccionalmente contínuas em qualquer intervalo finito, e seja $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ convergente. Então, a Integral de Fourier de f converge para $f(x)$ em um ponto de continuidade de f . Em pontos de descontinuidade, converge para $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.*

Demonstração. A demonstração segue os seguintes passos: Inicialmente, lembremos que a Integral de Fourier de f é dada por

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\cos(\lambda x) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\lambda t) dt + \text{sen}(\lambda x) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \text{sen}(\lambda t) dt \right] d\lambda. \quad (4.15)$$

Para estudar a convergência, definimos a soma parcial truncada

$$S_R(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^R \left[\cos(\lambda x) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\lambda t) dt + \text{sen}(\lambda x) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \text{sen}(\lambda t) dt \right] d\lambda. \quad (4.16)$$

Nosso objetivo é mostrar que $S_R(x) \rightarrow f(x)$ quando $R \rightarrow \infty$ nos pontos de continuidade, e $S_R(x) \rightarrow \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ nos pontos de descontinuidade. Agora, vamos reescrever da soma parcial como uma integral única. Note que podemos reescrever $S_R(x)$ de forma mais compacta usando o fato que

$$\cos(\lambda x) \cos(\lambda t) + \text{sen}(\lambda x) \text{sen}(\lambda t) = \cos(\lambda(x - t)). \quad (4.17)$$

Portanto:

$$S_R(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^R \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\cos(\lambda x) \cos(\lambda t) + \operatorname{sen}(\lambda x) \operatorname{sen}(\lambda t)] dt d\lambda \quad (4.18)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^R \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\lambda(x-t)) dt d\lambda. \quad (4.19)$$

Trocando a ordem de integração (justificado pela convergência absoluta de $\int |f(t)| dt$ e pelo fato de que $|\cos(\lambda(x-t))| \leq 1$):

$$S_R(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \int_0^R \cos(\lambda(x-t)) d\lambda dt. \quad (4.20)$$

Calculemos a integral interna:

$$\int_0^R \cos(\lambda(x-t)) d\lambda = \left[\frac{\operatorname{sen}(\lambda(x-t))}{x-t} \right]_0^R \quad (4.21)$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(R(x-t))}{x-t}, \quad \text{para } x \neq t. \quad (4.22)$$

Para $x = t$, temos $\int_0^R \cos(0) d\lambda = R$.

Portanto:

$$S_R(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\operatorname{sen}(R(x-t))}{x-t} dt. \quad (4.23)$$

Esta é uma integral de convolução com o núcleo $\frac{\operatorname{sen}(Ru)}{\pi u}$. Na verdade, o núcleo $\frac{\operatorname{sen}(Ru)}{\pi u}$ é uma sucessão de núcleos de Dirac. Embora não seja não-negativo e não seja absolutamente integrável, ele satisfaz as propriedades necessárias para a convergência:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_R(u) \phi(u) du = \phi(0), \quad (4.24)$$

para funções ϕ suficientemente regulares (contínuas e seccionalmente diferenciáveis).

Usando (4.23), podemos escrever:

$$S_R(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u) \frac{\operatorname{sen}(Ru)}{\pi u} du. \quad (4.25)$$

Fazendo a mudança de variável $u = x - t$ na integral (4.23).

Agora, para estudar a convergência, consideramos dois casos:

Caso 1: x é um ponto de continuidade de f . Neste caso, $f(x+0) = f(x-0) = f(x)$.

Definimos

$$\phi(u) = f(x-u) - f(x). \quad (4.26)$$

Então:

$$S_R(x) - f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x-u) - f(x)] \frac{\text{sen}(Ru)}{\pi u} du \quad (4.27)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u) \frac{\text{sen}(Ru)}{\pi u} du. \quad (4.28)$$

Como f é contínua em x , $\phi(u) \rightarrow 0$ quando $u \rightarrow 0$. Além disso, $\phi(u)$ é integrável em $(-\infty, \infty)$ porque f é L^1 e $f(x)$ é constante.

Precisamos mostrar que $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(u) \frac{\text{sen}(Ru)}{u} du \rightarrow 0$ quando $R \rightarrow \infty$.

Mas, isso segue do Lema de Riemann-Lebesgue generalizado. Portanto, $S_R(x) - f(x) \rightarrow 0$, ou seja, $S_R(x) \rightarrow f(x)$.

Caso 2: x é um ponto de descontinuidade de f . Neste caso, definimos

$$f(x+0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(x+h), \quad f(x-0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(x-h). \quad (4.29)$$

Queremos mostrar que $S_R(x) \rightarrow \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

Escrevemos:

$$S_R(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u) \frac{\text{sen}(Ru)}{u} du \quad (4.30)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 f(x-u) \frac{\text{sen}(Ru)}{u} du + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x-u) \frac{\text{sen}(Ru)}{u} du. \quad (4.31)$$

Na primeira integral, fazemos $u = -v$:

$$\int_{-\infty}^0 f(x-u) \frac{\text{sen}(Ru)}{u} du = \int_{\infty}^0 f(x+v) \frac{\text{sen}(-Rv)}{-v} (-dv) \quad (4.32)$$

$$= \int_0^{\infty} f(x+v) \frac{\text{sen}(Rv)}{v} dv. \quad (4.33)$$

Portanto:

$$S_R(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [f(x+u) + f(x-u)] \frac{\text{sen}(Ru)}{u} du. \quad (4.34)$$

Agora, escrevemos:

$$S_R(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [f(x+u) - f(x+0)] \frac{\text{sen}(Ru)}{u} du \quad (4.35)$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [f(x-u) - f(x-0)] \frac{\text{sen}(Ru)}{u} du \quad (4.36)$$

$$+ \frac{f(x+0) + f(x-0)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(Ru)}{u} du. \quad (4.37)$$

Pelo mesmo argumento do Caso 1, as duas primeiras integrais tendem a zero quando $R \rightarrow \infty$, usando o Lema de Riemann-Lebesgue generalizado.

A terceira integral:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{sen}(Ru)}{u} du = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}, \quad (4.38)$$

pois $\int_0^\infty \frac{\text{sen } v}{v} dv = \frac{\pi}{2}$.

Portanto:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} S_R(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}. \quad (4.39)$$

Finalmente, como $S_R(x)$ converge para $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ quando $R \rightarrow \infty$, e a Integral de Fourier é definida como o limite

$$\int_0^\infty F(\lambda) d\lambda = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R F(\lambda) d\lambda, \quad (4.40)$$

temos que a Integral de Fourier converge para $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ nos pontos de descontinuidade, e para $f(x)$ nos pontos de continuidade. $\square$

As condições do teorema são suficientes, mas não necessárias. A hipótese de que f e f' são seccionalmente contínuas garante que as integrais envolvidas convergem e que podemos aplicar o Lema de Riemann-Lebesgue. A condição $\int_{-\infty}^\infty |f(x)| dx < \infty$ garante que f é L^1 , o que é necessário para a existência da Transformada de Fourier.

Note que a demonstração apresentada é análoga à demonstração do Teorema de Fourier para séries, substituindo a soma sobre n por uma integral sobre λ , e o núcleo de Dirichlet pelo núcleo $\frac{\text{sen}(Ru)}{\pi u}$.

Por fim, observe que em pontos de continuidade de f , a convergência é para $f(x)$. Em pontos de descontinuidade, a convergência é para a média aritmética dos limites laterais, exatamente como no caso das séries de Fourier.

4.1.3 Forma Complexa da Integral de Fourier

Sabemos que a série de Fourier de uma função f na forma complexa pode ser expressa como:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}, \quad \text{onde } c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{-in\pi t/L} f(t) dt. \quad (4.41)$$

Analogamente ao que fizemos acima, usando a notação $\xi_n = \frac{n\pi}{L}$ e

$$\Delta\xi = \xi_{n+1} - \xi_n = \frac{\pi}{L},$$

podemos escrever:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\xi_n x}, \quad \text{com } c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{-i\xi_n t} f(t) dt. \quad (4.42)$$

Ou ainda, como c_n também depende de ξ_n , com $n \in \mathbb{Z}$:

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [c(\xi_n) e^{i\xi_n x}] \Delta\xi, \quad \text{onde } c(\xi_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^L e^{-i\xi_n t} f(t) dt. \quad (4.43)$$

Tomando o limite, observamos que quando $L \rightarrow \infty$, $\Delta\xi \rightarrow 0$. Logo, o último somatório e a expressão de $c(\xi_n)$ produzem:

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} c(\xi) e^{i\xi x} d\xi, \quad (4.44)$$

$$c(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi t} f(t) dt. \quad (4.45)$$

4.1.4 Definição Formal da Transformada de Fourier

Desde que as integrais impróprias acima sejam convergentes, nosso objetivo será mostrar que tais expressões representam a **Transformada Inversa de Fourier** e a **Transformada de Fourier**, respectivamente, da função f .

Definição 4.3 (Transformada de Fourier). Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ for uma função L^1 , sua **Transformada de Fourier** será a função $\mathcal{F} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, dada pela expressão

$$\mathfrak{F}[f](\xi) = \mathcal{F}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx. \quad (4.46)$$

Definição 4.4 (Transformada Inversa de Fourier). Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ for uma função do espaço Ω (Espaço de Schwartz), sua **Transformada Inversa de Fourier** é dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \mathcal{F}(\xi) d\xi. \quad (4.47)$$

Exemplo 4.5 (Transformada da Função Pulso). Calcule a Transformada de Fourier da função (função pulso)

$$u_a(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x| < a, \\ 0, & \text{se } |x| > a, \end{cases} \quad \text{com } a > 0. \quad (4.48)$$

Resolução: Temos, para $\xi \neq 0$:

$$\mathfrak{F}[u_a](\xi) = \mathcal{F}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} u_a(x) dx \quad (4.49)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-i\xi x} dx \quad (4.50)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left. \frac{e^{-i\xi x}}{-i\xi} \right|_{-a}^a \quad (4.51)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{-e^{-i\xi a} + e^{i\xi a}}{i\xi} \quad (4.52)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{-\cos(\xi a) + i \sin(\xi a) + \cos(\xi a) + i \sin(\xi a)}{i\xi} \quad (4.53)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2i \sin(\xi a)}{i\xi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2 \sin(\xi a)}{\xi}. \quad (4.54)$$

Para $\xi = 0$, temos:

$$\mathcal{F}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i0x} u_a(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a dx = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}}. \quad (4.55)$$

Portanto:

$$\mathcal{F}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2 \sin(a\xi)}{\xi}, \quad \xi \neq 0. \quad (4.56)$$

Este exemplo nos mostra que a função $\mathcal{F}(\xi)$ não é L^1 , visto que a função $\frac{\sin(a\xi)}{\xi}$ não é absolutamente integrável. Desse modo, f ser L^1 não implica $\mathfrak{F}[f]$ ser L^1 , o que nos diz que esta teoria é um tanto assimétrica.

4.1.5 Propriedades da Transformada de Fourier

Proposição 4.6 (Linearidade). *A Transformada de Fourier é linear, isto é, dadas f e g funções L^1 , $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ quaisquer:*

$$\mathfrak{F}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathfrak{F}[f] + \beta \mathfrak{F}[g]. \quad (4.57)$$

Demonstração. Segue imediatamente da linearidade da integral:

$$\mathfrak{F}[\alpha f + \beta g](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx \quad (4.58)$$

$$= \alpha \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx + \beta \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} g(x) dx \quad (4.59)$$

$$= \alpha \mathfrak{F}[f](\xi) + \beta \mathfrak{F}[g](\xi). \quad (4.60)$$

□

Proposição 4.7 (Continuidade e Decaimento no Infinito). *Se $f \in L^1$, então $\mathcal{F}(\xi)$ é contínua e $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \mathcal{F}(\xi) = 0$.*

Demonstração. **Continuidade:** Para $\xi, \xi_0 \in \mathbb{R}$:

$$|\mathcal{F}(\xi) - \mathcal{F}(\xi_0)| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-i\xi x} - e^{-i\xi_0 x}) f(x) dx \right| \quad (4.61)$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-i\xi x} - e^{-i\xi_0 x}| |f(x)| dx. \quad (4.62)$$

Como $|e^{-i\xi x} - e^{-i\xi_0 x}| \leq |\xi - \xi_0| |x|$ e $|f(x)|$ é integrável, podemos usar o teorema da convergência dominada para concluir que $\mathcal{F}$ é contínua.

