

**TIBÉRIO M. L. ALVES**

**ELETROMAGNETISMO**  
**CLÁSSICO**

**VOLUME II**  
**MAGNETOSTÁTICA**



editora **ifrn**

**ELETROMAGNETISMO**  
**CLÁSSICO**

Presidente da República  
**Luis Inácio Lula da Silva**

Ministro da Educação  
**Camilo Sobreira de Santana**

Secretário de Educação Profissional e Tecnológica  
**Marcelo Bregagnoli**



Reitor

**José Arnóbio de Araújo Filho**

Pró-Reitor de Pesquisa,  
Pós-graduação e Inovação

**Avelino Aldo de Lima Neto**

Coordenador da Editora IFRN

**Magda Renata Marques Diniz**

**Rodrigo Luiz Silva Pessoa**

---

### Conselho Editorial

Alba Valéria Saboia Teixeira Lopes  
Alison Pereira Batista  
Alana Driziê Gonzatti dos Santos  
Albérís Eron Flávio de Oliveira  
Airton Araújo de Souza Júnior  
Avelino Aldo de Lima Neto  
Amilde Martins da Fonseca  
Bruno Balbino Aires da Costa  
Cedrick Cunha Gomes da Silva  
Cláudia Battestin  
Elisabete Pianco de Sousa  
Ênio Fernandes Amorim  
Francinaide de Lima Silva Nascimento  
Jobson Martins da Silva Maranhão  
Joicy Suely Galvão da Costa  
José Everaldo Pereira

José Geraldo Bezerra Galvão Júnior  
José Soares Batista Lopes  
Julie Thomas  
Kaline Andreza de França Correia Andrade  
Leonardo Alcântara Alves  
Luciana Maria Araújo Rabelo  
Magda Renata Marques Diniz  
Marilson Donizetti Silvino  
Paulo Augusto de Lima Filho  
Pedro Felipe de Lima Henrique  
Paula Ivani Medeiros dos Santos  
Ramón Evangelista dos Anjos Paiva  
Raúl Humberto Veliz Chávez  
Rômulo Magno Oliveira de Freitas  
Tacicleide Dantas Vieira  
Vanilton Pereira da Silva

---

### Revisão linguística

Maria Regina Soares Azevedo de Andrade

Prefixo editorial: Editora IFRN

Linha editorial: Técnico-científica

Disponível para *download* em:

<http://memoria.ifrn.edu.br>

---

### Coordenação de design

Hanna Andreza Fernandes Sobral

### Projeto gráfico, diagramação e capa

Tibério Magno de Lima Alves

(produzido em Latex)



---

### Contato

Rua Dr. Nilo Bezerra Ramalho, 1692, Tirol, Natal-RN, CEP: 59015-300.

Telefones: (84) 4005-0763 | (84) 4005-0863 | E-mail: [editora@ifrn.edu.br](mailto:editora@ifrn.edu.br)

# ELETROMAGNETISMO CLÁSSICO

## VOLUME II MAGNETOSTÁTICA

TIBÉRIO MAGNO DE LIMA ALVES



**editoraifrn**

Natal, 2024



Os textos assinados, no que diz respeito tanto à linguagem quanto ao conteúdo, não refletem necessariamente a opinião do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte. As opiniões são de responsabilidade exclusiva dos respectivos autores. É permitida a reprodução total ou parcial desde que citada a fonte.

A474e Alves, Tibério Magno de Lima.  
Eletromagnetismo clássico : magnetostática / Tibério Magno de Lima Alves – Natal : IFRN, 2024.

201 p. ; il. color. ; v.2.

ISBN: 978-85-8333-352-4

Inclui: Referências e índice remissivo

1. Física – Eletromagnetismo. 2. Campo magnético. 3. Magnetostática - Leis. 4. Magnetização. I. Alves, Tibério Magno de Lima. II. Título.

IFRN/SIBi

CDU 537

Divisão de Serviços Técnicos  
Catalogação da publicação na fonte elaborada pela Bibliotecária  
Marise Lemos Ribeiro – CRB-15/418

COM TODO AMOR, PARA MINHA AMADA MÃE, A QUERIDA  
DONA EDILMA. SUAS VIRTUDES, CUIDADOS E ADMOESTA-  
ÇÕES COMO MÃE ECOAM COMO ENSINAMENTOS ATÉ HOJE.

---



# SUMÁRIO

<b>PREFÁCIO</b>	<b>11</b>
<b>LISTA DE FIGURAS</b>	<b>13</b>
<b>LISTA DE TABELAS</b>	<b>21</b>
<hr/>	
<b>PARTE I MAGNETOSTÁTICA NO VÁCUO</b>	<b>23</b>
<b>1 DENSIDADES DE CORRENTE ELÉTRICA</b>	<b>25</b>
1.1 INTRODUÇÃO . . . . .	25
1.2 CORRENTES E DENSIDADES DE CORRENTES . . . . .	26
1.3 EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE E CONSERVAÇÃO DA CARGA ELÉTRICA . . . . .	31
<b>2 LEIS EXPERIMENTAIS DA MAGNETOSTÁTICA</b>	<b>33</b>
2.1 A LEI DE FORÇA DE AMPÈRE . . . . .	33
2.2 LEI DE FORÇA DE LORENTZ . . . . .	36
2.2.1 DINÂMICA DA PARTÍCULA CARREGADA . . . . .	40
2.3 LEI DE BIOT-SAVART . . . . .	43
<b>3 AS EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS DA MAGNETOSTÁTICA</b>	<b>61</b>
3.1 A DIVERGÊNCIA DE $\vec{B}$ . . . . .	61
3.2 A LEI DE AMPÈRE E O ROTACIONAL DE $\vec{B}$ . . . . .	63
3.3 ANALOGIA COM A ELETROSTÁTICA . . . . .	68
<b>4 POTENCIAIS MAGNÉTICOS</b>	<b>71</b>
4.1 O POTENCIAL VETOR MAGNÉTICO . . . . .	71
4.2 CONDIÇÕES DE CONTORNO NA MAGNETOSTÁTICA . . . . .	89

---

4.3	O POTENCIAL ESCALAR MAGNÉTICO ASSOCIADO A $\vec{B}$ . . . . .	95
<b>5</b>	<b>A EXPANSÃO MULTIPOLAR NA MAGNETOSTÁTICA</b>	<b>101</b>
5.1	MONOPOLO MAGNÉTICO . . . . .	102
5.2	DIPOLO MAGNÉTICO . . . . .	104
<b>6</b>	<b>ENERGIA POTENCIAL MAGNETOSTÁTICA E INDUTÂNCIA</b>	<b>119</b>
	<b>LISTA DE QUESTÕES I</b>	<b>137</b>
<hr/>		
<b>PARTE II</b>	<b>MAGNETOSTÁTICA NA MATÉRIA</b>	<b>147</b>
<b>7</b>	<b>MAGNETIZAÇÃO</b>	<b>149</b>
7.1	CORRENTES DE MAGNETIZAÇÃO . . . . .	150
7.2	O CAMPO MAGNÉTICO $\vec{H}$ E DENSIDADE DE POLOS MAGNÉTICOS . . . . .	152
7.3	MEIOS MAGNÉTICOS LINEARES . . . . .	159
7.4	CONDIÇÕES DE CONTORNO . . . . .	161
<b>8</b>	<b>ENERGIA EM MATERIAIS MAGNÉTICOS</b>	<b>175</b>
	<b>LISTA DE QUESTÕES II</b>	<b>183</b>
<hr/>		
<b>APÊNDICES</b>		<b>187</b>
<b>A</b>	<b>SÉRIES DE TAYLOR</b>	<b>189</b>
A.1	SÉRIES DE POTÊNCIAS . . . . .	189
<b>B</b>	<b>INTEGRAIS ÚTEIS</b>	<b>191</b>
B.1	INTEGRAL I . . . . .	191
B.2	INTEGRAL II . . . . .	193
B.3	INTEGRAL III . . . . .	196
B.4	INTEGRAIS DADAS PARA AS LISTAS DE QUESTÕES . . . . .	198
<b>C</b>	<b>INTEGRAIS ELÍPTICAS</b>	<b>199</b>
C.1	DEFINIÇÕES . . . . .	199
C.2	SÉRIES DE POTÊNCIAS PARA $K(k)$ E $E(k)$ . . . . .	199
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>204</b>

---





# PREFÁCIO

Neste segundo volume, iremos abordar a **magnetostática**, tanto no vácuo como na matéria. A obra está dividida em duas partes, sendo elas:

- **Parte I** Magnetostática no vácuo: Começamos com as definições de densidades de correntes elétricas, equação da continuidade e conservação da carga. Em seguida, apresentamos os fundamentos experimentais da magnetostática (correntes elétricas estacionárias), isto é, as leis de força de Ampère, Lorentz e Biot-Savart, como uma preparação para o estudo para o estudo das equações fundamentais. Ainda no estudo da magnetostática no vácuo, são apresentados os métodos avançados de obtenção do campo magnético através de potenciais magnéticos escalar e vetorial e da expansão em multipolos da magnetostática. Por fim, apresentamos o estudo da energia magnetostática e do conceito de indutância.
- **Parte II** Magnetostática na matéria: Um estudo do fenômeno da magnetização e do campo magnético  $\vec{H}$ . Detalhamos o que são correntes de magnetização, susceptibilidade, permeabilidade magnética e materiais magnéticos lineares, além de abordar também a energia nos materiais magnéticos. As condições de contorno são recalculadas para interfaces entre meios magnéticos.

Como no primeiro volume, nos apêndices, são apresentados conteúdos adicionais ao texto que auxiliam o leitor nos métodos matemáticos empregados.

Este volume II mantém a mesma ênfase nos pormenores matemáticos empregados no volume I, abordando em detalhes problemas mais avançados do eletromagnetismo, fazendo uso de ferramentas computacionais para exibição

de gráficos das linhas de campo magnético, com o objetivo de fornecer uma visualização geométrica precisa dos conceitos que são abordados.

Deixo aqui, mais uma vez, os agradecimentos a todos meus alunos da licenciatura em Física do IFRN Campus Natal Central e ao corpo docente do Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física (MNPEF) do IFRN. Por fim, agradeço à Editora IFRN pela oportunidade e colaboração de toda sua equipe na publicação deste trabalho.

Natal, abril de 2024  
Tibério M. L. Alves<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte  
Campus Natal Central  
Endereço: Avenida Senador Salgado Filho, nº 1559, Tirol - Natal-RN  
E-mail: tiberio.lima@ifrn.edu.br

# LISTA DE FIGURAS

1.1	REPRESENTAÇÃO VETORIAL DAS DENSIDADES SUPERFICIAL (À ESQUERDA) E VOLUMÉTRICA (À DIREITA) PARA UMA CORRENTE $I$ DISTRIBUÍDA NA SUPERFÍCIE E NO VOLUME DE UM CILINDRO DE RAIOS $R$ , RESPECTIVAMENTE.	28
1.2	REPRESENTAÇÃO VETORIAL DA DENSIDADE SUPERFICIAL (À ESQUERDA) E VOLUMÉTRICA (À DIREITA) PARA, RESPECTIVAMENTE, UMA DENSIDADE SUPERFICIAL $\sigma$ DISTRIBUÍDA NA SUPERFÍCIE E UMA DENSIDADE VOLUMÉTRICA $\rho_0$ DE UM CILINDRO DE RAIOS $R$ GIRANDO COM VELOCIDADE ANGULAR $\omega$ .	30
1.3	REPRESENTAÇÃO VETORIAL DA DENSIDADE DE CORRENTE VOLUMÉTRICA $\vec{J}$ , UM VOLUME $\mathcal{V}$ FECHADO POR UMA SUPERFÍCIE $\mathcal{S}$ . O FLUXO DE $\vec{J}$ SOBRE A SUPERFÍCIE $\mathcal{S}$ REPRESENTA O TRANSPORTE DE CARGA ELÉTRICA, POR UNIDADE, ATRAVÉS DA SUPERFÍCIE.	31
2.1	REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DOS SEGMENTOS DE FIOS NA BALANÇA DE AMPÈRE. À ESQUERDA, TEMOS AS CORRENTES NO MESMO SENTIDO, GERANDO UMA FORÇA MAGNÉTICA DE ATRAÇÃO. À DIREITA, TEMOS AS CORRENTES EM SENTIDOS OPOSTOS, GERANDO UMA FORÇA MAGNÉTICA DE REPULSÃO ENTRE OS SEGMENTOS DE FIOS. AS INTENSIDADES DE CORRENTES SÃO $I_1$ E $I_2$ , OS FIOS SÃO PARALELOS COM SEPARAÇÃO $d$ , E $\vec{F}_m$ É A FORÇA MAGNÉTICA ENTRE OS FIOS.	34
2.2	REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DE UMA CARGA PONTUAL DE VALOR POSITIVO $q$ SUJEITA A UM CAMPO MAGNÉTICO UNIFORME $\vec{B} = B_0\hat{z}$ ( $B_0 > 0$ ) PARTINDO DE UMA POSIÇÃO INICIAL $\vec{r}(0) = x_0\hat{x}$ E COM VELOCIDADE INICIAL DEFINIDA POR $\vec{v}(0) = v_{0y}\hat{y} + v_{0z}\hat{z}$ ( $v_{0y} > 0$ ).	40
2.3	HELICOIDE DESCRITA PELA PARTÍCULA CARREGADA SE MOVENDO EM CAMPO MAGNÉTICO UNIFORME.	43

2.4	REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DOS VETORES DE INTERESSE PARA CÁLCULO DO CAMPO MAGNÉTICO $\vec{B}$ EM UMA POSIÇÃO $\vec{r}$ DEVIDO A UMA LINHA DE CORRENTE ELÉTRICA DE INTENSIDADE $I$ . . . . .	44
2.5	FIO FINITO DE COMPRIMENTO $L$ PERCORRIDO POR CORRENTE DE INTENSIDADE $I$ E OS VETORES DE INTERESSE PARA O CÁLCULO DO CAMPO MAGNÉTICO VIA LEI DE BIOT-SAVART. . . . .	45
2.6	GRÁFICOS PARA OS CAMPOS MAGNÉTICO GERADO POR UM FIO MUITO LONGO ( $L \rightarrow \infty$ ) E UM FIO FINITO ( $L = 0, 1\text{ m}$ ), NO PLANO $x - y$ ( $z = 0$ ), AMBOS PERCORRIDOS POR UMA CORRENTE ELÉTRICA DE $1\text{ A}$ . . . . .	46
2.7	ESPIRA CIRCULAR PERCORRIDA POR CORRENTE ELÉTRICA E VETORES DE INTERESSE PARA O CÁLCULO DO CAMPO MAGNÉTICO. . . . .	47
2.8	GRÁFICOS DO CAMPO MAGNÉTICO AO LONGO DO EIXO DA ESPIRA PARA DIFERENTES VALORES DE $R$ , NO VÁCUO, COM $I = 2\text{ A}$ . . . . .	48
2.9	DISCO FINO UNIFORMEMENTE CARREGADO GIRANDO EM TORNO DO SEU EIXO E OS VETORES DE INTERESSE PARA CÁLCULO DO CAMPO MAGNÉTICO. . . . .	49
2.10	GRÁFICO PARA A COMPONENTE $B(z)$ DO CAMPO MAGNÉTICO AO LONGO DO EIXO DO DISCO CARREGADO GIRANTE. . . . .	51
2.11	SOLENOIDE CILINDRO PERCORRIDO POR CORRENTE DE INTENSIDADE $I$ E OS VETORES DE INTERESSE PARA CÁLCULO DO CAMPO MAGNÉTICO NO EIXO PRINCIPAL DO SOLENOIDE. . . . .	52
2.12	GRÁFICO PARA A COMPONENTE $B(z)$ DO CAMPO MAGNÉTICO AO LONGO DO EIXO DO SOLENOIDE. NESTE GRÁFICO, APRESENTAMOS OS RESULTADOS PARA TRÊS SOLENOIDES DE MESMO RAIOS $R = 0,05\text{ m}$ , COM COMPRIMENTO $l = 0,4\text{ m}$ , $l = 0,8\text{ m}$ E $l = 1,6\text{ m}$ COM $I = 1\text{ A}$ E $n = 1000$ VOLTAS/m. . . . .	53
2.13	SUPERFÍCIE ESFÉRICA DE RAIOS $R$ CARREGADA COM DENSIDADE SUPERFICIAL UNIFORME $\sigma$ E VETORES DE INTERESSE PARA O CÁLCULO DO CAMPO MAGNÉTICO NO EIXO DE ROTAÇÃO. . . . .	54
2.14	GRÁFICO PARA O CAMPO MAGNÉTICO GERADO PELA SUPERFÍCIE ESFÉRICA CONDUTORA GIRANTE NO EIXO DE ROTAÇÃO. . . . .	56
2.15	ESFERA MACIÇA DE RAIOS $R$ CARREGADA COM DENSIDADE VOLUMÉTRICA UNIFORME $\rho_v$ E VETORES DE INTERESSE PARA O CÁLCULO DO CAMPO MAGNÉTICO. . . . .	57
2.16	GRÁFICO PARA O CAMPO MAGNÉTICO GERADO PELA ESFERA GIRANTE MACIÇA, UNIFORMEMENTE CARREGADA, NO EIXO DE ROTAÇÃO. . . . .	60

- 3.1 EM (A), TEMOS A REPRESENTAÇÃO DE UM CORTE TRANSVERSAL DE UM CILINDRO LONGO DE RAIO  $R$  E O VETOR DENSIDADE VOLUMÉTRICA DE CORRENTE ELÉTRICA  $\vec{J}$ . EM (B), A CURVA TRACEJADA REPRESENTA A AMPERIANA CIRCULAR DE RAIO  $\rho$  COM  $\rho > R$  E EM (C)  $\rho < R$ . . . . . 67
- 4.1 FIO FINITO DE COMPRIMENTO  $L$  PERCORRIDO POR CORRENTE DE INTENSIDADE  $I$  E OS VETORES DE INTERESSE PARA O CÁLCULO DO CAMPO MAGNÉTICO VIA LEI DE BIOT-SAVART. . . . . 74
- 4.2 REPRESENTAÇÃO DO POTENCIAL VETOR MAGNÉTICO  $\vec{A}$  (VETORES EM CINZA) E DO CAMPO MAGNÉTICO  $\vec{B}$  (VETOR EM PRETO) PARA O FIO RETO DE COMPRIMENTO  $L$  PERCORRIDO POR UMA CORRENTE ELÉTRICA DE INTENSIDADE  $I$ . . . . . 76
- 4.3 ESPIRA CIRCULAR PERCORRIDA POR UM CORRENTE ELÉTRICA DE INTENSIDADE  $I$  E VETORES DE INTERESSE PARA O CÁLCULO DO POTENCIAL VETOR MAGNÉTICO  $\vec{A}$  EM UMA POSIÇÃO ARBITRÁRIA  $\vec{r}$  NO ESPAÇO. . . . . 77
- 4.4 EM (A), UMA SUPERFÍCIE ESFÉRICA COM DENSIDADE UNIFORME  $\sigma$  DE CARGA GIRANDO COM VELOCIDADE ANGULAR  $\vec{\omega}$  EM UM EIXO QUE PASSA PELO SEU CENTRO. EM (B), UM SISTEMA DE REFERÊNCIA EM QUE  $\vec{\omega}$  FAZ UM ÂNGULO  $\theta$  COM O EIXO  $z$ , ESTANDO NO PLANO  $z-x$ , BEM COMO OS VETORES DE INTERESSE PARA O CÁLCULO DE  $\vec{A}$ . . . . . 84
- 4.5 EM (A), TEMOS O GRÁFICO DO CAMPO VETORIAL (VETORES EM PRETO) PARA O POTENCIAL VETOR MAGNÉTICO NO PLANO EQUATORIAL (PLANO  $x-y$ ), OU SEJA, PARA  $\theta = \pi/2$ . É EVIDENTE QUE  $\vec{A}$  CIRCULA NA DIREÇÃO  $\hat{\phi}$  (CIRCUNFERÊNCIAS TRACEJADAS), AUMENTANDO LINEARMENTE EM FUNÇÃO DE  $r$  DENTRO DA ESFERA E DIMINUINDO COM  $1/r^2$  FORA DA ESFERA. EM (B), TEMOS A CONFIGURAÇÃO DE LINHAS DE CAMPO MAGNÉTICO DENTRO E FORA DA ESFERA (LINHAS TRACEJADAS VERMELHAS), E A CONFIGURAÇÃO DE LINHAS DE CAMPO PARA O POTENCIAL VETOR MAGNÉTICO (LINHAS TRACEJADAS PRETAS) SOBRE A ESFERA. NOTE QUE  $\vec{A}$  GIRA NA DIREÇÃO  $\hat{\phi}$ , AO PASSO QUE  $\vec{B}$  CIRCULA NAS DIREÇÕES  $\hat{r}$  E  $\hat{\theta}$ . 88
- 4.6 INTERFACE COM DENSIDADE SUPERFICIAL DE CORRENTE  $\vec{K}$ . UMA CURVA AMPERIANA  $C$  EM FORMATO RETANGULAR DE LARGURA  $L$  PARA CÁLCULO DA CIRCULAÇÃO DE  $\vec{B}$ . OS VETORES  $\vec{B}_1$  E  $\vec{B}_2$  REPRESENTAM OS CAMPOS MAGNÉTICOS IMEDIATAMENTE ACIMA E ABAIXO DA INTERFACE, RESPECTIVAMENTE. . . . . 89

4.7	VOLUME ESCOLHIDO PARA O CÁLCULO DO FLUXO DE $\vec{B}$ . OS VETORES $\vec{B}_1$ E $\vec{B}_2$ REPRESENTAM OS CAMPOS MAGNÉTICOS IMEDIATAMENTE ACIMA E ABAIXO DA INTERFACE, RESPECTIVAMENTE. . . . .	90
4.8	PLANO CONDUTOR INFINITO PERCORRIDO POR UMA DENSIDADE DE CORRENTE SUPERFICIAL $\vec{K} = K\hat{y}$ . . . . .	91
4.9	SEPARAÇÃO DAS CONTRIBUIÇÕES DO CAMPO MAGNÉTICO SOBRE UMA SUPERFÍCIE CONDUTORA PERCORRIDA POR UMA DENSIDADE DE CORRENTE SUPERFICIAL. . . . .	92
5.1	VETORES DE INTERESSE $\vec{r}'$ , $\vec{r}$ E $\vec{z}$ PARA CÁLCULO DO POTENCIAL VETOR MAGNÉTICO DEVIDO A UMA DISTRIBUIÇÃO VOLUMÉTRICA DE CORRENTE $\vec{J}(\vec{r}')$ COMPREENDIDA NO VOLUME $\mathcal{V}$ . OS ÂNGULOS $\theta$ E $\phi$ SÃO OS ÂNGULOS ESFÉRICOS DO VETOR POSIÇÃO $\vec{r}$ , AO PASSO QUE $\theta'$ E $\phi'$ SÃO OS ÂNGULOS ESFÉRICOS DO VETOR $\vec{r}'$ . $\gamma$ É O ÂNGULO ENTRE $\vec{r}$ E $\vec{r}'$ . . . . .	101
5.2	EQUIVALÊNCIA ENTRE UMA ESPIRA E UMA COLEÇÃO DE ESPIRAS INFINITESIMAIS DE MOMENTO DE DIPOLO INFINITESIMAL $d\vec{m}$ . . . . .	111
5.3	EM (A), TEMOS UMA ESPIRA DE RAIO $R$ PERCORRIDA UMA CORRENTE ELÉTRICA $I$ . $\vec{B}(r, \theta)$ É O CAMPO MAGNÉTICO EM UM PONTO ARBITRÁRIO DO ESPAÇO. EM (B), OS VETORES DE INTERESSE PARA INTEGRAÇÃO DO POTENCIAL ESCALAR MAGNÉTICO. . . . .	112
5.4	EM (A) TEMOS A CONFIGURAÇÃO DE LINHAS DE CAMPO MAGNÉTICO PARA UMA ESPIRA FINITA COM VISTA NO PLANO QUE A CONTÉM, CONSIDERANDO ATÉ 15 TERMOS DAS EXPANSÕES NAS EQUAÇÕES 5.97, 5.98, 5.99 E 5.100. EM (B) TEMOS A CONFIGURAÇÃO DE LINHAS DE CAMPO MAGNÉTICO DE MOMENTO DE DIPOLO MAGNÉTICO PURO. . . . .	118
6.1	REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DE DUAS ESPIRAS $C_1$ E $C_2$ , PERCORRIDAS POR CORRENTES DE INTENSIDADES $I_1$ E $I_2$ , RESPECTIVAMENTE, GERANDO UM CAMPO MAGNETOSTÁTICO $\vec{B}$ NO ESPAÇO. A ESPIRA $C_1$ SOFRE AÇÃO DE UMA FORÇA EXTERNA $\vec{F}$ . . . . .	120
6.2	REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DE DUAS ESPIRAS $C_i$ E $C_j$ , PERCORRIDAS POR CORRENTES DE INTENSIDADES $I_i$ E $I_j$ , RESPECTIVAMENTE. $\vec{A}_{ji}(\vec{r}_i)$ É O POTENCIAL VETOR MAGNÉTICO DEVIDO À $j$ -ÉSIMA ESPIRA SOBRE A $i$ -ÉSIMA ESPIRA LOCALIZADO EM $\vec{r}_i$ , NO DESLOCAMENTO INFINITESIMAL $d\vec{r}_i$ . $\vec{z}_{ji}$ É A POSIÇÃO DO DESLOCAMENTO INFINITESIMAL $d\vec{r}_i$ EM RELAÇÃO AO DESLOCAMENTO INFINITESIMAL $d\vec{r}_j$ , POSICIONADO EM $\vec{r}_j$ . . . . .	125

6.3	VISÃO DA SECÇÃO EM UM DIÂMETRO DO SOLENOIDE EM FORMATO CILÍNDRICO. A CURVA $C$ É UMA AMPERIANA QUE SERÁ USADA PARA DETERMINAR O CAMPO MAGNÉTICO DENTRO DO SOLENOIDE. . . . .	127
6.4	SOLENOIDES CILÍNDRICOS COAXIAIS. . . . .	130
6.5	PAR DE ESPIRAS COPLANARES E CONCÊNTRICAS E VETORES DE INTERESSE PARA O CÁLCULO DA INDUTÂNCIA MÚTUA. . . . .	131
6.6	PAR DE ESPIRAS COPLANARES E CONCÊNTRICAS E VETORES DE INTERESSE PARA O CÁLCULO DA INDUTÂNCIA MÚTUA. . . . .	134
6.7	FIO FORMANDO DOIS SEGMENTOS SEMI-INFINITOS ( $x \geq R$ e $x \leq -R$ ) E UM SEMICÍRCULO DE RAIOS $R$ COM CENTRO COINCIDINDO COM A ORIGEM DE UM SISTEMA CARTESIANO. . . . .	137
6.8	REPRESENTAÇÃO FINITA DA “CHAPA” CONDUTORA PERCORRIDA POR UMA DENSIDADE VOLUMÉTRICA DE CORRENTE UNIFORME $\vec{J} = J\hat{y}$ , COMPREENDIDA ENTRE $-H/2 \leq z \leq H/2$ . . . . .	138
6.9	DISCO ISOLANTE DE RAIOS $R$ CARREGADO COM DENSIDADE SUPERFICIAL UNIFORME $\sigma$ GIRANDO EM TORNO DO EIXO $z$ COM VELOCIDADE ANGULAR $\vec{\omega}$ . . . . .	139
6.10	FIOS FINITOS PARALELOS DE COMPRIMENTO $L$ , COMPREENDIDOS ENTRE $z = -L/2$ E $z = L/2$ , PERCORRIDOS POR CORRENTES ELÉTRICAS DE MESMO SENTIDO E INTENSIDADE $I$ . . . . .	139
6.11	ESPIRA QUADRADA DE LADO $L$ PERCORRIDA POR CORRENTE DE INTENSIDADE $I$ . A ESPIRA SE ENCONTRA NO PLANO $x-y$ COMPREENDIDA ENTRE $-L/2 < x < L/2$ E $-L/2 < y < L/2$ . . . . .	140
6.12	FITA CONDUTORA MUITO EXTENSA PERCORRIDA POR UMA DENSIDADE SUPERFICIAL DE CORRENTE UNIFORME $\vec{K} = K\hat{y}$ . . . . .	140
6.13	CILINDRO UNIFORMEMENTE CARREGADO DE COMPRIMENTO $L$ E RAIOS $R$ ROTACIONANDO COM VELOCIDADE ANGULAR $\vec{\omega}$ EM TORNO DE SEU EIXO PRINCIPAL. . . . .	141
6.14	PAR DE ESPIRAS CIRCULARES DE RAIOS $R$ PERCORRIDAS POR UMA CORRENTE ELÉTRICA $I$ , AMBAS CIRCULANDO NO SENTIDO ANTI-HORÁRIO, DISTANTES $2h$ . . . . .	141
6.15	TRÊS VISTAS DA BOBINA DE ENROLAMENTO TOROIDAL COM SECÇÃO RETANGULAR COMPREENDIDA ENTRE UM RAIOS INTERNO $R_1$ , RAIOS EXTERNO $R_2$ E ALTURA $h$ PERCORRIDO POR UMA CORRENTE $I$ . DE CIMA PARA BAIXO, UMA VISÃO EM PERSPECTIVA, NA SECÇÃO RETANGULAR E NA SECÇÃO CIRCULAR DA BOBINA. . . . .	142

6.16	COROA CILÍNDRICA ISOLANTE CARREGADA GIRANTE. . . . .	143
6.17	CABO COAXIAL PERCORRIDO POR UMA CORRENTE ELÉTRICA DE INTENSIDADE $I$ DEVIDA A UM GERADOR E QUE ALIMENTA UM RESISTOR. . . . .	144
6.18	FIO CONDUTOR CILÍNDRICO COM CAVIDADE. . . . .	144
6.19	SUPERFÍCIE CILÍNDRICA INFINITA UNIFORMEMENTE CARREGADA DE RAIOS $R$ POSTA ENTÃO SOB UMA ROTAÇÃO DE VELOCIDADE $\vec{\omega}$ EM TORNO DO EIXO $z$ . . . . .	145
7.1	REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DE UM MATERIAL MAGNETIZADO E AS QUANTIDADES DE INTERESSE PARA O CÁLCULO DO POTENCIAL VETOR MAGNÉTICO. O OBJETO DELIMITA UMA REGIÃO DE VOLUME $\mathcal{V}$ CONTORNADO POR UMA SUPERFÍCIE $\mathcal{S}$ . . . . .	150
7.2	EM (A), TEMOS O ÍMÃ CILÍNDRICO UNIFORMEMENTE MAGNETIZADO AO LONGO DO EIXO $z$ . EM (B), UM SOLENOIDE EQUIVALENTE AO ÍMÃ CILÍNDRICO. . . . .	157
7.3	EM (A), TEMOS OS POLOS MAGNÉTICOS NO VOLUME E NAS SUPERFÍCIES DO CILINDRO BEM COMO AS LINHAS DE CAMPO MAGNÉTICO $\vec{H}$ . EM (B), TEMOS A CORRENTE SUPERFICIAL DE MAGNETIZAÇÃO $\vec{K}_M$ NA SUPERFÍCIE LATERAL DO CILINDRO MAGNETIZADO E A CONFIGURAÇÃO DE LINHAS DE CAMPO PARA O CAMPO MAGNÉTICO $\vec{B}$ . . . . .	158
7.4	INTERFACE COM DENSIDADE SUPERFICIAL DE CORRENTE LIVRE $\vec{K}_l$ . UMA CURVA AMPERIANA $C$ EM FORMATO RETANGULAR DE LARGURA $L$ PARA CÁLCULO DA CIRCULAÇÃO DE $\vec{H}$ . OS VETORES $\vec{H}_1$ E $\vec{H}_2$ REPRESENTAM OS CAMPOS $\vec{H}$ IMEDIATAMENTE ACIMA E ABAIXO DA INTERFACE, RESPECTIVAMENTE, QUANDO TOMAMOS O LIMITE $h \rightarrow 0$ . . . . .	161
7.5	VOLUME ESCOLHIDO PARA O CÁLCULO DAS INTEGRAIS DAS DIVERGÊNCIAS $\vec{H}$ E $\vec{M}$ . OS VETORES $\vec{H}_1$ E $\vec{H}_2$ REPRESENTAM OS CAMPOS IMEDIATAMENTE ACIMA E ABAIXO DA INTERFACE, RESPECTIVAMENTE. . . . .	162
7.6	REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DE UMA ESFERA UNIFORMEMENTE MAGNETIZADA. O VETOR MAGNETIZAÇÃO APONTA NA DIREÇÃO DEFINIDA PELO ÂNGULO $\theta$ ENTRE $\vec{M}$ E $\hat{z}$ NO PLANO $x$ - $z$ . . . . .	164

- 7.7 EM (A) E EM (B) TEMOS, RESPECTIVAMENTE, AS CONFIGURAÇÃO DE LINHAS DE CAMPO MAGNÉTICO FORA E DENTRO DA ESFERA MAGNETIZADA. EM (C), TEMOS UMA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA TRIDIMENSIONAL PARA A DENSIDADE SUPERFICIAL DE CORRENTE DE MAGNETIZAÇÃO (EM  $K_M/M$ ) NA SUPERFÍCIE DA ESFERA UNIFORMEMENTE MAGNETIZADA COM CÓDIGO DE CORES. OS ANÉIS REPRESENTAM A CIRCULAÇÃO DAS CORRENTES DE MAGNETIZAÇÃO NA SUPERFÍCIE COM INTENSIDADE MÍNIMA NOS POLOS E INTENSIDADE MÁXIMA NA LINHA EQUATORIAL DA ESFERA. . . . . 167
- 7.8 CONFIGURAÇÃO DE LINHAS DE CAMPO MAGNÉTICO PARA A ESFERA MAGNÉTICA POSTA EM CAMPO MAGNÉTICO INICIALMENTE UNIFORME. PARA (A), (B) E (C), TEMOS OS CASOS COM  $\mu_r = \mu/\mu_0 > 1$ , CONFIGURANDO O PARAMAGNETISMO OU FERROMAGNETISMO PARA BAIXOS CAMPOS. PARA (D), (E) E (F), TEMOS OS CASOS COM  $\mu_r < 1$ , CONFIGURANDO O DIAMAGNETISMO. . . . . 173
- 8.1 REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DE UM SISTEMA DE COORDENADAS EM UMA SECÇÃO TRANSVERSAL DE UM CILINDRO MAGNÉTICO LONGO DE RAIO  $R$  COM MAGNETIZAÇÃO  $\vec{M}$ . AS COORDENADAS ASSUMIDAS SÃO AS COORDENADAS CILÍNDRICAS POLARES  $(\rho, \phi)$ . . . . . 183
- 8.2 SECÇÃO TRANSVERSAL DE UM CILINDRO MAGNÉTICO LINEAR LONGO DE RAIO  $R$ , POSTO NUMA REGIÃO COM CAMPO ELÉTRICO INICIALMENTE UNIFORME  $\vec{H}_0$ . AS COORDENADAS ASSUMIDAS SÃO AS COORDENADAS CILÍNDRICAS POLARES  $(\rho, \phi)$ . . . . . 184
- 8.3 SECÇÃO TRANSVERSAL DE UMA COROA CILÍNDRICA MAGNÉTICA LONGA, COM MAGNETIZAÇÃO UNIFORME  $\vec{M} = M\hat{y}$ . AS COORDENADAS ASSUMIDAS SÃO AS COORDENADAS CILÍNDRICAS POLARES  $(\rho, \phi)$ . . . . . 185
- 8.4 SECÇÃO TRANSVERSAL DE UMA CAVIDADE ESFÉRICA EM UM MEIO MAGNÉTICO. AS COORDENADAS ASSUMIDAS SÃO AS COORDENADAS ESFÉRICAS  $(r, \theta)$ . . . . . 185
- 8.5 SECÇÃO TRANSVERSAL DE UMA COROA ESFÉRICA NO VÁCUO SUBMETIDA A UM CAMPO INICIALMENTE UNIFORME  $\vec{H}_0 = H_0\hat{z}$ . AS COORDENADAS ASSUMIDAS SÃO AS COORDENADAS ESFÉRICAS  $(r, \theta)$ . . . . . 186



# LISTA DE TABELAS

7.1	SUSCEPTIBILIDADE MAGNÉTICA DE ALGUNS MATERIAIS. . . . .	160
-----	---	-----



# I

## MAGNETOSTÁTICA NO VÁCUO

“A INVESTIGAÇÃO EXPERIMENTAL PELA QUAL AMPÈRE ESTABELECEU A LEI DA AÇÃO MECÂNICA ENTRE AS CORRENTES ELÉTRICAS É UMA DAS CONQUISTAS MAIS BRILHANTES DA CIÊNCIA. O TODO, TEORIA E EXPERIÊNCIA, PARECE TER SALTADO, TOTALMENTE AMADURECIDO E FORTEFICADO, DO CÉREBRO DO NEWTON DA ELETRICIDADE.”