Decaimento no infinito: Como $f \in L^1$, temos $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$. Dado $\epsilon > 0$, existe $a > 0$ tal que

$$\int_{|x| > a} |f(x)| dx < \frac{\epsilon}{2}. \quad (4.63)$$

Pelo Lema de Riemann-Lebesgue:

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \int_{-a}^a e^{-i\xi x} f(x) dx = 0. \quad (4.64)$$

Portanto, existe $\xi_0 > 0$ tal que para $|\xi| > \xi_0$:

$$\left| \int_{-a}^a e^{-i\xi x} f(x) dx \right| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (4.65)$$

Assim:

$$|\mathcal{F}(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-a}^a e^{-i\xi x} f(x) dx \right| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x| > a} |f(x)| dx \quad (4.66)$$

$$< \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{\sqrt{2\pi}}. \quad (4.67)$$

Logo, $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \mathcal{F}(\xi) = 0$. □

Proposição 4.8 (Transformada da Derivada). *Se $f \in \Omega$ (espaço de Schwartz), então:*

$$\mathfrak{F}[D^n f] = (i\xi)^n \mathfrak{F}[f]. \quad (4.68)$$

Demonstração. Provaremos por indução. Para $n = 1$:

$$\mathfrak{F}[f'](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f'(x) dx. \quad (4.69)$$

Usando integração por partes com $u = e^{-i\xi x}$ e $dv = f'(x)dx$:

$$\mathfrak{F}[f'](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-i\xi x} f(x) \right]_{-\infty}^{\infty} + i\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx \quad (4.70)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[0 + i\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx \right] \quad (4.71)$$

$$= i\xi \mathfrak{F}[f](\xi). \quad (4.72)$$

O termo avaliado se anula pois $f \in \Omega$, logo $f(x) \rightarrow 0$ quando $|x| \rightarrow \infty$.

Suponha que o resultado vale para n . Para $n + 1$:

$$\mathfrak{F}[D^{n+1}f](\xi) = \mathfrak{F}[(D^n f)'](\xi) = i\xi \mathfrak{F}[D^n f](\xi) = i\xi (i\xi)^n \mathfrak{F}[f](\xi) = (i\xi)^{n+1} \mathfrak{F}[f](\xi). \quad (4.73)$$

□

Proposição 4.9 (Derivada da Transformada). *Se $f \in \Omega$, então:*

$$D_\xi^n \mathfrak{F}[f] = \mathfrak{F}[(-ix)^n f(x)]. \quad (4.74)$$

Demonstração. Para $n = 1$:

$$D_\xi \mathfrak{F}[f](\xi) = D_\xi \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx \right] \quad (4.75)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-ix) e^{-i\xi x} f(x) dx \quad (4.76)$$

$$= \mathfrak{F}[(-ix)f(x)](\xi). \quad (4.77)$$

A troca de derivação com integração é justificada pela convergência uniforme das integrais, já que $f \in \Omega$.

Por indução, obtemos o resultado para n qualquer. □

Proposição 4.10 (Translação). *Se $f \in L^1$ e $a \in \mathbb{R}$, então:*

$$\mathfrak{F}[f(x - a)](\xi) = e^{-i\xi a} \mathfrak{F}[f](\xi). \quad (4.78)$$

Demonstração.

$$\mathfrak{F}[f(x - a)](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x - a) dx. \quad (4.79)$$

Fazendo $y = x - a$, $dx = dy$:

$$\mathfrak{F}[f(x - a)](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi(y+a)} f(y) dy \quad (4.80)$$

$$= e^{-i\xi a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi y} f(y) dy \quad (4.81)$$

$$= e^{-i\xi a} \mathfrak{F}[f](\xi). \quad (4.82)$$

□

Proposição 4.11 (Modulação). *Se $f \in L^1$ e $a \in \mathbb{R}$, então:*

$$\mathfrak{F}[e^{iax} f(x)](\xi) = \mathfrak{F}[f](\xi - a). \quad (4.83)$$

Demonstração.

$$\mathfrak{F}[e^{iax} f(x)](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} e^{iax} f(x) dx \quad (4.84)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\xi-a)x} f(x) dx \quad (4.85)$$

$$= \mathfrak{F}[f](\xi - a). \quad (4.86)$$

□

Proposição 4.12 (Mudança de Escala). *Se $f \in L^1$ e $a > 0$, então:*

$$\mathfrak{F}[f(ax)](\xi) = \frac{1}{a} \mathfrak{F}[f]\left(\frac{\xi}{a}\right). \quad (4.87)$$

Demonstração.

$$\mathfrak{F}[f(ax)](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(ax) dx. \quad (4.88)$$

Fazendo $y = ax$, $dx = \frac{dy}{a}$:

$$\mathfrak{F}[f(ax)](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi y/a} f(y) \frac{dy}{a} \quad (4.89)$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\xi/a)y} f(y) dy \quad (4.90)$$

$$= \frac{1}{a} \mathfrak{F}[f]\left(\frac{\xi}{a}\right). \quad (4.91)$$

□

4.1.6 O Espaço de Schwartz Ω

Como vimos, a Transformada de Fourier não preserva necessariamente o espaço L^1 . Para contornar este problema, introduzimos o espaço de Schwartz.

Definição 4.13 (Espaço de Schwartz Ω). Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é de **decréscimento rápido** (ou pertence ao espaço de Schwartz Ω) se f for infinitamente diferenciável e, para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^m D^n f(x) = 0. \quad (4.92)$$

Equivalentemente, existem constantes $M_{m,n} > 0$ tais que

$$|x^m D^n f(x)| \leq M_{m,n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4.93)$$

Proposição 4.14 ($\Omega \subset L^1$). *Toda função de decréscimento rápido é L^1 .*

Demonstração. Como f é infinitamente diferenciável, f é contínua e, portanto, limitada em qualquer intervalo compacto. Em particular, f é integrável em $[-1, 1]$.

Para $|x| \geq 1$, usando a definição com $m = 2$ e $n = 0$:

$$|x^2 f(x)| \leq M_{2,0} \implies |f(x)| \leq \frac{M_{2,0}}{x^2}. \quad (4.94)$$

Portanto:

$$\int_{|x| \geq 1} |f(x)| dx \leq \int_{|x| \geq 1} \frac{M_{2,0}}{x^2} dx = 2M_{2,0} < \infty. \quad (4.95)$$

Assim:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \int_{-1}^1 |f(x)| dx + \int_{|x| \geq 1} |f(x)| dx < \infty. \quad (4.96)$$

□

Proposição 4.15 ($\mathfrak{F}$ Preserva Ω). *Se $f \in \Omega$, então $\mathfrak{F}[f] \in \Omega$.*

Demonstração. Precisamos mostrar que $\xi^m D_\xi^n \mathfrak{F}[f](\xi)$ é limitada para todo $m, n \geq 0$.

Usando as propriedades da Transformada de Fourier:

$$\xi^m D_\xi^n \mathfrak{F}[f](\xi) = \xi^m \mathfrak{F}[(-ix)^n f(x)](\xi). \quad (4.97)$$

Pela propriedade da derivada:

$$\xi^m \mathfrak{F}[g](\xi) = \mathfrak{F}[(-i)^m D^m g(x)](\xi). \quad (4.98)$$

Aplicando com $g(x) = (-ix)^n f(x)$:

$$\xi^m D_\xi^n \mathfrak{F}[f](\xi) = \mathfrak{F}[(-i)^m D^m ((-ix)^n f(x))](\xi). \quad (4.99)$$

Como $f \in \Omega$, $D^m((-ix)^n f(x)) \in \Omega \subset L^1$. Portanto, sua Transformada de Fourier é limitada:

$$|\xi^m D_\xi^n \mathfrak{F}[f](\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |D^m((-ix)^n f(x))| dx < \infty. \quad (4.100)$$

Logo, $\mathfrak{F}[f] \in \Omega$. □

4.2 Transformada de Laplace

Nesta seção, estudaremos a definição e as propriedades de uma integral conhecida como a **Transformada de Laplace**, que, assim como a Transformada de Fourier, tem a característica de, em determinadas situações, quando aplicada a uma Equação Diferencial, transformá-la em uma equação algébrica.

4.2.1 Definição e Existência

Definição 4.16 (Transformada de Laplace). Seja f uma função definida para $x \geq 0$. A **Transformada de Laplace** de f é definida por

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx = F(s), \quad (4.101)$$

desde que a integral imprópria convirja para algum valor de s .

Observação 4.17. A integral imprópria em (4.101) é definida como:

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-sx} f(x) dx. \quad (4.102)$$

Se o limite existe, dizemos que a integral converge.

Proposição 4.18 (Linearidade). A Transformada de Laplace é linear:

$$\mathcal{L}\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(x)\} + \beta \mathcal{L}\{g(x)\}. \quad (4.103)$$

Demonstração.

$$\mathcal{L}\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-sx} [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx \quad (4.104)$$

$$= \alpha \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx + \beta \int_0^{\infty} e^{-sx} g(x) dx \quad (4.105)$$

$$= \alpha \mathcal{L}\{f(x)\} + \beta \mathcal{L}\{g(x)\}. \quad (4.106)$$

□

Teorema 4.19 (Condições de Existência). *Seja $f(x)$ uma função seccionalmente contínua no intervalo $[0, \infty)$ e de **ordem exponencial** para $x > T$, ou seja, existem constantes $c, M > 0$ e $T > 0$ tais que*

$$|f(x)| \leq Me^{cx}, \quad \forall x > T. \quad (4.107)$$

Então, sua Transformada de Laplace existe para todo $s > c$.

Demonstração. Temos:

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx = \int_0^T e^{-sx} f(x) dx + \int_T^\infty e^{-sx} f(x) dx = I_1 + I_2. \quad (4.108)$$

A integral I_1 existe, pois f é seccionalmente contínua em $[0, T]$, logo $e^{-sx} f(x)$ é integrável.

Para I_2 , usando a hipótese de ordem exponencial:

$$|I_2| \leq \int_T^\infty |e^{-sx} f(x)| dx \quad (4.109)$$

$$\leq M \int_T^\infty e^{-sx} e^{cx} dx = M \int_T^\infty e^{-(s-c)x} dx \quad (4.110)$$

$$= M \left[-\frac{e^{-(s-c)x}}{s-c} \right]_T^\infty = M \frac{e^{-(s-c)T}}{s-c}. \quad (4.111)$$

Portanto, I_2 converge para todo $s > c$. $\square$

4.2.2 Transformadas de Funções Elementares

Exemplo 4.20 (Transformada da Função Constante). Calcule $\mathcal{L}\{1\}$ para $x \geq 0$.

Resolução:

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-sx} \cdot 1 dx \quad (4.112)$$

$$= \left[-\frac{e^{-sx}}{s} \right]_0^\infty = \frac{1}{s}, \quad s > 0. \quad (4.113)$$

Exemplo 4.21 (Transformada de x^n). Calcule $\mathcal{L}\{x^n\}$ para $n = 0, 1, 2, \dots$

Resolução: Vamos provar por indução que

$$\mathcal{L}\{x^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0. \quad (4.114)$$

Para $n = 0$, já vimos que $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} = \frac{0!}{s^1}$.

Suponha que $\mathcal{L}\{x^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$. Para $n + 1$:

$$\mathcal{L}\{x^{n+1}\} = \int_0^\infty e^{-sx} x^{n+1} dx. \quad (4.115)$$

Usando integração por partes com $u = x^{n+1}$ e $dv = e^{-sx}dx$:

$$\mathcal{L}\{x^{n+1}\} = \left[-\frac{e^{-sx}}{s} x^{n+1} \right]_0^\infty + \frac{n+1}{s} \int_0^\infty e^{-sx} x^n dx \quad (4.116)$$

$$= 0 + \frac{n+1}{s} \mathcal{L}\{x^n\} \quad (4.117)$$

$$= \frac{n+1}{s} \cdot \frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{s^{n+2}}. \quad (4.118)$$

Portanto, por indução, o resultado vale para todo $n \geq 0$.

Exemplo 4.22 (Transformada de $e^{\alpha x}$). Calcule $\mathcal{L}\{e^{\alpha x}\}$ para $x \geq 0$.

Resolução:

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha x}\} = \int_0^\infty e^{-sx} e^{\alpha x} dx = \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)x} dx \quad (4.119)$$

$$= \left[-\frac{e^{-(s-\alpha)x}}{s-\alpha} \right]_0^\infty = \frac{1}{s-\alpha}, \quad s > \alpha. \quad (4.120)$$

Exemplo 4.23 (Transformada de $\sin(\omega x)$ e $\cos(\omega x)$). Calcule $\mathcal{L}\{\sin(\omega x)\}$ e $\mathcal{L}\{\cos(\omega x)\}$.

Resolução: Usando a fórmula de Euler: $e^{i\omega x} = \cos(\omega x) + i \sin(\omega x)$.

Do exemplo anterior:

$$\mathcal{L}\{e^{i\omega x}\} = \frac{1}{s-i\omega} = \frac{s+i\omega}{s^2+\omega^2}. \quad (4.121)$$

Portanto:

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega x)\} + i\mathcal{L}\{\sin(\omega x)\} = \frac{s}{s^2+\omega^2} + i\frac{\omega}{s^2+\omega^2}. \quad (4.122)$$

Igualando as partes real e imaginária:

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega x)\} = \frac{s}{s^2+\omega^2}, \quad s > 0, \quad (4.123)$$

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega x)\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}, \quad s > 0. \quad (4.124)$$

4.2.3 Propriedades da Transformada de Laplace

Proposição 4.24 (Derivada da Transformada). Se $F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}$, então:

$$\mathcal{L}\{x^n f(x)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s). \quad (4.125)$$

Demonstração. Para $n = 1$:

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx \quad (4.126)$$

$$= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} [e^{-sx} f(x)] dx \quad (4.127)$$

$$= - \int_0^\infty x e^{-sx} f(x) dx = -\mathcal{L}\{xf(x)\}. \quad (4.128)$$

Portanto, $\mathcal{L}\{xf(x)\} = -F'(s)$.

Por indução, obtemos o resultado geral. $\square$

Exemplo 4.25 (Aplicação: Transformada de xe^{-ax}). Calcule $\mathcal{L}\{xe^{-ax}\}$.

Resolução: Sabemos que $\mathcal{L}\{e^{-ax}\} = \frac{1}{s+a}$.

$$\mathcal{L}\{xe^{-ax}\} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s+a} \right) = \frac{1}{(s+a)^2}. \quad (4.129)$$

Proposição 4.26 (Transformada da Derivada). Se $f(x), f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$ são contínuas em $[0, \infty)$, de ordem exponencial, e $f^{(n)}(x)$ é seccionalmente contínua, então:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(x)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \quad (4.130)$$

Demonstração. Para $n = 1$:

$$\mathcal{L}\{f'(x)\} = \int_0^\infty e^{-sx} f'(x) dx. \quad (4.131)$$

Usando integração por partes com $u = e^{-sx}$ e $dv = f'(x)dx$:

$$\mathcal{L}\{f'(x)\} = [e^{-sx} f(x)]_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx \quad (4.132)$$

$$= -f(0) + sF(s). \quad (4.133)$$

Para $n = 2$:

$$\mathcal{L}\{f''(x)\} = s\mathcal{L}\{f'(x)\} - f'(0) \quad (4.134)$$

$$= s[sF(s) - f(0)] - f'(0) = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0). \quad (4.135)$$

Por indução, obtemos (4.130). $\square$

Proposição 4.27 (Transformada da Integral). Se f é seccionalmente contínua e de ordem exponencial, então:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x f(t) dt\right\} = \frac{F(s)}{s}. \quad (4.136)$$

Demonstração. Seja $g(x) = \int_0^x f(t)dt$. Então $g'(x) = f(x)$ e $g(0) = 0$.

Pela propriedade da derivada:

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \mathcal{L}\{g'(x)\} = s\mathcal{L}\{g(x)\} - g(0) = s\mathcal{L}\{g(x)\}. \quad (4.137)$$

Portanto:

$$\mathcal{L}\{g(x)\} = \frac{F(s)}{s}. \quad (4.138)$$

□

Proposição 4.28 (Translação no Domínio da Frequência). *Se $F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}$, então:*

$$\mathcal{L}\{e^{ax}f(x)\} = F(s-a). \quad (4.139)$$

Demonstração.

$$\mathcal{L}\{e^{ax}f(x)\} = \int_0^\infty e^{-sx}e^{ax}f(x)dx \quad (4.140)$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s-a)x}f(x)dx = F(s-a). \quad (4.141)$$

□

Proposição 4.29 (Translação no Domínio do Tempo (Função Degrau)). *Se $F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}$ e $a > 0$, então:*

$$\mathcal{L}\{U(x-a)f(x-a)\} = e^{-as}F(s), \quad (4.142)$$

onde $U(x-a)$ é a função degrau unitário:

$$U(x-a) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ 1, & x \geq a. \end{cases} \quad (4.143)$$

Demonstração.

$$\mathcal{L}\{U(x-a)f(x-a)\} = \int_0^\infty e^{-sx}U(x-a)f(x-a)dx \quad (4.144)$$

$$= \int_a^\infty e^{-sx}f(x-a)dx. \quad (4.145)$$

Fazendo $t = x - a$, $dx = dt$:

$$\mathcal{L}\{U(x-a)f(x-a)\} = \int_0^\infty e^{-s(t+a)}f(t)dt \quad (4.146)$$

$$= e^{-as} \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = e^{-as}F(s). \quad (4.147)$$

□

Proposição 4.30 (Mudança de Escala). *Se $F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}$ e $a > 0$, então:*

$$\mathcal{L}\{f(ax)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right). \quad (4.148)$$

Demonstração.

$$\mathcal{L}\{f(ax)\} = \int_0^\infty e^{-sx} f(ax) dx. \quad (4.149)$$

Fazendo $t = ax$, $dx = \frac{dt}{a}$:

$$\mathcal{L}\{f(ax)\} = \int_0^\infty e^{-st/a} f(t) \frac{dt}{a} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right). \quad (4.150)$$

□

4.2.4 Transformada de Funções Periódicas

Teorema 4.31 (Transformada de uma Função Periódica). *Considere a função f seccionalmente contínua em $[0, \infty)$ e de ordem exponencial. Se f é periódica de período P , então:*

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \frac{1}{1 - e^{-sP}} \int_0^P e^{-sx} f(x) dx. \quad (4.151)$$

Demonstração. Sendo f periódica de período P , vamos decompor a Transformada de Laplace em uma soma de integrais sobre cada período:

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx \quad (4.152)$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \int_{nP}^{(n+1)P} e^{-sx} f(x) dx. \quad (4.153)$$

Em cada integral, fazemos $x = t + nP$:

$$\int_{nP}^{(n+1)P} e^{-sx} f(x) dx = \int_0^P e^{-s(t+nP)} f(t+nP) dt \quad (4.154)$$

$$= e^{-snP} \int_0^P e^{-st} f(t) dt, \quad (4.155)$$

pois $f(t+nP) = f(t)$.

Portanto:

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-snP} \int_0^P e^{-st} f(t) dt \quad (4.156)$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-snP} \right) \int_0^P e^{-st} f(t) dt \quad (4.157)$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-sP}} \int_0^P e^{-sx} f(x) dx. \quad (4.158)$$

□

Exemplo 4.32 (Transformada de uma “Onda Quadrada”). Calcule a Transformada de Laplace da função periódica de período 2 definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & 1 \leq x < 2. \end{cases} \quad (4.159)$$

Resolução: Pelo teorema da função periódica, com $P = 2$:

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \frac{1}{1 - e^{-2s}} \int_0^2 e^{-sx} f(x) dx \quad (4.160)$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-2s}} \int_0^1 e^{-sx} dx \quad (4.161)$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left[-\frac{e^{-sx}}{s} \right]_0^1 \quad (4.162)$$

$$= \frac{1 - e^{-s}}{s(1 - e^{-2s})} = \frac{1}{s(1 + e^{-s})}. \quad (4.163)$$

4.2.5 Transformada de Laplace Inversa

Definição 4.33 (Transformada de Laplace Inversa). Dada uma função $F(s)$, a **Transformada de Laplace Inversa** de $F(s)$ é a função $f(x)$ tal que $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$. Denotamos:

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}. \quad (4.164)$$

Observação 4.34. A Transformada de Laplace Inversa pode não ser única, pois duas funções que diferem em um conjunto de medida zero têm a mesma Transformada de Laplace. No entanto, para funções seccionalmente contínuas e de ordem exponencial, a inversa é única (exceto em pontos de descontinuidade).

Proposição 4.35 (Linearidade da Inversa). *A Transformada de Laplace Inversa é linear:*

$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}. \quad (4.165)$$

Exemplo 4.36 (Transformadas Inversas Básicas).

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} = 1, \quad (4.166)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} = x, \quad (4.167)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^n} \right\} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \quad (4.168)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-a} \right\} = e^{ax}, \quad (4.169)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right\} = \cos(\omega x), \quad (4.170)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right\} = \text{sen}(\omega x). \quad (4.171)$$

Exemplo 4.37 (Cálculo de uma Inversa). Calcule $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2s+1}{s^2+4} \right\}$.

Resolução: Decompomos a fração:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2s+1}{s^2+4} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2s}{s^2+4} + \frac{1}{s^2+4} \right\} \quad (4.172)$$

$$= 2\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2+4} \right\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{s^2+4} \right\} \quad (4.173)$$

$$= 2\cos(2x) + \frac{1}{2}\text{sen}(2x). \quad (4.174)$$

4.3 Conexões e Diferenças entre $\mathfrak{F}$ e $\mathcal{L}$

Nesta seção, veremos algumas semelhanças e diferenças entre a Transformada de Fourier e a Transformada de Laplace, em determinadas situações.

4.3.1 O Produto Convolução

O produto convolução é uma operação fundamental que aparece tanto na Transformada de Fourier quanto na Transformada de Laplace.

Definição 4.38 (Produto Convolução). O **produto convolução** de duas funções f e g é definido por:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt. \quad (4.175)$$

Para funções definidas em $[0, \infty)$, definimos:

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt. \quad (4.176)$$

Proposição 4.39 (Comutatividade da Convolução). *A convolução é comutativa: $f * g = g * f$.*

Demonstração.

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt. \quad (4.177)$$

Fazendo $u = x - t$, $du = -dt$:

$$(f * g)(x) = - \int_{\infty}^{-\infty} f(x-u)g(u)du \quad (4.178)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(u)f(x-u)du = (g * f)(x). \quad (4.179)$$

□

Teorema 4.40 (Convolução e Transformada de Fourier). *Se f e g são funções L^1 com f contínua e limitada, então:*

$$\mathfrak{F}[f * g] = \sqrt{2\pi}\mathfrak{F}[f] \cdot \mathfrak{F}[g]. \quad (4.180)$$

Demonstração. Por definição:

$$\mathfrak{F}[f * g](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} (f * g)(x) dx \quad (4.181)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt dx. \quad (4.182)$$

Trocando a ordem de integração (justificado pela convergência absoluta):

$$\mathfrak{F}[f * g](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} g(x-t) dx dt. \quad (4.183)$$

Fazendo $y = x - t$, $dx = dy$:

$$\mathfrak{F}[f * g](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi(y+t)} g(y) dy dt \quad (4.184)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\xi t} dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi y} g(y) dy \quad (4.185)$$

$$= \sqrt{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\xi t} dt \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi y} g(y) dy \right) \quad (4.186)$$

$$= \sqrt{2\pi} \mathfrak{F}[f](\xi) \mathfrak{F}[g](\xi). \quad (4.187)$$

□

Teorema 4.41 (Convolução e Transformada de Laplace). *Se f e g são funções seccio-*

nalmente contínuas em $[0, \infty)$ e de ordem exponencial, então:

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\} \cdot \mathcal{L}\{g\} = F(s)G(s). \quad (4.188)$$

Demonstração.

$$\mathcal{L}\{f * g\}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \int_0^x f(t)g(x-t)dt dx. \quad (4.189)$$

Trocando a ordem de integração:

$$\mathcal{L}\{f * g\}(s) = \int_0^\infty f(t) \int_t^\infty e^{-sx} g(x-t) dx dt. \quad (4.190)$$

Fazendo $u = x - t$, $dx = du$:

$$\mathcal{L}\{f * g\}(s) = \int_0^\infty f(t) \int_0^\infty e^{-s(u+t)} g(u) du dt \quad (4.191)$$

$$= \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \int_0^\infty e^{-su} g(u) du \quad (4.192)$$

$$= F(s)G(s). \quad (4.193)$$

□

Exemplo 4.42 (Aplicação da Convolução). Calcule $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2(s^2+1)} \right\}$.