---

JAMES CLERK MAXWELL



# 1

## DENSIDADES DE CORRENTE ELÉTRICA

### 1.1 INTRODUÇÃO

Podemos introduzir a magnetostática fazendo uma analogia interessante com a eletrostática. Quando abordamos a eletrostática, o problema fundamental era encontrar qual o campo elétrico  $\vec{E}$  em todas as regiões do espaço devido a uma distribuição estática de cargas  $\rho$ . A conclusão que chegamos foi que o campo elétrico era governado por duas equações fundamentais, a saber,

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \nabla \times \vec{E} = 0. \end{array} \right. \quad (\text{SI}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho, \\ \nabla \times \vec{E} = 0. \end{array} \right. \quad (\text{CGS}) \quad (1.1)$$

Vimos que o fato de o campo elétrico ser irrotacional, implica que  $\vec{E} = -\nabla V$ , sendo  $V$  o potencial elétrico, e que  $\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0$ , de onde surge a equação de Laplace e todas as técnicas abordadas para sua solução. É importante notar que nossa abordagem teve como ponto de partida uma **lei experimental** que desse suporte à teoria da eletrostática que foi desenvolvida e aplicada em vários problemas de interesse da física. A lei à qual estamos nos referindo é a **lei de Coulomb**.

Na magnetostática, o problema central se resume em determinarmos o

**campo magnético**  $\vec{B}^1$ , em todas as regiões do espaço, devido a uma **densidade de corrente elétrica estacionária**, que iremos definir adiante. Assim como na eletrostática, nosso ponto de partida também será baseado em comprovações experimentais. A **Lei de força de Ampère**, a **Lei de Biot-Savart** e a **lei de força de Lorentz** são as comprovações que precisamos para chegarmos às equações fundamentais da magnetostática. Antes de apresentarmos estas leis experimentais que governam o campo magnético e força magnética sobre as cargas se movendo sob ação deste campo, vamos definir o que são correntes elétricas e suas densidades, bem como apresentar sua lei de conservação através da **equação da continuidade**, e através dela definir nosso regime de estudo nesta parte, isto é, a **magnetostática no vácuo**.

## 1.2 CORRENTES E DENSIDADES DE CORRENTES

A definição clássica de corrente elétrica é simplesmente a quantidade de carga que flui através de uma área de secção transversal por unidade de tempo. Sua unidade no sistema internacional é o **Ampère**, onde

$$1 \text{ A} \equiv 1 \text{ C/s.} \quad (1.2)$$

No volume I, vimos que a unidade no sistema gaussiano para a carga é o statcoulomb (stC), ou unidade eletrostática (esu, da sigla para o inglês). Como a unidade para o tempo é a mesma no SI e no CGS, teremos que a conversão de valores para intensidade de corrente elétrica entre os sistemas será feita da seguinte forma:

$$\frac{I_G}{I_{SI}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} = \frac{2,998 \times 10^9 \text{ esu/s}}{1 \text{ A}} \approx \frac{3,00 \times 10^9 \text{ stA}}{1 \text{ A}}, \quad (1.3)$$

Sendo  $1 \text{ esu/s} \equiv 1 \text{ stA}$ , onde definimos o **statampère** como uma unidade de corrente elétrica no sistema CGS. Vale ressaltar novamente algo importante quando se trata dos sistemas SI e CGS. O ampère é uma unidade **fundamental** do sistema internacional, ao passo que, no sistema CGS, não. No sistema CGS,

<sup>1</sup>Muitas vezes chamado de indução magnética ou até mesmo de densidade de fluxo magnético, dependendo da escolha que o autor possa fazer. Veremos que, fisicamente, o sistema CGS fornece uma unificação de unidades para os campos no eletromagnetismo, sendo mais apropriado o uso do termo **campo magnético** no nosso contexto.

1 esu =  $\text{cm}^{3/2}\text{g}^{1/2}\text{s}^{-1}$ , portanto,

$$1 \text{ stA} \equiv 1 \text{ esu/s} = \text{cm}^{3/2}\text{g}^{1/2}\text{s}^{-2}, \quad (1.4)$$

sendo a unidade de corrente elétrica em termos das unidades fundamentais no sistema CGS.

A definição corrente elétrica a partir de portadores de carga com movimento devido a uma diferença de potencial deve ser a maneira mais comum de se apresentar este conceito. No entanto, vamos começar apresentando outras formas de se ter uma corrente elétrica. Imagine uma carga distribuída em um fio, com densidade linear  $\lambda$ , e este fio se deslocando na mesma direção em que se encontra este fio com velocidade  $v$ . Este movimento gera uma intensidade de corrente que será

$$I = \lambda v. \quad (1.5)$$

Neste contexto, a corrente elétrica é um vetor, que é escrito da seguinte forma:

$$\vec{I} = \lambda \vec{v}. \quad (1.6)$$

Uma corrente elétrica pode se distribuir também em superfícies e volumes. A **densidade superficial de corrente**  $\vec{K}$  é a medida da corrente por unidade de comprimento perpendicular ao fluxo. Em termos diferenciais, uma quantidade infinitesimal de corrente  $d\vec{I}$  distribuída numa largura de comprimento  $dl_{\perp}$  (perpendicular ao fluxo) define a densidade superficial de corrente  $\vec{K}$  da seguinte forma:

$$\vec{K} \equiv \frac{d\vec{I}}{dl_{\perp}}. \quad (1.7)$$

Uma distribuição superficial de carga  $\sigma$  móvel também define uma densidade superficial de corrente. Se  $\vec{v}$  é a velocidade da distribuição de carga, a densidade superficial de corrente será dada por

$$\vec{K} = \sigma \vec{v} \quad (1.8)$$

De maneira análoga, uma **distribuição volumétrica de corrente**  $\vec{J}$  é a medida da corrente por unidade de área transversal ao fluxo, podendo ser escrita da seguinte maneira:

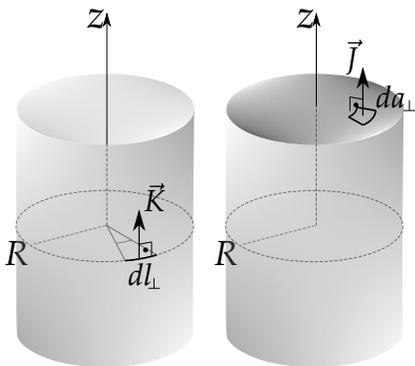
$$\vec{J} \equiv \frac{d\vec{I}}{da_{\perp}}. \quad (1.9)$$

Para uma densidade de carga móvel com velocidade  $\vec{v}$ , a densidade volumétrica de corrente neste caso é dada por

$$\vec{J} = \rho\vec{v}. \tag{1.10}$$

**EXEMPLO 1.1.** Uma corrente  $I$  flui por um fio de raio  $R$ . (a) Se ela estiver distribuída uniformemente na superfície, qual a densidade de corrente  $\vec{K}$ ? (b) Se ela estiver distribuída de forma que a corrente volumétrica seja inversamente proporcional à distância do eixo, quanto vale  $\vec{J}$ ? (veja a figura 1.1, a seguir)

**FIGURA 1.1:** REPRESENTAÇÃO VETORIAL DAS DENSIDADES SUPERFICIAL (À ESQUERDA) E VOLUMÉTRICA (À DIREITA) PARA UMA CORRENTE  $I$  DISTRIBUÍDA NA SUPERFÍCIE E NO VOLUME DE UM CILINDRO DE RAIO  $R$ , RESPECTIVAMENTE.



**SOLUÇÃO:** (a) Na figura 1.1 temos um corte seccional de fio de raio  $R$  tendo seu eixo principal coincidindo com o eixo  $z$ . Em coordenadas cilíndricas, se a corrente  $I$  flui no sentido positivo de  $z$ , o comprimento infinitesimal perpendicular ao fluxo é  $dl_{\perp} = R d\phi$ . A corrente total  $I$  é dada pela seguinte integral:

$$I = \int K dl_{\perp}. \tag{1.11}$$

Como  $K$  é uniforme, temos que

$$I = K \int dl_{\perp}, \tag{1.12}$$

$$I = K \int_0^{2\pi} R d\phi, \tag{1.13}$$

$$I = 2\pi RK, \tag{1.14}$$

o que conduz a

$$K = \frac{I}{2\pi R} \tag{1.15}$$

ou

$$\vec{K} = \frac{I}{2\pi R} \hat{z}, \tag{1.16}$$

ou seja, a corrente se distribui uniformemente pela circunferência do cilindro. (b) Para que  $J$  seja inversamente proporcional à distância ao eixo, temos que

$$J = \frac{\beta}{\rho}, \quad (1.17)$$

sendo  $\beta$  uma constante. A integral para a corrente:

$$I = \iint J da_{\perp}, \quad (1.18)$$

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^R J \rho d\rho d\phi, \quad (1.19)$$

$$I = \iint J da_{\perp} = 2\pi R\beta, \quad (1.20)$$

o que nos dá o valor de  $\beta = \frac{I}{2\pi R}$ . Sendo assim, a densidade volumétrica de corrente é dada por

$$J = \frac{I}{2\pi a\rho}, \quad (1.21)$$

ou

$$\boxed{\vec{J} = \frac{I}{2\pi a\rho} \hat{z}}. \quad (1.22)$$

**EXEMPLO 1.2.** Um cilindro maciço de raio  $R$  e altura  $H$  gira em torno de seu eixo com uma velocidade angular  $\vec{\omega}$ . Determine a densidade de corrente e corrente total (a) se a superfície lateral estiver carregada com distribuição uniforme  $\sigma$  de carga elétrica, e (b) se o cilindro estiver carregado com uma densidade volumétrica  $\rho_0$  uniforme (veja a figura 1.2, a seguir).

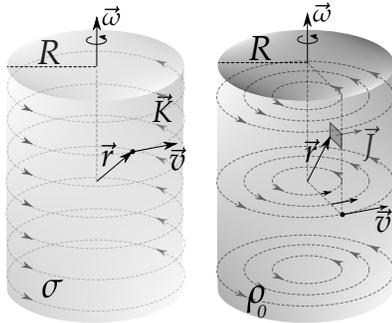
**SOLUÇÃO:** (a) Na figura 1.2, à esquerda, temos uma superfície cilíndrica de raio  $R$  e altura  $H$  com seu eixo principal coincidindo com o eixo cartesiano  $z$ . Em coordenadas cilíndricas, uma posição na superfície será  $\vec{r} = R\hat{\rho} + z\hat{z}$ . Sendo  $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$ , a velocidade linear na superfície do cilindro será

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (1.23)$$

$$\vec{v} = \omega\hat{z} \times (R\hat{\rho} + z\hat{z}), \quad (1.24)$$

$$\vec{v} = \omega R\hat{\phi}. \quad (1.25)$$

**FIGURA 1.2:** REPRESENTAÇÃO VETORIAL DA DENSIDADE SUPERFICIAL (À ESQUERDA) E VOLUMÉTRICA (À DIREITA) PARA, RESPECTIVAMENTE, UMA DENSIDADE SUPERFICIAL  $\sigma$  DISTRIBUÍDA NA SUPERFÍCIE E UMA DENSIDADE VOLUMÉTRICA  $\rho_0$  DE UM CILINDRO DE RAIOS  $R$  GIRANDO COM VELOCIDADE ANGULAR  $\omega$ .



Dessa forma, a densidade superficial de corrente será

$$\vec{K} = \sigma \vec{v}, \tag{1.26}$$

$$\vec{K} = \sigma \omega R \hat{\phi}. \tag{1.27}$$

O comprimento infinitesimal perpendicular ao fluxo da corrente é  $dl_{\perp} = dz$ . Sendo assim, a corrente total que flui através da altura  $H$  do cilindro será

$$I = \int_0^H K dl_{\perp}, \tag{1.28}$$

$$I = KH, \tag{1.29}$$

$$\boxed{I = \sigma \omega RH}. \tag{1.30}$$

(b) Na figura 1.2, à direita, temos o caso do cilindro com densidade volumétrica  $\rho_0$ . Neste caso, o raio será variável, de tal forma que uma posição no interior do cilindro será  $\vec{r} = \rho \hat{\rho} + z \hat{z}$ . Dessa forma, a velocidade linear para um ponto no cilindro será

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \tag{1.31}$$

$$\vec{v} = \omega \hat{z} \times (\rho \hat{\rho} + z \hat{z}), \tag{1.32}$$

$$\vec{v} = \omega \rho \hat{\phi}. \tag{1.33}$$

Sendo assim, a densidade volumétrica de corrente será

$$\vec{J} = \rho_0 \vec{v}, \tag{1.34}$$

$$\vec{J} = \rho_0 \omega \rho \hat{\phi}. \tag{1.35}$$

A área infinitesimal perpendicular ao fluxo da corrente é  $da_{\perp} = \rho dz$ . Sendo assim, a corrente total que flui através da secção retangular de raio  $R$  e altura  $H$  do cilindro será

$$I = \iint J da_{\perp}, \tag{1.36}$$

$$I = \int_0^H \int_0^R \rho_0 \omega \rho d\rho dz, \quad (1.37)$$

$$I = \rho_0 \omega \int_0^R \rho d\rho \int_0^H dz, \quad (1.38)$$

$$I = \frac{\rho_0 \omega H R^2}{2}. \quad (1.39)$$

### 1.3 EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE E CONSERVAÇÃO DA CARGA ELÉTRICA

Antes de desenvolvermos uma abordagem que possa determinar o campo magnético gerado por correntes, vamos obter uma equação que governe o fluxo de corrente no espaço e obedeça ao **princípio da conservação da carga elétrica**. A quantidade de corrente  $I$  que flui através de uma superfície  $S$  é calculada pela seguinte integral:

$$I = \iint_S \vec{J} \cdot \hat{n} da, \quad (1.40)$$

sendo  $\vec{J}$  a densidade volumétrica de corrente. Por outro lado, a quantidade de carga que flui, por unidade tempo (corrente) do volume  $\mathcal{V}$  encerrado por  $S$  (figura 1.3), é dada pela seguinte derivada temporal:

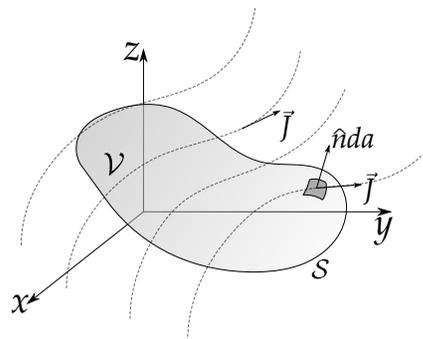
$$\frac{dQ}{dt} = - \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} \rho d\tau. \quad (1.41)$$

Aplicando o teorema da divergência de Gauss na equação 1.40 e combinando com a equação 1.41, temos:

$$\iint_S \vec{J} \cdot \hat{n} da = \iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \vec{J} d\tau, \quad (1.42)$$

$$\iint_S \vec{J} \cdot \hat{n} da = - \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} \rho d\tau, \quad (1.43)$$

**FIGURA 1.3:** REPRESENTAÇÃO VETORIAL DA DENSIDADE DE CORRENTE VOLUMÉTRICA  $\vec{J}$ , UM VOLUME  $\mathcal{V}$  FECHADO POR UMA SUPERFÍCIE  $S$ . O FLUXO DE  $\vec{J}$  SOBRE A SUPERFÍCIE  $S$  REPRESENTA O TRANSPORTE DE CARGA ELÉTRICA, POR UNIDADE, ATRAVÉS DA SUPERFÍCIE.



$$\iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \vec{j} d\tau = \iiint_{\mathcal{V}} -\frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau, \quad (1.44)$$

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}. \quad (1.45)$$

Esta última equação é chamada de **equação da continuidade** e expressa que a taxa de variação explícita com o tempo de uma densidade volumétrica de carga  $\rho$  é igual ao oposto da divergência da densidade volumétrica de corrente. Em outras palavras, esta equação expressa a conservação de carga pontualmente. Ou seja, a variação temporal da densidade volumétrica de corrente em um ponto deve ser igual ao oposto do fluxo de corrente por unidade de volume neste ponto, isto é, a divergência de  $\vec{j}$ .

Existe um tipo de corrente elétrica que, apesar de constituir cargas em movimento, a densidade de carga  $\rho$  não depende explicitamente do tempo. Como exemplos, leve em conta a superfície cilíndrica ou o volume cilíndrico apresentado anteriormente. As cargas não se acumulam em ponto nenhum, ou seja, a densidade de carga não muda com o tempo em ponto algum. Desta forma, para esses tipos de correntes, temos que  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ , e a chamamos de **correntes estacionárias**. Usando a equação da continuidade, podemos então afirmar que, no regime estacionário,

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0. \quad (1.46)$$

Podemos então dizer que na eletrostática temos que  $\vec{j} = 0$ , ou seja, cargas em repouso. Neste caso, os campos elétricos gerados são **eletrostáticos**, isto é, não variam com o tempo, e obedecem às leis e equações fundamentais que já estudamos. Para correntes estacionárias, ou seja,  $\nabla \cdot \vec{j} = 0$ , temos campos magnéticos constantes, definindo então o regime da **magnetostática**.

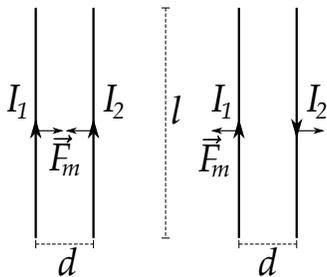
# 2

## LEIS EXPERIMENTAIS DA MAGNETOSTÁTICA

### 2.1 A LEI DE FORÇA DE AMPÈRE

O trabalho experimental e teórico feito por André-Marie Ampère constitui um parcela considerável do conhecimento que foi construído na teoria do eletromagnetismo clássico. Iremos abordar mais sobre suas diversas contribuições em textos posteriores. Por enquanto, vamos apresentar aqui um dos experimentos mais importantes para a compreensão da força magnética sobre correntes elétricas percorridas por fios finos paralelos. O experimento ficou conhecido como a **balança de Ampère**, sendo apresentado no ano de 1820, para Academia de Ciências de Paris, e se propunha a medir a força de interação magnética entre dois segmentos de fio de comprimento  $l$ , percorridos por correntes elétricas de intensidade  $I_1$  e  $I_2$ , separados por uma distância  $d$ , como ilustra a figura 2.1, a seguir.

**FIGURA 2.1:** REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DOS SEGMENTOS DE FIOS NA BALANÇA DE AMPÈRE. À ESQUERDA, TEMOS AS CORRENTES NO MESMO SENTIDO, GERANDO UMA FORÇA MAGNÉTICA DE ATRAÇÃO. À DIREITA, TEMOS AS CORRENTES EM SENTIDOS OPOSTOS, GERANDO UMA FORÇA MAGNÉTICA DE REPULSÃO ENTRE OS SEGMENTOS DE FIOS. AS INTENSIDADES DE CORRENTES SÃO  $I_1$  E  $I_2$ , OS FIOS SÃO PARALELOS COM SEPARAÇÃO  $d$ , E  $\vec{F}_m$  É A FORÇA MAGNÉTICA ENTRE OS FIOS.



A **experiência mostra**, de forma aproximativa com  $l \gg d$ , ou seja, com fios muito longos comparados à distância de separação, que a intensidade força magnética por unidade de comprimento, digamos  $F_m/l$ , é diretamente proporcional ao produto das intensidades de corrente elétrica e inversamente proporcional à distância de separação entre os fios. Podemos escrever, então, que

$$\frac{F_m}{l} = 2k_m \frac{I_1 I_2}{d}. \quad (2.1)$$

O fator 2 foi colocado somente por conveniência (veremos mais adiante) e  $k_m$  é a chamada **constante de força magnética**, que depende, a princípio, do meio e das unidades consideradas nas medidas. Se considerarmos o vácuo, temos novamente uma situação similar à apresentada no estudo da lei de Coulomb. Uma intensidade de corrente  $I_1 = I_2 = 1$  A, separada de  $d = 1$  m, **não** reproduz uma força por unidade de comprimento igual a 1 N/m. No vácuo, o valor encontrado pela experimentação neste caso será de, aproximadamente,  $2 \times 10^{-7}$  N/m. Com

isso, concluímos que nossa constante de proporcionalidade será

$$k_m = 1 \times 10^{-7} \text{ N/A}^2. \quad (2.2)$$

É comum definir esta constante  $k_m$  em termos da **permeabilidade magnética do vácuo**  $\mu_0$ , isto é,

$$k_m \equiv \frac{\mu_0}{4\pi}, \quad (2.3)$$

com

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2. \quad (2.4)$$

O fator  $4\pi$  surge na integral de uma superfície esférica de raio unitário.

Vamos analisar o que acontece se convertermos a unidade da corrente elétrica de Ampère para statAmpère, usando a equação de relação 1.3, algo

similar ao que fizemos com a carga elétrica na lei de Coulomb. Com efeito,

$$\frac{F_m}{l} = 2k_m \frac{\sqrt{4\pi\epsilon_0} I_1 \sqrt{4\pi\epsilon_0} I_2}{d}, \quad (2.5)$$

$$\frac{F_m}{l} = 2 \frac{k_m}{k_e} \frac{I_1 I_2}{d}, \quad (2.6)$$

sendo

$$\frac{k_m}{k_e} = \frac{\mu_0}{4\pi} 4\pi\epsilon_0 = \mu_0\epsilon_0. \quad (2.7)$$

Apesar de parecer prematuro, é oportuno aqui antecipar que essas constantes fundamentais que descrevem os fenômenos elétricos e magnéticos no vácuo, isto é,  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$ , estão intimamente ligadas, e essa ligação se torna evidente quando encontramos uma equação de **onda eletromagnética** para os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , como veremos no estudo da eletrodinâmica, e mostraremos que a propagação desta referida onda se dá, no vácuo, a uma velocidade  $c$  expressa por

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}. \quad (\text{SI}) \quad (2.8)$$

Se procedermos com a substituição dos valores de experimentais para essas constantes (no SI), encontraremos que

$$c = 2,99792456 \times 10^8 \text{ m/s}. \quad (\text{SI}) \quad (2.9)$$

O exposto acima também permite escrever que, combinando as equações 2.7 e 2.8,

$$\boxed{\frac{k_m}{k_e} = \frac{1}{c^2}}. \quad (2.10)$$

Agora fica claro o porquê de colocarmos um fator 2 na lei de força de Ampère, do contrário teríamos um fator adicional nesta última equação.

Demonstramos a validade da equação 2.10 para o SI, mas mostraremos sua generalidade mais adiante. Este resultado indica que uma escolha de unidades, mediante uma escolha de constante de força, seja elétrica ou magnética, **determina automaticamente** o padrão para outra constante através da velocidade da luz no vácuo, independentemente do sistema de unidades escolhido. Esta interdependência está ligada diretamente às definições da carga elétrica, para lei de força de Coulomb, e para corrente elétrica, na lei de força de Ampère.

Como as definições carga e corrente estão interligadas, inevitavelmente  $k_e$  e  $k_m$  também estarão. Por exemplo, no SI,

$$\begin{cases} k_e \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \\ k_m \equiv \frac{\mu_0}{4\pi}. \end{cases} \quad (\text{SI}) \quad (2.11)$$

ao passo que, no CGS,

$$\begin{cases} k_e \equiv 1, \\ k_m \equiv \frac{1}{c^2}. \end{cases} \quad (\text{CGS}) \quad (2.12)$$

A lei de força de Ampère, no sistema CGS, ficaria então escrita da seguinte forma:

$$\boxed{\frac{F_m}{l} = \frac{2}{c^2} \frac{I_1 I_2}{d}}. \quad (\text{CGS}) \quad (2.13)$$

## 2.2 LEI DE FORÇA DE LORENTZ

Uma outra lei do eletromagnetismo que se baseia em evidências experimentais é a chamada **lei de força de Lorentz**, que descreve como o campo magnético exerce força sobre cargas elétricas em movimento. A lei de força de Lorentz, no SI, possui a seguinte expressão:

$$\boxed{\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})}, \quad (\text{SI}) \quad (2.14)$$

sendo  $q$  o valor da carga elétrica da partícula,  $\vec{v}$  sua velocidade,  $\vec{B}$  e  $\vec{E}$  sendo, respectivamente, o campo magnético e o campo elétrico atuantes sobre a carga. Uma simples análise dimensional na parte magnética da força de Lorentz revela que o campo magnético, no SI, terá unidades de  $\frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{C} \cdot \text{m}}$ , ou, usando a definição do Ampère,  $\frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}}$ . Esta unidade recebeu o nome de **Tesla**, em homenagem ao físico Nikola Tesla, e é definida da seguinte forma:

$$1 \text{ T} \equiv 1 \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}}. \quad (2.15)$$

Ao apresentar inicialmente a força de Lorentz, não fizemos uma definição apropriada do campo magnético  $\vec{B}$ . Vamos construir o conceito deste

campo de forma gradual, visto que ele não é tão simples de definir como o campo eletrostático, como fizemos no contexto da lei de Coulomb. Vamos definir inicialmente a intensidade de campo magnético a partir da lei de força de Ampère como sendo uma quantidade proporcional à razão da força por comprimento que atua em um segmento do fio pela intensidade corrente que passa por este fio. Para entender melhor, considere primeiro que um elemento de carga  $dq = \lambda dl$  se desloca no fio a uma velocidade  $\vec{v}$ . A intensidade da força magnética  $dF_m$  experimentada para este elemento, para um campo magnético  $\vec{B}$  perpendicular ao fio, será

$$dF_m = dqvB, \quad (2.16)$$

$$dF_m = \lambda v B dl, \quad (2.17)$$

de tal forma que, usando  $\lambda v = I$ , a força magnética por comprimento e por intensidade de corrente será

$$B = \frac{1}{I} \frac{dF_m}{dl}. \quad (2.18)$$

No contexto da lei de força de Ampère para uma mesma intensidade de corrente  $I$  nos dois segmentos de fios, a intensidade de campo magnético, no sistema internacional, será definida por

$$B \equiv \frac{1}{I} \frac{F_m}{l} = 2k_m \alpha \frac{I}{d}. \quad (2.19)$$

O fator  $\alpha$  serve para adequarmos a nossa conveniência para escolher um sistema de unidades, de tal forma que, para o SI,

$$B_{SI} = 2k_m \alpha_{SI} \frac{I_{SI}}{d}, \quad (2.20)$$

e para o CGS,

$$B_G = \frac{2\alpha_G}{c^2} \frac{I_G}{d}, \quad (2.21)$$

onde os índices  $SI$  referem-se aos valores no sistema SI e os índices  $G$  referem-se aos valores no sistema CGS. Dividindo os valores das intensidades do campo magnético nos diferentes sistemas, temos

$$\frac{B_{SI}}{B_G} = k_m c^2 \frac{\alpha_{SI}}{\alpha_G} \frac{I_{SI}}{I_G}, \quad (2.22)$$

e usando as equações 2.3 e 1.3,

$$\frac{B_{SI}}{B_G} = c^2 \frac{\mu_0}{4\pi} \sqrt{4\pi\epsilon_0} \frac{\alpha_{SI}}{\alpha_G}, \quad (2.23)$$

e agora usando 2.10 ( $\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$ )

$$\frac{B_{SI}}{B_G} = c^2 \frac{\mu_0}{4\pi} \sqrt{4\pi \frac{1}{\mu_0 c^2}} \frac{\alpha_{SI}}{\alpha_G}, \quad (2.24)$$

$$\frac{B_{SI}}{B_G} = c \frac{\alpha_{SI}}{\alpha_G} \sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}}. \quad (2.25)$$

Temos agora algumas escolhas para fazer sobre os coeficientes  $\alpha_G$  e  $\alpha_{SI}$ . Se quisermos que a conversão entre as intensidades dos campos dependa somente de  $\sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}}$ , teremos que

$$\frac{\alpha_{SI}}{\alpha_G} = \frac{1}{c}. \quad (2.26)$$

Dessa forma, a conversão entre campos magnéticos será feita através de

$$\frac{B_{SI}}{B_G} = \sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}}. \quad (2.27)$$

A escolha de  $\alpha_{SI}$  e  $\alpha_G$  dependerá diretamente da escolha que faremos para a **lei de Faraday**, como veremos em textos futuros. No momento, vamos apresentar uma escolha conveniente fazendo  $\alpha_{SI} = 1$  e, conseqüentemente,  $\alpha_G = c$ . Isto conduz ao resultado já conhecido para intensidade do campo magnético gerado por um fio longo no vácuo, no contexto da lei de força de Ampère, sendo no SI

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{d'}, \quad (2.28)$$

e no CGS,

$$B = \frac{2}{c} \frac{I}{d'}. \quad (2.29)$$

Usando a relação 2.27, e as relações  $q_{SI} = \sqrt{4\pi\epsilon_0} q_G$  e  $E_{SI} = E_G / \sqrt{4\pi\epsilon_0}$ , a lei de força de Lorentz ficará, no CGS, da seguinte maneira:

$$\vec{F} = q_{SI} \vec{E}_{SI} + q_{SI} \vec{v} \times \vec{B}_{SI}, \quad (2.30)$$

$$\vec{F} = \sqrt{4\pi\epsilon_0} q_G \frac{\vec{E}_G}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} + \sqrt{4\pi\epsilon_0} q_G \vec{v} \times \vec{B}_G \sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}}, \quad (2.31)$$

$$\vec{F} = q_G \vec{E}_G + \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} q_G \vec{v} \times \vec{B}_G, \quad (2.32)$$

$$\boxed{\vec{F} = q \vec{E} + \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B}}. \quad (\text{CGS}) \quad (2.33)$$

A análise dimensional desta expressão indica algo muito útil no sistema CGS de unidades. Note que na expressão para força magnética, a razão  $v/c$  é adimensional, ficando a força magnética com unidades de  $qB$ , totalmente equivalente à parte elétrica da força, com unidades de  $qE$ , indicando que, no CGS, o campo elétrico  $\vec{E}$  e o campo magnético  $\vec{B}$  possuem a mesma unidade de campo, ou seja, o Gauss (G). Vamos fazer um exemplo para encontrarmos o equivalente Gaussiano para a unidade Tesla no SI.

**EXEMPLO 2.1.** Usando uma carga pontual  $q = 1 \text{ A}$ , movendo-se com uma velocidade  $v = 1 \text{ m/s}$ , sujeita a um campo magnético perpendicular à velocidade de intensidade  $B = 1 \text{ T}$ , encontre a intensidade deste campo magnético para no sistema CGS.

**SOLUÇÃO:** No SI, a intensidade da força magnética será

$$F_m = qvB, \quad (2.34)$$

$$1 \text{ N} = 1 \text{ C} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot B_{SI}, \quad (2.35)$$

sendo  $B_{SI} = 1 \text{ T}$ . Para encontrar  $B_G$ , ou seja, a intensidade deste campo no CGS equivalente a  $B_{SI} = 1 \text{ T}$ , devemos rescrever esta última equação no CGS, de tal forma que

$$F_m = \frac{q}{c} v B, \quad (2.36)$$

$$10^5 \text{ dina} = \frac{3 \times 10^9 \text{ esu}}{3 \times 10^{10} \text{ cm/s}} \cdot \frac{10^2 \text{ cm}}{\text{s}} \cdot B_G, \quad (2.37)$$

$$10^5 \text{ dina} = 10 \text{ esu} \cdot B_G, \quad (2.38)$$

$$B_G = 10^4 \text{ dina/esu}. \quad (2.39)$$

Recordando que a unidade  $1 \text{ dina/esu} \equiv 1 \text{ G}$ , teremos que

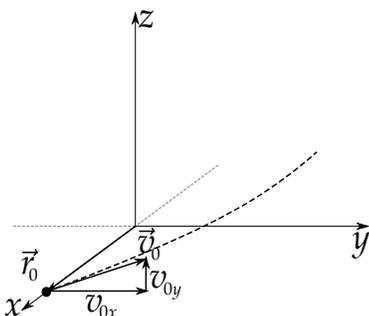
$$\boxed{1 \text{ T} = 10^4 \text{ G}}. \quad (2.40)$$

### 2.2.1 DINÂMICA DA PARTÍCULA CARREGADA

Vamos agora estudar a dinâmica de uma partícula carregada  $q$  se movendo em um campo magnético  $\vec{B}$ . Nesta primeira abordagem, não iremos levar em consideração os efeitos relativísticos, ou seja,  $v \ll c$ , e também não iremos abordar os efeitos de indução eletromagnética, ficando para um outro momento. Neste momento, iremos estudar uma situação mais simplificada para termos um entendimento inicial, sendo ainda vantajoso, para compreensão da dinâmica de partículas sob ação da força de Lorentz. Trata-se do movimento de uma partícula carregada sujeita à ação de um campo magnético uniforme.

**EXEMPLO 2.2.** Determine a trajetória de uma carga pontual de valor positivo  $q$  sujeita a um campo magnético uniforme  $\vec{B} = B_0\hat{z}$  ( $B_0 > 0$ ) partindo de uma posição inicial  $\vec{r}(0) = x_0\hat{x}$  e com velocidade inicial definida por  $\vec{v}(0) = v_{0y}\hat{y} + v_{0z}\hat{z}$  ( $v_{0y} > 0$ ). Veja a figura 2.2, a seguir.

**FIGURA 2.2:** REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DE UMA CARGA PONTUAL DE VALOR POSITIVO  $q$  SUJEITA A UM CAMPO MAGNÉTICO UNIFORME  $\vec{B} = B_0\hat{z}$  ( $B_0 > 0$ ) PARTINDO DE UMA POSIÇÃO INICIAL  $\vec{r}(0) = x_0\hat{x}$  E COM VELOCIDADE INICIAL DEFINIDA POR  $\vec{v}(0) = v_{0y}\hat{y} + v_{0z}\hat{z}$  ( $v_{0y} > 0$ ).



**SOLUÇÃO:** A equação da dinâmica de Newton para o problema é:

$$m\ddot{\vec{r}} = q\vec{v} \times \vec{B}, \tag{2.41}$$

$$m\ddot{\vec{r}} = q\dot{\vec{r}} \times \vec{B}, \tag{2.42}$$

$$m\ddot{x}\hat{x} + m\ddot{y}\hat{y} + m\ddot{z}\hat{z} = q(\dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z}) \times B_0\hat{z}, \tag{2.43}$$

$$m\ddot{x}\hat{x} + m\ddot{y}\hat{y} + m\ddot{z}\hat{z} = qB_0\dot{y}\hat{x} - qB_0\dot{x}\hat{y}. \tag{2.44}$$

Esta última equação gera o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{qB_0}{m}\dot{y} \\ \ddot{y} = -\frac{qB_0}{m}\dot{x} \\ \ddot{z} = 0 \end{cases} \tag{2.45}$$

A equação para coordenada  $z$  é simples de resolver, bastando integrar duas vezes, o que conduz à solução

$$z(t) = at + b, \quad (2.46)$$

isto é, o movimento na coordenada  $z$  é uniforme.

Para encontrarmos  $x(t)$  e  $y(t)$ , vamos usar uma função solução auxiliar que possa ser escrita como se segue:

$$\zeta(t) \equiv x(t) + iy(t). \quad (2.47)$$

Multiplicando a segunda equação do sistema 2.45 pela unidade imaginária  $i$  e somando com a primeira, temos a seguinte equação:

$$\ddot{x} + i\dot{y} = \frac{qB_0}{m}\dot{y} - i\frac{qB_0}{m}\dot{x}, \quad (2.48)$$

$$\ddot{x} + i\dot{y} + i\frac{qB_0}{m}(\dot{x} + i\dot{y}) = 0. \quad (2.49)$$

Usando agora a identidade 2.47, temos:

$$\ddot{\zeta} + i\omega\dot{\zeta} = 0, \quad (2.50)$$

sendo  $\omega = \frac{qB_0}{m}$ . A solução desta última equação é simples de ser obtida através da seguinte equação característica:

$$\lambda(\lambda + i\omega) = 0, \quad (2.51)$$

com soluções  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 = -i\omega$ . Portanto, a solução para  $\zeta(t)$  é dada por

$$\zeta(t) = A + Be^{-i\omega t}. \quad (2.52)$$

Por estarmos trabalhando no campo dos complexos para função  $\zeta$ , seria um erro assumir que as constantes  $A$  e  $B$  são reais. Vamos assumir que são números complexos que, de forma conveniente, são dados por  $A = A_x + iA_y$  e  $B = Re^{-i\phi}$ , com  $R$  e  $-\phi$  sendo o módulo e o argumento de  $B$ , respectivamente. Dessa maneira, nossa solução para  $\zeta$  fica

$$\zeta(t) = A_x + iA_y + Re^{-i(\omega t + \phi)}, \quad (2.53)$$

$$\zeta(t) = A_x + R \cos(\omega t + \phi) + i[A_y - R \sin(\omega t + \phi)], \quad (2.54)$$

de onde concluímos que as soluções  $x(t)$  e  $y(t)$  para dinâmica da partícula em questão são

$$x(t) = A_x + R \cos(\omega t + \phi) \quad (2.55)$$

e

$$y(t) = A_y - R \sin(\omega t + \phi). \quad (2.56)$$

Perceba que estas equações obedecem a uma equação geral de uma circunferência no plano  $x$ - $y$  com raio  $R$  e centro em  $(A_x, A_y)$ , ou seja,

$$(x - A_x)^2 + (y - A_y)^2 = R^2. \quad (2.57)$$

Como a solução para componente  $z$  da posição da partícula descreve um movimento uniforme, concluímos que a trajetória da partícula carregada no campo magnético uniforme é uma **helicóide**.