Resolução: Note que $\frac{1}{s^2(s^2+1)} = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s^2+1}$.

Pelo teorema da convolução:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2(s^2+1)} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} * \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2+1} \right\} = x * \sin x. \quad (4.194)$$

Calculando a convolução:

$$(x * \sin x) = \int_0^x t \sin(x-t) dt \quad (4.195)$$

$$= [-t \cos(x-t)]_0^x + \int_0^x \cos(x-t) dt \quad (4.196)$$

$$= -x + [-\sin(x-t)]_0^x = -x + \sin x. \quad (4.197)$$

Portanto:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2(s^2+1)} \right\} = \sin x - x. \quad (4.198)$$

4.3.2 A Transformada de Laplace Bilateral

A integral que define a Transformada de Laplace poderia ter sido apresentada num contexto mais geral, ou seja, poderíamos ter definido $\mathcal{L}$ no intervalo $(-\infty, \infty)$. Neste intervalo, segundo [5], em alguns textos da literatura, $\mathcal{L}$ é chamada de **Transformada de Laplace bilateral**.

Definição 4.43 (Transformada de Laplace Bilateral). A **Transformada de Laplace bilateral** de uma função f é definida por:

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} f(x) dx. \quad (4.199)$$

Se considerarmos $s = \sigma + i\xi$ na Transformada de Laplace bilateral, temos:

$$F(s) = F(\sigma + i\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sigma+i\xi)x} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} [e^{-\sigma x} f(x)] dx. \quad (4.200)$$

Isto nos mostra que a Transformada de Laplace bilateral da função $f(x)$ pode ser interpretada como sendo a Transformada de Fourier da função $h(x) = e^{-\sigma x} f(x)$:

$$F(\sigma + i\xi) = \mathfrak{F}[e^{-\sigma x} f(x)](\xi). \quad (4.201)$$

Aplicando a Transformada de Fourier inversa, obtemos:

$$e^{-\sigma x} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} F(\sigma + i\xi) d\xi. \quad (4.202)$$

Multiplicando por $e^{\sigma x}$:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma x} e^{i\xi x} F(\sigma + i\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\sigma+i\xi)x} F(\sigma + i\xi) d\xi. \quad (4.203)$$

Se $s = \sigma + i\xi$, então $d\xi = \frac{ds}{i}$:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{sx} F(s) ds. \quad (4.204)$$

Esta é a **Transformada Inversa de Laplace bilateral**:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{sx} F(s) ds. \quad (4.205)$$

Observação 4.44. Embora a ideia da existência de conexão entre as transformadas de Fourier e Laplace seja bem intuitiva, elas não são equivalentes. A Transformada de Laplace bilateral pode ser considerada como uma generalização da Transformada de Fourier, na

qual a frequência $i\xi$ foi generalizada para $s = \sigma + i\xi$. Por outro lado, não é verdade que dada uma função f e sua Transformada de Fourier $\mathfrak{F}[f]$, a simples substituição de $i\xi$ por s faça com que tenhamos a Transformada de Laplace de f . Tal fato está intimamente ligado às propriedades de f .

4.3.3 A Função Degrau Unitário e a Conexão entre as Transformadas

Exemplo 4.45 (Função de Heaviside). Seja a função $U(x - a)$ (também chamada de **função degrau unitário**), definida por:

$$U(x - a) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ 1, & x > a, \end{cases} \quad a \geq 0. \quad (4.206)$$

Observe que a função não está definida para $x = a$. Se quisermos definir um valor para $U(0)$, ou seja, $U(a - a)$, qual seria uma escolha adequada? Vamos analisar esta possibilidade definindo:

$$\mathfrak{U}(x - a) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ k, & x = a, \\ 1, & x > a. \end{cases} \quad (4.207)$$

Onde o valor de k pretendemos determinar através da Transformada de Fourier. Certamente, para qualquer escolha de k , temos uma descontinuidade em $x = a$.

Vamos calcular a Transformada de Laplace unilateral de $\mathfrak{U}(x - a)$:

$$\mathcal{L}\{\mathfrak{U}(x - a)\} = \int_0^\infty e^{-sx} \mathfrak{U}(x - a) dx = \int_a^\infty e^{-sx} dx \quad (4.208)$$

$$= \left[-\frac{e^{-sx}}{s} \right]_a^\infty = \frac{e^{-sa}}{s}, \quad s > 0. \quad (4.209)$$

Por outro lado, se tentarmos calcular a Transformada de Fourier, temos:

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-i\xi x} \mathfrak{U}(x - a) dx = \int_a^\infty e^{-i\xi x} dx. \quad (4.210)$$

Esta integral não converge, pois quando $x \rightarrow \infty$, as funções seno e cosseno oscilam infinitamente entre -1 e 1 .

No entanto, se multiplicarmos a função $\mathfrak{U}(x - a)$ pela expressão $e^{-\alpha x}$, com $\alpha > 0$,

temos:

$$\mathfrak{F}[e^{-\alpha x}\mathfrak{U}(x-a)](\xi) = \int_a^{\infty} e^{-i\xi x} e^{-\alpha x} dx \quad (4.211)$$

$$= \int_a^{\infty} e^{-(\alpha+i\xi)x} dx \quad (4.212)$$

$$= \left[-\frac{e^{-(\alpha+i\xi)x}}{\alpha+i\xi} \right]_a^{\infty} = \frac{e^{-(\alpha+i\xi)a}}{\alpha+i\xi}. \quad (4.213)$$

Agora, aplicando a Transformada de Fourier inversa:

$$e^{-\alpha x}\mathfrak{U}(x-a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(\alpha+i\xi)a}}{\alpha+i\xi} e^{i\xi x} d\xi. \quad (4.214)$$

Para $x = a$:

$$e^{-\alpha a}\mathfrak{U}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(\alpha+i\xi)a}}{\alpha+i\xi} e^{i\xi a} d\xi \quad (4.215)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\alpha a} e^{-i\xi a} e^{i\xi a}}{\alpha+i\xi} d\xi \quad (4.216)$$

$$= \frac{e^{-\alpha a}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha+i\xi} d\xi. \quad (4.217)$$

Portanto:

$$\mathfrak{U}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha+i\xi} d\xi \quad (4.218)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha-i\xi}{\alpha^2+\xi^2} d\xi \quad (4.219)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2+\xi^2} d\xi - \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi}{\alpha^2+\xi^2} d\xi. \quad (4.220)$$

A segunda integral converge para zero, pois o integrando é ímpar. Na primeira, fazendo $\xi = \alpha \tan \theta$, $d\xi = \alpha \sec^2 \theta d\theta$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2+\xi^2} d\xi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\alpha}{\alpha^2(1+\tan^2 \theta)} \alpha \sec^2 \theta d\theta \quad (4.221)$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = \pi. \quad (4.222)$$

Logo:

$$\mathfrak{U}(0) = \frac{1}{2\pi} \cdot \pi = \frac{1}{2}. \quad (4.223)$$

A Transformada de Fourier nos sugere a escolha $k = \frac{1}{2}$, que está em conformidade com o fato de que, nos pontos de descontinuidade, a série de Fourier converge para a média aritmética dos limites laterais. Por outro lado, a substituição $s = \alpha + i\xi$ na expressão

$\frac{e^{-(\alpha+i\xi)a}}{\alpha+i\xi}$ nos fornece uma conexão entre as transformadas de Fourier e Laplace, visto que se tem:

$$\mathfrak{F}[e^{-\alpha x}\mathfrak{U}(x-a)] = \mathcal{L}\{\mathfrak{U}(x-a)\}. \quad (4.224)$$

4.4 Propriedades Adicionais da Transformada de Fourier

4.4.1 Transformada de Fourier de e^{-x^2}

Exemplo 4.46 (Transformada da Gaussiana). Calcule a Transformada de Fourier de $f(x) = e^{-x^2}$.

Resolução: Temos:

$$\mathfrak{F}[e^{-x^2}](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+i\xi x)} dx. \quad (4.225)$$

Completando o quadrado:

$$x^2 + i\xi x = \left(x + \frac{i\xi}{2}\right)^2 + \frac{\xi^2}{4}. \quad (4.226)$$

Portanto:

$$\mathfrak{F}[e^{-x^2}](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi^2/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+\frac{i\xi}{2})^2} dx. \quad (4.227)$$

Usando o resultado conhecido $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+a)^2} dx = \sqrt{\pi}$ (que vale mesmo para $a \in \mathbb{C}$), obtemos:

$$\mathfrak{F}[e^{-x^2}](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi^2/4} \sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\xi^2/4}. \quad (4.228)$$

Note que a Transformada de Fourier de uma Gaussiana é outra Gaussiana. Esta propriedade é fundamental em processamento de sinais e em Mecânica Quântica.

4.4.2 Transformada de Fourier da Derivada da Gaussiana

Exemplo 4.47 (Transformada de xe^{-x^2}). Usando a propriedade da derivada da transformada:

$$\mathfrak{F}[xe^{-x^2}](\xi) = iD_{\xi}\mathfrak{F}[e^{-x^2}](\xi). \quad (4.229)$$

Como $\mathfrak{F}[e^{-x^2}](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\xi^2/4}$:

$$D_{\xi}\mathfrak{F}[e^{-x^2}](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{\xi}{2}\right) e^{-\xi^2/4} = -\frac{\xi}{2\sqrt{2}} e^{-\xi^2/4}. \quad (4.230)$$

Portanto:

$$\mathfrak{F}[xe^{-x^2}](\xi) = -\frac{i\xi}{2\sqrt{2}}e^{-\xi^2/4}. \quad (4.231)$$

4.5 Propriedades Adicionais da Transformada de Laplace

4.5.1 Comportamento de $F(s)$ quando $s \rightarrow \infty$

Proposição 4.48 (Comportamento no Infinito). *Seja $f(x)$ seccionalmente contínua em $[0, \infty)$ e de ordem exponencial. Então:*

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}\{f(x)\} = 0. \quad (4.232)$$

Demonstração. Como f é de ordem exponencial, existem $M, c > 0$ tais que $|f(x)| \leq Me^{cx}$ para x suficientemente grande.

Para $s > c$:

$$|\mathcal{L}\{f(x)\}| \leq \int_0^\infty e^{-sx}|f(x)|dx \quad (4.233)$$

$$\leq \int_0^\infty e^{-sx}Me^{cx}dx = M \int_0^\infty e^{-(s-c)x}dx = \frac{M}{s-c}. \quad (4.234)$$

Portanto, $\lim_{s \rightarrow \infty} |\mathcal{L}\{f(x)\}| = 0$. $\square$

4.5.2 Integral de uma Transformada de Laplace

Proposição 4.49 (Integral no Domínio da Frequência). *Se $F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}$ e $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ existe, então:*

$$\int_s^\infty F(u)du = \mathcal{L}\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}. \quad (4.235)$$

Demonstração.

$$\int_s^\infty F(u)du = \int_s^\infty \int_0^\infty e^{-ux}f(x)dxdu \quad (4.236)$$

$$= \int_0^\infty f(x) \int_s^\infty e^{-ux}dudx \quad (4.237)$$

$$= \int_0^\infty f(x) \left[-\frac{e^{-ux}}{x} \right]_s^\infty dx \quad (4.238)$$

$$= \int_0^\infty \frac{f(x)}{x} e^{-sx}dx = \mathcal{L}\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}. \quad (4.239)$$

$\square$

Exemplo 4.50 (Aplicação: Transformada de $\frac{\text{sen } x}{x}$). Calcule $\mathcal{L}\left\{\frac{\text{sen } x}{x}\right\}$.

Resolução: Sabemos que $\mathcal{L}\{\text{sen } x\} = \frac{1}{s^2+1}$.