Aplicando agora as condições iniciais temos

$$x(0) = A_x + R \cos(\phi) = x_0, \quad (2.58)$$

$$y(0) = A_y - R \sin(\phi) = 0, \quad (2.59)$$

$$z(0) = b = 0, \quad (2.60)$$

$$\dot{x}(0) = -\omega R \sin(\phi) = 0, \quad (2.61)$$

$$\dot{y}(0) = -\omega R \cos(\phi) = v_{0y}, \quad (2.62)$$

$$\dot{z}(0) = a = v_{0z}. \quad (2.63)$$

A solução para  $z(t)$  é simplesmente  $z(t) = v_{0z}t$  (movimento uniforme). A equação 2.61 indica que  $\sin \phi = 0$  o conduz à condição  $\phi = n\pi$  com  $n$  sendo inteiro. Já a equação 2.62 indica que  $\cos \phi = -1$ , uma vez que  $R > 0$  e  $v_{0y} > 0$ . Portanto, temos:

$$A_x = x_0 + R \quad (2.64)$$

e

$$A_y = 0. \quad (2.65)$$

Nossa solução para trajetória da partícula de carga  $q > 0$  no campo magnético uniforme informado é

$$\vec{r}(t) = x_0 + R(1 - \cos \omega t) \hat{x} + R \sin \omega t \hat{y} + v_{0z} t \hat{z}. \quad (2.66)$$

Para melhor visualização desta trajetória, um gráfico com estas equações paramétricas foi gerado e apresentado na figura 2.3.

Uma constatação interessante para a força magnética é que a mesma **nunca realiza trabalho**. Considere a velocidade da partícula a partir da equação da trajetória em 2.66, ou seja,

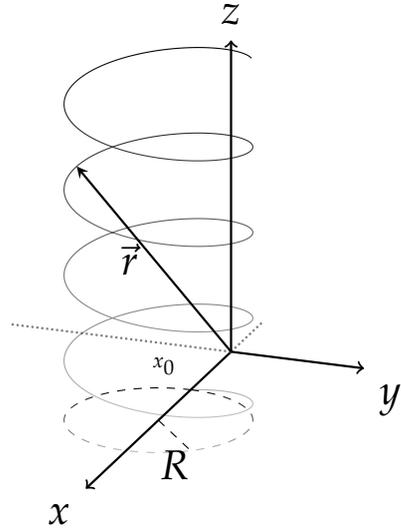
$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \omega R \sin \omega t \hat{x} + \omega R \cos \omega t \hat{y} + v_{0z} \hat{z}. \quad (2.67)$$

Calculando seu módulo ao quadrado, temos

$$v^2 = \omega^2 R^2 + v_{0z}^2, \quad (2.68)$$

o que indica que a energia cinética permanece constante. Como o teorema trabalho-energia cinética assegura que a variação da energia cinética é igual ao trabalho realizado pela força resultante, concluímos que a força magnética não realiza trabalho. Apesar de a nossa dedução ser específica para o movimento de uma carga sob ação de um campo magnético uniforme, este resultado é geral.

FIGURA 2.3: HELICOIDE DESCRITA PELA PARTÍCULA CARREGADA SE MOVENDO EM CAMPO MAGNÉTICO UNIFORME.

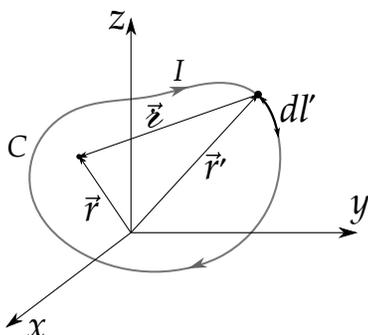


## 2.3 LEI DE BIOT-SAVART

Continuando com a nossa necessidade de embasar nosso estudo em comprovações experimentais, vamos apresentar agora a **Lei de Biot-Savart**. Em 1820, Hans Christian Oersted demonstrou que agulhas de bússola interagem com fios condutores percorridos por corrente elétrica. O torque, experimentado pela agulha da bússola que gira no experimento de Oersted, é mais

uma evidência de um campo magnético como o agente causador do efeito. No mesmo ano de 1820, Jean-Baptiste Biot e Félix Savart apresentaram um trabalho experimental à Academia Francesa de Ciências, em que fizeram a associação entre o período de oscilação de agulhas magnéticas sujeitas ao campo magnético  $\vec{B}$  à força magnética que atua nas agulhas de bússolas, proveniente do campo magnético gerado por fios condutores percorridos por corrente elétrica.

**FIGURA 2.4:** REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DOS VETORES DE INTERESSE PARA CÁLCULO DO CAMPO MAGNÉTICO  $\vec{B}$  EM UMA POSIÇÃO  $\vec{r}$  DEVIDO A UMA LINHA DE CORRENTE ELÉTRICA DE INTENSIDADE  $I$ .



Em um segundo experimento, as constatações permitiram descrever o campo magnético gerado por um fio percorrido por uma corrente elétrica. Transcrevendo os resultados de Biot-Savart para uma notação mais moderna em termos de cálculo vetorial, dado um fio  $C$  percorrido por uma corrente elétrica de intensidade  $I$  especificada, o campo magnético numa posição  $\vec{r}$  arbitrária no espaço será calculado através da seguinte integral de linha (sistema internacional):

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{\vec{I} \times \hat{z}}{r^2} dr', \quad (2.69)$$

sendo  $dr'$  um elemento de comprimento do fio, posicionado em  $\vec{r}'$  (veja a figura 2.4). Para distribuições superficiais e volumétricas de corrente elétrica, vamos fazer as correspondências  $\vec{I} dr' \rightarrow \vec{K} da'$  e  $\vec{I} dr' \rightarrow \vec{J} d\tau'$ , de tal maneira que, respectivamente,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{K}(\vec{r}') \times \hat{z}}{r^2} da', \quad (2.70)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \hat{z}}{r^2} d\tau'. \quad (2.71)$$

No sistema CGS, teremos

$$\vec{B}_{SI}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{\vec{I}_{SI} \times \hat{z}}{r^2} dr', \quad (2.72)$$

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}} \vec{B}_G(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \sqrt{4\pi\epsilon_0}}{4\pi} \int_C \frac{\vec{I}_G \times \hat{z}}{r^2} dr', \quad (2.73)$$

$$\vec{B}_G(\vec{r}) = \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0} \frac{\mu_0 \sqrt{4\pi\epsilon_0}}{4\pi}} \int_C \frac{\vec{I}_G \times \hat{z}}{z^2} dr' = \sqrt{\mu_0\epsilon_0} \int_C \frac{\vec{I}_G \times \hat{z}}{z^2} dr', \quad (2.74)$$

$$\vec{B}_G(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_C \frac{\vec{I} \times \hat{z}}{z^2} dr', \quad (2.75)$$

de tal maneira que a lei de Biot-Savart no sistema Gaussiano será

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_C \frac{\vec{I} \times \hat{z}}{z^2} dr'}. \quad (2.76)$$

Para os casos com densidades superficiais e volumétricas de corrente, o fator  $1/c$  surge da mesma forma.

**EXEMPLO 2.3.** Seja um fio fino de comprimento  $L$  sobre o eixo  $z$ , compreendido entre  $-L/2 \leq z \leq L/2$ , percorrido por uma corrente de intensidade  $I$ , como indica a figura 2.5. Considere agora, um ponto  $P$  localizado em uma posição arbitrária  $(\rho, z)$ . Os ângulos  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são os ângulos limites para o fio.

Considerando os versores  $\hat{\rho}$ ,  $\hat{\phi}$  e  $\hat{z}$  em coordenadas cilíndricas  $\rho$  e  $z$ , determine o campo magnético  $\vec{B}$  no ponto  $P$  através da lei de Biot-Savart. As relações trigonométricas importantes são

$$\sin \alpha_1 = \frac{z - L/2}{\sqrt{\rho^2 + (z - L/2)^2}}, \quad (2.77)$$

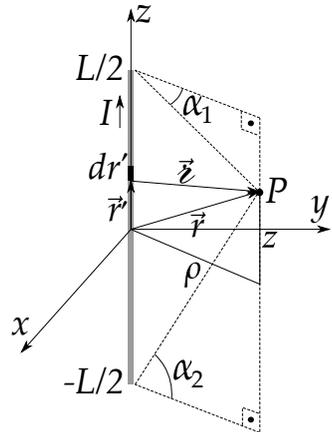
$$\sin \alpha_2 = \frac{z + L/2}{\sqrt{\rho^2 + (z + L/2)^2}}, \quad (2.78)$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + (z - L/2)^2}}, \quad (2.79)$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + (z + L/2)^2}}. \quad (2.80)$$

**SOLUÇÃO:** Escolhendo as coordenadas cilíndricas  $(\rho, \phi, z)$ , a posição do elemento infinitesimal de corrente  $d\vec{r}' = dz'\hat{z}$  é  $\vec{r}' = z'\hat{z}$ . A posição em que iremos determinar o campo magnético é  $\vec{r} =$

**FIGURA 2.5:** FIO FINITO DE COMPRIMENTO  $L$  PERCORRIDO POR CORRENTE DE INTENSIDADE  $I$  E OS VETORES DE INTERESSE PARA O CÁLCULO DO CAMPO MAGNÉTICO VIA LEI DE BIOT-SAVART.



$\rho\hat{\rho} + z\hat{z}$ . Desta forma,  $\vec{z} = \vec{r} - \vec{r}' = \rho\hat{\rho} + (z - z')\hat{z}$ ,  
 com  $r = \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}$ . Aplicando na lei de Biot-Savart, temos:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{r}' \times \vec{z}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz' \hat{z} \times [\rho\hat{\rho} + (z - z')\hat{z}]}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{3/2}}, \quad (2.81)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\rho dz' \hat{\phi}}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{3/2}}, \quad (2.82)$$

onde podemos aplicar a substituição trigonométrica  $z - z' = \rho \tan \alpha$ , ou seja,

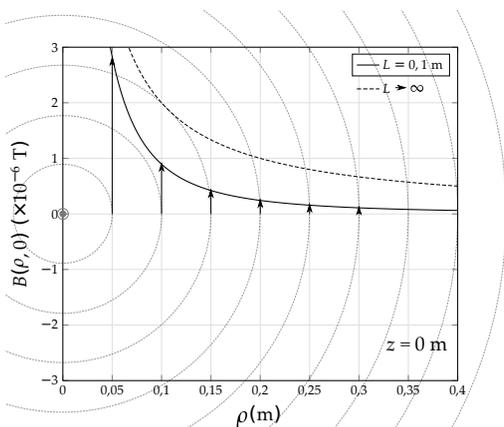
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho} \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} -\frac{\sec^2 \alpha d\alpha}{\sec^3 \alpha} \hat{\phi} = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho} \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} -\cos \alpha d\alpha \hat{\phi}, \quad (2.83)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \hat{\phi}, \quad (2.84)$$

ou, em termos das coordenadas cilíndricas,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho} \left[ \frac{z + L/2}{\sqrt{\rho^2 + (z + L/2)^2}} - \frac{z - L/2}{\sqrt{\rho^2 + (z - L/2)^2}} \right] \hat{\phi}. \quad (2.85)$$

**FIGURA 2.6:** GRÁFICOS PARA OS CAMPOS MAGNÉTICO GERADO POR UM FIO MUITO LONGO ( $L \rightarrow \infty$ ) E UM FIO FINITO ( $L = 0, 1$  M), NO PLANO  $x - y(z = 0)$ , AMBOS PERCORRIDOS POR UMA CORRENTE ELÉTRICA DE 1 A.



Caso o fio seja infinito, os ângulos extremos serão  $\alpha_1 = -\pi/2$  e  $\alpha_2 = \pi/2$ , o que conduz ao campo magnético gerado por um fio muito longo percorrido por uma corrente elétrica  $I$ , dado por

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{\phi}. \quad (2.86)$$

Perceba que a direção  $\hat{\phi}$  indica que este campo magnético terá uma configuração de **linhas de campo circulares** com centro no fio.

**EXEMPLO 2.4.** Determine, no sistema internacional, o campo magnético gerado por uma espira circular de raio  $R$  em um ponto acima de seu centro a uma distância  $z$ , no eixo de simetria, quando percorrida por uma intensidade de corrente  $I$  (veja a figura 2.7). Calcule, especificamente, a intensidade do campo no centro da espira. Quanto vale essa intensidade se a corrente elétrica para  $I = 2 \text{ A}$  e  $R = 0,05 \text{ m}$ ? Compare com a intensidade mínima do campo magnético gerado pela terra na sua superfície  $B_T = 2,5 \times 10^{-5} \text{ T}$ , e determine também quanto vale esse campo em unidades Gaussianas.

**SOLUÇÃO:** Usando  $\vec{I} = I\hat{\phi}$  e escolhendo as coordenadas cilíndricas  $(\rho, \phi, z)$ , a posição do elemento infinitesimal de comprimento  $dr' = R d\phi'$  é  $\vec{r}' = R\hat{\rho}$ . A posição em que iremos determinar o campo magnético é  $\vec{r} = z\hat{z}$ . Desta forma, o vetor separação será  $\vec{z} = \vec{r} - \vec{r}' = z\hat{z} - R\hat{\rho}$ . Aplicando na lei de Biot-Savart, temos:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{\vec{I} \times \vec{z}}{z^2} dr', \quad (2.87)$$

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{\hat{\phi} \times \vec{z}}{z^3} dr', \quad (2.88)$$

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R d\phi' \hat{\phi} \times (z\hat{z} - R\hat{\rho})}{(R^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (2.89)$$

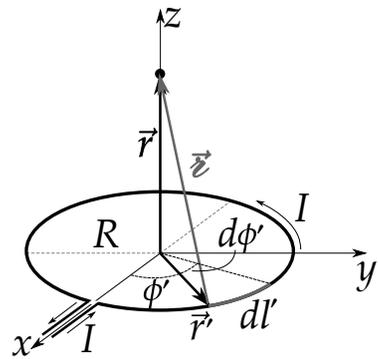
$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi' (z\hat{\rho} + R\hat{z}). \quad (2.90)$$

A integral na direção  $\hat{\rho} = \cos \phi' \hat{x} + \sin \phi' \hat{y}$  é nula pois  $\int_0^{2\pi} \cos \phi' d\phi' = \int_0^{2\pi} \sin \phi' d\phi' = 0$ , sobrando somente a componente  $z$  para o campo magnético, ou seja,

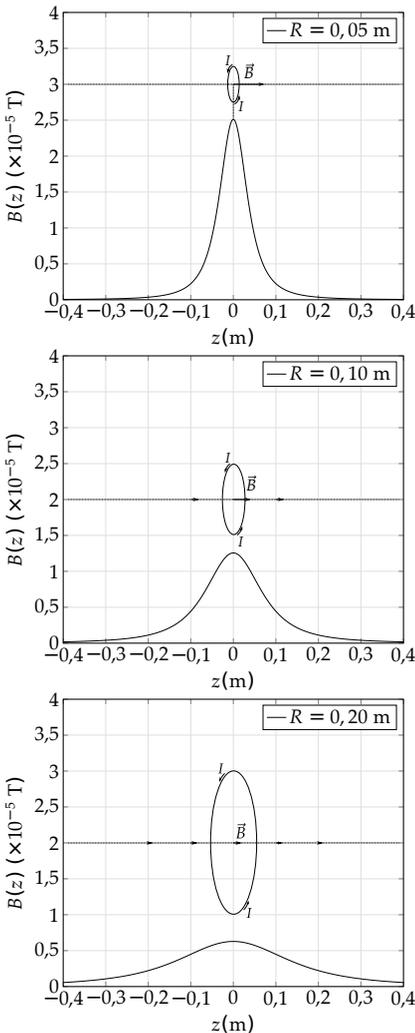
$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi' \hat{z}, \quad (2.91)$$

$$\boxed{\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z}}. \quad (2.92)$$

**FIGURA 2.7:** ESPIRA CIRCULAR PERCORRIDA POR CORRENTE ELÉTRICA E VETORES DE INTERESSE PARA O CÁLCULO DO CAMPO MAGNÉTICO.



**FIGURA 2.8:** GRÁFICOS DO CAMPO MAGNÉTICO AO LONGO DO EIXO DA ESPIRA PARA DIFERENTES VALORES DE  $R$ , NO VÁCUO, COM  $I = 2$  A.



Para o campo magnético no centro da espira, temos  $z = 0$ , o que conduz ao seguinte resultado:

$$\vec{B}(0) = \frac{\mu_0 I}{2R} \hat{z}. \quad (2.93)$$

Usando  $I = 2$  A e  $R = 0,05$  m, teremos a intensidade do campo no centro da espira

$$B(0) = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2} \frac{2}{0,05} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \cdot \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad (2.94)$$

$$B(0) = 2,513 \times 10^{-5} \text{ T}. \quad (2.95)$$

Comparando com a intensidade do campo magnético terrestre, teremos

$$\frac{B(0)}{B_T} = \frac{2,513 \times 10^{-5}}{2,5 \times 10^{-5}} \approx 1,0. \quad (2.96)$$

Isto quer dizer que esta espira gera um campo magnético no seu centro de intensidade equivalente à intensidade mínima do campo magnético terrestre. No CGS, este campo tem intensidades em Gauss calculada simplesmente multiplicando seu valor por  $10^4$ , como já mostramos anteriormente. Com efeito,

$$B(0) = 0,2513 \text{ G}. \quad (2.97)$$

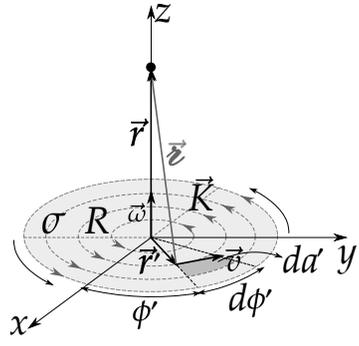
**EXEMPLO 2.5.** Considere um disco isolante fino de raio  $R$  e com densidade carga uniforme  $\sigma$ , girante em torno do eixo principal de simetria com velocidade  $\vec{\omega}$ . (veja a figura 2.9).

- (a) Calcule o campo magnético no eixo de rotação do disco a uma distância  $z$  do seu centro.
- (b) Calcule o campo magnético no centro do disco.

**SOLUÇÃO:** Em coordenadas cilíndricas  $(\rho, \phi, z)$ :

- $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$ ,  $\vec{K} = \sigma \vec{\omega} \times \vec{r}'$ .
- $\vec{r}' = r' \hat{\rho} \rightarrow \vec{K} = \sigma \omega r' \hat{\phi}$ .
- $\vec{r} = z \hat{z}$ ,  $da' = r' d\phi' dr'$ .
- $\vec{z} = \vec{r} - \vec{r}' = z \hat{z} - r' \hat{\rho}$ .
- $z^2 = z^2 + r'^2$ .

**FIGURA 2.9:** DISCO FINO UNIFORMEMENTE CARREGADO GIRANDO EM TORNO DO SEU EIXO E OS VETORES DE INTERESSE PARA CÁLCULO DO CAMPO MAGNÉTICO.



Aplicando na lei de Biot-Savart, temos:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{K}(\vec{r}') \times \vec{z}}{z^3} da', \quad (2.98)$$

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\sigma \omega r' \hat{\phi} \times [z \hat{z} - r' \hat{\rho}]}{[z^2 + r'^2]^{3/2}} r' dr' d\phi', \quad (2.99)$$

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{z r'^2 \overbrace{\hat{\phi} \times \hat{z}}^{\hat{\rho}} - r'^3 \overbrace{\hat{\phi} \times \hat{\rho}}^{-\hat{z}}}{[z^2 + r'^2]^{3/2}} dr' d\phi', \quad (2.100)$$

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{z r'^2 \hat{\rho} + r'^3 \hat{z}}{[z^2 + r'^2]^{3/2}} dr' d\phi', \quad (2.101)$$

A integral na direção  $\hat{\rho}$  é nula. Com efeito, a integral será

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^R \frac{r'^3 dr'}{[z^2 + r'^2]^{3/2}} \hat{z}. \quad (2.102)$$

Usando uma substituição  $u = z^2 + r'^2$ ,  $du = 2r' dr'$ ,

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{4} \int_{z^2}^{z^2+R^2} \frac{(u - z^2) du}{u^{3/2}} \hat{z}, \quad (2.103)$$

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0\sigma\omega}{4} \left( \int_{z^2}^{z^2+R^2} u^{-1/2} du - z^2 \int_{z^2}^{z^2+R^2} u^{-3/2} du \right) \hat{z}, \quad (2.104)$$

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0\sigma\omega}{4} \left( \frac{u^{-1/2+1}}{-1/2+1} \Big|_{z^2}^{z^2+R^2} - z^2 \frac{u^{-3/2+1}}{-3/2+1} \Big|_{z^2}^{z^2+R^2} \right) \hat{z}, \quad (2.105)$$

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0\sigma\omega}{4} \left( 2\sqrt{u} \Big|_{z^2}^{z^2+R^2} + 2z^2 \frac{1}{\sqrt{u}} \Big|_{z^2}^{z^2+R^2} \right) \hat{z}, \quad (2.106)$$

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2} \left( \frac{z^2 + R^2 + z^2}{\sqrt{z^2 + R^2}} - \frac{|z|^2 + z^2}{|z|} \right) \hat{z}, \quad (2.107)$$

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2} \left( \frac{2z^2 + R^2}{\sqrt{z^2 + R^2}} - \frac{|z|^2 + z^2}{|z|} \right) \hat{z}. \quad (2.108)$$

Para  $z > 0$ ,  $|z| = z$ . Portanto,

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2} \left( \frac{2z^2 + R^2}{\sqrt{z^2 + R^2}} - \frac{z^2 + z^2}{z} \right) \hat{z}. \quad (2.109)$$

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2} \left( \frac{2z^2 + R^2}{\sqrt{z^2 + R^2}} - 2z \right) \hat{z}. \quad (2.110)$$

Para  $z < 0$ ,  $|z| = -z$ . Portanto,

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2} \left( \frac{2z^2 + R^2}{\sqrt{z^2 + R^2}} - \frac{(-z)^2 + z^2}{-z} \right) \hat{z}, \quad (2.111)$$

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2} \left( \frac{2z^2 + R^2}{\sqrt{z^2 + R^2}} + 2z \right) \hat{z}. \quad (2.112)$$

De forma resumida,

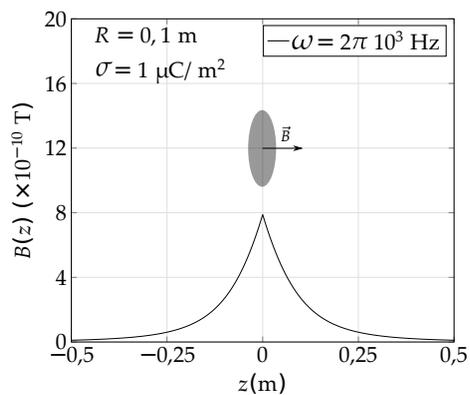
$$\vec{B}(z) = \begin{cases} \frac{\mu_0\sigma\omega}{2} \left( \frac{2z^2 + R^2}{\sqrt{z^2 + R^2}} - 2z \right) \hat{z} & z \geq 0 \\ \frac{\mu_0\sigma\omega}{2} \left( \frac{2z^2 + R^2}{\sqrt{z^2 + R^2}} + 2z \right) \hat{z} & z \leq 0 \end{cases} \quad (2.113)$$

Para  $z = 0$  (centro do disco),

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0\sigma\omega R}{2} \hat{z} \quad (2.114)$$

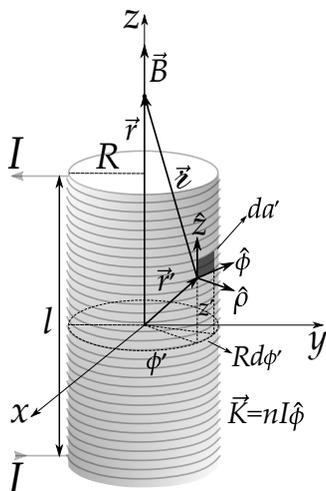
A figura 2.10, a seguir, apresenta o resultado gráfico para a componente  $B(z)$  do campo magnético ao longo do eixo do disco carregado girante com  $R = 0,1$  m,  $\sigma = 1 \mu\text{C}$  e  $\omega = 2\pi \cdot 10^3$  Hz.

FIGURA 2.10: GRÁFICO PARA A COMPONENTE  $B(z)$  DO CAMPO MAGNÉTICO AO LONGO DO EIXO DO DISCO CARREGADO GIRANTE.



**EXEMPLO 2.6.** Considere um solenoide cilindro com enrolamento composto por  $N$  voltas de comprimento  $l$  percorrido por uma corrente  $I$ . Calcule o campo magnético no eixo de simetria do solenoide a uma distância  $z$  do seu centro. Para isso, use a geometria indicada pela figura 2.11, com o solenoide compreendido entre  $-l/2 \leq z \leq l/2$  e centro na origem do sistema de coordenadas.

**FIGURA 2.11:** SOLENOIDE CILINDRO PERCORRIDO POR CORRENTE DE INTENSIDADE  $I$  E OS VETORES DE INTERESSE PARA CÁLCULO DO CAMPO MAGNÉTICO NO EIXO PRINCIPAL DO SOLENOIDE.



**SOLUÇÃO:** Em coordenadas cilíndricas  $(\rho, \phi, z)$ , a posição do elemento infinitesimal de área é  $\vec{r}' = R\hat{\rho} + z'\hat{z}$  e o elemento de área é  $d\vec{a}' = R dz' d\phi'$ . A posição em que iremos determinar o campo magnético é  $\vec{r} = z\hat{z}$ . Desta forma, o vetor separação será  $\vec{z} = \vec{r} - \vec{r}' = -R\hat{\rho} + (z - z')\hat{z}$ , com  $z = \sqrt{R^2 + (z - z')^2}$ . A densidade superficial de corrente será a corrente total que flui no solenoide por comprimento perpendicular ao fluxo. Como a corrente circula no solenoide, a corrente irá fluir na direção  $\hat{\phi}$ . Para  $N$  voltas, teremos uma corrente total igual a  $NI$ , de tal maneira que a corrente por comprimento  $l$  no solenoide será  $NI/l$ , ou seja, a densidade superficial de corrente será

$$\vec{K} = nI\hat{\phi}, \tag{2.115}$$

com  $n = N/l$  sendo a densidade de voltas no solenoide. Aplicando na lei de Biot-Savart (no SI), temos:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{K}(\vec{r}') \times \vec{z}}{z^2} da', \tag{2.116}$$

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{nI\hat{\phi} \times [-R\hat{\rho} + (z - z')\hat{z}]}{[R^2 + (z - z')^2]^{3/2}} R dz' d\phi', \tag{2.117}$$

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 nI}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{-R \overbrace{\hat{\phi} \times \hat{\rho}}^{-\hat{z}} + (z - z') \overbrace{\hat{\phi} \times \hat{z}}^{\hat{\rho}}}{[R^2 + (z - z')^2]^{3/2}} R dz' d\phi', \tag{2.118}$$

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 nI}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{R\hat{z} + (z - z')\hat{\rho}}{[R^2 + (z - z')^2]^{3/2}} R dz' d\phi'. \tag{2.119}$$

Nesta última equação, a integral na direção  $\hat{\rho}$  é nula, pois  $\hat{\rho} = \cos \phi' \hat{x} + \sin \phi' \hat{y}$ , e as integrais em  $\phi'$   $\int_0^{2\pi} \cos \phi' d\phi' = \int_0^{2\pi} \sin \phi' d\phi' = 0$ . Isso mostra que a simetria do problema indica que no eixo do solenoide o campo magnético só possui componente na direção  $\hat{z}$ . Com efeito, a integral será

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 n I R^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dz'}{[R^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \hat{z}. \quad (2.120)$$

Usando uma substituição  $u = z - z'$ , teremos

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 n I R^2}{2} \int_{z-l/2}^{z+l/2} \frac{du}{[R^2 + u^2]^{3/2}} \hat{z} = \frac{\mu_0 n I R^2}{2} \left. \frac{u}{R^2 \sqrt{u^2 + R^2}} \right|_{z-l/2}^{z+l/2} \hat{z}, \quad (2.121)$$

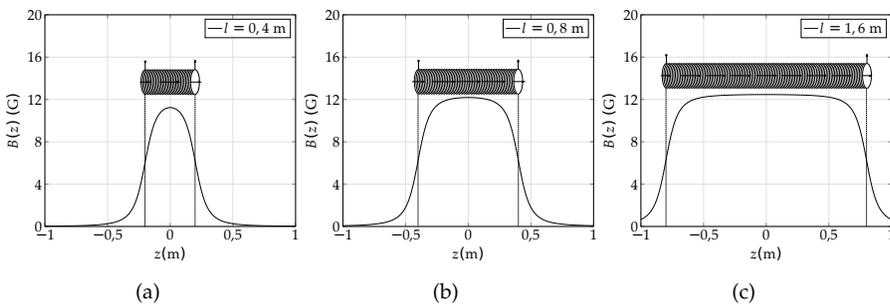
$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 n I}{2} \left[ \frac{z + l/2}{\sqrt{(z + l/2)^2 + R^2}} - \frac{z - l/2}{\sqrt{(z - l/2)^2 + R^2}} \right] \hat{z}. \quad (2.122)$$

O resultado para o campo magnético no centro do solenoide é obtido fazendo  $z = 0$ . Com efeito,

$$\vec{B}(0) = \mu_0 n I \left[ \frac{l/2}{\sqrt{(l/2)^2 + R^2}} \right] \hat{z}. \quad (2.123)$$

Uma análise gráfica do campo magnético para o solenoide é feita na figura 2.12.

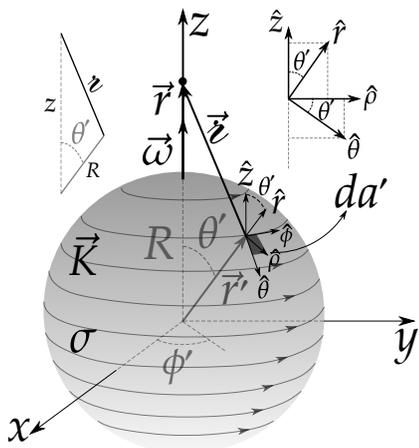
**FIGURA 2.12:** GRÁFICO PARA A COMPONENTE  $B(z)$  DO CAMPO MAGNÉTICO AO LONGO DO EIXO DO SOLENOIDE. NESTE GRÁFICO, APRESENTAMOS OS RESULTADOS PARA TRÊS SOLENOIDES DE MESMO RAIOS  $R = 0,05$  m, COM COMPRIMENTO  $l = 0,4$  m,  $l = 0,8$  m E  $l = 1,6$  m COM  $I = 1$  A E  $n = 1000$  VOLTAS/m.



Perceba que o campo magnético tem intensidade máxima no centro ( $z = 0$ ) dos solenoides indo para zero rapidamente quando  $z \rightarrow \pm\infty$ . O solenoide que possui a razão  $R/l$  menor apresenta uma menor variação do campo no interior. Para o solenoide com  $R/l \approx 0$ , o campo é aproximadamente uniforme. Para o um solenoide com  $R \gg l$  (solenóide muito curto), o campo magnético tem comportamento similar ao campo gerado por uma espira de mesmo raio.

**EXEMPLO 2.7.** Considere uma superfície esférica de raio  $R$  carregada com densidade superficial uniforme  $\sigma$ , que gira a uma velocidade angular constante  $\omega$  em torno de um eixo que passa pelo seu centro (veja a figura 2.13). Determine o campo magnético no eixo de rotação da esfera a uma distância  $z$  do seu centro.

**FIGURA 2.13:** SUPERFÍCIE ESFÉRICA DE RAIO  $R$  CARREGADA COM DENSIDADE SUPERFICIAL UNIFORME  $\sigma$  E VETORES DE INTERESSE PARA O CÁLCULO DO CAMPO MAGNÉTICO NO EIXO DE ROTAÇÃO.



Em coordenadas esféricas e cilíndricas, os vetores e quantidades de interesse para o cálculo do campo magnético no eixo de rotação da esfera serão:

- $\vec{r} = z\hat{z}$
- $\vec{r}' = R\hat{r}$
- $da' = R^2 \sin \theta' d\theta' d\phi'$
- $\vec{K} = \sigma\vec{v} = \sigma\vec{\omega} \times \vec{r}' = \sigma\omega R\hat{z} \times \hat{r}$   
 $\vec{K} = \sigma\omega R \sin \theta' \hat{\phi}$
- $\vec{z} = \vec{r} - \vec{r}' = z\hat{z} - R\hat{r}$
- $z^2 = R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta'$
- $\hat{r} = \cos \theta' \hat{z} + \sin \theta' \hat{\rho}$
- $\hat{\theta} = \cos \theta' \hat{\rho} - \sin \theta' \hat{z}$

Aplicando na lei de Biot-Savart,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{K}(\vec{r}') \times \vec{z}}{z^3} da', \tag{2.124}$$

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sigma\omega R \sin \theta' \hat{\phi} \times [z\hat{z} - R\hat{r}]}{(R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta')^{3/2}} R^2 \sin \theta' d\theta' d\phi', \tag{2.125}$$

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 \sigma \omega R^3}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{[z \overbrace{\hat{\phi}}^{\hat{\rho}} \times \hat{z} - R \overbrace{\hat{\phi}}^{\hat{\theta}} \times \hat{r}]}{(R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta')^{3/2}} \sin^2 \theta' d\theta' d\phi', \quad (2.126)$$

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 \sigma \omega R^3}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{(z - R \cos \theta') \hat{\rho} + R \sin \theta' \hat{z}}{[R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta']^{3/2}} \sin^2 \theta' d\theta' d\phi'. \quad (2.127)$$

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 \sigma \omega R^3}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{(z - R \cos \theta') \hat{\rho} + R \sin \theta' \hat{z}}{[R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta']^{3/2}} \sin^2 \theta' d\theta' d\phi'. \quad (2.128)$$

A integral na direção  $\hat{\rho}$  é nula, pois

$$\hat{\rho} = \cos \phi' \hat{x} + \sin \phi' \hat{y}, \quad (2.129)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos \phi' d\phi' = \int_0^{2\pi} \sin \phi' d\phi' = 0. \quad (2.130)$$

Com efeito,

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 \sigma \omega R^4}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^3 \theta' d\theta' d\phi'}{(R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta')^{3/2}} \hat{z}, \quad (2.131)$$

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 \sigma \omega R^4}{2} \int_0^\pi \frac{\sin^3 \theta' d\theta'}{(R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta')^{3/2}} \hat{z}. \quad (2.132)$$

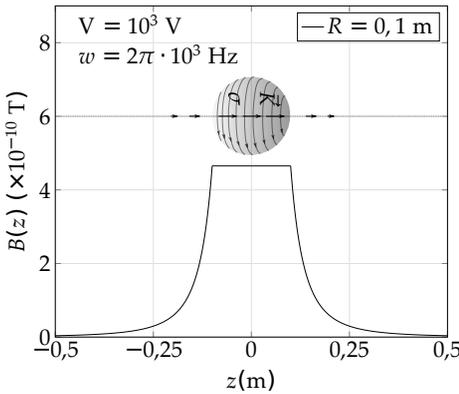
$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 \sigma \omega R^4}{2} \int_0^\pi \frac{\sin^3 \theta' d\theta'}{(R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta')^{3/2}} \hat{z}. \quad (2.133)$$

Usando a substituição  $u = R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta'$ , (veja a integral resolvida em B.2)

$$\int_0^\pi \frac{\sin^3 \theta' d\theta'}{(R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta')^{3/2}} = \begin{cases} \frac{4}{3z^3}, & z \geq R \\ \frac{4}{3R^3}, & -R \leq z \leq R, \\ -\frac{4}{3z^3}, & z \leq -R. \end{cases} \quad (2.134)$$

$$B(z) = \begin{cases} \frac{2\mu_0 \sigma \omega R^4}{3} \frac{1}{|z|^3}, & |z| \geq R \\ \frac{2\mu_0 \sigma \omega R}{3}, & |z| \leq R. \end{cases} \quad (2.135)$$

**FIGURA 2.14:** GRÁFICO PARA O CAMPO MAGNÉTICO GERADO PELA SUPERFÍCIE ESFÉRICA CONDUTORA GIRANTE NO EIXO DE ROTAÇÃO.



Em termos no potencial  $V$  na superfície da esfera, teremos que

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QR}{R^2}, \quad (2.136)$$

$$V = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \rightarrow \sigma = \frac{\epsilon_0 V}{R}, \quad (2.137)$$

usando  $\mu_0\epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ ,

$$B(z) = \begin{cases} \frac{2\omega R^3 V}{3c^2} \frac{1}{|z|^3}, & |z| \geq R \\ \frac{2\omega V}{3c^2}, & |z| \leq R, \end{cases} \quad (2.138)$$

A análise gráfica revela que o campo magnético no eixo de rotação e no interior da superfície esférica é **uniforme**. Veremos que este resultado se mantém para qualquer ponto no interior da superfície esférica, e não somente no eixo de rotação.

**EXEMPLO 2.8.** Considere uma esfera maciça carregada de raio  $R$  com densidade volumétrica uniforme  $\rho_v$ , que gira a uma velocidade angular constante  $\omega$  em torno de um eixo que passa pelo seu centro (veja a figura abaixo). Determine o campo magnético no eixo de rotação da esfera a uma distância  $z$  do seu centro.

Em coordenadas esféricas e cilíndricas, os vetores e quantidades de interesse para o cálculo do campo magnético no eixo de rotação da esfera serão:

- $\vec{r} = z\hat{z}$
- $\vec{r}' = r'\hat{r}$
- $d\tau' = r'^2 \sin \theta' d\theta' d\phi'$
- $\vec{J} = \sigma\vec{v} = \sigma\vec{\omega} \times \vec{r}' = \sigma\omega r'\hat{z} \times \hat{r}$   
 $\vec{J} = \sigma\omega r' \sin \theta' \hat{\phi}$
- $\vec{z} = \vec{r} - \vec{r}' = z\hat{z} - r'\hat{r}$
- $z^2 = r'^2 + z^2 - 2r'z \cos \theta'$
- $\hat{r} = \cos \theta' \hat{z} + \sin \theta' \hat{\rho}$
- $\hat{\theta} = \cos \theta' \hat{\rho} - \sin \theta' \hat{z}$

Aplicando na lei de Biot-Savart,

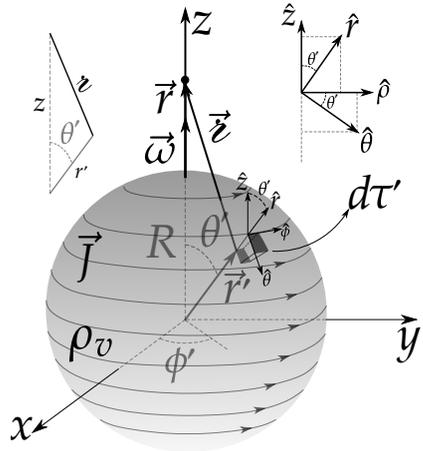
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \vec{z}}{z^3} d\tau' \quad (2.139)$$

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \frac{\rho_v \omega r' \sin \theta' \hat{\phi} \times [z\hat{z} - r'\hat{r}]}{(r'^2 + z^2 - 2r'z \cos \theta')^{3/2}} r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\phi', \quad (2.140)$$

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 \rho_v \omega}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \frac{[zr'^3 \overbrace{\hat{\phi} \times \hat{z}}^{\hat{\rho}} - r'^4 \overbrace{\hat{\phi} \times \hat{r}}^{\hat{\theta}}]}{(r'^2 + z^2 - 2r'z \cos \theta')^{3/2}} \sin^2 \theta' dr' d\theta' d\phi', \quad (2.141)$$

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 \rho_v \omega R^3}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \frac{r'^3 (z - r' \cos \theta') \hat{\rho} + r'^4 \sin \theta' \hat{z}}{[r'^2 + z^2 - 2r'z \cos \theta']^{3/2}} \sin^2 \theta' dr' d\theta' d\phi', \quad (2.142)$$

**FIGURA 2.15:** ESFERA MACIÇA DE RAIOS  $R$  CARREGADA COM DENSIDADE VOLUMÉTRICA UNIFORME  $\rho_v$  E VETORES DE INTERESSE PARA O CÁLCULO DO CAMPO MAGNÉTICO.



$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 \rho_v \omega R^3}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \frac{r'^3 (z - r' \cos \theta') \hat{\rho} + r'^4 \sin \theta' \hat{z}}{[r'^2 + z^2 - 2r'z \cos \theta']^{3/2}} \sin^2 \theta' dr' d\theta' d\phi', \quad (2.143)$$

A integral na direção  $\hat{\rho}$  é nula, pois

$$\hat{\rho} = \cos \phi' \hat{x} + \sin \phi' \hat{y}, \quad (2.144)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos \phi' d\phi' = 0, \quad (2.145)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin \phi' d\phi' = 0. \quad (2.146)$$

Com efeito,

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 \rho_v \omega}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \frac{r'^4 \sin^3 \theta' dr' d\theta' d\phi'}{(r'^2 + z^2 - 2r'z \cos \theta')^{3/2}} \hat{z}, \quad (2.147)$$

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 \rho_v \omega}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^\pi \int_0^R \frac{r'^4 \sin^3 \theta' dr' d\theta'}{(r'^2 + z^2 - 2r'z \cos \theta')^{3/2}} \hat{z}, \quad (2.148)$$

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 \rho_v \omega}{2} \int_0^\pi \int_0^R \frac{r'^4 \sin^3 \theta' dr' d\theta'}{(r'^2 + z^2 - 2r'z \cos \theta')^{3/2}} \hat{z}, \quad (2.149)$$

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 \rho_v \omega}{2} \int_0^R r'^4 \left[ \int_0^\pi \frac{\sin^3 \theta' d\theta'}{(r'^2 + z^2 - 2r'z \cos \theta')^{3/2}} \right] dr' \hat{z}. \quad (2.150)$$

Usaremos então o resultado já conhecido,

$$\int_0^\pi \frac{\sin^3 \theta' d\theta'}{(r'^2 + z^2 - 2r'z \cos \theta')^{3/2}} = \begin{cases} \frac{4}{3z^3}, & r' \leq z \\ \frac{4}{3r'^3}, & r' \geq z, \end{cases} \quad (2.151)$$

Para  $z > R$ , a integral será feita somente para expressão com  $r' \leq z$ . Com efeito,

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 \rho_v \omega}{2} \int_0^R r'^4 \frac{4}{3z^3} dr' \hat{z}, \quad (2.152)$$

$$\vec{B}(z) = \frac{2\mu_0 \rho_v \omega}{3z^3} \frac{r'^{4+1}}{4+1} \Big|_0^R \hat{z}, \quad (2.153)$$

$$\vec{B}(z) = \frac{2\mu_0\rho_v\omega R^5}{15z^3}\hat{z}, \quad (2.154)$$

Para  $0 < z < R$ , a integral será feita para expressão com  $r' \leq z$ , para  $0 < r' < z$ , e será feita para expressão com  $r' \geq z$ , para  $z < r' < R$ . Com efeito,

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0\rho_v\omega}{2} \left[ \int_0^z r'^4 \frac{4}{3z^3} dr' + \int_z^R r'^4 \frac{4}{3r'^3} dr' \right] \hat{z}, \quad (2.155)$$

$$\vec{B}(z) = \frac{2\mu_0\rho_v\omega}{3} \left[ \frac{1}{z^3} \frac{r'^4+1}{4+1} \Big|_0^z + \frac{r'^{1+1}}{1+1} \Big|_z^R \right] \hat{z}, \quad (2.156)$$

$$\vec{B}(z) = \frac{2\mu_0\rho_v\omega}{3} \left[ \frac{z^2}{5} + \frac{R^2 - z^2}{2} \right] \hat{z}, \quad (2.157)$$

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0\rho_v\omega R^2}{3} \left( 1 - \frac{3z^2}{5R^2} \right) \hat{z}, \quad (2.158)$$

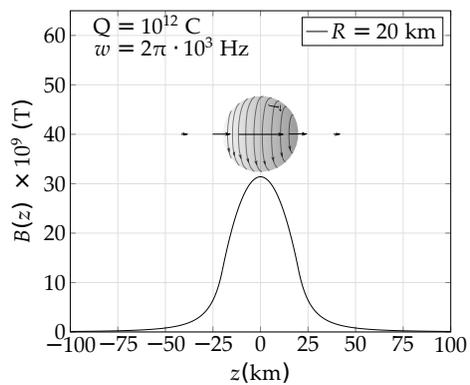
$$B(z) = \begin{cases} \frac{2\mu_0\rho_v\omega R^5}{15z^3}, & z \geq R \\ \frac{\mu_0\rho_v\omega R^2}{3} \left( 1 - \frac{3z^2}{5R^2} \right), & -R \leq z \leq R, \\ -\frac{2\mu_0\rho_v\omega R^5}{15z^3}, & z \leq -R. \end{cases} \quad (2.159)$$

Usando  $\rho_v = \frac{Q}{4\pi R^3/3}$ ,

$$B(z) = \begin{cases} \frac{\mu_0 Q \omega R^5}{10\pi z^3}, & z \geq R \\ \frac{\mu_0 Q \omega}{4\pi R} \left( 1 - \frac{3z^2}{5R^2} \right), & -R \leq z \leq R, \\ -\frac{\mu_0 Q \omega R^5}{10\pi z^3}, & z \leq -R. \end{cases} \quad (2.160)$$

Na figura 2.16, um gráfico para o campo magnético gerado pela esfera girante maciça é apresentado.

**FIGURA 2.16:** GRÁFICO PARA O CAMPO MAGNÉTICO GERADO PELA ESFERA GIRANTE MACIÇA, UNIFORMEMENTE CARREGADA, NO EIXO DE ROTAÇÃO.



# 3

## AS EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS DA MAGNETOSTÁTICA

### 3.1 A DIVERGÊNCIA DE $\vec{B}$

Nossa fundamentação para obtenção das equações fundamentais da magnetostática no vácuo será feita a partir da lei experimental de Biot-Savart que, para uma densidade volumétrica de corrente  $\vec{J}(\vec{r}')$ , determina que o campo magnético numa posição  $\vec{r}$  será expresso pela seguinte integral:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \hat{z}}{r^2} d\tau'. \quad (3.1)$$

A partir desta constatação experimental básica, vamos calcular quanto vale a divergência do campo magnético  $\vec{B}$  diretamente, ou seja,

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \cdot \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \hat{z}}{r^2} d\tau'. \quad (3.2)$$

Como  $\vec{B}$  é função de  $\vec{r}$ , o operador nabla depende somente de  $\vec{r}$ . Portanto, nabla comuta com a operação da integral, visto que esta é feita em termos da posição  $\vec{r}'$ , com efeito,

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \left[ \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\hat{z}}{r^2} \right] d\tau'. \quad (3.3)$$

A divergência do termo entre parênteses na última equação é aplicação de uma das regras do produto para divergente. Regra essa definida, por exemplo, para campos  $\vec{A}$  e  $\vec{C}$ , da seguinte forma (veja o exemplo 2.1 do volume I):

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{C}) = (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{C} - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{C}). \quad (3.4)$$

Aplicando a regra citada, temos que

$$\nabla \cdot \left[ \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\hat{z}}{r'^2} \right] = [\nabla \times \vec{J}(\vec{r}')] \cdot \frac{\hat{z}}{r'^2} - \vec{J}(\vec{r}') \cdot \left[ \nabla \times \left( \frac{\hat{z}}{r'^2} \right) \right]. \quad (3.5)$$

O primeiro é nulo, visto que  $\vec{J}$  é função apenas de  $\vec{r}'$  e o operador  $\nabla$  depende apenas de  $\vec{r}$ . O rotacional no segundo termo da regra do produto é também nulo (veja o exercício 2.1 do volume I), ou seja,

$$\nabla \times \left[ \frac{\hat{z}}{r'^2} \right] = 0. \quad (3.6)$$

Logo, o divergente do campo magnético é nulo, ou seja,

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0}. \quad (3.7)$$

Para compreendermos melhor o significado da equação 3.7, vamos recorrer ao teorema de Gauss do cálculo vetorial, que determina que qualquer integral da divergência de um campo vetorial num volume fechado  $\mathcal{V}$  é igual ao fluxo deste campo vetorial através da superfície  $\mathcal{S}$  que encerra o volume  $\mathcal{V}$ , ou seja,

$$\iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \vec{B} d\tau = \oiint_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot \hat{n} da. \quad (3.8)$$

Usando a equação 3.7, temos a conclusão direta que

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot \hat{n} da = 0. \quad (3.9)$$

Fazendo uma analogia com a lei de Gauss da eletrostática, expressa pela equação

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}, \quad (3.10)$$

podemos dizer que o fluxo do campo elétrico numa superfície fechada é uma medida da carga fonte de linhas de campo encerrada por esta superfície. No caso do campo magnético, o fluxo sobre uma superfície fechada é **sempre** nulo, indicando que não há fontes de linhas de campo para o campo magnético.

Como veremos na próxima subseção, o campo magnético não flui de fonte alguma, mas sim **circula** em torno das correntes elétricas geradoras do campo magnético. Devido a esta característica, campos vetoriais cujo a divergente é zero recebem a denominação de **campos solenoidais**.

### 3.2 A LEI DE AMPÈRE E O ROTACIONAL DE $\vec{B}$

Vamos recordar, dos cursos de física básica, a lei de Ampère<sup>1</sup> em sua forma integral, expressa por

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_{enc}, \quad (\text{SI}) \quad \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \frac{4\pi}{c} I_{enc}, \quad (\text{CGS}). \quad (3.11)$$

onde a circulação do campo magnético  $\vec{B}$  em um caminho fechado  $C$  é uma medida da corrente elétrica encerrada que flui por uma superfície  $S$  que tem o caminho  $C$  como contorno. Por outro lado, o teorema fundamental para o rotacional, diga-se o teorema de Stokes, garante que a circulação de um campo vetorial qualquer em um caminho fechado  $C$  é igual ao fluxo do rotacional deste campo em qualquer superfície  $S$  que tenha  $C$  como contorno. A equação que define este teorema é a seguinte:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot \hat{n} da. \quad (3.12)$$

A corrente encerrada  $I_{enc}$  que flui através da superfície  $S$  pode ser escrita como uma integração de uma densidade volumétrica de corrente  $\vec{J}$  fluindo sobre esta superfície, com efeito,

$$I_{enc} = \iint_S \vec{J} \cdot \hat{n} da. \quad (3.13)$$

Combinando as duas últimas equações, podemos afirmar que

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot \hat{n} da = \iint_S \mu_0 \vec{J} \cdot \hat{n} da, \quad (3.14)$$

<sup>1</sup>Esta lei, amplamente divulgada em livros didáticos como a lei circuital de Ampère, não teve sua proposição nesta terminologia e notação do cálculo vetorial feita pelo próprio Ampère, apesar de sua teoria conduzir ao mesmo resultado. Iremos manter essa denominação por se tratar de algo amplamente aplicado.

o que nos permite concluir que

$$\boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}}. \quad (3.15)$$

Esta última equação indica que o rotacional de  $\vec{B}$ , e portanto sua circulação por unidade de área em um certo ponto do espaço, é uma medida da densidade de corrente elétrica neste ponto, indicando que o campo magnético tende a **circular** correntes elétricas. Dizemos que a equação 3.15 é a forma diferencial da lei de Ampère. As equações 3.7 e 3.15 constituem as equações fundamentais da magnetostática do vácuo. Vale salientar que nossa demonstração não constitui uma dedução da lei de Ampère, mas apenas sua reescrita na forma diferencial a partir da sua forma integral com uso do teorema de Stokes. A dedução formal da lei de Ampère é feita através do cálculo direto do rotacional de  $\vec{B}$  na lei de Biot-Savart na equação 3.1, assim como fizemos o cálculo direto do divergente de  $\vec{B}$  para provar que  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ . Com efeito, vamos aplicar o rotacional no campo magnético dado pela lei de Biot-Savart, isto é,

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \nabla \times \left[ \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\hat{z}}{r'^2} \right] d\tau'. \quad (3.16)$$

Perceba que o operador  $\nabla$  comuta com a integração pois ele atua somente nas variáveis sem linha, ao passo a integração é feita nas variáveis com linha. Temos, assim, o rotacional de um produto vetorial, onde podemos recorrer à seguinte identidade vetorial (veja o exercício 2.1 do volume I):

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B}. \quad (3.17)$$

Fazendo a correspondência  $\vec{A} = \vec{J}$  e  $\vec{B} = \frac{\hat{z}}{r'^2}$ , temos

$$\begin{aligned} \nabla \times \left[ \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\hat{z}}{r'^2} \right] &= \vec{J}(\vec{r}') \left( \nabla \cdot \frac{\hat{z}}{r'^2} \right) - \frac{\hat{z}}{r'^2} [\nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}')] + \left( \frac{\hat{z}}{r'^2} \cdot \nabla \right) \vec{J}(\vec{r}') \\ &\quad - [\vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla] \frac{\hat{z}}{r'^2}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

No primeiro termo, podemos usar a relação para a delta de Dirac,

$$\nabla \cdot \left( \frac{\hat{z}}{r'^2} \right) = 4\pi\delta(\vec{z}). \quad (3.19)$$

O segundo e terceiro termos são nulos pois o operador  $\nabla$  atua nas variáveis sem linha, mas  $\vec{J}(\vec{r}')$  só depende de variáveis sem linha. Dessa forma, o rotacional

do produto vetorial será

$$\nabla \times \left[ \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\hat{z}}{z^2} \right] = \vec{J}(\vec{r}') 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}') - [\vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla] \frac{\hat{z}}{z^2}. \quad (3.20)$$

Substituindo essa expressão no cálculo do rotacional de  $\vec{B}(\vec{r}')$ , temos

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \vec{J}(\vec{r}') 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}') d\tau' - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V [\vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla] \frac{\hat{z}}{z^2} d\tau'. \quad (3.21)$$

Mostraremos agora que a segunda integral da equação anterior é nula. Para isso, considere a inversão de variáveis do operador  $\nabla$ , fazendo  $\nabla = -\nabla'$ , ou seja,

$$[\vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla] \frac{\hat{z}}{z^2} = -[\vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla'] \frac{\hat{z}}{z^2}. \quad (3.22)$$

Esta última equação representa a aplicação de  $\vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla'$  em todas as componentes do vetor  $\frac{\hat{z}}{z^2}$ . Isto quer dizer que, em coordenadas cartesianas,

$$\begin{aligned} [\vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla'] \frac{\hat{z}}{z^2} &= [\vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla'] \left( \frac{\hat{z}}{z^2} \right)_x \hat{x} + [\vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla'] \left( \frac{\hat{z}}{z^2} \right)_y \hat{y} \\ &\quad + [\vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla'] \left( \frac{\hat{z}}{z^2} \right)_z \hat{z}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Considere agora a identidade vetorial

$$\nabla' \cdot (\phi \vec{A}) = \phi (\nabla' \cdot \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \nabla') \phi, \quad (3.24)$$

sendo  $\phi$  um campo escalar. Vamos fazer a correspondência  $\vec{A} = \vec{J}(\vec{r}')$  e escolher uma das componentes escalares de  $\frac{\hat{z}}{z^2}$ , digamos a componente  $x$ , para fazer a correspondência  $\phi = \left( \frac{\hat{z}}{z^2} \right)_x$ . Dessa forma, a identidade vetorial fica

$$\nabla' \cdot \left[ \left( \frac{\hat{z}}{z^2} \right)_x \vec{J} \right] = \left( \frac{\hat{z}}{z^2} \right)_x (\nabla' \cdot \vec{J}) + (\vec{J} \cdot \nabla') \left( \frac{\hat{z}}{z^2} \right)_x. \quad (3.25)$$

O primeiro termo desta última equação é nulo, pois estamos na magnetostática, então  $\nabla' \cdot \vec{J} = 0$ , o que nos permite escrever que

$$\nabla' \cdot \left[ \left( \frac{\hat{z}}{z^2} \right)_x \vec{J}(\vec{r}') \right] = [\vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla'] \left( \frac{\hat{z}}{z^2} \right)_x. \quad (3.26)$$

Fazendo a integração do segundo termo da equação 3.21 na componente  $x$ , e usando esta última equação, temos

$$-\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V [\vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla] \left( \frac{\hat{z}}{z^2} \right)_x d\tau', \quad (3.27)$$

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} [\vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla'] \left( \frac{\hat{z}}{z^2} \right)_x d\tau', \quad (3.28)$$

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} \nabla' \cdot \left[ \left( \frac{\hat{z}}{z^2} \right)_x \vec{J}(\vec{r}') \right] d\tau'. \quad (3.29)$$

Aplicando o teorema da divergência de Gauss, temos que

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} \nabla' \cdot \left[ \left( \frac{\hat{z}}{z^2} \right)_x \vec{J}(\vec{r}') \right] d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \left( \frac{\hat{z}}{z^2} \right)_x \vec{J}(\vec{r}') \cdot \hat{n} da', \quad (3.30)$$

sendo  $\mathcal{V}$  qualquer volume que compreenda toda a corrente e  $S$  a superfície fronteira do volume  $\mathcal{V}$ . Esta integral é independente da escolha da superfície  $S$ , desde que ela englobe toda a distribuição de corrente. Vamos escolher uma superfície que englobe toda a distribuição de corrente e se estenda até os pontos de retorno do vetor  $\vec{J}$ , ou seja, os pontos em que  $\vec{J}$  é tangente à superfície  $S$ . Dessa maneira,  $\vec{J}(\vec{r}') \cdot \vec{d}a' = 0$  para todos os pontos na superfície, e conseqüentemente toda integral de superfície da equação anterior. O mesmo se repete para as demais componentes, verificando que a segunda integral da equação 3.21 é nula. Sendo assim, o rotacional do campo magnético será

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \iiint_{\mathcal{V}} \vec{J}(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') d\tau', \quad (3.31)$$

$$\boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}}, \quad (\text{SI}) \quad (3.32)$$

onde usamos a propriedade de filtro da delta de Dirac, e mostramos a lei de Ampère na forma diferencial a partir da lei de Biot-Savart.

No sistemas Gaussiano, usando as relações de transformação entre os sistemas, teremos

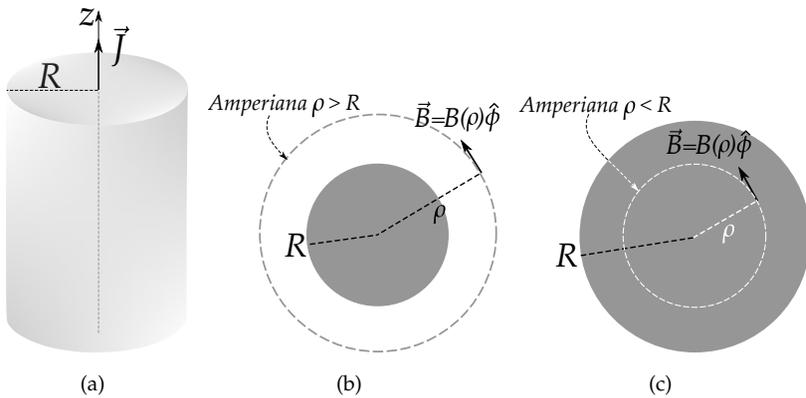
$$\nabla \times \sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}} \vec{B}_G = \mu_0 \sqrt{4\pi\epsilon_0} \vec{J}_G, \quad (3.33)$$

$$\nabla \times \vec{B}_G = 4\pi \sqrt{\mu_0\epsilon_0} \vec{J}_G, \quad (3.34)$$

$$\boxed{\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}}. \quad (\text{CGS}) \quad (3.35)$$

**EXEMPLO 3.1.** Considere um fio cilíndrico e maciço muito longo de raio  $R$  com seu eixo coincidindo com o eixo  $z$  cartesiano (veja a figura 3.1). No volume deste cilindro, é estabelecida uma densidade volumétrica de corrente elétrica, dada por  $\vec{J} = J\hat{z}$  com  $J$  sendo uma constante. Determine o campo magnético  $\vec{B}$  para pontos internos ( $\rho > R$ ) e para pontos externos ao cilindro ( $\rho < R$ ).

**FIGURA 3.1:** EM (A), TEMOS A REPRESENTAÇÃO DE UM CORTE TRANSVERSAL DE UM CILINDRO LONGO DE RAIO  $R$  E O VETOR DENSIDADE VOLUMÉTRICA DE CORRENTE ELÉTRICA  $\vec{J}$ . EM (B), A CURVA TRACEJADA REPRESENTA A AMPERIANA CIRCULAR DE RAIO  $\rho$  COM  $\rho > R$  E EM (C)  $\rho < R$ .



**SOLUÇÃO:** Vamos aplicar a lei de Ampère em sua forma integral para determinar o campo magnético devido à corrente no cilindro. Devido à simetria cilíndrica da distribuição de corrente elétrica, ou seja, com  $\vec{J}$  na direção  $\hat{z}$ , podemos inferir que o campo magnético circula a corrente na direção azimutal  $\hat{\phi}$ , ou seja, que  $\vec{B} = B(\rho)\hat{\phi}$ . Inicialmente, tracemos uma amperiana que acompanha a simetria azimutal do campo magnético (curva tracejada na figura 3.1), ou seja, uma circunferência de raio  $\rho > R$ . Um deslocamento infinitesimal nesta curva é dado por  $d\vec{r} = \rho d\phi\hat{\phi}$ . Toda corrente encerrada que flui pela curva amperiana é a corrente total no cilindro visto que  $\rho > R$ , ou seja,  $I_{enc} = J\pi R^2$ . A lei de Ampère, neste caso, fica (no SI):

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_{enc}, \quad (3.36)$$

$$\int_0^{2\pi} B(\rho)\hat{\phi} \cdot \rho d\phi\hat{\phi} = \mu_0 J\pi R^2, \quad (3.37)$$

$$B(\rho)\rho \int_0^{2\pi} d\phi = \mu_0 J \pi R^2, \quad (3.38)$$

$$B(\rho) = \frac{\mu_0 J R^2}{2\rho}, \quad (3.39)$$

portanto, para  $\rho > R$ ,  $\vec{B} = \frac{\mu_0 J R^2}{2\rho} \hat{\phi}$ . Para  $\rho < R$ , a amperiana possui um raio menor que o raio do cilindro. Logo, a corrente encerrada que flui pela amperiana deve ser calculada na superfície definida pela área circular de área  $\pi\rho^2$ . Ou seja, a lei de Ampère neste caso fica

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_{enc}, \quad (3.40)$$

$$B(\rho)2\pi\rho = \mu_0 J \pi \rho^2, \quad (3.41)$$

$$B(\rho) = \frac{\mu_0 J \rho}{2}, \quad (3.42)$$

portanto, para  $\rho < R$ ,  $\vec{B} = \frac{\mu_0 J \rho}{2} \hat{\phi}$ . A solução para o campo magnético dentro e fora do fio será

$$\vec{B}(\rho) = \begin{cases} \frac{\mu_0 J R^2}{2\rho} \hat{\phi}, & \rho < R \\ \frac{\mu_0 J \rho}{2} \hat{\phi}, & \rho > R \end{cases}. \quad (3.43)$$

### 3.3 ANALOGIA COM A ELETROSTÁTICA

Vamos agora tentar fazer o primeiro elo entre os comportamentos dos campos eletrostáticos e magnetostáticos através de suas equações fundamentais. Na eletrostática, as equações fundamentais são, na forma integral,

$$\boxed{\begin{cases} \iint_S \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}, \\ \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0. \end{cases} \text{ (SI)} \quad \begin{cases} \iint_S \vec{E} \cdot \hat{n} da = 4\pi q_{enc}, \\ \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0. \end{cases} \text{ (CGS)} \quad (3.44)}$$

e, na forma diferencial,

$$\boxed{\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \nabla \times \vec{E} = \vec{0}. \end{cases} \text{ (SI)} \quad \begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho, \\ \nabla \times \vec{E} = \vec{0}. \end{cases} \text{ (CGS)}} \quad (3.45)$$

Na magnetostática, as equações fundamentais são, na forma integral,

$$\boxed{\begin{cases} \oiint_S \vec{B} \cdot \hat{n} da = 0, \\ \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}, \end{cases} \text{ (SI)} \quad \begin{cases} \oiint_S \vec{B} \cdot \hat{n} da = 0, \\ \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I_{enc}, \end{cases} \text{ (CGS)}} \quad (3.46)$$

e, na forma diferencial,

$$\boxed{\begin{cases} \nabla \cdot \vec{B} = 0, \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}. \end{cases} \text{ (SI)} \quad \begin{cases} \nabla \cdot \vec{B} = 0, \\ \nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \end{cases} \text{ (CGS)}} \quad (3.47)$$

Campos eletrostáticos possuem **divergência** em pontos onde há cargas, representadas pela densidade volumétrica de carga  $\rho$ . As cargas elétricas são vistas como fontes de linhas de campo, podendo emergir (cargas positivas) ou imergir (cargas negativas) delas. Além disso, as linhas de campo eletrostático saem das cargas positivas e chegam nas cargas negativas sem realizar **circulações**. Essa circulação nula do campo eletrostático permite defini-lo como um campo **irrotacional** e **conservativo**. Já os campos magnetostáticos **circulam** em torno das correntes elétricas, representadas pela densidade volumétrica de corrente  $\vec{j}$ . Além disso, as linhas de campo magnetostático realizam essas circulações sem **divergência**, isto é, elas não surgem ou somem em ponto algum do espaço. Este comportamento circular do campo magnético implica na não existência de monopolos magnéticos, isto é, não existe algo análogo ao monopolo elétrico no magnetismo, como mostraremos em mais detalhes no estudo da expansão em multipolos magnetostáticos mais adiante.



# 4

## POTENCIAIS MAGNÉTICOS

### 4.1 O POTENCIAL VETOR MAGNÉTICO

No contexto da eletrostática, mostramos que a equação fundamental para o campo elétrico  $\nabla \times \vec{E} = 0$  conduz à definição de um potencial escalar  $V$ , de tal maneira que  $\vec{E} = -\nabla V$ . Chamamos o campo eletrostático de **irrotacional**, tendo em vista que seu rotacional é nulo, implicando também em um comportamento conservativo para força eletrostática. Como vimos no capítulo anterior, as equações fundamentais da magnetostática são

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{B} = 0, \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}. \end{cases} \quad (4.1)$$

Note que, diferentemente do campo elétrico, o campo magnetostático  $\vec{B}$  possui sua divergência nula ao invés do rotacional. Chamamos estes campos de **solenoidais**. Podemos usar um argumento similar ao que usamos para o campo elétrico, e assumir que o campo magnético é escrito como sendo

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad (4.2)$$

o que nos permite aproveitar o fato de que o divergente de qualquer rotacional de uma função vetorial  $\vec{A}$  (nos pontos em que esta seja diferenciável) é sempre

nulo. Chamamos a quantidade  $\vec{A}$  de **potencial vetor magnético**, tendo este na magnetostática *status* análogo ao potencial escalar eletrostático  $V$ . Podemos verificar isso facilmente em coordenadas cartesianas, de tal modo que

$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}, \quad (4.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right), \quad (4.4)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y}. \quad (4.5)$$

Dessa forma,

$$\nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0. \quad (4.6)$$

Para deduzirmos a expressão para o potencial vetor magnético, vamos recorrer à própria lei de Biot-Savart. Para distribuições volumétricas de corrente, a lei de Biot-Savart determina que o campo magnético será calculado pela seguinte integral:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \hat{z}}{r^2} d\tau'. \quad (4.7)$$

Vamos usar a relação  $\frac{\hat{z}}{r^2} = -\nabla \left( \frac{1}{r} \right)$  e a identidade

$$\nabla \times (\phi \vec{C}) = \nabla \phi \times \vec{C} + \phi \nabla \times \vec{C}, \quad (4.8)$$

com  $\phi = \frac{1}{r}$  e  $\vec{C} = \vec{J}(\vec{r}')$ ,

$$\nabla \times \left[ \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{r} \right] = \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \times \vec{J}(\vec{r}') + \left( \frac{1}{r} \right) \nabla \times \vec{J}(\vec{r}'). \quad (4.9)$$

Com efeito,

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} \left[ \vec{J}(\vec{r}') \times \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \right] d\tau', \quad (4.10)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} \left[ \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \times \vec{J}(\vec{r}') \right] d\tau', \quad (4.11)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} \nabla \times \left[ \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{z} \right] d\tau', \quad (4.12)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{z} d\tau' \right], \quad (4.13)$$

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{z} d\tau'} \quad (4.14)$$

O campo magnético  $\vec{B}$  não muda por uma **transformação de calibre**,

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \nabla\phi, \quad (4.15)$$

sendo  $\phi$  um campo escalar diferenciável. Com efeito,

$$\nabla(\phi\vec{A}) = \nabla \times \vec{A} + \cancel{\nabla \times \nabla\phi} \vec{0} \quad (4.16)$$

Aplicando  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$  na lei de Ampère<sup>1</sup>,

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}, \quad (4.17)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J}, \quad (4.18)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}. \quad (4.19)$$

Podemos escolher um  $\phi$  que faça  $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ . Teremos então uma equação de Poisson para magnetostática,

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}}. \quad (4.20)$$

Em uma análise paralela à eletrostática, podemos escrever o potencial vetor  $\vec{A}$  como uma solução integral para equação de Poisson. Consequentemente,

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \leftrightarrow V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\vec{r}')}{z} d\tau'. \quad (4.21)$$

Fazendo as devidas correspondências,

$$V(\vec{r}) \rightarrow \vec{A}(\vec{r}), \quad \frac{1}{\epsilon_0} \rightarrow \mu_0, \quad \rho(\vec{r}') \rightarrow \vec{J}(\vec{r}') \quad (4.22)$$

<sup>1</sup>Consulte o exercício 2.1, em ALVES, Tibério Magno de Lima. Eletromagnetismo Clássico. Volume I, Eletrostática. 1ª ed. Natal: Editora IFRN, 2023.

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{z} d\tau'. \tag{4.23}$$

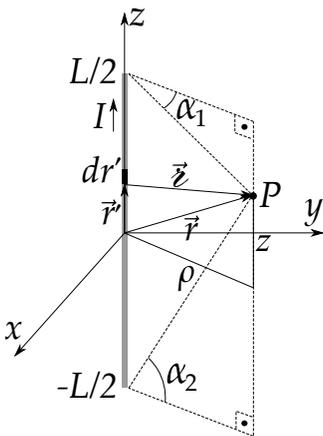
Para linhas e superfícies teremos, respectivamente

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{r}'}{z}, \tag{4.24}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{K}(\vec{r}')}{z} da'. \tag{4.25}$$

**EXEMPLO 4.1.** Determine o potencial vetor magnético  $\vec{A}$  no ponto  $P$  bem como o campo magnético  $\vec{B}$ , através de  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ , para a geometria do problema do fio finito no exemplo 2.3, resolvido anteriormente.

**FIGURA 4.1:** FIO FINITO DE COMPRIMENTO  $L$  PERCORRIDO POR CORRENTE DE INTENSIDADE  $I$  E OS VETORES DE INTERESSE PARA O CÁLCULO DO CAMPO MAGNÉTICO VIA LEI DE BIOT-SAVART.



**SOLUÇÃO:** Temos uma corrente linear localizada e recorreremos à equação 4.24 para calcular o potencial vetor magnético, ou seja,

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{r}'}{z}. \tag{4.26}$$

Usando os vetores de interesse já apresentados no exemplo 2.3, teremos

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz'}{\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}} \hat{z}. \tag{4.27}$$

Considerando a mudança de variável  $u = z - z'$ , o resultado para a integral conduz ao seguinte potencial vetor magnético (consulte as integrais dadas em B.4):

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{z-L/2}^{z+L/2} \frac{du}{\sqrt{\rho^2 + u^2}} \hat{z}, \tag{4.28}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left( u + \sqrt{u^2 + \rho^2} \right) \Big|_{z-L/2}^{z+L/2} \hat{z}, \tag{4.29}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left[ \frac{z + L/2 + \sqrt{(z + L/2)^2 + \rho^2}}{z - L/2 + \sqrt{(z - L/2)^2 + \rho^2}} \right] \hat{z}. \tag{4.30}$$

Vamos agora determinar o campo magnético  $\vec{B}$  através do rotacional do potencial vetor magnético  $\vec{A}$ . Em coordenadas cilíndricas, o rotacional completo é

$$\nabla \times \vec{A} = \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left( \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \hat{\phi} + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right] \hat{z}. \quad (4.31)$$

Note que o potencial vetor magnético encontrado só possui componente na direção  $\hat{z}$ , ou seja,  $A_z$ , e esta componente só depende das variáveis  $z$  e  $\rho$ . Sendo assim, todos os termos se anulam, exceto

$$\nabla \times \vec{A} = - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \hat{\phi}. \quad (4.32)$$

Calculando agora a derivada temos

$$\frac{\partial A_z}{\partial \rho} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[ \frac{\rho [(z + L/2)^2 + \rho^2]^{-1/2}}{z + L/2 + \sqrt{(z + L/2)^2 + \rho^2}} - \frac{\rho [(z - L/2)^2 + \rho^2]^{-1/2}}{z - L/2 + \sqrt{(z - L/2)^2 + \rho^2}} \right], \quad (4.33)$$

Usando as definições de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , e as relações trigonométricas expressas nas equações 2.77 e 2.78, podemos escrever que

$$\tan \alpha_1 = \frac{L/2 - z}{\rho} \rightarrow L/2 - z = \rho \tan \alpha_1, \quad (4.34)$$

$$\tan \alpha_2 = \frac{L/2 + z}{\rho} \rightarrow L/2 + z = \rho \tan \alpha_2, \quad (4.35)$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + (L/2 - z)^2}} \rightarrow \sqrt{\rho^2 + (L/2 - z)^2} = \rho \sec \alpha_1, \quad (4.36)$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + (L/2 + z)^2}} \rightarrow \sqrt{\rho^2 + (L/2 + z)^2} = \rho \sec \alpha_2. \quad (4.37)$$

Substituindo estas expressões na equação 4.33, teremos

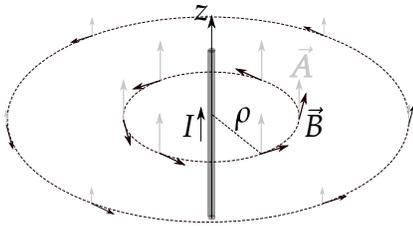
$$\frac{\partial A_z}{\partial \rho} = \frac{\mu_0 I}{4\pi \rho} \left[ \frac{\cos \alpha_2}{\tan \alpha_2 + \sec \alpha_2} - \frac{\cos \alpha_1}{-\tan \alpha_1 + \sec \alpha_1} \right], \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial \rho} = \frac{\mu_0 I}{4\pi \rho} \left[ \frac{\cos^2 \alpha_2}{1 + \sin \alpha_2} - \frac{\cos^2 \alpha_1}{1 + \sin \alpha_1} \right], \quad (4.39)$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial \rho} = \frac{\mu_0 I}{4\pi \rho} \left[ \frac{1 - \sin^2 \alpha_2}{1 + \sin \alpha_2} - \frac{1 - \sin^2 \alpha_1}{1 + \sin \alpha_1} \right], \quad (4.40)$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial \rho} = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho} \left[ \frac{(1 - \sin \alpha_2)(1 + \sin \alpha_2)}{1 + \sin \alpha_2} - \frac{(1 - \sin \alpha_1)(1 + \sin \alpha_1)}{1 + \sin \alpha_1} \right], \quad (4.41)$$

**FIGURA 4.2:** REPRESENTAÇÃO DO POTENCIAL VETOR MAGNÉTICO  $\vec{A}$  (VETORES EM CINZA) E DO CAMPO MAGNÉTICO  $\vec{B}$  (VETOR EM PRETO) PARA O FIO RETO DE COMPRIMENTO  $L$  PERCORRIDO POR UMA CORRENTE ELÉTRICA DE INTENSIDADE  $I$ .



$$\frac{\partial A_z}{\partial \rho} = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho} (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2), \quad (4.42)$$

o que nos permite escrever o campo magnético,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \hat{\phi}, \quad (4.43)$$

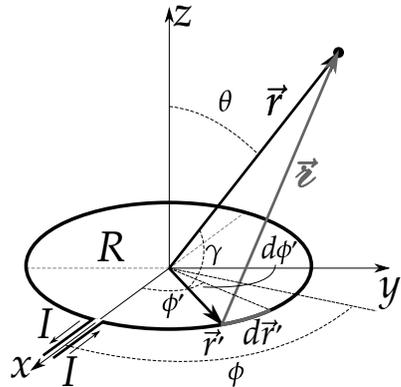
resultado este obtido anteriormente pela lei de Biot-Savart. Na figura 4.2 ao lado, temos uma representação dos campos  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$ . Perceba que, como  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ , o campo magnético  $\vec{B}$  “se enrosca” no potencial vetor  $\vec{A}$ . As equipotenciais para o vetor  $\vec{A}$  são superfície cilíndricas.