Pela propriedade da integral no domínio da frequência:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\text{sen } x}{x}\right\} = \int_s^\infty \frac{du}{u^2+1} = [\arctan u]_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctan s = \arctan\left(\frac{1}{s}\right). \quad (4.240)$$

4.6 A Integral $\int_0^\infty \frac{\text{sen } x}{x} dx$

A integral $\int_0^\infty \frac{\text{sen } x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ é um resultado clássico que pode ser demonstrado usando a Transformada de Laplace.

Proposição 4.51 (Integral de Dirichlet).

$$\int_0^\infty \frac{\text{sen } x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \quad (4.241)$$

Demonstração. Definimos, para $s \geq 0$:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \frac{\text{sen } x}{x} dx. \quad (4.242)$$

Mostraremos que a integral converge uniformemente para $s \geq 0$. Usando integração por partes, com $u = \frac{e^{-sx}}{x}$ e $dv = \text{sen } x dx$:

$$\int_\eta^\infty e^{-sx} \frac{\text{sen } x}{x} dx = \left[-\frac{e^{-sx}}{x} \cos x \right]_\eta^\infty - \int_\eta^\infty \frac{(1+sx)e^{-sx}}{x^2} \cos x dx \quad (4.243)$$

$$= \frac{e^{-s\eta}}{\eta} \cos \eta - \int_\eta^\infty \frac{(1+sx)e^{-sx}}{x^2} \cos x dx. \quad (4.244)$$

Portanto:

$$\left| \int_\eta^\infty e^{-sx} \frac{\text{sen } x}{x} dx \right| \leq \frac{1}{\eta} + \int_\eta^\infty \frac{1}{x^2} dx \leq \frac{2}{\eta}. \quad (4.245)$$

Isso mostra que a integral converge uniformemente para $s \geq 0$, logo $F(s)$ é contínua em $s \geq 0$.

Agora, usando a propriedade da derivada:

$$F'(s) = - \int_0^\infty e^{-sx} \text{sen } x dx = -\frac{1}{s^2+1}, \quad s > 0. \quad (4.246)$$

Integrando:

$$F(s) = -\arctan s + C. \quad (4.247)$$

Como $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$:

$$0 = -\frac{\pi}{2} + C \implies C = \frac{\pi}{2}. \quad (4.248)$$

Portanto, $F(s) = \frac{\pi}{2} - \arctan s$.

Finalmente, como F é contínua em $s = 0$:

$$F(0) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} - \arctan 0 = \frac{\pi}{2}. \quad (4.249)$$

□

4.7 Considerações Finais do Capítulo

Neste capítulo, desenvolvemos a teoria das transformadas de Fourier e de Laplace de forma abrangente e detalhada. Vimos:

- A dedução da Integral de Fourier a partir da série de Fourier;
- A definição formal da Transformada de Fourier e da Transformada Inversa;
- As propriedades fundamentais da Transformada de Fourier (linearidade, continuidade, transformada da derivada, derivada da transformada, translação, modulação, mudança de escala);
- O espaço de Schwartz Ω e a preservação da Transformada de Fourier neste espaço;
- A definição da Transformada de Laplace e suas condições de existência;
- As transformadas de funções elementares e as propriedades da Transformada de Laplace;
- A Transformada de Laplace Inversa;
- As conexões e diferenças entre as transformadas de Fourier e Laplace;
- O produto convolução e suas aplicações;
- A demonstração da integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

No próximo capítulo, aplicaremos estas transformadas na resolução de equações diferenciais parciais clássicas, incluindo a equação do calor, a equação da onda e a equação de Laplace.

APLICAÇÕES DA SÉRIE DE FOURIER, DA TRANSFORMADA DE FOURIER E DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

05

Capítulo 5

Aplicações da Série de Fourier, da Transformada de Fourier e da Transformada de Laplace

Neste capítulo, veremos alguns exemplos de como a Transformada de Laplace, a série de Fourier e a Transformada de Fourier podem ser aplicadas na resolução de Equações Diferenciais Parciais (EDPs). O leitor interessado pode encontrar várias aplicações de $\mathcal{L}$, $\mathcal{F}$ e da série de Fourier em um contexto bem mais amplo nas referências [1], [3], [8] e [12], de onde, aliás, foram extraídos os exemplos deste texto.

As aplicações das séries e transformadas de Fourier e da Transformada de Laplace são vastas e abrangem áreas como:

- **Física:** propagação de ondas, condução de calor, mecânica quântica;
- **Engenharia:** processamento de sinais, controle de sistemas, circuitos elétricos;
- **Matemática:** resolução de equações diferenciais, teoria dos potenciais;
- **Geofísica:** prospecção sísmica, análise de ondas;
- **Acústica:** análise de som, filtragem de sinais.

5.1 Aplicações da Transformada de Laplace

A Transformada de Laplace é particularmente útil na resolução de problemas de valor inicial e de contorno envolvendo equações diferenciais lineares com coeficientes constantes. Sua principal vantagem é transformar a equação diferencial em uma equação algébrica.

5.1.1 Transformada de Laplace para Funções de Duas Variáveis

Definimos a Transformada de Laplace de uma função de duas variáveis $u(x, t)$ com relação à variável t como:

$$\mathcal{L}\{u(x, t)\} = \int_0^\infty e^{-st} u(x, t) dt = U(x, s), \quad (5.1)$$

onde tratamos x como um parâmetro.

Admitimos que as propriedades vistas anteriormente se aplicam também a funções de duas variáveis. Por exemplo, para a derivada parcial com relação a t :

$$\mathcal{L}\{u_t\} = s\mathcal{L}\{u(x, t)\} - u(x, 0) = sU(x, s) - u(x, 0). \quad (5.2)$$

Para a derivada segunda com relação a t :

$$\mathcal{L}\{u_{tt}\} = s^2 U(x, s) - su(x, 0) - u_t(x, 0). \quad (5.3)$$

Além disso, como estamos fazendo a transformação com relação a t , podemos permutar a diferenciação e a integração na transformada de $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} = \frac{d^2}{dx^2} \mathcal{L}\{u(x, t)\} = \frac{d^2 U}{dx^2}. \quad (5.4)$$

Exemplo 5.1 (Equação da Onda com Transformada de Laplace). Vamos encontrar a Transformada de Laplace da equação da onda:

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}, \quad t > 0. \quad (5.5)$$

Resolução: Aplicando a Transformada de Laplace com relação a t :

$$\mathcal{L}\{a^2 u_{xx}\} = \mathcal{L}\{u_{tt}\}. \quad (5.6)$$

Usando (5.3) e (5.4):

$$a^2 \frac{d^2}{dx^2} \mathcal{L}\{u(x, t)\} = s^2 \mathcal{L}\{u(x, t)\} - su(x, 0) - u_t(x, 0). \quad (5.7)$$

Portanto:

$$a^2 \frac{d^2 U}{dx^2} - s^2 U = -su(x, 0) - u_t(x, 0). \quad (5.8)$$

Observe que considerando s como um parâmetro em (5.8), temos uma Equação Diferencial Ordinária na variável x .

Exemplo 5.2 (Problema de Valor Inicial e de Contorno). Dada a equação da onda:

$$u_{xx} = u_{tt}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (5.9)$$

sujeita a:

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, & u(1, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = 0, & u_t|_{t=0} = \text{sen}(\pi x), & 0 < x < 1. \end{cases} \quad (5.10)$$

Vamos resolvê-la usando a Transformada de Laplace.

Resolução: Podemos observar que temos a equação da onda com $a = 1$. Aplicando a transformada, usando (5.8) e as condições iniciais:

$$\frac{d^2 U}{dx^2} - s^2 U = -\text{sen}(\pi x), \quad (5.11)$$

onde $U(x, s) = \mathcal{L}\{u(x, t)\}$.

As condições de contorno são funções de t , então devemos calcular também suas Transformadas de Laplace:

$$\mathcal{L}\{u(0, t)\} = U(0, s) = 0, \quad \mathcal{L}\{u(1, t)\} = U(1, s) = 0. \quad (5.12)$$

A equação $\frac{d^2 U}{dx^2} - s^2 U = -\text{sen}(\pi x)$ é uma EDO linear não homogênea. Sua solução geral é:

$$U(x, s) = U_c(x, s) + U_p(x, s), \quad (5.13)$$

onde U_c é a solução da homogênea associada e U_p é uma solução particular.

A solução da homogênea $\frac{d^2 U}{dx^2} - s^2 U = 0$ é:

$$U_c(x, s) = c_1 \cosh(sx) + c_2 \sinh(sx). \quad (5.14)$$

Para a solução particular, tentamos $U_p(x, s) = A \text{sen}(\pi x)$. Substituindo:

$$\frac{d^2}{dx^2}[A \text{sen}(\pi x)] - s^2[A \text{sen}(\pi x)] = -\text{sen}(\pi x), \quad (5.15)$$

$$-A\pi^2 \text{sen}(\pi x) - s^2 A \text{sen}(\pi x) = -\text{sen}(\pi x), \quad (5.16)$$

$$-A(\pi^2 + s^2) \text{sen}(\pi x) = -\text{sen}(\pi x). \quad (5.17)$$

Portanto, $A(\pi^2 + s^2) = 1$, ou seja, $A = \frac{1}{s^2 + \pi^2}$.

Assim:

$$U_p(x, s) = \frac{1}{s^2 + \pi^2} \text{sen}(\pi x). \quad (5.18)$$

Logo:

$$U(x, s) = c_1 \cosh(sx) + c_2 \sinh(sx) + \frac{1}{s^2 + \pi^2} \text{sen}(\pi x). \quad (5.19)$$

190

FOURIER E A TRANSFORMADA DE LAPLACE

Aplicando $U(0, s) = 0$:

$$0 = c_1 \cosh(0) + c_2 \sinh(0) + \frac{1}{s^2 + \pi^2} \sin(0) = c_1. \quad (5.20)$$

Portanto, $c_1 = 0$.

Aplicando $U(1, s) = 0$:

$$0 = c_2 \sinh(s) + \frac{1}{s^2 + \pi^2} \sin(\pi) = c_2 \sinh(s). \quad (5.21)$$

Portanto, $c_2 = 0$.

Assim:

$$U(x, s) = \frac{1}{s^2 + \pi^2} \sin(\pi x). \quad (5.22)$$

Finalmente, aplicando a Transformada Inversa de Laplace com relação a t :

$$u(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + \pi^2} \sin(\pi x) \right\} \quad (5.23)$$

$$= \sin(\pi x) \cdot \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + \pi^2} \right\} \quad (5.24)$$

$$= \sin(\pi x) \cdot \frac{1}{\pi} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\pi}{s^2 + \pi^2} \right\} \quad (5.25)$$

$$= \frac{1}{\pi} \sin(\pi x) \sin(\pi t). \quad (5.26)$$

Verificação: Vamos verificar se a solução satisfaz as condições:

- $u(0, t) = \frac{1}{\pi} \sin(0) \sin(\pi t) = 0$;
- $u(1, t) = \frac{1}{\pi} \sin(\pi) \sin(\pi t) = 0$;
- $u(x, 0) = \frac{1}{\pi} \sin(\pi x) \sin(0) = 0$;
- $u_t(x, 0) = \frac{1}{\pi} \sin(\pi x) \cdot \pi \cos(0) = \sin(\pi x)$.

Verificando a equação:

$$u_{xx} = \frac{1}{\pi} (-\pi^2 \sin(\pi x)) \sin(\pi t) = -\pi \sin(\pi x) \sin(\pi t), \quad (5.27)$$

$$u_{tt} = \frac{1}{\pi} \sin(\pi x) (-\pi^2 \sin(\pi t)) = -\pi \sin(\pi x) \sin(\pi t). \quad (5.28)$$

Portanto, $u_{xx} = u_{tt}$.