**EXEMPLO 4.2.** No exemplo 2.4, calculamos o campo magnético no eixo de simetria de uma espira circular (eixo  $z$ ). Considere agora a mesma espira circular raio  $R$  percorrida por uma corrente elétrica de intensidade  $I$  no sentido anti-horário do plano  $x$ - $y$ . Determine o potencial vetor magnético  $\vec{A}$  para **qualquer** ponto do espaço  $(r, \theta, \phi)$  em coordenadas esféricas. Deduza uma expressão para o potencial vetor magnético  $\vec{A}$  para as aproximações  $r \gg R$  (pontos muito distantes da espira) e  $r \ll R$  (pontos muito próximos a origem da espira) bem como o campo magnético  $\vec{B}$  aproximado.

**SOLUÇÃO:** Vamos começar descrevendo, em detalhes, os vetores de interesse para o cálculo de  $\vec{A}$ .

- $\vec{r} = r \sin \theta \cos \phi \hat{x} + r \sin \theta \sin \phi \hat{y} + r \cos \theta \hat{z}$ . Posição onde se deseja calcular  $\vec{A}$ .
- $\vec{r}' = R \cos \phi' \hat{x} + R \sin \phi' \hat{y}$ . Posição do elemento de comprimento para integração.
- $d\vec{r}' = R d\phi' \hat{\phi}' = R d\phi' [-\sin \phi' \hat{x} + \cos \phi' \hat{y}]$ . Deslocamento infinitesimal para integração.
- $\vec{z} = \vec{r} - \vec{r}'$ . Separação entre o elemento de comprimento da espira e o ponto onde se pretende calcular  $\vec{A}$ .
- $z^2 = (\vec{r} - \vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')$   
 $z^2 = |\vec{r}|^2 + |\vec{r}'|^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'$   
 $z^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \gamma$ . Módulo da separação dado pela lei dos cossenos no triângulo formado entre os vetores  $\vec{r}$ ,  $\vec{r}'$  e  $\vec{z}$ .

**FIGURA 4.3:** ESPIRA CIRCULAR PERCORRIDA POR UM CORRENTE ELÉTRICA DE INTENSIDADE  $I$  E VETORES DE INTERESSE PARA O CÁLCULO DO POTENCIAL VETOR MAGNÉTICO  $\vec{A}$  EM UMA POSIÇÃO ARBITRÁRIA  $\vec{r}$  NO ESPAÇO.



Os versores  $\hat{r}$  e  $\hat{r}'$  são, respectivamente, escritos por

$$\hat{r} = \sin \theta \cos \phi \hat{x} + r \sin \theta \sin \phi \hat{y} + r \cos \theta \hat{z}, \tag{4.44}$$

$$\hat{r}' = \cos \phi' \hat{x} + \sin \phi' \hat{y}. \tag{4.45}$$

Calculando  $\cos \gamma = \hat{r} \cdot \hat{r}'$ , temos

$$\cos \gamma = (\sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}) \cdot (\cos \phi' \hat{x} + \sin \phi' \hat{y}) \quad (4.46)$$

$$\cos \gamma = \sin \theta \cos \phi' \cos \phi + \sin \theta \sin \phi' \sin \phi. \quad (4.47)$$

Podemos usar a relação trigonométrica para o cosseno da diferença, de tal forma que:

$$\cos \gamma = \sin \theta \cos(\phi - \phi'), \quad (4.48)$$

o que nos permite escrever que:

$$z^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \sin \theta \cos(\phi - \phi'). \quad (4.49)$$

Com posse de todos os vetores e quantidades de interesse para integração do potencial vetor magnético, podemos proceder agora ao cálculo. Com efeito,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{r}'}{z}, \quad (4.50)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[-\sin \phi' \hat{x} + \cos \phi' \hat{y}] R d\phi'}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \sin \theta \cos(\phi - \phi')}}. \quad (4.51)$$

Vamos usar uma substituição que facilite a integração e, ao mesmo tempo, traga sentido físico. Fazendo a substituição  $\phi' = \phi + 2\alpha$ , temos que

$$\sin \phi' = \sin(\phi + 2\alpha) = \sin(\phi) \cos(2\alpha) + \cos(\phi) \sin(2\alpha), \quad (4.52)$$

$$\cos \phi' = \cos(\phi + 2\alpha) = \cos(\phi) \cos(2\alpha) - \sin(\phi) \sin(2\alpha), \quad (4.53)$$

$$\cos(\phi - \phi') = \cos(2\alpha). \quad (4.54)$$

Consequentemente, a integral substituída será expressa por

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I R}{2\pi} \left[ - \int_{-\phi/2}^{\pi-\phi/2} \frac{[\sin(\phi) \cos(2\alpha) + \cos(\phi) \sin(2\alpha)] d\alpha}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \sin \theta \cos(2\alpha)}} \hat{x} + \int_{-\phi/2}^{\pi-\phi/2} \frac{[\cos(\phi) \cos(2\alpha) - \sin(\phi) \sin(2\alpha)] d\alpha}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \sin \theta \cos(2\alpha)}} \hat{y} \right] \quad (4.55)$$

Algumas considerações importantes podem facilitar o desenvolvimento da integral acima. Primeiro, note que todos os termos dos integrandos possuem

$\sin(2\alpha)$  ou  $\cos(2\alpha)$ , ou seja, funções com período igual a  $\pi$ . Como a integral varia de  $-\phi/2$  a  $\pi - \phi/2$ , isto é, sobre todo o período do integrando, não importa o quanto seja a defasagem de  $\phi/2$ . A independência de  $\phi$  corrobora com o que já sabemos *a priori* sobre o resultado, ou seja, o potencial vetor magnético  $\vec{A}$  possui simetria azimutal. Isto nos permite substituir os limites da integração para 0 e  $\pi$ . Segundo, como  $\sin(2\alpha)$  é uma função ímpar em torno de  $\pi/2$  no período  $\pi$ , todas as integrais com este termo serão nulas. Com efeito, a integral poderá ser reescrita como sendo

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 IR}{2\pi} \left[ - \int_0^\pi \frac{[\sin(\phi) \cos(2\alpha)] d\alpha}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \sin \theta \cos(2\alpha)}} \hat{x} + \int_0^\pi \frac{[\cos(\phi) \cos(2\alpha)] d\alpha}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \sin \theta \cos(2\alpha)}} \hat{y} \right], \quad (4.56)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 IR}{2\pi} \left[ \int_0^\pi \frac{\cos(2\alpha) d\alpha}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \sin \theta \cos(2\alpha)}} \right] \overbrace{[-\sin(\phi)\hat{x} + \cos(\phi)\hat{y}]}^{\hat{\phi}}, \quad (4.57)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 IR}{2\pi} \left[ \int_0^\pi \frac{\cos(2\alpha) d\alpha}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \sin \theta \cos(2\alpha)}} \right] \hat{\phi}. \quad (4.58)$$

Faremos agora a substituição  $2\alpha = 2\beta + \pi$ , de tal forma que

$$\cos(2\alpha) = \cos(2\beta + \pi) = -\cos(2\beta). \quad (4.59)$$

Com efeito, temos

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 IR}{2\pi} \left[ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{-\cos(2\beta) d\beta}{\sqrt{R^2 + r^2 + 2Rr \sin \theta \cos(2\beta)}} \right] \hat{\phi}. \quad (4.60)$$

Esta integral possui um integrando par em um intervalo simétrico em torno de  $\beta = 0$ . Podemos escrever que o resultado será duas vezes a integração entre 0 e  $\pi/2$ ,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 IR}{\pi} \left[ \int_0^{\pi/2} \frac{-\cos(2\beta) d\beta}{\sqrt{R^2 + r^2 + 2Rr \sin \theta \cos(2\beta)}} \right] \hat{\phi}. \quad (4.61)$$

Usando agora a relação trigonométrica  $\cos(2\beta) = 1 - 2\sin^2(\beta)$ , a integral será expressa por

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 IR}{\pi} \left[ \int_0^{\pi/2} \frac{-[1 - 2\sin^2(\beta)] d\beta}{\sqrt{R^2 + r^2 + 2Rr \sin \theta - 4Rr \sin \theta \sin^2(\beta)}} \right] \hat{\phi}. \quad (4.62)$$

Vamos definir agora um parâmetro algébrico  $k$  que facilite a escrita da integral acima em termos de uma integral já conhecida, de tal forma que

$$k^2 \equiv \frac{4Rr \sin \theta}{R^2 + r^2 + 2Rr \sin \theta}, \quad 0 < k^2 < 1. \quad (4.63)$$

Usando esta definição na integral, teremos

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 IR}{\pi \sqrt{R^2 + r^2 + 2Rr \sin \theta}} \left[ \int_0^{\pi/2} \frac{[-1 + 2 \sin^2(\beta)] d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\beta)}} \right] \hat{\phi}, \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 IR}{\pi \sqrt{R^2 + r^2 + 2Rr \sin \theta}} & \left[ - \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\beta)}} \right. \\ & \left. + \frac{2}{k^2} \int_0^{\pi/2} \frac{[1 - 1 + k^2 \sin^2(\beta)] d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\beta)}} \right] \hat{\phi}, \end{aligned} \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 IR}{\pi \sqrt{R^2 + r^2 + 2Rr \sin \theta}} & \left[ \left( \frac{2}{k^2} - 1 \right) \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\beta)}} \right. \\ & \left. - \frac{2}{k^2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\beta)} d\beta \right] \hat{\phi}, \end{aligned} \quad (4.66)$$

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 IR}{\pi \sqrt{R^2 + r^2 + 2Rr \sin \theta}} \left[ \left( \frac{2}{k^2} - 1 \right) K(k) - \frac{2}{k^2} E(k) \right] \hat{\phi}}, \quad (4.67)$$

sendo as funções  $K(k)$  e  $E(k)$  as famosas funções elípticas de primeira e segunda espécie, respectivamente (consulte o apêndice C),

$$K(k) \equiv \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\beta)}}, \quad (4.68)$$

$$E(k) \equiv \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\beta)} d\beta. \quad (4.69)$$

A equação 4.67, que representa nosso resultado para o potencial vetor magnético em uma posição arbitrária do espaço, é um resultado geral. No entanto, carrega suas dificuldades algébricas e de cálculo inerentes às integrais elípticas. Não há uma solução fechada expressa por meio de funções elementares para esses tipos de integrais. O cálculo do campo magnético exato, usando

a equação 4.67, pode ser feito através de  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ , que, em coordenadas esféricas, fica expresso por

$$\vec{B} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{\phi}. \quad (4.70)$$

Como o potencial vetor magnético, neste caso, só possui componente na direção  $\hat{\phi}$ , ou seja,  $A_\phi$ , temos que

$$\vec{B} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) \right] \hat{r} - \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] \hat{\theta}. \quad (4.71)$$

Fica claro que as derivadas de  $A_\phi$ , em termos das variáveis  $r$  e  $\theta$ , demandam um custo algébrico e de cálculo considerável, uma vez que o parâmetro  $k$ , nas funções elípticas, é função das duas variáveis. Devido a inviabilidade deste cálculo, iremos, pelo menos agora, calcular uma expressão aproximada para o campo magnético gerado pela espira, mas que terá conexão com o método de cálculo que estaremos no próximo capítulo, diga-se a **expansão multipolar na magnetostática**. A aproximação consiste considerarmos  $r \gg R$ , ou seja, para pontos distantes da espira, e também para  $R \gg r$ , isto é, para pontos muito próximo ao centro da espira. Com efeito, para  $r \gg R$ ,

$$\sqrt{R^2 + r^2 + 2Rr \sin \theta} \approx r, \quad (4.72)$$

e, consequentemente,

$$k^2 \approx \frac{4R \sin \theta}{r} \ll 1. \quad (4.73)$$

Isto nos permite escrever uma série de potências para as integrais elípticas  $K(k)$  e  $E(k)$ .

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{k^2}{4} + \frac{9k^4}{32} + \frac{25k^6}{256} + \dots \right), \quad (4.74)$$

$$E(k) = \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{k^2}{4} + \frac{3k^4}{32} - \frac{5k^6}{256} + \dots \right). \quad (4.75)$$

A expressão entre colchetes da equação 4.67 poderá ser reduzida para

$$\left[ \left( \frac{2}{k^2} - 1 \right) K(k) - \frac{2}{k^2} E(k) \right] \approx \frac{\pi}{16} \left( k^2 + \frac{3k^4}{4} - \frac{25k^6}{32} + \dots \right). \quad (4.76)$$

Considerando que  $k \ll 1$ , iremos considerar apenas o primeiro termos da expressão acima, o que implica em

$$\left[ \left( \frac{2}{k^2} - 1 \right) K(k) - \frac{2}{k^2} E(k) \right] \approx \frac{\pi k^2}{16}. \quad (4.77)$$

Usando a aproximação na equação 4.77 e a aproximação na equação 4.73 na expressão do potencial vetor magnético em 4.67, teremos a seguinte aproximação para  $\vec{A}$ ,

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0 IR}{\pi r} \frac{\pi}{16} \frac{4R \sin \theta}{r} \hat{\phi}, \quad (4.78)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0 \pi R^2 I \sin \theta}{4\pi r^2} \hat{\phi}, \quad (4.79)$$

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0 m \sin \theta}{4\pi r^2} \hat{\phi}}. \quad (4.80)$$

A quantidade  $m \equiv \pi R^2 I$  é a **intensidade do momento dipolo magnético** da espira ( $\pi R^2$  é a área da espira), e trataremos em mais detalhes sobre esse assunto quando estudarmos a expansão em multipolos da magnetostática. Com esta expressão mais sucinta e aproximada, podemos calcular o campo magnético aproximado. Com efeito, o campo magnético aproximado gerado pela espira, para ( $r \gg R$ ), será expresso por

$$\vec{B} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\mu_0 m \sin^2 \theta}{4\pi r^2} \right) \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\mu_0 m \sin \theta}{4\pi r} \right) \hat{\theta}, \quad (4.81)$$

$$\boxed{\vec{B} \approx \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta})}, \quad r \gg R \quad (4.82)$$

Para  $R \gg r$ , isto é, para pontos próximos ao centro da espira circular, teremos que

$$\sqrt{R^2 + r^2 + 2Rr \sin \theta} \approx R, \quad (4.83)$$

e, conseqüentemente,

$$k^2 \approx \frac{4r \sin \theta}{R} \ll 1. \quad (4.84)$$

Usando a aproximação na equação 4.77 e a aproximação na equação 4.84 na expressão do potencial vetor magnético em 4.67, teremos a seguinte aproximação para  $\vec{A}$ ,

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0 IR}{\pi R} \frac{\pi}{16} \frac{4r \sin \theta}{R} \hat{\phi}, \quad (4.85)$$

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0 I}{4R} r \sin \theta \hat{\phi}}. \quad (4.86)$$

Com efeito, o campo magnético aproximado gerado pela espira, para ( $R \gg r$ ), será expresso por

$$\vec{B} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\mu_0 I}{4R} r \sin^2 \theta \right) \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\mu_0 I}{4R} r^2 \sin \theta \right) \hat{\theta}, \quad (4.87)$$

$$\vec{B} \approx \frac{\mu_0 I}{4R} (2 \cos \theta \hat{r} - 2 \sin \theta \hat{\theta}), \quad (4.88)$$

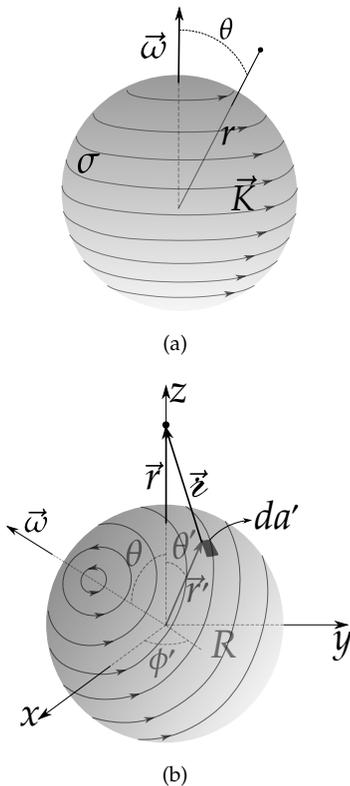
$$\vec{B} \approx \frac{\mu_0 I}{2R} \overbrace{(\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta})}^{\hat{z}}, \quad (4.89)$$

$$\boxed{\vec{B} \approx \frac{\mu_0 I}{2R} \hat{z}, \quad R \gg r}. \quad (4.90)$$

O campo magnético no entorno do centro da espira é, aproximadamente, **uniforme**. Note também que o resultado acima é o valor do campo magnético exato atuante no centro da espira.

**EXEMPLO 4.3.** Considere uma superfície esférica de raio  $R$ , uniformemente carregada com densidade superficial  $\sigma$ , que gira a uma velocidade angular constante  $\omega$  em torno de uma eixo que passa pelo seu centro (veja a figura 4.4). Determine o potencial vetor magnético  $\vec{A}$  e campo magnético  $\vec{B}$  dentro e fora da esfera numa posição a uma distância  $r$  do centro da esfera fazendo um ângulo  $\theta$  com o eixo de rotação.

**FIGURA 4.4:** EM (A), UMA SUPERFÍCIE ESFÉRICA COM DENSIDADE UNIFORME  $\sigma$  DE CARGA GIRANDO COM VELOCIDADE ANGULAR  $\vec{\omega}$  EM UM EIXO QUE PASSA PELO SEU CENTRO. EM (B), UM SISTEMA DE REFERÊNCIA EM QUE  $\vec{\omega}$  FAZ UM ÂNGULO  $\theta$  COM O EIXO  $z$ , ESTANDO NO PLANO  $z-x$ , BEM COMO OS VETORES DE INTERESSE PARA O CÁLCULO DE  $\vec{A}$ .



**SOLUÇÃO:** Em uma primeira visão da solução do problema, poderíamos imaginar que seria mais adequado fazer o eixo de rotação coincidir com o eixo  $z$  cartesiano e calcular o potencial vetor magnético em uma posição arbitrária do espaço  $\vec{r}$ . Essa estratégia conduz a uma integral complexa de se resolver diretamente, na verdade, muito mais difícil do que a integral que iremos propor e calcular aqui.

Para facilitar o cálculo e nossa visualização do problema, vamos supor que a velocidade angular da esfera se encontra no plano  $x-z$  fazendo um ângulo  $\theta$  com o eixo  $z$ , e a posição  $\vec{r}$  onde iremos determinar o potencial vetor magnético fique no eixo  $z$ , como ilustra a figura a 4.4(b). Como o problema tem simetria azimutal, o que importa é calcularmos o potencial vetor  $\vec{A}$  numa posição a um distância  $r$  do o centro da esfera fazendo um ângulo  $\theta$  com o eixo de rotação. De acordo com a geometria proposta, a velocidade angular é escrita como sendo

$$\vec{\omega} = \omega (\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{z}). \tag{4.91}$$

O elemento de área em coordenadas esféricas é dado por  $da' = R^2 \sin \theta' d\theta' d\phi'$  com

$$\vec{r}' = R [\sin \theta' \cos \phi' \hat{x} + \sin \theta' \sin \phi' \hat{y} + \cos \theta' \hat{z}]. \tag{4.92}$$

Escolhendo o vetor posição  $\vec{r}$  na direção  $z$ , ou seja,  $\vec{r} = r\hat{z}$ , a lei dos cossenos garante que  $z = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta'}$ . Como a esfera gira com velocidade  $\vec{\omega}$ , a velocidade de um ponto na superfície será  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}'$ . Isto define uma densidade superficial de corrente expressa por

$$\vec{K} = \sigma \vec{v} = \sigma \vec{\omega} \times \vec{r}', \quad (4.93)$$

$$\vec{K} = \sigma \omega R (\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{z}) \times (\sin \theta' \cos \phi' \hat{x} + \sin \theta' \sin \phi' \hat{y} + \cos \theta' \hat{z}), \quad (4.94)$$

$$\vec{K} = \sigma \omega R [-(\cos \theta \sin \theta' \sin \phi') \hat{x} + (\cos \theta \sin \theta' \cos \phi' - \sin \theta \cos \theta') \hat{y} + (\sin \theta \sin \theta' \sin \phi') \hat{z}]. \quad (4.95)$$

Note que todos os termos, exceto o termo  $(-\sin \theta \cos \theta') \hat{y}$ , contêm  $\sin \phi'$  ou  $\cos \phi'$ . Substituindo  $\vec{K}$  na expressão do potencial vetor magnético,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{K}(\vec{r}')}{z} da', \quad (4.96)$$

as integrais na coordenada azimutal  $\phi'$  se anulam em todos os termos, exceto o termo citado, visto que

$$\int_0^{2\pi} \cos \phi' d\phi' = 0, \quad (4.97)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin \phi' d\phi' = 0. \quad (4.98)$$

Desta forma, ficamos apenas com a integral

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sigma \omega R^3 \sin \theta \cos \theta' \sin \theta' d\theta' d\phi'}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta'}} \hat{y}, \quad (4.99)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 \sigma \omega R^3 \sin \theta}{2} \int_0^\pi \frac{\cos \theta' \sin \theta' d\theta'}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta'}} \hat{y}. \quad (4.100)$$

A integral na variável  $\theta'$  pode ser resolvida usando a substituição  $u = r^2 + R^2 - 2Rr \cos \theta'$ . O desenvolvimento completo da integral pode ser consultado no apêndice B.1 (trocando  $z$  por  $r$ ). O resultado é

$$\int_0^\pi \frac{\cos \theta' \sin \theta' d\theta'}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta'}} = \begin{cases} \frac{2r}{3R^2}, & r \leq R \\ \frac{2R}{3r^2}, & r \geq R, \end{cases} \quad (4.101)$$

permitindo-nos escrever o potencial vetor magnético como

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{\mu_0\sigma\omega R^3 \sin\theta}{2} \frac{2r}{3R^2} \hat{y}, & r \leq R \\ -\frac{\mu_0\sigma\omega R^3 \sin\theta}{2} \frac{2R}{3r^2} \hat{y}, & r \geq R. \end{cases} \quad (4.102)$$

Perceba que  $-\omega r \sin\theta \hat{y} = \omega(\sin\theta \hat{x} + \cos\theta \hat{z}) \times r\hat{z} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ , portanto, o potencial vetor magnético pode reescrito da seguinte forma,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0\sigma R}{3} (-\omega r \sin\theta \hat{y}), & r \leq R \\ \frac{\mu_0\sigma R^4}{3} \frac{(-\omega r \sin\theta \hat{y})}{r^3}, & r \geq R, \end{cases} \quad (4.103)$$

que nos permite escrever de forma mais geral

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0\sigma R}{3} (\vec{\omega} \times \vec{r}), & r \leq R \\ \frac{\mu_0\sigma R^4}{3} \frac{(\vec{\omega} \times \vec{r})}{r^3}, & r \geq R. \end{cases} \quad (4.104)$$

Vamos agora fazer a velocidade angular apontar na direção  $\hat{z}$  e deixar o vetor posição  $\vec{r}$  numa direção arbitrária. Desta forma,  $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$  e  $\vec{r} = r\hat{r}$ ,  $\vec{\omega} \times \vec{r} = \omega r \hat{z} \times \hat{r} = \omega r \sin\theta \hat{\phi}$ . A densidade de corrente superficial é expressa agora por  $\vec{K} = \sigma\omega a \sin\theta \hat{\phi}$  e o potencial vetor magnético nesta nova configuração fica igual a

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0\sigma R}{3} r\omega \sin\theta \hat{\phi}, & r \leq R \\ \frac{\mu_0\sigma R^4}{3} \frac{\omega \sin\theta}{r^2} \hat{\phi}, & r \geq R. \end{cases} \quad (4.105)$$

No plano equatorial da esfera,  $\theta = \pi/2$ , teremos o resultado particular

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0\sigma R}{3} r\omega \hat{\phi}, & r \leq R \\ \frac{\mu_0\sigma R^4}{3} \frac{\omega}{r^2} \hat{\phi}, & r \geq R. \end{cases} \quad (4.106)$$

Podemos agora calcular o campo magnético através de  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ . Em coordenadas esféricas, o rotacional de um campo vetorial  $\vec{A}$  é dado por

$$\vec{B} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{\phi}. \quad (4.107)$$

Nosso potencial vetor magnético possui apenas componente  $A_\phi \neq 0$ , então,

$$\vec{B} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \hat{\theta}. \quad (4.108)$$

Para  $r < R$ ,

$$\vec{B} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\mu_0 \sigma R \omega}{3} r \sin^2 \theta \right) \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\mu_0 \sigma R \omega}{3} r^2 \sin \theta \right) \hat{\theta}, \quad (4.109)$$

$$\vec{B} = \frac{2\mu_0 \sigma R \omega}{3} \overbrace{(\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta})}^{\hat{z}}, \quad (4.110)$$

$$\vec{B} = \frac{2\mu_0 \sigma R}{3} \vec{\omega}, \quad (4.111)$$

onde usamos o fato que  $\hat{z} = \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}$ . Isto mostra que o campo magnético no interior da superfície esférica girante uniformemente carregada é **uniforme**.

Para  $r > R$ , temos

$$\vec{B} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\mu_0 \sigma R^4 \omega \sin^2 \theta}{3} \right) \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\mu_0 \sigma R^4 \omega \sin \theta}{3} \right) \hat{\theta}, \quad (4.112)$$

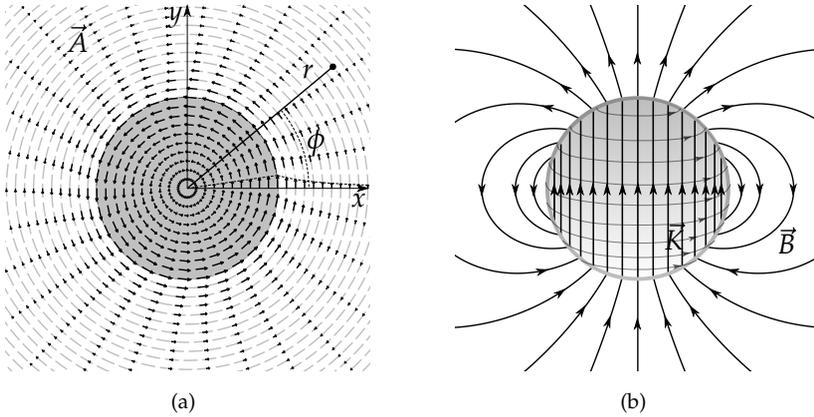
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \omega \sigma R^4}{3} \frac{1}{r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}). \quad (4.113)$$

Este último resultado indica que fora da esfera girante o campo magnético é típico de **dipolo magnético puro**, como mostraremos mais adiante no estudo da expansão multipolar de  $\vec{A}$ . De forma resumida,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{2\mu_0 \sigma R}{3} \omega \hat{z}, & r < R \\ \frac{\mu_0 \omega \sigma R^4}{3} \frac{1}{r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}), & r > R. \end{cases} \quad (4.114)$$

Resultados gráficos para o potencial vetor magnético e para o campo magnético são apresentados na figura 4.5.

**FIGURA 4.5:** EM (A), TEMOS O GRÁFICO DO CAMPO VETORIAL (VETORES EM PRETO) PARA O POTENCIAL VETOR MAGNÉTICO NO PLANO EQUATORIAL (PLANO  $x$ - $y$ ), OU SEJA, PARA  $\theta = \pi/2$ . É EVIDENTE QUE  $\vec{A}$  CIRCULA NA DIREÇÃO  $\hat{\phi}$  (CIRCUNFERÊNCIAS TRACEJADAS), AUMENTANDO LINEARMENTE EM FUNÇÃO DE  $r$  DENTRO DA ESFERA E DIMINUINDO COM  $1/r^2$  FORA DA ESFERA. EM (B), TEMOS A CONFIGURAÇÃO DE LINHAS DE CAMPO MAGNÉTICO DENTRO E FORA DA ESFERA (LINHAS TRACEJADAS VERMELHAS), E A CONFIGURAÇÃO DE LINHAS DE CAMPO PARA O POTENCIAL VETOR MAGNÉTICO (LINHAS TRACEJADAS PRETAS) SOBRE A ESFERA. NOTE QUE  $\vec{A}$  GIRA NA DIREÇÃO  $\hat{\phi}$ , AO PASSO QUE  $\vec{B}$  CIRCULA NAS DIREÇÕES  $\hat{r}$  E  $\hat{\theta}$ .



## 4.2 CONDIÇÕES DE CONTORNO NA MAGNETOSTÁTICA

Vamos agora aplicar as equações  $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$  e  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  para obter as condições de contorno através de interfaces com densidade superficiais de corrente elétrica  $\vec{K}$ . Na forma integral, as equações para o campo magnetostático  $\vec{B}$  são

$$\oiint_S \vec{B} \cdot \hat{n} da = 0, \quad (4.115)$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_{enc}. \quad (4.116)$$

Considere uma curva Amperiana de formato retangular de largura  $L$  e altura  $h$  com metade de sua área acima de uma interface com densidade superficial de corrente  $\vec{K}$  e a outra metade abaixo desta interface (veja figura 4.6).

O versor  $\hat{n}'$  representa a direção perpendicular à área da Amperiana (paralela à interface) e o versor  $\hat{n}$  representa a direção perpendicular à interface. Desta forma, podemos afirmar que

$$\hat{n}' = \hat{n} \times \hat{l} \quad (4.117)$$

com  $\hat{l}$  sendo um versor na direção do segmento da Amperiana. A densidade de corrente  $\vec{K}$  que penetra na área retangular da Amperiana define uma corrente encerrada dada por  $\vec{K} \cdot \hat{n}' L$ . No limite da largura  $h$  tendendo a zero, a circulação será dada apenas pelo produto escalar dos campos magnéticos  $\vec{B}_1$  e  $\vec{B}_2$  nos segmentos da Amperiana acima e abaixo na interface, ou seja,

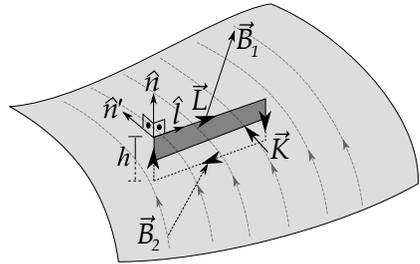
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_{enc}, \quad (4.118)$$

$$\vec{B}_1 \cdot \vec{L} - \vec{B}_2 \cdot \vec{L} = \mu_0 (\vec{K} \cdot \hat{n}') L. \quad (4.119)$$

Usando a relação entre os versores da equação 4.117, temos que

$$\vec{B}_1 \cdot \vec{L} - \vec{B}_2 \cdot \vec{L} = \mu_0 \vec{K} \cdot (\hat{n} \times \hat{L}) L, \quad (4.120)$$

**FIGURA 4.6:** INTERFACE COM DENSIDADE SUPERFICIAL DE CORRENTE  $\vec{K}$ . UMA CURVA AMPERIANA  $C$  EM FORMATO RETANGULAR DE LARGURA  $L$  PARA CÁLCULO DA CIRCULAÇÃO DE  $\vec{B}$ . OS VETORES  $\vec{B}_1$  E  $\vec{B}_2$  REPRESENTAM OS CAMPOS MAGNÉTICOS IMEDIATAMENTE ACIMA E ABAIXO DA INTERFACE, RESPECTIVAMENTE.

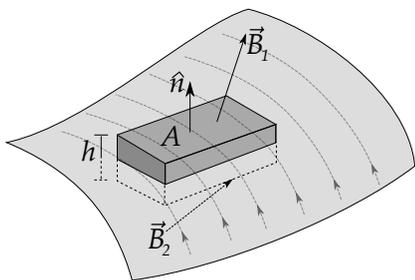


$$(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \vec{L} = \mu_0(\vec{K} \times \hat{n}) \cdot \vec{L}, \tag{4.121}$$

$$\vec{B}_1^{\parallel} - \vec{B}_2^{\parallel} = \mu_0(\vec{K} \times \hat{n}), \tag{4.122}$$

onde chegamos à nossa primeira condição de contorno para magnetostática.

**FIGURA 4.7:** VOLUME ESCOLHIDO PARA O CÁLCULO DO FLUXO DE  $\vec{B}$ . OS VETORES  $\vec{B}_1$  E  $\vec{B}_2$  REPRESENTAM OS CAMPOS MAGNÉTICOS IMEDIATAMENTE ACIMA E ABAIXO DA INTERFACE, RESPECTIVAMENTE.



Escolhendo agora um volume com formato de paralelepípedo com Gaussiana de área de superfície  $A$  e espessura  $h$  com metade do volume acima e metade do volume abaixo da interface (veja a figura 4.7). No limite  $h \rightarrow 0$ , o fluxo do campo magnético  $\vec{B}$  na superfície escolhida se anula nas laterais do volume, mas é diferente de zero nas superfícies acima e abaixo da interface.

Portanto,

$$\iint_S \vec{B} \cdot \hat{n} da = 0, \tag{4.123}$$

$$\vec{B}_1 \cdot \hat{n} A - \vec{B}_2 \cdot \hat{n} A = 0, \tag{4.124}$$

$$B_1^{\perp} - B_2^{\perp} = 0, \tag{4.125}$$

$$B_1^{\perp} = B_2^{\perp} \tag{4.126}$$

onde denotamos por  $B^{\perp}$  a componente normal à superfície do campo magnético  $\vec{B}$ . Nossa segunda condição de contorno encontrada implica que a componente normal de  $\vec{B}$  ao longo de interfaces é contínua.

Para o potencial vetor magnético, como  $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ , temos a mesma condição de contorno para a componente normal do campo magnético, ou seja,

$$A_1^{\perp} = A_2^{\perp}. \tag{4.127}$$

A circulação de  $\vec{A}$  na Amperiana da figura 7.4 resulta em

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot \hat{n} da = \iint_S \vec{B} \cdot \hat{n} da. \tag{4.128}$$

No limite  $h \rightarrow 0$ , a área  $S$  da Amperiana torna-se nula, e o fluxo de  $\vec{B}$  será nulo, ou seja,

$$\vec{A}_1 \cdot \vec{L} - \vec{A}_2 \cdot \vec{L} = 0, \quad (4.129)$$

$$A_1^{\parallel} - A_2^{\parallel} = 0, \quad (4.130)$$

$$A_1^{\parallel} = A_2^{\parallel}. \quad (4.131)$$

Se tanto as componentes tangenciais e normais do vetor  $\vec{A}$  são contínuas, logo, o potencial vetor magnético será contínuo, ou seja,

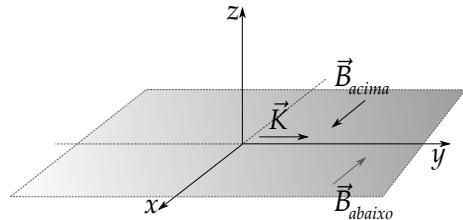
$$\vec{A}_1 = \vec{A}_2, \quad (4.132)$$

comportamento também atribuído ao potencial escalar eletrostático  $V$  através de interfaces. O potencial vetor magnético também apresenta descontinuidade normal de sua derivada, proveniente da equação 4.122, ou seja,

$$\frac{\partial \vec{A}_1}{\partial n} - \frac{\partial \vec{A}_2}{\partial n} = -\mu_0 \vec{K}. \quad (4.133)$$

De maneira análoga ao que acontece com o campo elétrico  $\vec{E}$  sobre uma superfície carregada, uma vez que o campo elétrico é **descontínuo** devido à densidade superficial de carga, o campo magnético  $\vec{B}$  sobre uma interface com densidade superficial  $\vec{K}$  de corrente também será **descontínuo**. Antes de demonstrarmos a equação para o campo magnético sobre um elemento de corrente elétrica superficial, vamos calcular o campo magnético gerado por um plano infinito, percorrido por uma densidade superficial de corrente  $\vec{K}$ . A figura 4.8 mostra um plano condutor se estendendo infinitamente no plano  $x$ - $y$ , percorrido por uma densidade de corrente  $\vec{K} = K\hat{y}$ . A estrutura para o campo magnético gerado será de tal forma que

**FIGURA 4.8:** PLANO CONDUTOR INFINITO PERCORRIDO POR UMA DENSIDADE DE CORRENTE SUPERFICIAL  $\vec{K} = K\hat{y}$ .



$$\vec{B}(z) = \begin{cases} -B_0\hat{x}, & z > 0 \\ B_0\hat{x}, & z < 0, \end{cases} \quad (4.134)$$

com  $B_0$  sendo uma constante, isto é, o campo magnético será uniforme acima e abaixo da superfície e apontará em sentidos opostos. Vamos denominar o campo magnético imediatamente acima do plano ( $z > 0$ ) de  $\vec{B}_{acima} = -B_0\hat{x}$  e o campo magnético imediatamente abaixo do plano ( $z < 0$ ) de  $\vec{B}_{acima} = B_0\hat{x}$  sendo  $B_0$  uma constante. Podemos então escrever que, neste caso,  $\vec{B}_{abaixo} = -\vec{B}_{acima}$ . A condição de contorno 4.122 garante que o campo magnético acima do plano será

$$\vec{B}_{acima} - (-\vec{B}_{acima}) = \mu_0(\vec{K} \times \hat{n}), \tag{4.135}$$

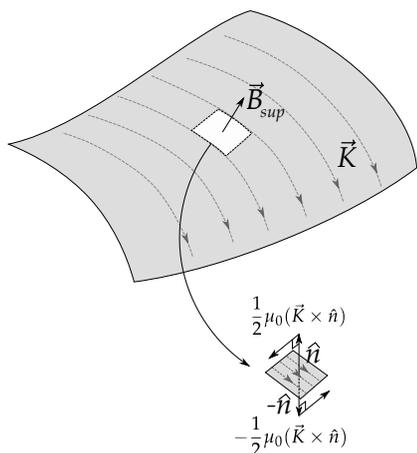
$$\vec{B}_{acima} = \frac{1}{2}\mu_0(\vec{K} \times \hat{n}), \tag{4.136}$$

e que o campo magnético abaixo do plano será

$$-\vec{B}_{abaixo} - \vec{B}_{abaixo} = \mu_0(\vec{K} \times \hat{n}), \tag{4.137}$$

$$\vec{B}_{abaixo} = -\frac{1}{2}\mu_0(\vec{K} \times \hat{n}). \tag{4.138}$$

**FIGURA 4.9:** SEPARAÇÃO DAS CONTRIBUIÇÕES DO CAMPO MAGNÉTICO SOBRE UMA SUPERFÍCIE CONDUTORA PERCORRIDA POR UMA DENSIDADE DE CORRENTE SUPERFICIAL.



Nossa estratégia agora será similar ao feito no cálculo do campo elétrico sobre uma superfície carregada com densidade superficial  $\sigma$  de carga, como descrito no capítulo 5 do volume I. Naquela ocasião, consideramos um disco como elemento de carga ao qual queríamos determinar o campo. Vamos agora considerar uma pequena "chapa" na superfície, de tal modo que o campo magnético sobre esta chapa é o campo magnético do restante da distribuição, que denotaremos por  $\vec{B}_{sup}$  (veja a figura 4.9). É importante frisar que  $\vec{B}_{sup}$  é contínuo, logo o campo magnético imediatamente acima da superfície, será proveniente da superposição dos campos devidos ao restante da superfície ( $\vec{B}_{sup}$ ) e do campo magnético, imediatamente acima, devido à

chapa. Com efeito, definindo como  $\vec{B}_1$  o campo magnético imediatamente acima da superfície, teremos:

$$\vec{B}_1 = \vec{B}_{sup} + \frac{1}{2}\mu_0(\vec{K} \times \hat{n}), \quad (4.139)$$

ao passo que o campo magnético imediatamente abaixo, definindo-o como  $\vec{B}_2$ , teremos:

$$\vec{B}_2 = \vec{B}_{sup} - \frac{1}{2}\mu_0(\vec{K} \times \hat{n}). \quad (4.140)$$

Somando as duas últimas equações, chegamos à conclusão que o campo magnético  $\vec{B}_{sup}$  sobre um elemento da superfície de corrente será a média da descontinuidade dos campos magnéticos limítrofes na superfície, isto é,

$$\boxed{\vec{B}_{sup} = \frac{1}{2}(\vec{B}_1 + \vec{B}_2)}. \quad (4.141)$$

**EXEMPLO 4.4.** Verifique as condições de contorno das equações 4.122 e 4.126 para o problema da superfície esférica girante. Mostre que os dois hemisférios da superfície esférica se atraem mutuamente com uma força de intensidade  $\frac{\mu_0\pi}{4}(\sigma\omega R^2)^2$ .

**SOLUÇÃO:** Vamos escrever as componentes tangenciais e perpendiculares do campo magnético  $\vec{B}$ , imediatamente acima e abaixo da superfície esférica. Acima da superfície esférica (índice 1), ou seja, para  $r > R$  temos

$$\vec{B} = \frac{\mu_0\omega\sigma R^4}{3} \frac{1}{r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}). \quad (4.142)$$

No limite de  $r \rightarrow R$ ,

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0\omega\sigma R}{3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}), \quad (4.143)$$

com a componente tangencial será (direção  $\hat{\theta}$ )

$$\vec{B}_1^{\parallel} = \frac{\mu_0\omega\sigma R}{3} \sin \theta \hat{\theta}, \quad (4.144)$$

ao passo que a componente normal será (direção  $\hat{r}$ )

$$\vec{B}_1^{\perp} = \frac{2\mu_0\omega\sigma R}{3} \cos \theta \hat{r}. \quad (4.145)$$

Abaixo da superfície esférica (índice 2), ou seja, para  $r < R$  temos, no limite de  $r \rightarrow R$ ,

$$\vec{B}_2 = \frac{2\mu_0\sigma R\omega}{3} (\cos\theta \hat{r} - \sin\theta \hat{\theta}). \quad (4.146)$$

com a componente tangencial será (direção  $\hat{\theta}$ )

$$\vec{B}_2^{\parallel} = -\frac{2\mu_0\sigma R\omega}{3} \sin\theta \hat{\theta}, \quad (4.147)$$

ao passo que a componente normal será (direção  $\hat{r}$ )

$$\vec{B}_2^{\perp} = \frac{2\mu_0\sigma R\omega}{3} \cos\theta \hat{r}. \quad (4.148)$$

Nota-se, claramente, que a componente normal é contínua, ou seja,

$$B_1^{\perp} = B_2^{\perp}. \quad (4.149)$$

A descontinuidade da componente tangencial também é verificada, isto é,

$$\vec{B}_1^{\parallel} - \vec{B}_2^{\parallel} = \frac{\mu_0\omega\sigma R}{3} \sin\theta \hat{\theta} - \left( -\frac{2\mu_0\sigma R\omega}{3} \sin\theta \hat{\theta} \right), \quad (4.150)$$

$$\vec{B}_1^{\parallel} - \vec{B}_2^{\parallel} = \mu_0\omega\sigma R \sin\theta \hat{\theta}, \quad (4.151)$$

$$\vec{B}_1^{\parallel} - \vec{B}_2^{\parallel} = \mu_0\omega\sigma R \sin\theta (\hat{\phi} \times \hat{r}), \quad (4.152)$$

$$\vec{B}_1^{\parallel} - \vec{B}_2^{\parallel} = \mu_0(\vec{K} \times \hat{n}). \quad (4.153)$$

Calculando agora a força sobre o hemisfério superior, vamos começar escrevendo a força de Lorentz para um elemento de área  $da'$  da corrente elétrica superficial. A força de Lorentz sobre este elemento é

$$d\vec{F}_m = \sigma \vec{v} \times \vec{B}_{sup} da', \quad (4.154)$$

sendo  $\vec{B}_{sup}$  o campo magnético sobre o elemento de corrente na superfície da esfera, calculado pela condição de contorno 4.141,

$$\vec{B}_{sup} = \frac{\vec{B}_1 + \vec{B}_2}{2} = \frac{2\mu_0\sigma R\omega}{3} \cos\theta' \hat{r} - \frac{\mu_0\omega\sigma R}{6} \sin\theta' \hat{\theta}, \quad (4.155)$$

$$\vec{B}_{sup} = \frac{\vec{B}_1 + \vec{B}_2}{2} = \frac{\mu_0\sigma R\omega}{6} (4 \cos\theta' \hat{r} - \sin\theta') \hat{\theta}. \quad (4.156)$$

A velocidade linear é  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}' = \omega R \sin \theta' \hat{\phi}$ , de tal maneira que a força no elemento de área será

$$d\vec{F}_m = \sigma \omega R \sin \theta' \hat{\phi} \times \left[ \frac{\mu_0 \sigma R \omega}{6} (4 \cos \theta' \hat{r} - \sin \theta') \hat{\theta} \right] da', \quad (4.157)$$

$$d\vec{F}_m = \frac{\mu_0 (\sigma R \omega)^2 \sin \theta'}{6} [4 \cos \theta' \hat{\phi} \times \hat{r} - \sin \theta' \hat{\phi} \times \hat{\theta}] da', \quad (4.158)$$

$$d\vec{F}_m = \frac{\mu_0 (\sigma R \omega)^2 \sin \theta'}{6} (4 \cos \theta' \hat{\theta} + \sin \theta' \hat{r}) da', \quad (4.159)$$

Vamos recordar agora os versores esféricos em coordenadas cartesianas,

$$\begin{cases} \hat{\theta} = \cos \theta' \cos \phi' \hat{x} + \cos \theta' \sin \phi' \hat{y} - \sin \theta' \hat{z} \\ \hat{r} = \sin \theta' \cos \phi' \hat{x} + \sin \theta' \sin \phi' \hat{y} + \cos \theta' \hat{z}. \end{cases} \quad (4.160)$$

Quando substituirmos esses versores na expressão para integração da força sobre o hemisfério, a integração na variável  $\phi'$  irá anular as componentes nas direções  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$ , como já é de se esperar pela simetria esférica. Vamos usar então somente as componentes na direção  $\hat{z}$  e integrar sobre todo o hemisfério superior a força magnética sobre a superfície. Com efeito,

$$\vec{F}_m = \frac{\mu_0 (\sigma \omega R)^2}{6} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \theta' (-4 \cos \theta' \sin \theta' + \sin \theta' \cos \theta') R^2 \sin \theta' d\theta' d\phi' \hat{z}, \quad (4.161)$$

$$\vec{F}_m = -\frac{\mu_0 (\sigma \omega R^2)^2}{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi'}_{2\pi} \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta' \cos \theta' d\theta'}_{1/4} \hat{z}, \quad (4.162)$$

$$\boxed{\vec{F}_m = -\frac{\mu_0 \pi (\sigma \omega R^2)^2}{4} \hat{z}}. \quad (4.163)$$

### 4.3 O POTENCIAL ESCALAR MAGNÉTICO ASSOCIADO A $\vec{B}$

Em muitas situações da magnetostática, a corrente está confinada em distribuições **singulares**, isto é, em linhas ou em superfícies idealizadas<sup>2</sup>. Isto

<sup>2</sup>A idealização surge do fato de que na natureza não há estruturas perfeitamente bidimensionais ou unidimensionais. Mesmo que seja necessária alguma consideração microscópica, as estruturas geométricas tratadas sempre terão algum volume. As distribuições lineares ou superficiais são idealizações que facilitam o processo de modelagem de um sistema físico.

quer dizer que não há corrente elétrica em lugar nenhum no espaço, exceto nas linhas ou superfícies citadas. Como exemplo, considere o problema anterior da superfície esférica girante com velocidade angular constante. Neste caso idealizado, só existe corrente na superfície da esfera, ou seja, para  $r = a$ . Para os pontos em que  $r > R$  e  $r < R$  não há densidade de corrente elétrica. Isto implica que, de acordo com a lei de Ampère em sua forma diferencial, o rotacional do campo magnético nos pontos citados deve ser **nulo**, ou seja,

$$\nabla \times \vec{B} = \vec{0}. \quad (4.164)$$

Como nos pontos considerados o campo magnético é irrotacional, podemos usar a mesma ferramenta matemática que usamos para o campo elétrico, ou seja, de que este é dado por um gradiente de alguma função escalar. Desta maneira, podemos escrever que

$$\vec{B} = -\nabla\phi, \quad (4.165)$$

com  $\phi$  sendo um potencial escalar, que chamaremos de **potencial escalar magnético**  $\phi$ . Aplicando esta última equação para divergência de  $\vec{B}$ , temos então uma equação de Laplace para  $\phi$ , ou seja,

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (4.166)$$

$$-\nabla \cdot \nabla\phi = 0, \quad (4.167)$$

$$\nabla^2\phi = 0. \quad (4.168)$$

Podemos então aplicar todas as técnicas desenvolvidas na solução da equação de Laplace anteriormente.

**EXEMPLO 4.5.** Resolva o problema da superfície esférica de raio  $R$  com densidade superficial uniforme de carga  $\sigma$ , que gira com velocidade angular constante  $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$ , através do conceito de potencial escalar magnético  $\phi$ .

**SOLUÇÃO:** Podemos resolver o problema da superfície esférica com densidade superficial uniforme de carga  $\sigma$  girante através do conceito de potencial escalar magnético  $\phi$ . Para isso, basta partirmos da solução da equação de Laplace em coordenadas esféricas com simetria azimutal

$$\phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta), \quad (4.169)$$

e aplicar as condições de contorno para o campo magnético através da superfície. Primeiramente, note que a densidade superficial de corrente será

$$\vec{K} = \sigma \vec{v}, \quad (4.170)$$

$$\vec{K} = \sigma(\vec{\omega} \times \vec{r}'), \quad (4.171)$$

$$\vec{K} = \sigma\omega R(\hat{z} \times \hat{r}), \quad (4.172)$$

$$\vec{K} = \sigma\omega R \sin\theta \hat{\phi}. \quad (4.173)$$

Esta densidade superficial de corrente só existe para pontos exatamente sobre a esfera girante, ou seja, em  $r = R$ . Para pontos com  $r < R$  e  $r > R$  não há densidades de correntes, ou seja, podemos dizer que  $\nabla \times \vec{B} = 0$ , o que implica em

$$\vec{B} = -\nabla\phi, \quad (4.174)$$

$$\vec{B} = -\frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{\theta}, \quad (4.175)$$

para o caso com simetria azimutal, com  $\hat{r}$  sendo o versor normal à superfície da esfera e  $\hat{\theta}$  sendo o versor tangencial à superfície da esfera.

O potencial escalar magnético  $\phi$  tem propriedades semelhantes ao potencial eletrostático, como, por exemplo, o fato de ele ser uma função limitada para todos os pontos em que ele se aplica. Ou seja, para  $r = 0$  e para  $r \rightarrow \infty$ ,  $\phi$  deve ser uma função finita. Sendo assim, o potencial escalar magnético  $\phi$  será

$$\phi_1(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta), \quad (4.176)$$

para  $r > R$ , ou seja, acima da superfície esférica, e

$$\phi_2(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta), \quad (4.177)$$

para  $r < R$ , ou seja, abaixo da superfície esférica.

Devemos encontrar quem são os  $A_l$  e  $B_l$  que obedecem às condições de contorno da magnetostática deduzidas anteriormente, ou seja,

$$\begin{cases} B_1^\perp = B_2^\perp \\ \vec{B}_1^\parallel - \vec{B}_2^\parallel = \mu_0(\vec{K} \times \hat{n}), \end{cases} \quad (4.178)$$

compatíveis com as condições nas equações 4.122 e 4.126. Isto quer dizer que

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{r \rightarrow R} \frac{\partial}{\partial r} \phi_1 = \lim_{r \rightarrow R} \frac{\partial}{\partial r} \phi_2 \\ - \lim_{r \rightarrow R} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \phi_1 + \lim_{r \rightarrow R} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \phi_2 = \mu_0 \sigma \omega R \sin \theta. \end{array} \right. \quad (4.179)$$

A primeira equação deste sistema indica que

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{-(l+1)B_l}{R^{l+2}} P_l(\cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} l A_l R^{l-1} P_l(\cos \theta), \quad (4.180)$$

$$B_l = -\frac{l}{l+1} R^{2l+1} A_l. \quad (4.181)$$

A segunda equação do sistema indica que

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sum_{l=0}^{\infty} \left( -\frac{B_l}{R^{l+2}} + A_l R^{l-1} \right) P_l(\cos \theta) \right] = \frac{\partial}{\partial \theta} (-\mu_0 \sigma \omega R \cos \theta). \quad (4.182)$$

Vamos substituir a equação 4.181 e usar o fato que  $\cos \theta = P_1(\cos \theta)$  na equação anterior, para mostrar que

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{l A_l R^{l-1}}{l+1} + A_l R^{l-1} \right) P_l(\cos \theta) = -\mu_0 \sigma \omega R P_1(\cos \theta), \quad (4.183)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{l+1} A_l R^{l-1} P_l(\cos \theta) = -\mu_0 \sigma \omega R P_1(\cos \theta). \quad (4.184)$$

Podemos usar, agora, a propriedade de ortogonalidade dos polinômios de Legendre para determinar os coeficientes  $A_l$ . Concluímos que somente  $A_1$  será diferente de zero e todos os demais  $A_l$  serão nulos. Isto é,

$$A_l = \begin{cases} 0, & l \neq 0 \\ -\frac{2\mu_0 \sigma \omega R}{3}, & l = 1, \end{cases} \quad (4.185)$$

e, conseqüentemente,

$$B_l = \begin{cases} 0, & l \neq 0 \\ \frac{\mu_0 \sigma \omega R^4}{3}, & l = 1. \end{cases} \quad (4.186)$$

Isto nos permite escrever as soluções para o potencial escalar magnético  $\phi$  deste problema:

$$\phi(r, \theta) = \begin{cases} -\frac{2\mu_0\sigma\omega R}{3} r \cos \theta, & r < R \\ \frac{\mu_0\sigma\omega R^4}{3} \frac{\cos \theta}{r^2}, & r > R. \end{cases} \quad (4.187)$$

A partir deste potencial escalar, podemos encontrar o campo magnético usando  $\vec{B} = -\nabla\phi$ . Para  $r < R$ , temos

$$\vec{B} = -\frac{\partial\phi}{\partial z} \hat{z}, \quad (4.188)$$

$$\vec{B} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{2\mu_0\sigma\omega R}{3} z \right) \hat{z}, \quad (4.189)$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{2\mu_0\sigma\omega R}{3} \hat{z}}. \quad (4.190)$$

Para  $r > R$ , temos

$$\vec{B} = -\frac{\partial\phi}{\partial r} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \hat{\theta}, \quad (4.191)$$

$$\vec{B} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\mu_0\sigma\omega R^4 \cos \theta}{3} \frac{1}{r^2} \right) \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \frac{\mu_0\sigma\omega R^4 \cos \theta}{3} \frac{1}{r^2} \right) \hat{\theta}, \quad (4.192)$$

$$\vec{B} = \frac{2\mu_0\sigma\omega R^4 \cos \theta}{3} \frac{1}{r^3} \hat{r} + \frac{\mu_0\sigma\omega R^4 \sin \theta}{3} \frac{1}{r^3} \hat{\theta}, \quad (4.193)$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0\sigma\omega R^4}{3} \frac{1}{r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta})}, \quad (4.194)$$

sendo estes resultados idênticos aos obtidos via cálculo do potencial vetor magnético no exemplo anterior.



# 5

## A EXPANSÃO MULTIPOLAR NA MAGNETOSTÁTICA

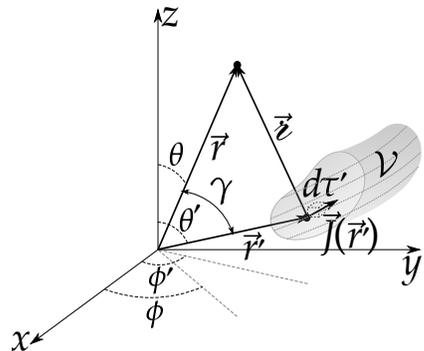
Assim como fizemos para o potencial escalar eletrostático  $V(\vec{r})$ , podemos desenvolver uma expansão em multipolos para o potencial vetor magnético  $\vec{A}$ . Como vimos, sabemos que

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{r} d\tau' \quad (\text{SI}). \quad (5.1)$$

Vamos recordar que o termo  $1/r$  pode ser expandido em séries de potências, procedimento já feito anteriormente. Para um elemento de volume  $d\tau'$ , localizado em  $\vec{r}'$ , a distribuição volumétrica de corrente é  $\vec{J}(\vec{r}')$ , compreendida no volume  $\mathcal{V}$  (veja a figura 5.1).

Queremos fazer uma expansão do potencial magnético para a posição arbi-

**FIGURA 5.1:** VETORES DE INTERESSE  $\vec{r}'$ ,  $\vec{r}$  E  $\vec{z}$  PARA CÁLCULO DO POTENCIAL VETOR MAGNÉTICO DEVIDO A UMA DISTRIBUIÇÃO VOLUMÉTRICA DE CORRENTE  $\vec{J}(\vec{r}')$  COMPREENDIDA NO VOLUME  $\mathcal{V}$ . OS ÂNGULOS  $\theta$  E  $\phi$  SÃO OS ÂNGULOS ESFÉRICOS DO VETOR POSIÇÃO  $\vec{r}$ , AO PASSO QUE  $\theta'$  E  $\phi'$  SÃO OS ÂNGULOS ESFÉRICOS DO VETOR  $\vec{r}'$ .  $\gamma$  É O ÂNGULO ENTRE  $\vec{r}$  E  $\vec{r}'$ .



trária  $\vec{r}$  no espaço. Para  $r > r'$ ,

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos \gamma). \quad (5.2)$$

Substituindo este resultado na integração do potencial vetor magnético  $\vec{A}$ , temos

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} \vec{J}(\vec{r}') \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos \gamma) d\tau', \quad (5.3)$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \left[ \iiint_{\mathcal{V}} \vec{J}(\vec{r}') d\tau' + \frac{1}{r} \iiint_{\mathcal{V}} \vec{J}(\vec{r}') r' \cos \gamma d\tau' + \frac{1}{r^2} \iiint_{\mathcal{V}} \vec{J}(\vec{r}') (r')^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \gamma - \frac{1}{2}\right) d\tau' + \dots \right], \quad (5.4)$$

onde podemos visualizar os termos de monopolo, dipolo e quadrupolo magnéticos para o potencial vetor  $\vec{A}$ .

## 5.1 MONOPOLO MAGNÉTICO

O termo de monopolo magnético  $\vec{A}_0^1$  é o primeiro termo da expansão multipolar obtida na equação anterior, isto é,

$$\vec{A}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi r} \iiint_{\mathcal{V}} \vec{J}(\vec{r}') d\tau'. \quad (5.5)$$

Não é tão difícil perceber que a integração da densidade de corrente  $\vec{J}(\vec{r}')$  é nula para todo volume que contém a corrente elétrica estacionária no espaço. Isto fica mais fácil de verificar se estivermos tratando com uma corrente linear, ou seja,

$$\vec{A}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi r} \oint_C \vec{I}(\vec{r}') dr', \quad (5.6)$$

$$\vec{A}_0 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \oint_C d\vec{r}' = 0. \quad (5.7)$$

Note que este resultado é nulo pois qualquer integral de deslocamento em um circuito fechado é nula. Isto tem implicações interessantes do ponto de vista físico. A expansão multipolar não prevê nenhuma contribuição do termo de

<sup>1</sup>Usaremos o índice 0 para o monopolo e 1 para o dipolo.

monopolo, independente da distribuição de corrente estacionária em questão. Dito de outra forma, **não há monopolos magnéticos**.

Por completeza, iremos provar também que

$$\iiint_{\mathcal{V}} \vec{J}(\vec{r}') d\tau' = \vec{0}, \quad (5.8)$$

generalizando o resultado particular demonstrado. Para isso, considere a identidade vetorial<sup>2</sup>:

$$\nabla' \cdot [\phi \vec{J}(\vec{r}')] = \phi \nabla' \cdot \vec{J}(\vec{r}') + \nabla' \phi \cdot \vec{J}(\vec{r}'). \quad (5.9)$$

No regime da magnetostática,  $\nabla' \cdot \vec{J}(\vec{r}') = 0$ , portanto,

$$\nabla \cdot [\phi \vec{J}(\vec{r}')] = \nabla' \phi \cdot \vec{J}(\vec{r}'). \quad (5.10)$$

Vamos escolher uma função  $\phi$  que seja adequada à demonstração, isto é,  $\phi = x'$ , a componente  $x'$  do vetor posição  $\vec{r}'$ . Neste caso,  $\nabla' \phi = \hat{x}$ , o que implica que

$$\nabla \cdot [x' \vec{J}(\vec{r}')] = \hat{x} \cdot \vec{J}(\vec{r}'), \quad (5.11)$$

$$\nabla \cdot [x' \vec{J}(\vec{r}')] = J_x(\vec{r}'). \quad (5.12)$$

Integrando ambos os lados desta equação teremos

$$\iiint_{\mathcal{V}} J_x(\vec{r}') d\tau' = \iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot [x' \vec{J}(\vec{r}')] d\tau', \quad (5.13)$$

$$\iiint_{\mathcal{V}} J_x(\vec{r}') d\tau' = \iint_{\mathcal{S}} x' \vec{J}(\vec{r}') \cdot \hat{n} da', \quad (5.14)$$

onde aplicamos o teorema da divergência substituindo a integral de volume  $\mathcal{V}$  pela integral de fluxo na superfície  $\mathcal{S}$ . Como  $\mathcal{S}$  engloba a distribuição de corrente  $\vec{J}$ , o versor  $\hat{n}$  e  $\vec{J}$  são ortogonais nos limites da distribuição. Logo,

$$\iiint_{\mathcal{V}} J_x(\vec{r}') d\tau' = 0. \quad (5.15)$$

Como a integral da componente  $x$  de  $\vec{J}$  se anula sobre todo o volume da distribuição de corrente, o mesmo ocorre, de forma análoga, às demais componentes  $y$  e  $z$ . Portanto,

<sup>2</sup>Consulte a identidade (viii) o exercício 2.1, em ALVES, Tibério Magno de Lima. Eletromagnetismo Clássico. Volume I, Eletrostática. 1ª ed. Natal: Editora IFRN, 2023.

$$\iiint_{\mathcal{V}} \vec{J}(\vec{r}') d\tau' = \vec{0}. \quad (5.16)$$

## 5.2 DIPOLO MAGNÉTICO

O termo de dipolo surge como segundo termo na expansão multipolar para o potencial vetor magnético. Com efeito,

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \iiint_{\mathcal{V}} \vec{J}(\vec{r}') r' \cos \gamma \, d\tau', \quad (5.17)$$

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \iiint_{\mathcal{V}} \vec{J}(\vec{r}') r' (\hat{r} \cdot \hat{r}') \, d\tau', \quad (5.18)$$

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \iiint_{\mathcal{V}} \vec{J}(\vec{r}') (\vec{r} \cdot \vec{r}') \, d\tau'. \quad (5.19)$$

Podemos usar aqui a seguinte identidade vetorial<sup>3</sup>:

$$(\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} = (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} + \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}), \quad (5.20)$$

fazendo simplesmente a associação de  $\vec{a}$  com  $\vec{r}$ ,  $\vec{b}$  com  $\vec{J}(\vec{r}')$  e  $\vec{c}$  com  $\vec{r}'$  temos

$$\vec{J}(\vec{r}') (\vec{r} \cdot \vec{r}') = [\vec{r} \cdot \vec{J}(\vec{r}')] \vec{r}' + \vec{r} \times [\vec{J}(\vec{r}') \times \vec{r}']. \quad (5.21)$$

Antes de substituir este resultado na expressão da equação 5.19, vamos escrever a integral em termos de duas metades, ou seja,

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left[ \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{V}} \vec{J}(\vec{r}') (\vec{r} \cdot \vec{r}') \, d\tau' + \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{V}} \vec{J}(\vec{r}') (\vec{r} \cdot \vec{r}') \, d\tau' \right]. \quad (5.22)$$

No segundo termo, vamos substituir a identidade vetorial acima, resultando em

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left\{ \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{V}} \vec{J}(\vec{r}') (\vec{r} \cdot \vec{r}') \, d\tau' + \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{V}} [\vec{r} \cdot \vec{J}(\vec{r}')] \vec{r}' \, d\tau' + \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{V}} \vec{r} \times [\vec{J}(\vec{r}') \times \vec{r}'] \, d\tau' \right\}, \quad (5.23)$$

<sup>3</sup>Consulte o exemplo 1.3, em ALVES, Tibério Magno de Lima. Eletromagnetismo Clássico. Volume I, Eletrostática. 1ª ed. Natal: Editora IFRN, 2023.

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left\{ -\frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{V}} \vec{r} \times [\vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}')] d\tau' + \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{V}} \{ \vec{J}(\vec{r}')(\vec{r} \cdot \vec{r}') + [\vec{r} \cdot \vec{J}(\vec{r}')] \vec{r}' \} d\tau' \right\}. \quad (5.24)$$

A segunda integral acima é nula. Para detalhes do cálculo, consulte o apêndice B.3. Portanto,

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left\{ -\frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{V}} \vec{r} \times [\vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}')] d\tau' \right\}. \quad (5.25)$$

Como a integral é feita nas variáveis das correntes fontes (variáveis com linha), o vetor posição  $\vec{r}$  pode ser fatorado da integral sem problemas, ficando apenas

$$\vec{A}_1 = -\frac{\mu_0}{4\pi r^3} \vec{r} \times \left[ \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{V}} \vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}') d\tau' \right]. \quad (5.26)$$

A quantidade entre colchetes acima tem papel análogo ao momento de dipolo elétrico que apresentamos quando estávamos estudando a expansão multipolar em eletrostática. Esta quantidade é definida como **momento de dipolo magnético**, ou simplesmente, **momento magnético**  $\vec{m}$ , expresso por

$$\vec{m} \equiv \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{V}} \vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}') d\tau'. \quad (5.27)$$

Para distribuições superficiais e lineares de corrente elétrica temos, respectivamente,

$$\vec{m} \equiv \frac{1}{2} \iint_S \vec{r}' \times \vec{K}(\vec{r}') da', \quad (5.28)$$

$$\vec{m} \equiv \frac{I}{2} \oint_C \vec{r}' \times d\vec{r}'. \quad (5.29)$$

No caso de correntes em linhas, a última integral ainda pode ser reduzida a um resultado mais simples, isto é,

$$\vec{m} = \frac{I}{2} \oint_C \vec{r}' \times d\vec{r}'. \quad (5.30)$$

E como a integral

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \oint_C \vec{r}' \times d\vec{r}'. \quad (5.31)$$

representa o vetor área  $\vec{S}$ , com a área compreendida pelo contorno  $\mathcal{C}$ , o momento magnético neste caso é simplesmente o produto da intensidade de corrente  $I$  pelo vetor área  $\vec{S}$ , ou seja,

$$\vec{m} = I\vec{S}. \quad (5.32)$$

Voltando para o termo de dipolo para o potencial vetor magnético na equação 5.26, já com a definição de momento magnético de dipolo, temos que

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}. \quad (5.33)$$

Este resultado expressa apenas o primeiro termo que pode ser diferente de zero na expansão multipolar. Temos ainda os termos de ordens superiores, como o quádrupolo, octopolo e assim por diante. Mas vamos pensar no caso em que  $r \gg r'$  na expansão multipolar, isto é, a posição de interesse  $\vec{r}$  sendo muito maior que a posição da distribuição de corrente elétrica. Neste caso, como o termo de monopolo é sempre nulo, o termo de dipolo será dominante face aos termos de ordens superiores devido à razão  $r'/r$  na expansão rapidamente tender a zero. Para que o termo de dipolo represente exatamente o potencial vetor magnético, temos que ter uma corrente infinitesimalmente localizada (que chamamos de dipolo puro) ou distribuições de correntes específicas que anulam todos os termos de ordens superiores. É o caso da superfície esférica com densidade de carga uniforme girando com velocidade angular constante. Vamos recordar que o resultado que encontramos para o potencial vetor magnético no exterior da esfera ( $r > R$ ) é

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 \sigma R^4}{3} \frac{(\vec{\omega} \times \vec{r})}{r^3}. \quad (5.34)$$

Note que podemos identificar o momento magnético como sendo

$$\vec{m} = \frac{4\pi\sigma R^4}{3} \vec{\omega}. \quad (5.35)$$

**EXEMPLO 5.1.** Encontre o momento magnético da superfície esférica de raio  $R$ , carregada uniformemente com densidade superficial  $\sigma$ , girando com velocidade angular  $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$ . Obs: usando os vetores de interesse na figura 4.4.

**SOLUÇÃO:** A integral para o momento de dipolo  $\vec{m}$ , em função densidade superficial de corrente neste caso, conduz ao mesmo resultado notado na equação 5.35, ou seja,

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \iint_S \vec{r}' \times \vec{K}(\vec{r}') da', \quad (5.36)$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \vec{r}' \times (\sigma \vec{\omega} \times \vec{r}') R^2 \sin \theta' d\theta' d\phi', \quad (5.37)$$

$$\vec{m} = \frac{R^2 \sigma \omega}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \vec{r}' \times (\hat{z} \times \vec{r}') \sin \theta' d\theta' d\phi', \quad (5.38)$$

onde podemos usar novamente a identidade vetorial da equação 5.20,

$$\vec{m} = \frac{R^2 \sigma \omega}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [(\vec{r}' \cdot \vec{r}') \hat{z} - (\vec{r}' \cdot \hat{z}) \vec{r}'] \sin \theta' d\theta' d\phi', \quad (5.39)$$

$$\vec{m} = \frac{R^2 \sigma \omega}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [R^2 \hat{z} - (R^2 \cos \theta') \hat{r}'] \sin \theta' d\theta' d\phi', \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned} \vec{m} = \frac{R^2 \sigma \omega}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [(-R^2 \cos \theta' \sin \theta' \cos \phi') \hat{x} - (R^2 \cos \theta' \sin \theta' \sin \phi') \hat{y} \\ + R^2 (1 - \cos^2 \theta') \hat{z}] \sin \theta' d\theta' d\phi'. \end{aligned} \quad (5.41)$$

De todas as componentes acima, somente a componente  $z$  não se anula devido às integrais nas componentes  $x$  e  $y$  possuírem integração na variável  $\phi'$  nula, ou seja,

$$\int_0^{2\pi} \cos \phi' d\phi' = \int_0^{2\pi} \sin \phi' d\phi' = 0. \quad (5.42)$$

Com efeito, o momento magnético para a esfera girante só possui componente  $z$ , e é expresso por

$$\vec{m} = \frac{R^2 \sigma \omega}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 (1 - \cos^2 \theta') \hat{z} \sin \theta' d\theta' d\phi', \quad (5.43)$$

$$\vec{m} = \frac{\sigma \omega R^4}{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi'}_{2\pi} \underbrace{\int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta') \sin \theta' d\theta'}_{4/3} \hat{z}, \quad (5.44)$$

$$\vec{m} = \frac{4\pi \sigma R^4}{3} \vec{\omega}, \quad (5.45)$$

como queríamos demonstrar.