5.1.2 Aplicação da Transformada de Laplace com Condições Iniciais Não Nulas

Exemplo 5.3 (Equação do Calor com Transformada de Laplace). Considere o problema de condução de calor em uma barra semi-infinita:

$$u_t = k u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0, \quad (5.29)$$

com condições:

$$\begin{cases} u(0, t) = u_0, & t > 0, \\ u(x, 0) = 0, & x > 0, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (5.30)$$

Resolução: Aplicando a Transformada de Laplace com relação a t :

$$\mathcal{L}\{u_t\} = k \mathcal{L}\{u_{xx}\}. \quad (5.31)$$

Usando (5.2) e (5.4):

$$sU(x, s) - u(x, 0) = k \frac{d^2 U}{dx^2}. \quad (5.32)$$

Como $u(x, 0) = 0$:

$$k \frac{d^2 U}{dx^2} - sU = 0. \quad (5.33)$$

Esta é uma EDO de segunda ordem com coeficientes constantes:

$$\frac{d^2 U}{dx^2} - \frac{s}{k} U = 0. \quad (5.34)$$

A solução geral é:

$$U(x, s) = c_1 e^{\sqrt{s/k}x} + c_2 e^{-\sqrt{s/k}x}. \quad (5.35)$$

A condição $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$ implica $\lim_{x \rightarrow \infty} U(x, s) = 0$, logo $c_1 = 0$.

Aplicando a condição de contorno $u(0, t) = u_0$:

$$U(0, s) = \mathcal{L}\{u_0\} = \frac{u_0}{s}. \quad (5.36)$$

Portanto, $c_2 = \frac{u_0}{s}$, e:

$$U(x, s) = \frac{u_0}{s} e^{-\sqrt{s/k}x}. \quad (5.37)$$

Aplicando a Transformada Inversa de Laplace, usando o resultado conhecido:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s} \right\} = \operatorname{erfc} \left(\frac{a}{2\sqrt{t}} \right), \quad (5.38)$$

onde $\operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z)$ e $\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-u^2} du$.

Portanto:

$$u(x, t) = u_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right). \quad (5.39)$$

5.2 Aplicações da Série de Fourier

A série de Fourier é amplamente utilizada na resolução de problemas de valor de contorno para equações diferenciais parciais. O método de separação de variáveis, combinado com a série de Fourier, é uma das técnicas mais poderosas para resolver EDPs.

5.2.1 Método de Separação de Variáveis

O método de separação de variáveis consiste em procurar soluções da forma:

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (5.40)$$

Substituindo na equação diferencial parcial, obtemos duas equações diferenciais ordinárias, uma para X e outra para T . As condições de contorno determinam os autovalores e autofunções do problema.

5.2.2 Equação do Calor com Condições de Dirichlet

Exemplo 5.4 (Equação do Calor em uma Barra Finita). Considere o problema de condução de calor em uma barra de comprimento L :

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad \alpha^2 = \frac{k}{\gamma\rho}, \quad (5.41)$$

com condições:

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, & u(L, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 < x < L. \end{cases} \quad (5.42)$$

Resolução: Vamos usar o método de separação de variáveis. Suponha $u(x, t) = X(x)T(t)$.

Substituindo na equação do calor:

$$\alpha^2 X''(x)T(t) = X(x)T'(t). \quad (5.43)$$

Dividindo por $\alpha^2 X(x)T(t)$:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} = \beta. \quad (5.44)$$

Como o primeiro membro depende apenas de x e o segundo apenas de t , ambos devem ser iguais a uma constante β (o autovalor).

Obtemos duas EDOs:

$$X''(x) - \beta X(x) = 0, \quad 0 < x < L, \quad (5.45)$$

$$T'(t) - \alpha^2 \beta T(t) = 0. \quad (5.46)$$

As condições de contorno $u(0, t) = u(L, t) = 0$ implicam $X(0) = X(L) = 0$.

Analisamos três casos:

Caso 1: $\beta > 0$, digamos $\beta = \lambda^2$.

$$X(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x}. \quad (5.47)$$

$X(0) = 0 \implies c_1 + c_2 = 0 \implies c_2 = -c_1$. $X(L) = 0 \implies c_1(e^{\lambda L} - e^{-\lambda L}) = 0 \implies c_1 = 0$. Portanto, $X(x) \equiv 0$, solução trivial.

Caso 2: $\beta = 0$.

$$X(x) = c_1 x + c_2. \quad (5.48)$$

$X(0) = 0 \implies c_2 = 0$. $X(L) = 0 \implies c_1 L = 0 \implies c_1 = 0$. Portanto, $X(x) \equiv 0$, solução trivial.

Caso 3: $\beta < 0$, digamos $\beta = -\lambda^2$.

$$X(x) = c_1 \cos(\lambda x) + c_2 \sin(\lambda x). \quad (5.49)$$

$$X(0) = 0 \implies c_1 = 0. \quad X(L) = 0 \implies c_2 \sin(\lambda L) = 0.$$

Para não termos a solução trivial, devemos ter $\sin(\lambda L) = 0$, ou seja:

$$\lambda L = n\pi \implies \lambda_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.50)$$

Portanto, os autovalores são:

$$\beta_n = -\lambda_n^2 = -\frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad (5.51)$$

e as autofunções:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (5.52)$$

Agora, resolvendo a EDO para T :

$$T'(t) - \alpha^2 \beta_n T(t) = 0 \implies T'(t) + \alpha^2 \lambda_n^2 T(t) = 0. \quad (5.53)$$

A solução é:

$$T_n(t) = c_n e^{-\alpha^2 \lambda_n^2 t} = c_n e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}. \quad (5.54)$$

197

FOURIER E A TRANSFORMADA DE LAPLACE

Portanto, para cada n :

$$u_n(x, t) = B_n e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right), \quad (5.55)$$

onde B_n é uma constante.

Pelo princípio de superposição:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right). \quad (5.56)$$

Usando a condição inicial $u(x, 0) = f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right). \quad (5.57)$$

Esta é a série de Fourier em senos de f no intervalo $(0, L)$. Portanto:

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx. \quad (5.58)$$

Assim, a solução é:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{L} \int_0^L f(\xi) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi \xi}{L} \right) d\xi \right] e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right). \quad (5.59)$$

Exemplo 5.5 (Equação do Calor com Condições de Neumann). Considere uma barra de comprimento L , cuja superfície total (inclusive seus extremos em $x = 0$ e $x = L$) é isolada, e tem temperatura inicial $f(x)$. Vamos determinar a temperatura subsequente desta barra.

O problema de contorno é dado por:

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (5.60)$$

sujeita a:

$$\begin{cases} u_x(0, t) = 0, & u_x(L, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & |u(x, t)| \leq M. \end{cases} \quad (5.61)$$

Resolução: Fazendo $u(x, t) = X(x)T(t)$ e separando as variáveis:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} = -\lambda^2. \quad (5.62)$$

Obtemos:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad (5.63)$$

$$T'(t) + \alpha^2 \lambda^2 T(t) = 0. \quad (5.64)$$

A solução para X é:

$$X(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x). \quad (5.65)$$

As condições de contorno $X'(0) = X'(L) = 0$ implicam:

$$X'(x) = -\lambda A \sin(\lambda x) + \lambda B \cos(\lambda x). \quad (5.66)$$

$$X'(0) = 0 \implies \lambda B = 0 \implies B = 0 \text{ (para } \lambda \neq 0). \quad X'(L) = 0 \implies -\lambda A \sin(\lambda L) = 0.$$

Para solução não trivial, $\sin(\lambda L) = 0$, logo $\lambda_n = \frac{n\pi}{L}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Para $n = 0$: $\lambda_0 = 0$, $X_0(x) = A_0$ (constante).

Para $n \geq 1$:

$$X_n(x) = A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (5.67)$$

A solução para T :

$$T_n(t) = C_n e^{-\alpha^2 \lambda_n^2 t}. \quad (5.68)$$

Portanto:

$$u_n(x, t) = A_n e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.69)$$

Pelo princípio de superposição:

$$u(x, t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (5.70)$$

Usando a condição inicial $u(x, 0) = f(x)$:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (5.71)$$

Esta é a série de Fourier em cossenos de f . Portanto:

$$A_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx, \quad (5.72)$$

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n \geq 1. \quad (5.73)$$

190

FOURIER E A TRANSFORMADA DE LAPLACE

Assim:

$$u(x, t) = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right] e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (5.74)$$

5.2.3 Equação de Laplace

Exemplo 5.6 (Equação de Laplace em um Retângulo). Suponhamos uma placa quadrada com lados de comprimento unitário, com suas faces isoladas e que tenha três lados mantidos à temperatura zero, enquanto o quarto lado é mantido à temperatura u_1 . Vamos determinar a temperatura estacionária nessa placa.

Vamos escolher o lado com temperatura u_1 como sendo aquele em que $y = 1$. Como queremos a temperatura estacionária u , que não depende do tempo t , obtém-se a equação de Laplace em duas dimensões:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0. \quad (5.75)$$

As condições de contorno são:

$$\begin{cases} u(0, y) = u(1, y) = u(x, 0) = 0, \\ u(x, 1) = u_1, \quad |u(x, 1)| < M. \end{cases} \quad (5.76)$$

Resolução: Fazemos $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Substituindo na equação de Laplace:

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0. \quad (5.77)$$

Dividindo por $X(x)Y(y)$:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda^2. \quad (5.78)$$

Obtemos:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad (5.79)$$

$$Y''(y) - \lambda^2 Y(y) = 0. \quad (5.80)$$

As soluções são:

$$X(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x), \quad (5.81)$$

$$Y(y) = C \cosh(\lambda y) + D \sinh(\lambda y). \quad (5.82)$$

As condições $u(0, y) = 0$ e $u(1, y) = 0$ implicam:

$$X(0) = 0 \implies A = 0. \quad (5.83)$$

$$X(1) = 0 \implies B \operatorname{sen}(\lambda) = 0. \quad (5.84)$$

Para solução não trivial, $\operatorname{sen}(\lambda) = 0$, logo $\lambda_n = n\pi$, $n = 1, 2, 3, \dots$

A condição $u(x, 0) = 0$ implica $Y(0) = 0$:

$$Y(0) = C \cosh(0) + D \operatorname{senh}(0) = C = 0. \quad (5.85)$$

Portanto, $Y(y) = D \operatorname{senh}(n\pi y)$.

Assim:

$$u_n(x, y) = B_n \operatorname{sen}(n\pi x) \operatorname{senh}(n\pi y). \quad (5.86)$$

Pelo princípio de superposição:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}(n\pi x) \operatorname{senh}(n\pi y). \quad (5.87)$$

Usando a condição $u(x, 1) = u_1$:

$$u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{senh}(n\pi) \operatorname{sen}(n\pi x). \quad (5.88)$$

Esta é a série de Fourier em senos de u_1 no intervalo $(0, 1)$. Portanto:

$$B_n \operatorname{senh}(n\pi) = 2 \int_0^1 u_1 \operatorname{sen}(n\pi x) dx. \quad (5.89)$$

Calculando a integral:

$$\int_0^1 u_1 \operatorname{sen}(n\pi x) dx = u_1 \left[-\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} \right]_0^1 \quad (5.90)$$

$$= u_1 \left[-\frac{\cos(n\pi)}{n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right] \quad (5.91)$$

$$= \frac{u_1}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)). \quad (5.92)$$

Portanto:

$$B_n \operatorname{senh}(n\pi) = \frac{2u_1}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)). \quad (5.93)$$

Para cada ξ fixado, esta é uma EDO:

$$\frac{dU}{dt} + k\xi^2 U = 0. \quad (5.101)$$

A solução é:

$$U(\xi, t) = C(\xi)e^{-k\xi^2 t}. \quad (5.102)$$

Para determinar $C(\xi)$, usamos a condição inicial:

$$U(\xi, 0) = \mathfrak{F}[f](\xi). \quad (5.103)$$

Portanto:

$$U(\xi, t) = \mathfrak{F}[f](\xi)e^{-k\xi^2 t}. \quad (5.104)$$

Aplicando a Transformada Inversa de Fourier:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \mathfrak{F}[f](\xi) e^{-k\xi^2 t} d\xi. \quad (5.105)$$

Como $\mathfrak{F}[f](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2 \operatorname{sen}(\xi)}{\xi}$, temos:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2 \operatorname{sen}(\xi)}{\xi} e^{-k\xi^2 t} d\xi \quad (5.106)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\xi)}{\xi} e^{-k\xi^2 t} e^{i\xi x} d\xi \quad (5.107)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\xi)}{\xi} e^{-k\xi^2 t} [\cos(\xi x) + i \operatorname{sen}(\xi x)] d\xi. \quad (5.108)$$

A integral com $\operatorname{sen}(\xi x)$ converge para zero, pois o integrando é ímpar. Portanto:

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\xi)}{\xi} \cos(\xi x) e^{-k\xi^2 t} d\xi. \quad (5.109)$$

Esta solução também pode ser escrita na forma:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} f(y) dy. \quad (5.110)$$

Esta é a **solução fundamental da equação do calor** na reta.