## O CAMPO MAGNÉTICO GERADO POR UM DIPOLO MAGNÉTICO PURO

Com posse do termo de dipolo para o potencial vetor magnético, podemos encontrar uma expressão para o campo magnético  $\vec{B}_{dip}$  gerado por este dipolo. Vamos usar o fato que  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$  com  $\vec{A}$  sendo o potencial vetor magnético devido a um momento de dipolo  $\vec{m}$  na equação 5.33. Com efeito,

$$\vec{B}_{dip} = \nabla \times \vec{A}_1, \quad (5.46)$$

$$\vec{B}_{dip} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left( \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \right), \quad (5.47)$$

onde temos que recorrer à identidade vetorial

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\nabla \cdot \vec{B})\vec{A} - (\nabla \cdot \vec{A})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B}. \quad (5.48)$$

Fazendo a correspondência de  $\vec{A} = \vec{m}$  e  $\vec{B} = \frac{\vec{r}}{r^3}$ , temos

$$\nabla \times \left( \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \right) = \left[ \nabla \cdot \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \right] \vec{m} - \cancel{(\nabla \cdot \vec{m}) \frac{\vec{r}}{r^3}} + \left[ \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \cdot \nabla \right] \vec{m} - \cancel{(\vec{m} \cdot \nabla) \frac{\vec{r}}{r^3}}, \quad (5.49)$$

$$\nabla \times \left( \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \right) = 4\pi\delta(\vec{r})\vec{m} - (\vec{m} \cdot \nabla) \frac{\vec{r}}{r^3}. \quad (5.50)$$

Já calculamos quanto vale  $\nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$  no estudo do campo magnético gerado por um dipolo elétrico. O resultado foi, incluindo  $r = 0$ ,

$$\nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\overleftrightarrow{1} - 3\hat{r}\hat{r}}{r^3} + \frac{4\pi\delta(\vec{r})}{3} \overleftrightarrow{1}. \quad (5.51)$$

Dessa forma,

$$\nabla \times \left( \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \right) = 4\pi\delta(\vec{r})\vec{m} - \frac{\vec{m} \cdot \overleftrightarrow{1} - 3\vec{m} \cdot \hat{r}\hat{r}}{r^3} - \frac{4\pi\delta(\vec{r})}{3} \vec{m} \cdot \overleftrightarrow{1}, \quad (5.52)$$

$$\nabla \times \left( \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \right) = 4\pi\delta(\vec{r})\vec{m} - \frac{\vec{m} - 3(\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r}}{r^3} - \frac{4\pi\delta(\vec{r})}{3} \vec{m}, \quad (5.53)$$

$$\nabla \times \left( \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \right) = \frac{3(\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{m}}{r^3} + \frac{8\pi\delta(\vec{r})}{3} \vec{m}, \quad (5.54)$$

permitindo-nos escrever o campo magnético exato gerado por um dipolo puro localizado na origem do sistema de coordenadas,

$$\vec{B}_{dip}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3\hat{r}(\vec{m} \cdot \hat{r}) - \vec{m}] + \frac{2\mu_0\delta(\vec{r})}{3} \vec{m}. \quad (5.55)$$

Se o dipolo puro estiver localizado em uma posição  $\vec{r}'$  arbitrária, basta deslocarmos o vetor usando o vetor separação  $\vec{z} = \vec{r} - \vec{r}'$ , de tal forma que

$$\vec{B}_{dip}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi z^3} [3\hat{z}(\vec{m} \cdot \hat{z}) - \vec{m}] + \frac{2\mu_0\delta(\vec{z})}{3} \vec{m}. \quad (5.56)$$

**EXEMPLO 5.2.** Encontre o campo magnético, usando a expressão da equação 5.55, no exterior da esfera girante, com momento magnético dado pela equação 5.35.

**SOLUÇÃO:** Basta substituir  $\vec{m} = \frac{4\pi\sigma\omega R^4}{3} \hat{z}$  na equação 5.55. Ou seja,

$$\vec{B}_{dip}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3\hat{r}(\vec{m} \cdot \hat{r}) - \vec{m}], \quad (5.57)$$

$$\vec{B}_{dip}(r, \theta) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \frac{4\pi\sigma\omega a^4}{3} [3\hat{r}(\hat{z} \cdot \hat{r}) - \hat{z}], \quad (5.58)$$

$$\vec{B}_{dip}(r, \theta) = \frac{\mu_0\sigma\omega R^4}{3} \frac{1}{r^3} [3\cos\theta\hat{r} - (\cos\theta\hat{r} - \sin\theta\hat{\theta})], \quad (5.59)$$

$$\vec{B}_{dip} = \frac{\mu_0\sigma\omega R^4}{3} \frac{1}{r^3} (2\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta}), \quad (5.60)$$

sendo este resultado idêntico aos obtidos via cálculos do potencial vetor magnético e do potencial escalar magnético. Neste caso, o campo magnético de dipolo no exterior da esfera representa o campo magnético exato, e concluímos que todas as contribuições multipolares para ordem superiores são nulas.

## O POTENCIAL ESCALAR MAGNÉTICO DE DIPOLO

Vamos recordar que o potencial eletrostático de dipolo elétrico é expresso através da seguinte expressão: (SI)

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2}, \quad (5.61)$$

sendo  $\vec{p}$  o momento de dipolo elétrico puro. De forma análoga, vamos apresentar o **potencial escalar magnético de dipolo**, como sendo expresso por

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \cdot \hat{r}}{r^2}, \quad (5.62)$$

sendo  $\vec{m}$  o momento de dipolo magnético puro. Recorde que o campo magnético de dipolo foi calculado anteriormente através de ( $r \neq 0$ )

$$\vec{B}_{dip} = -\frac{\mu_0}{4\pi} (\vec{m} \cdot \nabla) \frac{\hat{r}}{r^2}. \quad (5.63)$$

Vamos agora lembrar da identidade vetorial,

$$\nabla(\vec{C} \cdot \vec{D}) = (\vec{C} \cdot \nabla)\vec{D} + (\vec{D} \cdot \nabla)\vec{C} + \vec{C} \times (\nabla \times \vec{D}) + \vec{D} \times (\nabla \times \vec{C}), \quad (5.64)$$

fazendo a simples correspondência  $\vec{C} = \frac{\hat{r}}{r^2}$  e  $\vec{D} = \vec{m}$ . Com efeito,

$$\nabla \left( \frac{\vec{m} \cdot \hat{r}}{r^2} \right) = \left( \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot \nabla \right) \vec{m} + (\vec{m} \cdot \nabla) \frac{\hat{r}}{r^2} + \frac{\hat{r}}{r^2} \times (\nabla \times \vec{m}) + \vec{m} \times \left( \nabla \times \frac{\hat{r}}{r^2} \right), \quad (5.65)$$

$$\nabla \left( \frac{\vec{m} \cdot \hat{r}}{r^2} \right) = (\vec{m} \cdot \nabla) \frac{\hat{r}}{r^2}. \quad (5.66)$$

Dessa forma, o campo magnético de dipolo pode ser escrito da seguinte forma:

$$\vec{B}_{dip} = -\frac{\mu_0}{4\pi} (\vec{m} \cdot \nabla) \frac{\hat{r}}{r^2} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \left( \frac{\vec{m} \cdot \hat{r}}{r^2} \right). \quad (5.67)$$

$$\vec{B}_{dip} = -\nabla \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \cdot \hat{r}}{r^2} \right), \quad (5.68)$$

$$\vec{B}_{dip} = -\nabla \phi_{dip}, \quad (5.69)$$

onde definimos o potencial escalar de dipolo magnético

$$\phi_{dip} \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \cdot \hat{r}}{r^2}. \quad (5.70)$$

Para um dipolo em uma posição arbitrária  $\vec{r}'$ , a expressão acima ficará em termos do vetor separação  $\vec{z}$ , de tal forma que

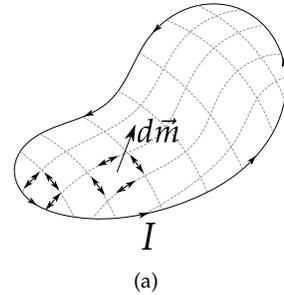
$$\phi_{dip} \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \cdot \hat{z}}{z^2}. \quad (5.71)$$

Uma forma útil de utilizar o resultado para o potencial escalar magnético de dipolo  $\phi_{dip}$  é quando tratamos com espiras. Podemos associar uma espira qualquer a um coleção de espiras infinitesimais, cada uma sendo considerada um dipolo magnético puro. Para entender melhor o que está sendo proposto, veja a figura 5.72, ao lado. Note que as correntes adjacentes se cancelam para um elemento infinitesimal fora da borda da espira, ao passo que não se cancelam nos elementos da borda, de tal maneira que o conjunto equivale perfeitamente à corrente  $I$  da espira, contribuindo com uma quantidade infinitesimal de potencial escalar magnético que vale

$$d\phi_{dip} \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{m} \cdot \hat{z}}{z^2}, \quad (5.72)$$

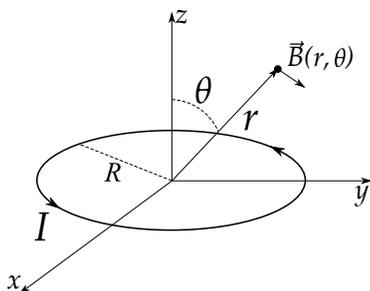
com  $d\vec{m} = I\hat{n}da$  sendo um elemento infinitesimal de momento magnético de dipolo ( $\hat{n}da$  é o elemento de área), e  $\vec{z}$  sendo a separação entre a posição  $\vec{r}'$  do elemento infinitesimal e a posição  $\vec{r}$  onde se pretende calcular  $\phi$ .

**FIGURA 5.2:** EQUIVALÊNCIA ENTRE UMA ESPIRA E UMA COLEÇÃO DE ESPIRAS INFINITESIMAIS DE MOMENTO DE DIPOLO INFINITESIMAL  $d\vec{m}$ .

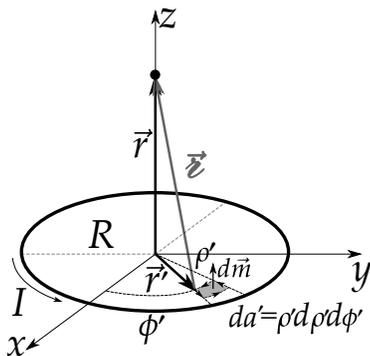


**EXEMPLO 5.3.** Determine o campo magnético  $\vec{B}(r, \theta)$  em uma posição arbitrária do espaço para uma espira circular percorrida por uma corrente elétrica  $I$ , de raio  $R$ , disposta sobre o plano  $x$ - $y$ , como ilustra a figura 5.3(a).

**FIGURA 5.3:** EM (A), TEMOS UMA ESPIRA DE RAIOS  $R$  PERCORRIDA POR UMA CORRENTE ELÉTRICA  $I$ .  $\vec{B}(r, \theta)$  É O CAMPO MAGNÉTICO EM UM PONTO ARBITRÁRIO DO ESPAÇO. EM (B), OS VETORES DE INTERESSE PARA INTEGRAÇÃO DO POTENCIAL ESCALAR MAGNÉTICO.



(a)



(b)

**SOLUÇÃO:** A espira de raio  $R$  é percorrida por uma corrente elétrica  $I$  sendo que, em coordenadas cilíndricas, a posição onde queremos determinar o potencial escalar magnético é inicialmente no eixo  $z$ ,  $\vec{r} = z \hat{z}$ . O elemento de espira se localiza em  $\vec{r}' = \rho' \cos \phi' \hat{x} + \rho' \sin \phi' \hat{y}$ , sendo o vetor separação  $\vec{z} = -\rho' \cos \phi' \hat{x} - \rho' \sin \phi' \hat{y} + z \hat{z}$ , com módulo  $z = \sqrt{\rho'^2 + z^2}$  (veja a figura 5.3(b)).

O potencial escalar magnético de dipolo, no eixo  $z$ , será calculado integrando sobre a área circular da espira a expressão 5.72. Com efeito,

$$\phi(z) = \iint_S \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{m} \cdot \hat{z}}{z^2}, \quad (5.73)$$

$$\phi(z) = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\mu_0 I z}{4\pi} \frac{\hat{z} \cdot \vec{z}}{z^3} \rho' d\rho' d\phi', \quad (5.74)$$

$$\phi(z) = \frac{\mu_0 I z}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R \frac{\rho' d\rho'}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (5.75)$$

$$\phi(z) = \frac{\mu_0 I z}{2} \frac{1}{\sqrt{\rho'^2 + z^2}} \Big|_R^0, \quad (5.76)$$

$$\phi(z) = \frac{\mu_0 I z}{2} \left( \frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right). \quad (5.77)$$

Perceba que se calcularmos o campo magnético no eixo  $z$  através de  $\vec{B}(z) = -\nabla\phi = -\frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{z}$ , o resultado será o mesmo já obtido no exemplo 2.4, através da lei de Biot-Savart (é interessante que o leitor verifique). O desafio agora é calcular

o campo magnético gerado pela espira circular em uma posição arbitrária do espaço, ou seja,  $\vec{B}(r, \theta)$ . Vamos proceder de forma similar ao feito com a solução da equação de Laplace no problema do anel carregado, escrevendo uma solução particular para o eixo  $z$  e comparando com o resultado já conhecido. Como a corrente na espira é uma distribuição singular de corrente, ou seja, ela é nula em todos os pontos do espaço, exceto em pontos sobre a espira, temos um caso em que  $\nabla \times \vec{B} = \vec{0}$  (para pontos fora da espira). Dessa forma,  $\vec{B} = -\nabla\phi$  e  $\nabla \cdot \vec{B} = -\nabla \cdot \nabla\phi = \nabla^2\phi = 0$ , e o potencial escalar magnético  $\phi$  irá obedecer a uma equação de Laplace. Vamos lembrar que a solução geral para problemas com simetria esférica e azimutal é

$$\phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta). \quad (5.78)$$

Para que este potencial seja uma função finita, na região com  $r < R$  temos que ter  $B_l = 0 \forall l$ , ao passo que para a região  $r > R$  temos que ter  $A_l = 0 \forall l$ . Isto quer dizer que, para a nossa espira de raio  $R$  teremos

$$\phi(r, \theta) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) & r < R \\ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) & r > R. \end{cases} \quad (5.79)$$

Se restringirmos nossa solução, pelos menos agora, para pontos no eixo  $z$ , com  $z > 0$ , teremos que  $r = z$  e  $\theta = 0$ , teremos que  $P_l(1) = 1 \forall l$ . Portanto,

$$\phi(z) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} A_l z^l & z < R \\ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{z^{l+1}} & z > R. \end{cases} \quad (5.80)$$

Olhando agora para solução do potencial escalar magnético  $\phi(z)$  da espira encontrada no eixo  $z$ , podemos escrever duas séries de potências, uma para  $z > R$  e outra para  $z < R$ . Para  $z > 0$ , temos que

$$\phi(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right), \quad (5.81)$$

onde podemos fatorar  $R^2$  ou  $z^2$ , dependendo da região. Com efeito,

$$\phi(z) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2} \left[ 1 - \frac{z}{R} \left( 1 + \frac{z^2}{R^2} \right)^{-1/2} \right], & z < R \\ \frac{\mu_0 I}{2} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{R^2}{z^2} \right)^{-1/2} \right], & z > R. \end{cases} \quad (5.82)$$

Usando a expansão em série de potências (consulte a expressão (v) nas séries de Maclaurin no A),

$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} x^n, \quad -1 < x \leq 1, \quad (5.83)$$

teremos que

$$\phi(z) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2} \left[ 1 - \frac{z}{R} + \frac{1}{2} \left( \frac{z}{R} \right)^3 - \frac{3}{8} \left( \frac{z}{R} \right)^5 + \dots \right], & z < R \\ \frac{\mu_0 I}{2} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{R}{z} \right)^2 - \frac{3}{8} \left( \frac{R}{z} \right)^4 + \frac{5}{16} \left( \frac{R}{z} \right)^6 \dots \right], & z > R. \end{cases} \quad (5.84)$$

Podemos usar esta última expressão para encontrar os coeficientes  $A_l$  e  $B_l$  e, como são constantes, valem também para qualquer ponto do espaço, e assim encontraremos o potencial escalar magnético para qualquer ponto do espaço. Para  $z < R$ ,

$$\begin{cases} \phi(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \left[ 1 - \frac{z}{R} + \frac{1}{2} \left( \frac{z}{R} \right)^3 - \frac{3}{8} \left( \frac{z}{R} \right)^5 + \dots \right], & z < R \\ \phi(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + A_4 z^4 + A_5 z^5 \dots \end{cases} \quad (5.85)$$

de onde tiramos que  $A_l$  para  $l$  par, exceto para  $l = 0$ , e também que

$$A_0 = \frac{\mu_0 I}{2}, \quad A_1 = -\frac{\mu_0 I}{2R}, \quad A_3 = \frac{\mu_0 I}{4R^3}, \quad A_5 = -\frac{3\mu_0 I}{16R^5} \dots \quad (5.86)$$

Para  $z > R$ ,

$$\begin{cases} \phi(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{R}{z} \right)^2 - \frac{3}{8} \left( \frac{R}{z} \right)^4 + \frac{5}{16} \left( \frac{R}{z} \right)^6 \dots \right], & z > R \\ \phi(z) = \frac{B_0}{z} + \frac{B_1}{z^2} + \frac{B_2}{z^3} + \frac{B_3}{z^4} + \frac{B_4}{z^5} + \frac{B_5}{z^6} \dots \end{cases} \quad (5.87)$$

de onde tiramos que  $B_l = 0$  para  $l$  par, e que

$$B_1 = \frac{\mu_0 I R^2}{4}, \quad B_3 = -\frac{3\mu_0 I R^4}{16}, \quad B_5 = \frac{5\mu_0 I R^6}{32}, \dots \quad (5.88)$$

É desnecessário analisar os coeficientes para o  $z < 0$ , pois teríamos os mesmos valores.

Estamos agora com posse dos coeficientes  $A_l$  e  $B_l$  da solução da equação de Laplace para o potencial escalar magnético  $\phi(r, \theta)$  do problema para um ponto arbitrário do espaço. Chegamos então à solução para um ponto arbitrário de posição  $(r, \theta)$ , para  $r < R$ ,

$$\phi(r, \theta) = \frac{\mu_0 I}{2} \left[ P_0(\cos \theta) - \left(\frac{r}{R}\right) P_1(\cos \theta) + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^3 P_3(\cos \theta) - \frac{3}{8} \left(\frac{r}{R}\right)^5 P_5(\cos \theta) + \dots \right], \quad r < R \quad (5.89)$$

e, para  $r > R$ ,

$$\phi(r, \theta) = \frac{\mu_0 I}{2} \left[ \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r}\right)^2 P_1(\cos \theta) - \frac{3}{8} \left(\frac{R}{r}\right)^4 P_3(\cos \theta) + \frac{5}{16} \left(\frac{R}{r}\right)^6 P_5(\cos \theta) + \dots \right], \quad r > R. \quad (5.90)$$

ou, em notação de somatório, teremos, para  $r < R$

$$\phi(r, \theta) = \frac{\mu_0 I}{2} P_0(\cos \theta) - \frac{\mu_0 I}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l (2l)!}{2^{2l} (l!)^2} \left(\frac{r}{R}\right)^{2l+1} P_{2l+1}(\cos \theta), \quad r < R \quad (5.91)$$

e, para  $r > R$ ,

$$\phi(r, \theta) = -\frac{\mu_0 I}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l (2l)!}{2^{2l} (l!)^2} \left(\frac{R}{r}\right)^{2l} P_{2l-1}(\cos \theta), \quad r > R. \quad (5.92)$$

Para calcularmos o campo magnético da espira em um ponto arbitrário  $(r, \theta)$ , devemos calcular

$$\vec{B} = -\frac{\partial \phi}{\partial r} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \hat{\theta} = B_r(r, \theta) \hat{r} + B_\theta(r, \theta) \hat{\theta}, \quad (5.93)$$

onde definimos as componentes do campo magnético nas direções  $\hat{r}$  e  $\hat{\theta}$ ,

$$B_r(r, \theta) \equiv -\frac{\partial\phi}{\partial r} \quad , \quad B_\theta(r, \theta) \equiv -\frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta}. \quad (5.94)$$

Como o cálculo demandará derivadas em relação à  $\theta$  de polinômios de Legendre de diferentes ordens, vamos usar a seguinte regra da cadeia:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{\partial x}{\partial\theta} \frac{\partial}{\partial x}, \quad (5.95)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} = -\sin\theta \frac{\partial}{\partial x}, \quad (5.96)$$

com  $x = \cos\theta$ . Com efeito, as componentes  $B_r$  e  $B_\theta$ , para o campo magnético, ficam expressas por, para  $r < R$ ,

$$B_r(r, \theta) = \frac{\mu_0 I}{2R} \left[ P_1(\cos\theta) - \frac{3}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^2 P_3(\cos\theta) + \frac{15}{8} \left(\frac{r}{R}\right)^4 P_5(\cos\theta) + \dots \right], \quad (5.97)$$

$$B_\theta(r, \theta) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin\theta \left\{ P_0(\cos\theta) - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^2 [5P_2(\cos\theta) + 1] + \frac{3}{8} \left(\frac{r}{R}\right)^4 [9P_4(\cos\theta) + 5P_2(\cos\theta) + 1] + \dots \right\} \quad (5.98)$$

e, para  $r > R$ ,

$$B_r(r, \theta) = \frac{\mu_0 I R^2}{2r^3} \left[ P_1(\cos\theta) - \frac{3}{2} \left(\frac{R}{r}\right)^2 P_3(\cos\theta) + \frac{15}{8} \left(\frac{R}{r}\right)^4 P_5(\cos\theta) + \dots \right], \quad (5.99)$$

$$B_\theta(r, \theta) = \frac{\mu_0 I R^2}{4r^3} \sin\theta \left\{ P_0(\cos\theta) - \frac{3}{4} \left(\frac{R}{r}\right)^2 [5P_2(\cos\theta) + 1] + \frac{5}{8} \left(\frac{R}{r}\right)^4 [9P_4(\cos\theta) + 5P_2(\cos\theta) + 1] + \dots \right\}, \quad (5.100)$$

sendo estas as componentes do campo magnético gerado pela espira circular em um ponto arbitrário do espaço e, finalmente, resolvemos o problema.

Podemos fazer uma correspondência interessante com o resultado do campo magnético da espira circular que acabamos de calcular. Considere que

estamos analisando o resultado para o campo magnético gerado pela espira em pontos que  $r > R$ , e ainda que são pontos distantes o suficientes da espira de tal modo que  $r \gg R$ . Neste caso, podemos desprezar os termos de ordens superiores em  $r/R$  e considerar somente os primeiros para  $B_r(r, \theta)$  e  $B_\theta(r, \theta)$ . Com efeito, teremos

$$B_r(r, \theta) \approx \frac{\mu_0 I R^2}{2} \frac{1}{r^3} \cos \theta, \quad (5.101)$$

$$B_\theta(r, \theta) \approx \frac{\mu_0 I R^2}{4} \frac{1}{r^3} \sin \theta, \quad (5.102)$$

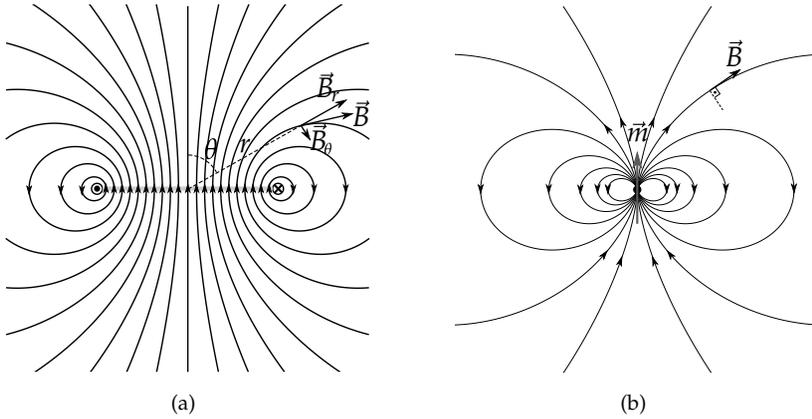
de tal forma que o campo magnético aproximado gerado pela espira com  $r \gg R$  será

$$\vec{B} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \pi R^2}{r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}). \quad (5.103)$$

Ora, mas esse é o campo magnético gerado por um momento dipolo magnético  $\vec{m} = I \pi R^2 \hat{z}$ , de tal maneira que podemos dizer que, para pontos com  $r \gg R$ , o campo gerado pela espira será aproximadamente o campo magnético de um dipolo. Me refiro como “aproximado” pois só tomamos o primeiro termo nas expansões em séries das componentes do campo magnético da espira e desprezamos, assim, os termos de multipolos superiores. No entanto, existe um procedimento em que a aproximação se torna exata. Se tomarmos o limite da área da espira para zero, mantendo o produto  $IA$  uma quantidade **finita**, definiremos o que chamamos de dipolo magnético puro e, neste caso, o campo magnético da espira será exatamente o campo de um dipolo magnético.

Em analogia ao que vimos na eletrostática, podemos dizer que a espira de tamanho finito corresponde a um **dipolo magnético físico**, ao passo que uma espira de tamanho infinitesimal corresponde a um **dipolo magnético puro**. Na figura 5.4, a seguir, apresentamos as configurações de linhas de campo magnético da espira (dipolo físico) e para o dipolo magnético puro. Perceba também, que as equações 5.101 e 5.102 para o campo magnético aproximado da espira são idênticas às obtidas pelo método do potencial vetor magnético, no exemplo 4.2.

**FIGURA 5.4:** Em (A) TEMOS A CONFIGURAÇÃO DE LINHAS DE CAMPO MAGNÉTICO PARA UMA ESPIRA FINITA COM VISTA NO PLANO QUE A CONTÉM, CONSIDERANDO ATÉ 15 TERMOS DAS EXPANSÕES NAS EQUAÇÕES 5.97, 5.98, 5.99 E 5.100. Em (B) TEMOS A CONFIGURAÇÃO DE LINHAS DE CAMPO MAGNÉTICO DE MOMENTO DE DIPOLO MAGNÉTICO PURO.



# 6

## ENERGIA POTENCIAL MAGNETOSTÁTICA E INDUTÂNCIA

No estudo da eletrostática, mostramos que o trabalho realizado para montar uma configuração de cargas, seja ela contínua ou discreta, pode ser calculado integrando sobre todo espaço a densidade de energia eletrostática no campo elétrico, isto é,  $u_e = \epsilon_0 E^2 / 2$ . Obviamente, no caso da magnetostática, a energia de configuração não está associada ao trabalho realizado pela força magnética, visto que esta de fato não realiza trabalho, como imposto pela lei de força de Lorentz. Contudo, a força magnética imprime, indiretamente, outros efeitos ao conteúdo energético de um sistema de correntes, cabendo ao campo elétrico induzido realizar trabalho. Vamos recordar dos cursos básicos de física, uma lei fundamental do eletromagnetismo, isto é, a **lei de indução eletromagnética de Faraday**,

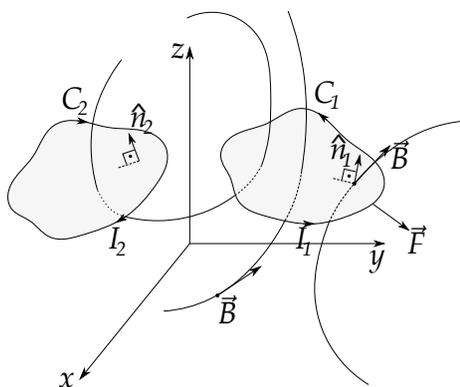
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (\text{SI}) \quad (6.1)$$

Nesta equação,  $\mathcal{E}$  é a força eletromotriz induzida em um circuito devido a uma variação temporal do fluxo magnético  $\Phi_B$ , definido como

$$\Phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot \hat{n} da. \quad (6.2)$$

Esta definição do fluxo magnético para uma superfície  $S$  implica em uma das nomenclaturas para o campo magnético  $\vec{B}$ , isto é, a **densidade de fluxo magnético**. O sinal negativo expressa o fato que a força eletromotriz tem um efeito que **se opõe** à variação do fluxo magnético (lei de Lenz).

**FIGURA 6.1:** REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DE DUAS ESPIRAS  $C_1$  E  $C_2$ , PERCORRIDAS POR CORRENTES DE INTENSIDADES  $I_1$  E  $I_2$ , RESPECTIVAMENTE, GERANDO UM CAMPO MAGNETOSTÁTICO  $\vec{B}$  NO ESPAÇO. A ESPIRA  $C_1$  SOFRE AÇÃO DE UMA FORÇA EXTERNA  $\vec{F}$ .



Considere então duas espiras  $C_1$  e  $C_2$ , percorridas por correntes de intensidades  $I_1$  e  $I_2$ , respectivamente, gerando um campo magnético magnetostático  $\vec{B}$  no espaço. Admita que a espira  $C_1$  pode ser deslocada pela ação de um agente externo por uma força  $\vec{F}$  (veja a figura 6.1, ao lado). Quando um agente externo aplica uma força  $\vec{F}$  na espira  $C_1$ , temos uma situação em que o fluxo magnético  $\Phi_{21}$  (fluxo na espira  $C_1$  para o conjunto) varia devido ao movimento da espira em campo magnético não uniforme, ou seja, surge uma força eletromotriz devido ao movimento. O que a experiência mostra é que a espira  $C_1$  irá apresentar resistência ao movimento, portanto, algum trabalho será realizado contra o trabalho realizado pela força  $\vec{F}$ , por isso neste caso dizemos que será estabelecida na espira uma força **contra eletromotriz**. Se multiplicarmos esta força contra eletromotriz pela intensidade de corrente  $I_1$ , teremos o trabalho realizado por unidade de tempo sobre as cargas no circuito em  $C_1$ , ou seja, a potência  $\frac{dW}{dt}$ .

Com efeito, se a espira for deslocada com velocidade constante, a potência desenvolvida será

$$\frac{dW}{dt} = \mathcal{E}_1 I_1, \quad (6.3)$$

$$\frac{dW}{dt} = - \frac{d\Phi_{21}}{dt} I_1, \quad (6.4)$$

e considerando uma situação em que a corrente é estacionária<sup>1</sup>,

$$dW = -I_1 d\Phi_{21}. \quad (6.5)$$

Esta última equação sugere que um trabalho infinitesimal devido à força  $\vec{F}$  só depende da corrente na espira  $C_1$  e da variação do fluxo magnético  $\Phi_{21}$  na espira  $C_1$ , isto é, só depende da configuração do par de espiras considerado, permitindo-nos escrever uma energia potencial para o sistema. Esta energia de configuração é definida como **energia potencial magnetostática**  $U_{12}$ , onde podemos escrever que o trabalho infinitesimal realizado sobre a espira  $C_1$  é dado por

$$dW = -dU_{12}, \quad (6.6)$$

implicando em

$$U_{21} = I_1 \Phi_{21}. \quad (6.7)$$

Não é difícil perceber que, como se trata de uma energia de configuração, a troca de índice leva a um resultado simétrico, ou seja,  $U_{21} = U_{12} = I_2 \Phi_{12}$ . Resumindo, a energia potencial magnetostática só depende da configuração do par de espiras, isto é, suas correntes e fluxos magnéticos, de tal forma que um trabalho realizado sobre algum dos circuitos muda esta configuração e consequentemente o valor desta energia.

Para um conjunto de  $N$  espiras, a energia total da configuração será dada pela soma de todos os pares, ou seja,

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N I_i \Phi_{ji}, \quad (6.8)$$

com o fator meio sendo colocado para compensar a dupla contagem de um par de espiras. Perceba que podemos fatorar a  $i$ -ésima corrente da soma em  $j$ , escrevendo

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N I_i \left( \sum_{j=1}^N \Phi_{ji} \right). \quad (6.9)$$

<sup>1</sup>Aqui vale uma nota importante: estamos neste ponto do texto no limiar entre a magnetostática e a eletrodinâmica (campos dinâmicos). Ao deslocar uma espira, em uma região onde atua um campo magnético, inevitavelmente surgirá uma força eletromotriz devida ao movimento, bem como o campo magnético gerado pela espira deslocada será variável com tempo. No entanto, na magnetostática, estamos interessados apenas nos estados estáticos, ou seja, os momentos antes e depois de a dinâmica ocorrer, e que toda evolução no estágio dinâmico é feita mediante processos quase-estáticos.

A quantidade entre parênteses é a soma do fluxo magnético devido a todas as espiras sobre a  $i$ -ésima espira ( $\Phi_i$ ), **inclusive** o fluxo magnético devido ao campo gerado por ela mesma (quando  $j = i$ ), de tal maneira que

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^N \Phi_{ji}, \quad (6.10)$$

e, conseqüentemente,

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N I_i \Phi_i. \quad (6.11)$$

Por outro lado, o fluxo magnético total na  $i$ -ésima espira pode ser escrito como sendo

$$\Phi_i = \iint_{S_i} \vec{B} \cdot \hat{n}_i da_i, \quad (6.12)$$

$$\Phi_i = \iint_{S_i} (\nabla \times \vec{A}) \cdot \hat{n}_i da_i, \quad (6.13)$$

$$\Phi_i = \oint_{C_i} \vec{A} \cdot d\vec{r}_i, \quad (6.14)$$

onde aplicamos o teorema de Stokes. Substituindo agora a equação 6.14 na equação 6.11, temos a energia potencial magnetostática com uma integração do potencial vetor sobre todos os circuitos, ou seja,

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N I_i \oint_{C_i} \vec{A} \cdot d\vec{r}_i, \quad (6.15)$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \oint_{C_i} (\vec{I}_i \cdot \vec{A}) dr_i. \quad (6.16)$$

Para distribuições contínuas de correntes, basta substituímos a soma em  $i$  por uma integração em  $\vec{r}'$ , bem como substituímos  $\vec{I}_i dr_i$  por  $\vec{K}(\vec{r}') da'$  ou  $\vec{K}(\vec{r}') d\tau'$  para densidades superficiais ou volumétricas de correntes, respectivamente. Dessa forma, temos

$$U = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{V}} \vec{j}(\vec{r}') \cdot \vec{A}(\vec{r}') d\tau', \quad (6.17)$$

para densidades volumétricas de corrente e

$$U = \frac{1}{2} \iint_S \vec{K}(\vec{r}') \cdot \vec{A}(\vec{r}') da', \quad (6.18)$$

para densidades superficiais de corrente. O volume  $V$  ou a superfície  $S$  devem ser de tal maneira que englobem toda a distribuição de corrente.

Vamos agora proceder de maneira análoga ao que fizemos com a energia potencial eletrostática. Recorrendo à equação de Maxwell  $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ , a integral para energia potencial magnetostática para densidades volumétricas de corrente fica da seguinte forma:

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) \cdot \vec{A} d\tau. \quad (6.19)$$

Usando agora a identidade vetorial

$$\nabla \cdot (\vec{B} \times \vec{A}) = (\nabla \times \vec{B}) \cdot \vec{A} - (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{B}, \quad (6.20)$$

temos que

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_V \nabla \cdot (\vec{B} \times \vec{A}) d\tau + \frac{1}{2\mu_0} \iiint_V (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{B} d\tau, \quad (6.21)$$

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \oiint_S (\vec{B} \times \vec{A}) \cdot \hat{n} da + \frac{1}{2\mu_0} \iiint_V B^2 d\tau. \quad (\text{SI}) \quad (6.22)$$

Esta última equação indica que, uma vez escolhendo uma superfície  $S$  que englobe toda distribuição de corrente, a energia potencial magnetostática será resultado de duas integrais. Se a distribuição de corrente for finita de tal modo que para pontos com  $r \rightarrow \infty$ , tanto o campo magnético  $\vec{B}$  como o potencial vetor magnético  $\vec{A}$  tendam a zero, podemos recorrer ao mesmo artifício usado na eletrostática, e escolher uma superfície esférica de raio  $r$  infinito, de tal maneira que a primeira integral do fluxo de  $(\vec{B} \times \vec{A})$  se anule. Sendo assim, restaria-nos calcular somente a segunda integral sobre todo o espaço, ou seja,

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_V B^2 d\tau, \quad (6.23)$$

e identificamos aqui a densidade de energia no campo magnetostático  $\vec{B}$ , no SI, expressa por  $u_m = B^2/2\mu_0$ , em analogia à densidade de energia no campo eletrostático. Para encontramos a densidade de energia no sistema CGS, basta usarmos a relação de transformação entre campos 2.27, de tal forma que, no vácuo,

$$u_m = B^2/8\pi, \quad (6.24)$$

o que permite escrever que a energia total será

$$U = \frac{1}{8\pi} \iiint_V B^2 d\tau. \quad (6.25)$$

Vale aqui ressaltar uma vantagem do sistema CGS em relação ao sistema internacional. Em muitas situações de interesse do eletromagnetismo clássico, vamos nos deparar com a necessidade de se calcular a energia em um **campo eletromagnético**. Isto quer dizer que precisaremos calcular a energia total associadas aos dois campos simultaneamente. No SI, teremos que a densidade de energia  $u_{em}$  será

$$u_{em} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad (6.26)$$

ao passo que, no CGS,

$$u_{em} = \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2). \quad (6.27)$$

Perceba que no SI, como as unidades para os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são diferentes (N/C para  $\vec{E}$  e T para  $\vec{B}$ ), os coeficientes  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$  devem compensar essa diferença de unidade de tal forma que a densidade de energia seja em  $\text{J/m}^3$ . Já no CGS, como as unidades para os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são **iguais** (Gauss), a soma é direta, sendo a densidade de energia expressa em  $\text{erg/cm}^3$ .

Voltemos agora nossa atenção para o cálculo do fluxo magnético particularmente na  $i$ -ésima espira, ou seja, a equação 6.10, não nos custando muito escrever novamente,

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^N \Phi_{ji}. \quad (6.28)$$

O termo  $\Phi_{ji}$  expressa o fluxo magnético devido a  $j$ -ésima espira sobre a  $i$ -ésima espira. Sendo assim, podemos escrever que

$$\Phi_{ji} = \iint_{S_i} \vec{B}_{ji} \cdot \hat{n}_i da_i, \quad (6.29)$$

$$\Phi_{ji} = \oint_{C_i} \vec{A}_{ji}(\vec{r}_i) \cdot d\vec{r}_i, \quad (6.30)$$

sendo  $\vec{B}_{ji}$  e  $\vec{A}_{ji}$  o campo e potencial vetor magnético, respectivamente, devidos à  $j$ -ésima espira sobre a  $i$ -ésima espira. Neste momento, temos que notar que este potencial vetor magnético é dado como função da posição  $\vec{r}_i$  que localiza um elemento de deslocamento  $d\vec{r}_i$  na espira  $C_i$ . No regime magnetostático,

podemos recorrer à lei de Biot-Savart e escrever este potencial vetor magnético como se segue:

$$\vec{A}_{ji}(\vec{r}_i) = \frac{\mu_0 I_j}{4\pi} \oint_{C_j} \frac{d\vec{r}_j}{z_{ji}}, \quad (6.31)$$

de tal maneira que o vetor separação entre os elementos de deslocamentos é  $\vec{z}_{ji} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ , sendo  $\vec{r}_i$  o vetor que localiza o elemento de deslocamento  $d\vec{r}_i$  na espira  $C_i$  e  $\vec{r}_j$  o vetor que localiza o elemento de deslocamento  $d\vec{r}_j$  na espira  $C_j$  (veja a figura 6.2).