Teorema 5.8 (Solução da Equação do Calor). *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente contínua e limitada. Então a expressão*

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} f(y) dy \quad (5.111)$$

define uma função $u(x, t)$, C^∞ no semiplano $t > 0$, que satisfaz a equação do calor $u_t = ku_{xx}$. Além disso, a condição inicial $u(x, 0) = f(x)$ é satisfeita no seguinte sentido:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}. \quad (5.112)$$

Em particular, se f é contínua, $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = f(x)$.

Esboço da Demonstração. A demonstração completa utiliza o fato de que o núcleo do calor

$$K(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}} \quad (5.113)$$

é uma solução da equação do calor e é uma sucessão de núcleos de Dirac quando $t \rightarrow 0^+$. O teorema segue então do teorema sobre núcleos de Dirac. $\square$

Exemplo 5.9 (Transformada Cosseno de Fourier). A temperatura do estado estacionário de uma chapa semi-infinita é dada por:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad y > 0, \quad (5.114)$$

com:

$$\begin{cases} u(0, y) = 0, & u(\pi, y) = e^{-y}, & y > 0, \\ u_y|_{y=0} = 0, & 0 < x < \pi. \end{cases} \quad (5.115)$$

Determinemos $u(x, y)$.

Resolução: O domínio da variável y e a condição estabelecida em $y = 0$ nos indicam que é uma boa ideia utilizar a **Transformada Cosseno de Fourier**:

$$\mathfrak{F}_c[u(x, y)] = \int_0^\infty u(x, y) \cos(\xi y) dy = U(x, \xi). \quad (5.116)$$

Aplicando a transformada na equação de Laplace:

$$\mathfrak{F}_c[u_{xx}] + \mathfrak{F}_c[u_{yy}] = 0. \quad (5.117)$$

Sabemos que $\mathfrak{F}_c[u_{xx}] = \frac{d^2 U}{dx^2}$ e $\mathfrak{F}_c[u_{yy}] = -\xi^2 U - u_y(x, 0)$.

Como $u_y(x, 0) = 0$, obtemos:

$$\frac{d^2 U}{dx^2} - \xi^2 U = 0. \quad (5.118)$$

A solução geral é:

$$U(x, \xi) = c_1 \cosh(\xi x) + c_2 \sinh(\xi x). \quad (5.119)$$

Aplicando a transformada nas condições de contorno:

$$\mathfrak{F}_c[u(0, y)] = \mathfrak{F}_c[0] = 0, \quad (5.120)$$

$$\mathfrak{F}_c[u(\pi, y)] = \mathfrak{F}_c[e^{-y}] = \frac{1}{1 + \xi^2}. \quad (5.121)$$

Portanto:

$$U(0, \xi) = 0, \quad U(\pi, \xi) = \frac{1}{1 + \xi^2}. \quad (5.122)$$

De $U(0, \xi) = 0$, temos $c_1 = 0$.

De $U(\pi, \xi) = \frac{1}{1 + \xi^2}$:

$$c_2 \sinh(\xi\pi) = \frac{1}{1 + \xi^2} \implies c_2 = \frac{1}{(1 + \xi^2) \sinh(\xi\pi)}. \quad (5.123)$$

Portanto:

$$U(x, \xi) = \frac{\sinh(\xi x)}{(1 + \xi^2) \sinh(\xi\pi)}. \quad (5.124)$$

Aplicando a Transformada Cosseno Inversa:

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sinh(\xi x)}{(1 + \xi^2) \sinh(\xi\pi)} \cos(\xi y) d\xi. \quad (5.125)$$

5.3.2 Equação da Onda em uma Corda Infinita

Exemplo 5.10 (Equação da Onda com Transformada de Fourier). Considere a equação da onda em uma corda infinita:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (5.126)$$

com condições iniciais:

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x). \quad (5.127)$$

Resolução: Aplicando a Transformada de Fourier com relação a x :

$$\mathfrak{F}[u(x, t)] = U(\xi, t). \quad (5.128)$$

A transformada da equação dá:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + c^2 \xi^2 U = 0. \quad (5.129)$$

A solução geral desta EDO é:

$$U(\xi, t) = A(\xi) \cos(c\xi t) + B(\xi) \sin(c\xi t). \quad (5.130)$$

172

FOURIER E A TRANSFORMADA DE LAPLACE

Usando as condições iniciais transformadas:

$$U(\xi, 0) = \mathfrak{F}[f](\xi) = A(\xi), \quad (5.131)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}(\xi, 0) = \mathfrak{F}[g](\xi) = c\xi B(\xi). \quad (5.132)$$

Portanto:

$$U(\xi, t) = \mathfrak{F}[f](\xi) \cos(c\xi t) + \frac{1}{c\xi} \mathfrak{F}[g](\xi) \operatorname{sen}(c\xi t). \quad (5.133)$$

Aplicando a Transformada Inversa de Fourier:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x - ct) + f(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds. \quad (5.134)$$

Esta é a **fórmula de d'Alembert** para a equação da onda.

5.3.3 Equação de Schrödinger

Exemplo 5.11 (Equação de Schrödinger Livre). A equação de Schrödinger livre em uma dimensão é:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \quad (5.135)$$

Resolução: Aplicando a Transformada de Fourier com relação a x :

$$\mathfrak{F}[\psi(x, t)] = \Psi(\xi, t). \quad (5.136)$$

A transformada da equação dá:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \xi^2 \Psi. \quad (5.137)$$

Resolvendo:

$$\Psi(\xi, t) = \Psi(\xi, 0) e^{-i \frac{\hbar \xi^2}{2m} t}. \quad (5.138)$$

Portanto:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\xi, 0) e^{i\xi x} e^{-i \frac{\hbar \xi^2}{2m} t} d\xi. \quad (5.139)$$

5.3.4 Aplicação em Circuitos Elétricos

Exemplo 5.12 (Circuito RLC em Série). Considere um circuito RLC em série com resistência R , indutância L e capacitância C , sujeito a uma força eletromotriz $E(t)$. A equação que descreve a carga $q(t)$ no capacitor é:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E(t). \quad (5.140)$$

Suponha que $E(t) = E_0$ (constante), com condições iniciais $q(0) = 0$ e $i(0) = q'(0) = 0$. Vamos resolver usando a Transformada de Laplace.

Resolução: Aplicando a Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L} \left\{ L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q \right\} = \mathcal{L}\{E_0\}. \quad (5.141)$$

Usando as propriedades da transformada:

$$L[s^2 Q(s) - sq(0) - q'(0)] + R[sQ(s) - q(0)] + \frac{1}{C}Q(s) = \frac{E_0}{s}. \quad (5.142)$$

Com as condições iniciais $q(0) = 0$ e $q'(0) = 0$:

$$Ls^2 Q(s) + RsQ(s) + \frac{1}{C}Q(s) = \frac{E_0}{s}. \quad (5.143)$$

Fatorando $Q(s)$:

$$Q(s) \left(Ls^2 + Rs + \frac{1}{C} \right) = \frac{E_0}{s}. \quad (5.144)$$

Portanto:

$$Q(s) = \frac{E_0}{s \left(Ls^2 + Rs + \frac{1}{C} \right)}. \quad (5.145)$$

Fatorando o denominador:

$$Ls^2 + Rs + \frac{1}{C} = L \left(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} \right). \quad (5.146)$$

Definindo $\alpha = \frac{R}{2L}$ e $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$:

$$Q(s) = \frac{E_0}{Ls(s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2)}. \quad (5.147)$$

Agora, dependendo do valor do discriminante $\Delta = \alpha^2 - \omega_0^2$, temos três casos:

Caso 1: $\alpha^2 > \omega_0^2$ (superamortecido). As raízes são reais:

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}, \quad s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}. \quad (5.148)$$

Decompondo em frações parciais:

$$Q(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s - s_1} + \frac{C}{s - s_2}. \quad (5.149)$$

Calculando os coeficientes:

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} sQ(s) = \frac{E_0}{L\omega_0^2} = CE_0, \quad (5.150)$$

$$B = \lim_{s \rightarrow s_1} (s - s_1)Q(s) = \frac{E_0}{Ls_1(s_1 - s_2)}, \quad (5.151)$$

$$C = \lim_{s \rightarrow s_2} (s - s_2)Q(s) = \frac{E_0}{Ls_2(s_2 - s_1)}. \quad (5.152)$$

Aplicando a transformada inversa:

$$q(t) = A + Be^{s_1 t} + Ce^{s_2 t}. \quad (5.153)$$

Caso 2: $\alpha^2 = \omega_0^2$ (criticamente amortecido). Raiz dupla $s = -\alpha$:

$$Q(s) = \frac{E_0}{Ls(s + \alpha)^2}. \quad (5.154)$$

Decompondo:

$$Q(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \alpha} + \frac{C}{(s + \alpha)^2}. \quad (5.155)$$

Calculando os coeficientes:

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} sQ(s) = \frac{E_0}{L\alpha^2} = CE_0, \quad (5.156)$$

$$C = \lim_{s \rightarrow -\alpha} (s + \alpha)^2 Q(s) = \frac{E_0}{L(-\alpha)} = -\frac{E_0}{L\alpha}, \quad (5.157)$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -\alpha} \frac{d}{ds} [(s + \alpha)^2 Q(s)] = \frac{E_0}{L\alpha^2}. \quad (5.158)$$

Aplicando a transformada inversa:

$$q(t) = CE_0 - CE_0 e^{-\alpha t} (1 + \alpha t). \quad (5.159)$$

Caso 3: $\alpha^2 < \omega_0^2$ (subamortecido). Raízes complexas conjugadas:

$$s = -\alpha \pm i\omega_d, \quad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}. \quad (5.160)$$

Decompondo:

$$Q(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{(s + \alpha)^2 + \omega_d^2}. \quad (5.161)$$

Calculando:

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} sQ(s) = CE_0. \quad (5.162)$$

Para B e C , temos:

$$Q(s) = \frac{CE_0}{s} - CE_0 \frac{s + 2\alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega_d^2}. \quad (5.163)$$

Aplicando a transformada inversa:

$$q(t) = CE_0 \left[1 - e^{-\alpha t} \left(\cos(\omega_d t) + \frac{\alpha}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right) \right]. \quad (5.164)$$

A corrente é $i(t) = q'(t)$:

$$i(t) = \frac{E_0}{\omega_d L} e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t). \quad (5.165)$$

Este exemplo mostra como a Transformada de Laplace transforma uma equação diferencial de segunda ordem em uma equação algébrica, facilitando a obtenção da solução. A escolha do caso (superamortecido, criticamente amortecido ou subamortecido) depende dos valores dos parâmetros do circuito.

5.3.5 Aplicação em Sistemas de Controle

Exemplo 5.13 (Função de Transferência). Em sistemas de controle, a Transformada de Laplace é usada para definir a **função de transferência** de um sistema. Considere um sistema linear invariante no tempo descrito pela equação diferencial:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + \cdots + b_0 u. \quad (5.166)$$

Aplicando a Transformada de Laplace com condições iniciais nulas:

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0) Y(s) = (b_m s^m + \cdots + b_0) U(s). \quad (5.167)$$

A função de transferência é definida como:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0}. \quad (5.168)$$

Para um sistema massa-mola-amortecedor:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + ky = F(t). \quad (5.169)$$

A função de transferência é:

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k}. \quad (5.170)$$

A resposta ao impulso unitário é:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}. \quad (5.171)$$

Para o caso subamortecido ($c^2 < 4mk$):

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\alpha t} \text{sen}(\omega_d t), \quad (5.172)$$

onde $\alpha = \frac{c}{2m}$ e $\omega_d = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$.

A Transformada de Fourier é particularmente útil para resolver problemas em domínios infinitos ou semi-infinitos, onde as séries de Fourier não são adequadas.

5.3.6 Processamento de Sinais

Exemplo 5.14 (Filtragem de Sinais). Em processamento de sinais, a Transformada de Fourier é usada para analisar o conteúdo de frequência de um sinal. Um filtro ideal passa-baixa tem resposta em frequência:

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c, \\ 0, & |\omega| > \omega_c. \end{cases} \quad (5.173)$$

A resposta ao impulso do filtro é a Transformada Inversa de Fourier:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (5.174)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{i\omega t} d\omega \quad (5.175)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{i\omega t}}{it} \right]_{-\omega_c}^{\omega_c} \quad (5.176)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i\omega_c t} - e^{-i\omega_c t}}{it} \quad (5.177)$$

$$= \frac{\text{sen}(\omega_c t)}{\pi t}. \quad (5.178)$$

Portanto, a resposta ao impulso de um filtro passa-baixa ideal é:

$$h(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}(\omega_c t), \quad (5.179)$$

onde $\text{sinc}(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$.

Exemplo 5.15 (Filtro Passa-Alta). Um filtro passa-alta ideal tem resposta em frequência:

$$H(\omega) = \begin{cases} 0, & |\omega| \leq \omega_c, \\ 1, & |\omega| > \omega_c. \end{cases} \quad (5.180)$$

Sua resposta ao impulso é:

$$h(t) = \delta(t) - \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}(\omega_c t), \quad (5.181)$$

onde $\delta(t)$ é a função Delta de Dirac.

Exemplo 5.16 (Poço de Potencial Infinito). Considere uma partícula em um poço de potencial infinito de largura L :

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < L, \\ \infty, & x \leq 0 \text{ ou } x \geq L. \end{cases} \quad (5.182)$$

A equação de Schrödinger independente do tempo é:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi. \quad (5.183)$$

Dentro do poço ($0 < x < L$), $V(x) = 0$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi. \quad (5.184)$$

A solução geral é:

$$\psi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx), \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}. \quad (5.185)$$

As condições de contorno $\psi(0) = \psi(L) = 0$ implicam:

$$\psi(0) = B = 0, \quad \psi(L) = A \sin(kL) = 0. \quad (5.186)$$

Para solução não trivial, $\sin(kL) = 0$, logo $kL = n\pi$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Portanto:

$$k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}. \quad (5.187)$$

As autofunções são:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (5.188)$$

Esta é exatamente uma série de Fourier em senos! A expansão de qualquer função de

170 FOURIER E A TRANSFORMADA DE LAPLACE

onda inicial $\psi(x, 0)$ em autofunções é:

$$\psi(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x), \quad (5.189)$$

onde:

$$c_n = \int_0^L \psi(x, 0) \psi_n(x) dx. \quad (5.190)$$

A evolução temporal é:

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar}. \quad (5.191)$$

5.3.7 Geofísica: Prospecção Sísmica

Exemplo 5.17 (Análise de Ondas Sísmicas). Em prospecção sísmica, ondas elásticas são geradas na superfície e se propagam através do subsolo. A equação de onda elástica em um meio homogêneo é:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u, \quad (5.192)$$

onde c é a velocidade da onda.

Para uma fonte pontual no instante $t = 0$ na posição $x = 0$, a solução em 3D é:

$$u(r, t) = \frac{1}{4\pi c^2 r} \delta\left(t - \frac{r}{c}\right), \quad (5.193)$$

onde $r = |\mathbf{x}|$.

Em geofísica, usamos a Transformada de Fourier para analisar o espectro de frequência do sinal recebido. Se $s(t)$ é o sinal registrado no geofone, sua Transformada de Fourier é:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (5.194)$$

O espectro de potência é $|S(\omega)|^2$, e a função de autocorrelação é:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) s(t + \tau) dt. \quad (5.195)$$

Pelo teorema de Wiener-Khinchin:

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (5.196)$$

A deconvolução sísmica usa a Transformada de Fourier para remover os efeitos da fonte e da propagação:

$$S(\omega) = F(\omega) G(\omega) R(\omega), \quad (5.197)$$

onde F é o espectro da fonte, G é a função de Green do meio, e R é a refletividade do subsolo.

A refletividade é obtida por:

$$R(\omega) = \frac{S(\omega)}{F(\omega)G(\omega)}. \quad (5.198)$$

5.4 Aplicações em Acústica

Exemplo 5.18 (Análise Espectral de Som). Um som puro é uma onda senoidal:

$$p(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi). \quad (5.199)$$

Sua Transformada de Fourier é:

$$P(\omega) = \frac{A}{2} [e^{i\phi} \delta(\omega - \omega_0) + e^{-i\phi} \delta(\omega + \omega_0)]. \quad (5.200)$$

Para um som complexo, como a voz humana:

$$p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_0 t + \phi_n). \quad (5.201)$$

Sua Transformada de Fourier é:

$$P(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2} [e^{i\phi_n} \delta(\omega - n\omega_0) + e^{-i\phi_n} \delta(\omega + n\omega_0)]. \quad (5.202)$$

O espectro de frequência mostra os harmônicos da voz. A filtragem de um sinal de áudio é feita multiplicando a Transformada de Fourier por uma função de filtro:

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega). \quad (5.203)$$

Um filtro passa-banda tem:

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega_1 \leq |\omega| \leq \omega_2, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.204)$$

Exemplo 5.19 (Equalização de Áudio). Um equalizador gráfico usa filtros passa-banda para ajustar o espectro do som. A resposta em frequência do equalizador é:

$$H(\omega) = \sum_{k=1}^N G_k H_k(\omega), \quad (5.205)$$

190 FOURIER E A TRANSFORMADA DE LAPLACE

onde G_k é o ganho do k -ésimo filtro e $H_k(\omega)$ é sua resposta em frequência.

O sinal equalizado é:

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)X(\omega)\}. \quad (5.206)$$

Em termos da Transformada de Laplace, um filtro de áudio pode ser representado como:

$$H(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}, \quad (5.207)$$

onde Q é o fator de qualidade do filtro.

5.5 Aplicações em Teoria dos Potenciais

Exemplo 5.20 (Potencial Eletrostático). O potencial eletrostático $\phi(\mathbf{r})$ em uma região sem cargas satisfaz a equação de Laplace:

$$\nabla^2 \phi = 0. \quad (5.208)$$

Em coordenadas esféricas, a solução geral é:

$$\phi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (A_{lm}r^l + B_{lm}r^{-l-1})Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (5.209)$$

onde Y_{lm} são os harmônicos esféricos, que são as autofunções do Laplaciano esférico.

A Transformada de Fourier do potencial para uma distribuição de carga $\rho(\mathbf{r})$:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'. \quad (5.210)$$

Aplicando a Transformada de Fourier em 3D:

$$\mathfrak{F}\{\phi\}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\epsilon_0 k^2} \mathfrak{F}\{\rho\}(\mathbf{k}). \quad (5.211)$$

Portanto:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3 \epsilon_0} \int \frac{\mathfrak{F}\{\rho\}(\mathbf{k})}{k^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{k}. \quad (5.212)$$

Exemplo 5.21 (Potencial Gravitacional). O potencial gravitacional Φ satisfaz a equação de Poisson:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho. \quad (5.213)$$

Aplicando a Transformada de Fourier:

$$-k^2 \mathfrak{F}\{\Phi\}(\mathbf{k}) = 4\pi G \mathfrak{F}\{\rho\}(\mathbf{k}). \quad (5.214)$$

Portanto:

$$\Phi(\mathbf{r}) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'. \quad (5.215)$$

Para uma distribuição de massa esfericamente simétrica:

$$\Phi(r) = -\frac{GM(r)}{r}, \quad (5.216)$$

onde $M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r')r'^2 dr'$.

5.5.1 Sistemas de Controle

Exemplo 5.22 (Controlador PID). Um controlador PID tem função de transferência:

$$G_c(s) = K_p + K_i \frac{1}{s} + K_d s. \quad (5.217)$$

A função de transferência de malha fechada é:

$$G_{cl}(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)}, \quad (5.218)$$

onde $G_p(s)$ é a função de transferência da planta.

Para um sistema de primeira ordem $G_p(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$:

$$G_{cl}(s) = \frac{K(K_p + K_i/s + K_d s)}{\tau s + 1 + K(K_p + K_i/s + K_d s)}. \quad (5.219)$$

Multiplicando por s :

$$G_{cl}(s) = \frac{K(K_p s + K_i + K_d s^2)}{(\tau + K K_d)s^2 + (1 + K K_p)s + K K_i}. \quad (5.220)$$

Os polos do sistema em malha fechada determinam a estabilidade e o comportamento do sistema.

Neste capítulo, vimos diversas aplicações das séries de Fourier, da Transformada de Fourier e da Transformada de Laplace em diferentes áreas do conhecimento. Estas técnicas são fundamentais em diversas áreas da ciência e engenharia, e a compreensão de seus fundamentos é essencial para qualquer estudante ou profissional que trabalhe com fenômenos modelados por equações diferenciais parciais ou sistemas lineares.

BIBLIOGRAFIA

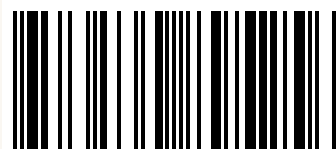
Bibliografia

- [1] BASSANEZI, Rodney Carlos; FERREIRA JR, Wilson Castro. **Equações Diferenciais com Aplicações**. São Paulo: Harbra, 1988.
- [2] BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 2010.
- [3] FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais**. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- [4] GONDAR, J. Lopes; CIPOLATTI, R. **Iniciação à Física Matemática: Modelagem de Processos e Métodos de Solução**. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.
- [5] HSU, Hwei P. **Sinais e Sistemas**. Tradução: Anatólio Laschuk. São Paulo: Bookman Companhia Editora, 2012.
- [6] LIMA, Elon Lages. **Um Curso de Análise**. Vol. 1. 14. ed. Rio de Janeiro: Associação Nacional de Matemática Pura e Aplicada (SBM), 2014.
- [7] LOUREDO, Aldo Trajano; OLIVEIRA, Alexandro Marinho. **Um Primeiro Curso de Álgebra Linear**. Campina Grande: EDUEPB, 2015.
- [8] SPIEGEL, Murray R. **Análise de Fourier**. Tradução: Alfredo Alves de Farias. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1977.
- [9] TOLSTOV, George P. **Fourier Series**. Translated from the Russian by Richard A. Silverman. New York: Dover Publications, 2015.
- [10] TONIDANDEL, D. A. V.; ARAÚJO, A. E. A. **Conectando Transformadas: Fourier e Laplace**. In: *Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automática (CBA)*. Campina Grande, 2012.
- [11] ZILL, Dennis G. **Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem**. Vol. 1. Tradução: Antonio Zumpano. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.
- [12] ZILL, Dennis G. **Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem**. Vol. 2. Tradução: Alfredo Alves de Farias. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.

ANÁLISE DE FOURIER E A TRANSFORMADA DE LAPLACE

Com o intuito de avançar em uma linha de pesquisa voltada para a Matemática pura e aplicada, visando, em estudos posteriores, a resolução de Equações Diferenciais Parciais (EDP), o presente trabalho objetiva um estudo introdutório de dois métodos utilizados na resolução destas equações, são eles: a Análise de Fourier e a Transformada de Laplace. Contudo, não demos ênfase à resolução das EDPs, mas, as propriedades inerentes à Série e Transformada de Fourier e à Transformada de Laplace. Para tanto é necessária a introdução de certos conceitos matemáticos, bem como a justificativa de alguns teoremas. Porém, para que o texto não se tornasse demasiadamente extenso, omitimos parte destas justificativas, mas desde já destacamos que indicamos as referências onde as mesmas podem ser encontradas. Nossa proposta central é buscar compreender onde e como estão alicerçadas tais teorias, em especial as de Fourier, as quais estudamos com maiores detalhes, tendo em vista que, apesar destas terem muitas aplicações na Física, Engenharia e diversas outras áreas, são pouco abordadas nos cursos de licenciatura e acreditamos ser importante que o estudante de Matemática tenha pelo menos um pouco deste conhecimento para que assim possa ampliar o leque de possibilidades de ingressar nas áreas de pesquisas científicas. Para melhor entendimento e coesão dos conceitos, dividimos este trabalho em três capítulos; no primeiro abordamos alguns conceitos básicos que são utilizados no decorrer do trabalho; no segundo estudamos a Série de Fourier e no terceiro as Transformadas de Fourier e de Laplace, além de algumas aplicações destas.

ISBN



9-786-56089-5256