Se substituirmos o potencial vetor magnético da equação 6.31 na equação 6.30 do fluxo magnético, temos

$$\Phi_{ji} = \oint_{C_i} \left( \frac{\mu_0 I_j}{4\pi} \oint_{C_j} \frac{d\vec{r}_j}{z_{ji}} \right) \cdot d\vec{r}_i, \quad (6.32)$$

$$\Phi_{ji} = I_j \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_i} \oint_{C_j} \frac{d\vec{r}_j \cdot d\vec{r}_i}{z_{ji}} \right). \quad (6.33)$$

Note que o termo entre parênteses nesta última equação é uma constante proveniente da integração que leva em conta a configuração geométrica das espiras  $C_i$  e  $C_j$ , fazendo com que o fluxo magnético na  $i$ -ésima espira devido à  $j$ -ésima espira seja **proporcional** à intensidade de corrente na  $j$ -ésima espira. Esta constante de proporcionalidade é chamada de **coeficiente de indução**  $L_{ij}$ , de tal maneira que

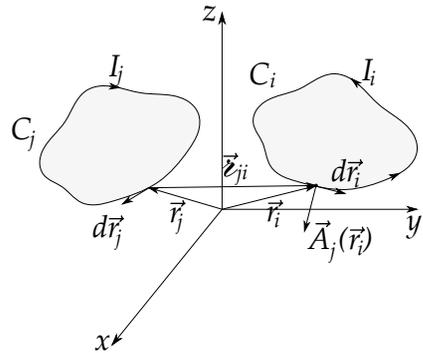
$$\Phi_{ji} = L_{ij} I_j, \quad (6.34)$$

com  $L_{ij}$  sendo dado por

$$L_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_i} \oint_{C_j} \frac{d\vec{r}_j \cdot d\vec{r}_i}{z_{ji}}, \quad (6.35)$$

também conhecida como relação de Neumann. Note que, se trocarmos os índices, a integral permanece inalterada, sendo portanto o coeficiente de indução

**FIGURA 6.2:** REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DE DUAS ESPIRAS  $C_i$  e  $C_j$ , PERCORRIDAS POR CORRENTES DE INTENSIDADES  $I_i$  e  $I_j$ , RESPECTIVAMENTE.  $\vec{A}_{ji}(\vec{r}_i)$  É O POTENCIAL VETOR MAGNÉTICO DEVIDO À  $j$ -ÉSIMA ESPIRA SOBRE A  $i$ -ÉSIMA ESPIRA LOCALIZADO EM  $\vec{r}_i$ , NO DESLOCAMENTO INFINITESIMAL  $d\vec{r}_i$ .  $\vec{z}_{ji}$  É A POSIÇÃO DO DESLOCAMENTO INFINITESIMAL  $d\vec{r}_i$  EM RELAÇÃO AO DESLOCAMENTO INFINITESIMAL  $d\vec{r}_j$ , POSICIONADO EM  $\vec{r}_j$ .



uma quantidade simétrica, isto é,  $L_{ij} = L_{ji}$ . Para a autoindução, temos  $i = j$ , ou seja,  $L_{ii}$  que chamaremos apenas de  $L$ , definida como sendo a **autoindutância**, ou simplesmente **indutância**. Apenas para diferenciar os vetores na própria espira, vamos usar  $\vec{r}$  e  $\vec{r}'$ , de tal modo que

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\vec{r} \cdot d\vec{r}'}{z}, \quad (6.36)$$

com  $\vec{z} = \vec{r} - \vec{r}'$ .

Do ponto de vista prático, os dispositivos capazes de armazenar energia potencial magnetostática são chamados de **indutores**. A energia potencial magnetostática em um indutor corresponde exatamente ao termo de autoenergia na expressão da equação 6.11, ou seja,

$$U = \frac{1}{2} LI^2, \quad (6.37)$$

em analogia à expressão da energia potencial eletrostática de um capacitor  $CV^2/2$ . No SI, a análise dimensional irá revelar que a indutância possui unidades de  $J/A^2$ , definida como 1 Henry (H)<sup>2</sup>, de tal modo que:

$$1 \text{ H} \equiv 1 \text{ J/A}^2. \quad (6.38)$$

No CGS, temos como unidade para indutância o statHenry (stH), definido como

$$1 \text{ stH} \equiv 1 \text{ erg/stA}^2, \quad (6.39)$$

$$1 \text{ stH} = 1 \text{ s}^2/\text{cm}. \quad (6.40)$$

A transformação para o CGS herda a transformação das intensidades de correntes  $I_G = I_{SI} \sqrt{4\pi\epsilon_0}$ , ou seja,

$$\frac{L_G}{L_{SI}} = 4\pi\epsilon_0 = \frac{1}{(2,998)^2 \times 10^{11}} \text{ stH/H}, \quad (6.41)$$

$$\frac{L_G}{L_{SI}} \approx \frac{1}{(3,0)^2 \times 10^{11}} \text{ stH/H}. \quad (6.42)$$

Apesar de nossa abordagem inicial se referir somente a espiras, a indutância pode ser calculada para indutores das mais variadas geometrias, inclusive objetos carregados executando rotação gerando densidades superficiais ou

<sup>2</sup>Joseph Henry: (1797-1878) cientista estadunidense.

volumétricas de corrente. Nestes casos, a dificuldade imposta pelas integrações dos coeficientes da indutância fogem do escopo deste texto. Para darmos uma amostra de como os coeficientes de indução levam a integrais de difícil solução, iremos calcular a indutância entre duas espiras coplanares (exemplo 6.3). Mesmo em geometrias aparentemente simples, os cálculos das integrais de indutância pela relação de Neumann não são nada triviais. No entanto, caso a geometria do indutor facilite, podemos determinar a indutância de uma forma mais simples seguindo os seguintes passos:

- (I) Calculamos o campo magnético  $\vec{B}$  para o indutor percorrido por uma corrente  $I$ .
- (II) Determinamos o fluxo total  $\Phi$  no indutor.
- (III) Usamos a expressão  $L = \Phi/I$  para determinar a indutância.

**EXEMPLO 6.1.** Determine a indutância de um solenoide muito longo com densidade de voltas  $n$ , raio  $R$  e comprimento  $l$  ( $R \ll l$ ). Calcule a energia armazenada no solenoide cilíndrico quando percorrido por uma corrente  $I$ . Para todas as considerações, despreze os efeitos de bordas (veja a figura 6.3).

**SOLUÇÃO:** Vamos lançar mão de argumentos de simetria para chegar à expressão para o campo magnético dentro e fora do solenoide. Como a corrente circula na direção  $\hat{\phi}$ , o campo magnético deve circular na direções  $\hat{\rho}$  e  $\hat{z}$ , como determina a lei de Ampère na forma diferencial  $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ . Em princípio, o campo magnético seria escrito da seguinte forma:

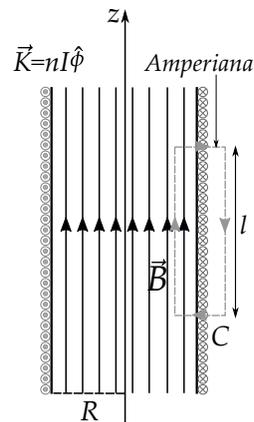
$$\vec{B} = B_\rho \hat{\rho} + B_z \hat{z} \quad (6.43)$$

No entanto, considerando um solenoide muito longo, a componente  $\rho$  deve ser nula, restando-nos um campo magnético escrito na forma

$$\vec{B} = B_z \hat{z}. \quad (6.44)$$

Como não há corrente nem fora nem dentro do solenoide, pois toda corrente se encontra na superfície, o rotacional de  $\vec{B}$  deve ser nulo nessas

**FIGURA 6.3:** VISÃO DA SECÇÃO EM UM DIÂMETRO DO SOLENOIDE EM FORMATO CILÍNDRICO. A CURVA  $C$  É UMA AMPERIANA QUE SERÁ USADA PARA DETERMINAR O CAMPO MAGNÉTICO DENTRO DO SOLENOIDE.



regiões, ou seja,  $\nabla \times \vec{B} = 0$ . Isso implica dizer que o campo magnético para o solenoide longo deve ser uniforme tanto dentro como fora do solenoide. Fora do solenoide, o campo magnético será nulo, pois o solenoide é muito longo, as linhas de campo magnético não “escapam” do interior do solenoide, permanecendo sempre em seu interior. Usando a geometria proposta proposta na figura 6.3, ao lado, vamos aplicar a lei de Ampère na forma integral

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_{enc}, \quad (6.45)$$

sendo  $C$  uma amperiana retangular de altura  $l$ , com metade de sua área interna e outra metade externa ao solenoide. Sendo assim, a circulação do campo magnético será diferente de zero no segmento vertical interno ao solenoide. A corrente encerrada pela amperiana será simplesmente  $I_{enc} = Kl = nIl$ . Com efeito,

$$B_z l = \mu_0 n Il, \quad (6.46)$$

$$B_z = \mu_0 n I, \quad (6.47)$$

onde chegamos à expressão para o campo magnético no interior do solenoide longo,

$$\vec{B} = \mu_0 n I \hat{z}. \quad (6.48)$$

Após determinar o campo magnético, vamos determinar o fluxo total  $\Phi$  para o solenoide. Como o campo magnético é uniforme, o fluxo magnético para cada volta do enrolamento será simplesmente a intensidade do campo magnético vezes a área de secção do solenoide, ou seja,  $BA = \mu_0 n I \cdot \pi R^2$ . Para todo o solenoide de  $N$  voltas, o fluxo magnético total será

$$\Phi = N \mu_0 n I \pi R^2, \quad (6.49)$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 \pi N^2 I R^2}{l}. \quad (6.50)$$

Com posse do fluxo total  $\Phi$ , podemos usar agora a definição de indutância  $L = \Phi/I$ ,

$$\boxed{\frac{\Phi}{I} = L = \frac{\mu_0 \pi N^2 R^2}{l}}, \quad (6.51)$$

ou, em termos da densidade de voltas,

$$\boxed{L = \mu_0 \pi n^2 R^2 l}. \quad (6.52)$$

Note que a indutância só depende de fatores geométricos do solenoide. Ela não depende do campo magnético estabelecido ou da corrente elétrica. Vale salientar aqui que as expressões acima obtidas para indutância do solenoide cilíndrico representam um resultado **aproximado**, tendo em vista todas as aproximações feitas no cálculo do campo magnético.

A energia magnetostática armazenada no solenoide cilíndrico será calculada pela expressão obtida

$$U = \frac{1}{2}LI^2, \quad (6.53)$$

conduzindo ao seguinte resultado:

$$U = \frac{\mu_0 \pi n^2 R^2 l I^2}{2}. \quad (6.54)$$

É importante mostrar que esse resultado é exatamente igual ao resultado proveniente de outro método de cálculo, através do uso da densidade de energia magnetostática no campo magnético. Lembremos que a energia armazenada no campo magnético pode ser obtida via integração em todo o espaço

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_V B^2 d\tau. \quad (6.55)$$

Desprezando os efeitos de bordas, o campo só existirá dentro do solenoide cilíndrico e será uniforme. A integral acima será simplesmente a densidade de energia magnetostática vezes o volume do solenoide, isto é,

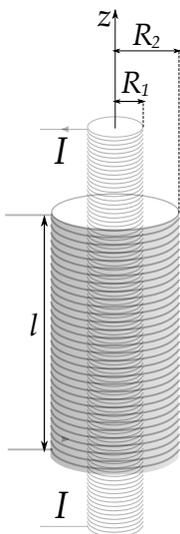
$$U = \frac{B^2}{2\mu_0} \pi R^2 l, \quad (6.56)$$

$$U = \frac{(\mu_0 n I)^2}{2\mu_0} \pi R^2 l, \quad (6.57)$$

$$U = \frac{\mu_0 \pi n^2 R^2 l I^2}{2}. \quad (6.58)$$

**EXEMPLO 6.2.** Considere dois solenoides cilíndricos coaxiais de raios  $R_1$  e  $R_2$ , com  $R_2 > R_1$ . O solenoide de raio  $R_1$  é muito longo comparado ao solenoide de raio  $R_2$ , cujo comprimento é  $l$ . O enrolamento no solenoide de raio  $R_1$  possui  $n_1$  voltas por unidade de comprimento, ao passo que o enrolamento no solenoide de raio  $R_2$  possui  $n_2$  voltas por unidade de comprimento. Determine o indutância mútua entre os solenoides (veja a figura 6.4).

**FIGURA 6.4:** SOLENOIDES CILÍNDRICOS COAXIAIS.



**SOLUÇÃO:** Para encontrarmos a indutância mútua entre os solenoides, vamos considerar que uma corrente elétrica, de intensidade  $I$ , percorre o solenoide longo, de tal forma que circula no sentido anti-horário. Desta forma, já mostramos no exemplo 6.1 que o campo magnético gerado por um solenoide longo é uniforme em seu interior e diretamente proporcional à densidade de voltas por unidade e à intensidade da corrente elétrica. Com efeito, o campo magnético gerado pelo solenoide 1 sobre o solenoide 2 será

$$\vec{B}_{12} = \mu_0 n_1 I \hat{z}. \tag{6.59}$$

O fluxo total deste campo sobre o solenoide 2 será

$$\Phi_{12} = \iint_{S_2} \vec{B}_{12} \cdot \hat{n}_2 da_2. \tag{6.60}$$

Como  $\vec{B}_{12}$  é uniforme, o fluxo magnético será apenas o produto do módulo do campo pela área de secção do solenoide 2 vezes a densidade de voltas  $n_2$  vezes o comprimento  $L$ . Com efeito,

$$\Phi_{12} = \mu_0 n_1 I \cdot \pi R_2^2 n_2 l, \tag{6.61}$$

$$\Phi_{12} = \mu_0 \pi R_2^2 n_1 n_2 l I. \tag{6.62}$$

Note que esta equação para o fluxo obedece à equação que já constamos para um sistema de espiras, isto é,

$$\Phi_{12} = L_{12} I_1, \tag{6.63}$$

atestando que o fluxo magnético realizado pelo solenoide 1 **sobre** o solenoide 2 é proporcional à intensidade da corrente no solenoide 1. A constante de  $L_{12}$  é a indutância mútua desejada. Escrita expressamente, a indutância mútua  $L_{12}$  será

$$L_{12} = \mu_0 \pi R_2^2 n_1 n_2 l. \quad (6.64)$$

**EXEMPLO 6.3.** Determine a indutância mútua de um par de espiras circulares coplanares e concêntricas de raios  $R_1$  e  $R_2$  ( $R_2 > R_1$ ) (veja a figura 6.5).

**SOLUÇÃO:** Os vetores de interesse para o cálculo da indutância mútua são:

- $\vec{r}_1 = R_1(\cos \phi_1 \hat{x} + \sin \phi_1 \hat{y})$ ,
- $\vec{r}_2 = R_2(\cos \phi_2 \hat{x} + \sin \phi_2 \hat{y})$ ,
- $d\vec{r}_1 = R_1 d\phi_1 \hat{\phi}_1$ ,
- $d\vec{r}_2 = R_2 d\phi_2 \hat{\phi}_2$ ,

De tal maneira que

$$d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2 = R_1 R_2 d\phi_1 d\phi_2 \hat{\phi}_1 \cdot \hat{\phi}_2, \quad (6.65)$$

$$d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2 = R_1 R_2 d\phi_1 d\phi_2 \cos(\phi_2 - \phi_1), \quad (6.66)$$

e, para  $\vec{z}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ , temos

$$\vec{z}_{12} = (R_1 \cos \phi_1 - R_2 \cos \phi_2) \hat{x} + (R_1 \sin \phi_1 - R_2 \sin \phi_2) \hat{y}, \quad (6.67)$$

com módulo igual a

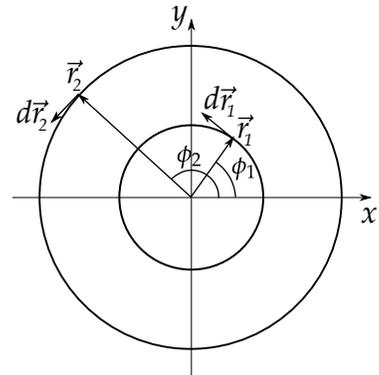
$$z_{12} = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 - 2R_1 R_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)}, \quad (6.68)$$

Aplicando na relação de Neumann (6.35), temos

$$L_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R_1 R_2 d\phi_1 d\phi_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2 - 2R_1 R_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)}}. \quad (6.69)$$

Perceba que esta integral apresenta um acoplamento entre as variáveis  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , e podemos recorrer à técnica da matriz Jacobiana para facilitar o cálculo.

**FIGURA 6.5:** PAR DE ESPIRAS COPLANARES E CONCÊNTRICAS E VETORES DE INTERESSE PARA O CÁLCULO DA INDUTÂNCIA MÚTUA.



Considere agora as novas variáveis  $\alpha$  e  $\beta$  de tal modo que

$$\begin{cases} \phi_1 = \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \phi_2 = \frac{\alpha + \beta}{2}, \end{cases} \quad (6.70)$$

A matriz Jacobiana para este sistema é

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial \phi_1}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \beta} \end{bmatrix}, \quad (6.71)$$

$$J = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad (6.72)$$

com módulo do determinante  $|\det\{J\}| = 1/2$ . Dessa maneira, a integral fica

$$L_{12} = \frac{\mu_0 R_1 R_2}{4\pi} \int_0^{4\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{1}{2} \frac{d\alpha d\beta \cos \beta}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2 - 2R_1 R_2 \cos \beta}}, \quad (6.73)$$

$$L_{12} = \frac{\mu_0 R_1 R_2}{4\pi} \frac{1}{2} \int_0^{4\pi} d\alpha \int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{d\beta \cos \beta}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2 - 2R_1 R_2 \cos \beta}}, \quad (6.74)$$

e, usando o fato que o integrando é uma função par em intervalo simétrico, temos que

$$L_{12} = \mu_0 R_1 R_2 \int_0^{2\pi} \frac{d\beta \cos \beta}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2 - 2R_1 R_2 \cos \beta}}. \quad (6.75)$$

Para resolver essa última integral, vamos usar um parâmetro  $0 < k < 1$ , de tal maneira que

$$k^2 = \frac{4R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2}, \quad (6.76)$$

e também vamos recorrer à identidade trigonométrica

$$\cos \beta = 1 - 2 \sin^2 \left( \frac{\beta}{2} \right). \quad (6.77)$$

Note que

$$R_1^2 + R_2^2 = \frac{4R_1 R_2}{k^2} - 2R_1 R_2. \quad (6.78)$$

Substituindo estas duas últimas equações na integral da equação 6.75, temos

$$L_{12} = \mu_0 R_1 R_2 \int_0^{2\pi} \frac{\left[1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\beta}{2}\right)\right] d\beta}{\sqrt{\frac{4R_1 R_2}{k^2} - 2R_1 R_2 - 2R_1 R_2 + 4R_1 R_2 \sin^2 \left(\frac{\beta}{2}\right)}}, \quad (6.79)$$

$$L_{12} = \mu_0 R_1 R_2 \int_0^{2\pi} \frac{\left[2 \cos^2 \left(\frac{\beta}{2}\right) - 1\right] d\beta}{\sqrt{\frac{4R_1 R_2}{k^2} - 4R_1 R_2 \left[1 - \sin^2 \left(\frac{\beta}{2}\right)\right]}}, \quad (6.80)$$

$$L_{12} = \frac{\mu_0 \sqrt{R_1 R_2}}{2} \int_0^{2\pi} \frac{k \left[2 \cos^2 \left(\frac{\beta}{2}\right) - 1\right] d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \left(\frac{\beta}{2}\right)}}. \quad (6.81)$$

Vamos usar, agora, a transformação de variável  $\beta = \pi + 2\phi$ , de tal modo que

$$L_{12} = \frac{\mu_0 \sqrt{R_1 R_2}}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{k [2 \sin^2 \phi - 1] d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}, \quad (6.82)$$

e por ter um integrando par em intervalo simétrico,

$$L_{12} = \mu_0 \sqrt{R_1 R_2} \int_0^{\pi/2} \frac{k [2 \sin^2 \phi - 1] d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}, \quad (6.83)$$

O termo  $\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}$  é um indicativo que podemos expressar esta integral em integrais elípticas. Vamos rearranjar os termos da seguinte maneira:

$$L_{12} = \mu_0 \sqrt{R_1 R_2} \int_0^{\pi/2} \frac{\left[2k \sin^2 \phi - k + \frac{2}{k} - \frac{2}{k}\right] d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}, \quad (6.84)$$

$$L_{12} = \mu_0 \sqrt{R_1 R_2} \int_0^{\pi/2} \frac{\left[\left(\frac{2}{k} - k\right) - \frac{2}{k} (1 - k^2 \sin^2 \phi)\right] d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}, \quad (6.85)$$

$$L_{12} = \mu_0 \sqrt{R_1 R_2} \left[ \left(\frac{2}{k} - k\right) \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} - \frac{2}{k} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} d\phi \right], \quad (6.86)$$

onde chegamos finalmente a um resultado para a indutância mútua entre as duas espiras, isto é,

$$L_{12} = \frac{2\mu_0\sqrt{R_1R_2}}{k} \left[ \left(1 - \frac{k^2}{2}\right) K(k) - E(k) \right], \quad (6.87)$$

sendo  $K(k)$  e  $E(k)$  as integrais elípticas de primeira e segunda espécie, respectivamente. As integrais elípticas são integrais que podem ser resolvidas por métodos numéricos. Isto mostra que o cálculo de coeficientes de indutância, mesmo que para geometrias simples, pode conduzir a cálculos complicados.

Para termos uma ideia quantitativa de valores para a indutância mútua entre as duas espiras, vamos definir um parâmetro  $x \equiv R_1/R_2$  (adimensional) sendo a razão entre os raios das espiras. Em termos de  $x$ , teremos que

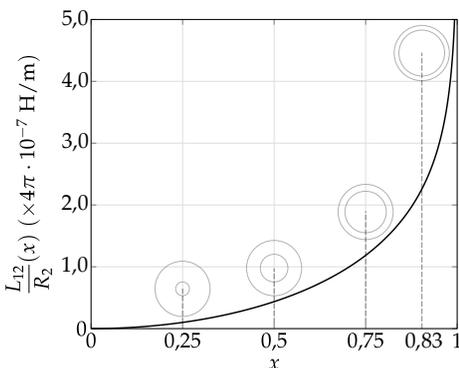
$$k(x) = \sqrt{\frac{4x}{(1+x)^2}}, \quad (6.88)$$

e

$$L_{12} = \frac{R_2}{R_2} \frac{2\mu_0\sqrt{R_1R_2}}{k} \left\{ \left[1 - \frac{k(x)^2}{2}\right] K[k(x)] - E[k(x)] \right\}, \quad (6.89)$$

$$\frac{L_{12}}{R_2}(x) = \frac{2\mu_0\sqrt{x}}{k(x)} \left\{ \left[1 - \frac{k(x)^2}{2}\right] K[k(x)] - E[k(x)] \right\}. \quad (6.90)$$

**FIGURA 6.6:** PAR DE ESPIRAS COPLANARES E CONCÊNTRICAS E VETORES DE INTERESSE PARA O CÁLCULO DA INDUTÂNCIA MÚTUA.



A figura 6.6, acima, mostra como  $\frac{L_{12}}{R_2}(x)$  aumenta com  $x$ , divergindo em  $x = 1$ . Os valores indicados foram:

Por exemplo, para  $x = 0,5$ ,  $R_2 = 2R_1$ , ou seja, o raio da espira maior corresponde ao dobro da espira menor. Com ajuda computacional, a expressão acima pode ser calculada e assume o seguinte valor:

$$\frac{L_{12}}{R_2}(0,5) = 5,5 \times 10^{-7} \text{ H/m}. \quad (6.91)$$

Nestas circunstâncias, para uma espira maior com  $R_2 = 0,1$  m, a indutância será

$$L_{12}(0,5) = 5,5 \times 10^{-8} \text{ H}. \quad (6.92)$$

- $\frac{L_{12}}{R_2}(0,25) = 0,1 \times 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m.}$
- $\frac{L_{12}}{R_2}(0,5) = 0,42 \times 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m.}$
- $\frac{L_{12}}{R_2}(0,75) = 1,18 \times 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m.}$
- $\frac{L_{12}}{R_2}(0,83) = 1,62 \times 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m.}$

Vamos estudar agora uma aproximação interessante, que servirá para verificarmos o resultado obtido para indutância mútua das espiras em uma situação mais simples. A aproximação consiste em considerarmos  $R_2 \gg R_1$ , ou seja, a espira de raio menor é muito pequena comparada à espira de raio maior. Neste caso, se uma corrente elétrica de intensidade  $I$  percorrer a espira de raio  $R_2$ , o fluxo magnético sobre a espira de raio  $R_1$  será, aproximadamente, devido ao campo magnético no centro da espira de raio  $R_2$ , que, como já sabemos, vale  $\frac{\mu_0 I}{2R}$ .

Para  $R_2 \gg R_1$ ,

$$k^2 \approx \frac{4R_1}{R_2} \ll 1. \quad (6.93)$$

Usando as expansões em séries de potências para as integrais elípticas  $K(k)$  e  $E(k)$  (veja no apêndice C), temos

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{k^2}{4} + \frac{9k^4}{32} + \frac{25k^6}{256} + \dots \right), \quad (6.94)$$

$$E(k) = \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{k^2}{4} + \frac{3k^4}{32} - \frac{5k^6}{256} + \dots \right). \quad (6.95)$$

A expressão entre colchetes da equação 6.87 poderá ser reduzida para

$$\left[ \left( 1 - \frac{k^2}{2} \right) K(k) - E(k) \right] \approx \frac{\pi k^4}{32} \left( 1 + \frac{3k^2}{4} - \frac{75k^4}{128} + \dots \right). \quad (6.96)$$

Considerando que  $k \ll 1$ , levaremos em conta apenas o primeiro termo da expressão acima, o que implica em

$$\left[ \left( \frac{2}{k^2} - 1 \right) K(k) - \frac{2}{k^2} E(k) \right] \approx \frac{\pi k^4}{32}. \quad (6.97)$$

Com efeito,

$$L_{12} \approx \frac{2\mu_0 \sqrt{R_1 R_2}}{k} \frac{\pi k^4}{32}, \quad (6.98)$$

$$L_{12} \approx \mu_0 \sqrt{R_1 R_2} \frac{\pi k^3}{16}, \quad (6.99)$$

$$L_{12} \approx \mu_0 \sqrt{R_1 R_2} \frac{\pi}{16} 8 \sqrt[3]{\frac{R_1}{R_2}}, \quad (6.100)$$

$$\boxed{L_{12} \approx \frac{\mu_0 \pi R_1^2}{2R_2}}. \quad (6.101)$$

Perceba que, se multiplicarmos este resultado por uma intensidade de corrente  $I$ , percorrendo a espira de raio maior, a indutância mútua aproximada será a razão do fluxo magnético sobre a espira menor, devido ao campo gerado na origem pela espira maior, isto é,  $\frac{\mu_0 I}{2R_2}$ , sobre a área  $\pi R_1^2$  da espira menor.

# LISTA DE QUESTÕES I

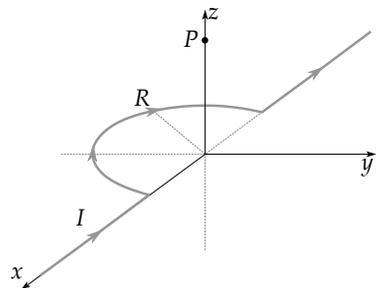
**QUESTÃO I.1.** Usando a lei de Ampère na forma integral no CGS, determine o campo elétrico  $\vec{B}(\rho)$ , a uma distância  $\rho$  de um fio infinito percorrido por uma corrente elétrica de intensidade  $I$  que se encontra isolado no vácuo. Calcule quanto vale a intensidade do campo magnético em Gauss para uma distância  $\rho = 10$  cm e uma corrente de intensidade  $I = 3 \times 10^9$  stA. Quanto vale a intensidade deste campo magnético em Tesla?

**QUESTÃO I.2.** Considere um fio formando dois segmentos semi-infinitos ( $x \geq R$  e  $x \leq -R$ ) e um semicírculo de raio  $R$  com centro coincidindo com a origem de um sistema cartesiano, percorrido por uma corrente elétrica de intensidade  $I$ , como indica a figura 6.7 a seguir.

Considerando que o fio se encontra no espaço livre (vácuo), no SI, determine:

- O campo magnético no ponto  $P$  de posição  $\vec{r} = z \hat{z}$ .
- Encontre uma expressão para o campo magnético na origem ( $z = 0$ ) e calcule sua intensidade, para uma corrente  $I = 1$  A e  $R = 0,10$  m.

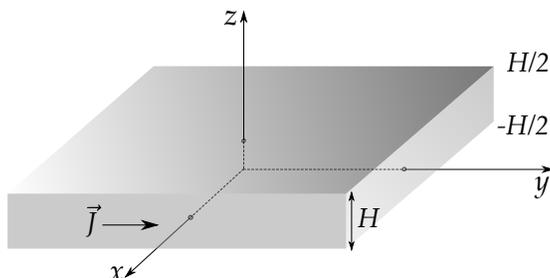
**FIGURA 6.7:** FIO FORMANDO DOIS SEGMENTOS SEMI-INFINITOS ( $x \geq R$  E  $x \leq -R$ ) E UM SEMICÍRCULO DE RAIO  $R$  COM CENTRO COINCIDINDO COM A ORIGEM DE UM SISTEMA CARTESIANO.



**QUESTÃO I.3.** Considere uma esfera maciça de raio  $R$ , uniformemente carregada com densidade volumétrica  $\rho$  no vácuo. Ela então é posta a girar com velocidade angular  $\vec{\omega}$  em torno de um eixo que passa pelo seu centro. Determine o potencial vetor magnético em uma posição distante  $r$  do centro da esfera, fazendo um ângulo  $\theta$  com o eixo de rotação, considerando dentro ( $r \leq R$ ) e fora ( $r \geq R$ ) da esfera. Com posse o potencial vetor magnético, determine o campo magnético  $\vec{B}$  para pontos fora e dentro da esfera. Determine também a energia magnetostática deste sistema.

**QUESTÃO I.4.** Considere uma “chapa” condutora de extensão infinita no espaço livre (vácuo) de espessura  $H$ , compreendida entre  $-H/2 \leq z \leq H/2$ , no sistema de referência cartesiano, como indica a figura 6.8 a seguir. Por esta chapa, percorre uma densidade de corrente uniforme  $\vec{J} = J\hat{y}$ .

**FIGURA 6.8:** REPRESENTAÇÃO FINITA DA “CHAPA” CONDUTORA PERCORRIDA POR UMA DENSIDADE VOLUMÉTRICA DE CORRENTE UNIFORME  $\vec{J} = J\hat{y}$ , COMPREENDIDA ENTRE  $-H/2 \leq z \leq H/2$ .



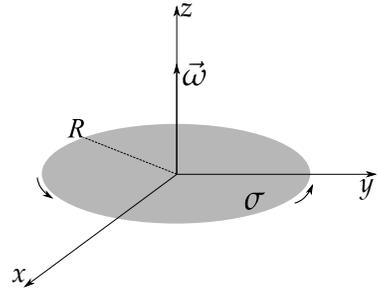
- Usando a lei de Ampère na forma integral, determine o campo magnético  $\vec{B}(z)$  para as regiões com  $|z| > H/2$  (fora da chapa) e  $|z| < H/2$  (dentro da chapa).
- Determine o campo magnético agora pela lei de Gauss na forma diferencial. Use o fato que campo magnético deve ser finito e contínuo para todas as regiões do espaço e nulo em  $z = 0$ .

**QUESTÃO I.5.** Considere um disco isolante de raio  $R$  com centro coincidindo com a origem de um sistema cartesiano, carregado com densidade superficial uniforme  $\sigma$ , que se encontra isolado no vácuo, como indica a figura 6.9 a seguir.

Determine, no SI:

- O momento de dipolo magnético  $\vec{m}$  para disco carregado girante.
- O potencial vetor magnético de dipolo para pontos arbitrários no espaço de localização  $(r, \theta)$ , com  $r > R$ .
- O campo magnético de dipolo para pontos no eixo  $B_{dip}(z)$ .
- Verifique se na aproximação  $z \gg R$  os resultados para lei de Biot-Savart e de dipolo magnético coincidem.

**FIGURA 6.9:** DISCO ISOLANTE DE RAIO  $R$  CARREGADO COM DENSIDADE SUPERFICIAL UNIFORME  $\sigma$  GIRANDO EM TORNO DO EIXO  $z$  COM VELOCIDADE ANGULAR  $\vec{\omega}$ .



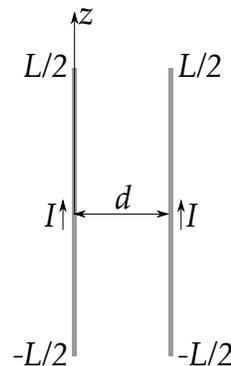
**QUESTÃO I.6.** Considere dois fios de comprimento  $L$  paralelos e distantes  $d$  um do outro, percorridos por uma corrente elétrica de intensidade  $I$ , na configuração do experimento da balança de Ampère, como indica a figura 6.10 a seguir.

Com base no exposto, calcule:

- A intensidade força magnética que atua nos segmentos **sem aproximação** para  $l \gg d$ .
- A intensidade força magnética que atua nos segmentos **com aproximação** para  $l \gg d$ .
- A diferença percentual entre as intensidades calculadas nos itens a e b considerando  $L = 0,50$  m e  $d = 0,04$  m.

**QUESTÃO I.7.** Seja um dipolo magnético puro pontual  $\vec{m} = m\hat{z}$  no vácuo localizado na origem de um sistema de coordenadas cartesiano e no centro de uma superfície esférica

**FIGURA 6.10:** FIOS FINITOS PARALELOS DE COMPRIMENTO  $L$ , COMPREENDIDOS ENTRE  $z = -L/2$  E  $z = L/2$ , PERCORRIDOS POR CORRENTES ELÉTRICAS DE MESMO SENTIDO E INTENSIDADE  $I$ .

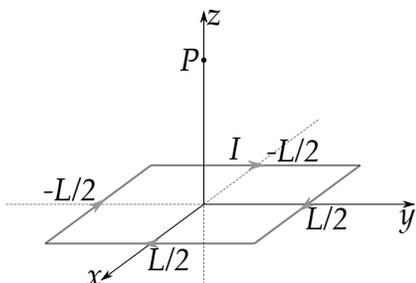


gaussiana  $S$  de raio  $R$ . Verifique a equação fundamental da magnetostática para a superfície gaussiana

$$\oiint_S \vec{B} \cdot \hat{n} da = 0. \tag{6.102}$$

**QUESTÃO I.8.** Considere uma espira quadrada de lado  $L$  percorrida por uma corrente elétrica de intensidade  $I$  no vácuo, como representa a figura 6.11 a seguir.

**FIGURA 6.11:** ESPIRA QUADRADA DE LADO  $L$  PERCORRIDA POR CORRENTE DE INTENSIDADE  $I$ . A ESPIRA SE ENCONTRA NO PLANO  $x$ - $y$  COMPREENDIDA ENTRE  $-L/2 < x < L/2$  E  $-L/2 < y < L/2$ .

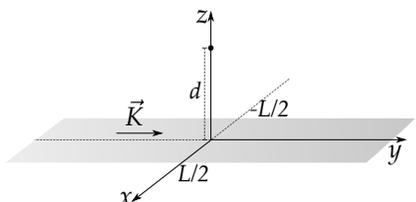


Determine:

- (a) No SI, qual a expressão para o campo magnético no ponto  $P$ , localizado no eixo  $z$  ( $\vec{r} = z\hat{z}$ )?
- (b) No SI, qual é o valor da intensidade do campo magnético para o centro da espira quadrada considerando  $L = 20$  cm e  $I = 1$  A?
- (c) O valor do campo calculado no item b para o sistema CGS?
- (d) A intensidade do momento de dipolo magnético desta espira no SI para  $L = 20$  cm e  $I = 1$  A?

**QUESTÃO I.9.** Uma fita condutora muito extensa de espessura  $L$  se estende no plano  $x$ - $y$  entre  $-L/2 < x < L/2$  e  $-\infty < y < +\infty$ , sendo percorrida por uma densidade superficial de corrente uniforme  $\vec{K} = K\hat{y}$ , como ilustra a figura 6.12 a seguir.

**FIGURA 6.12:** FITA CONDUTORA MUITO EXTENSA PERCORRIDA POR UMA DENSIDADE SUPERFICIAL DE CORRENTE UNIFORME  $\vec{K} = K\hat{y}$ .



Determine o campo magnético em um ponto no eixo  $z$  distante  $d$  da fita. Mostre que no limite de  $d \gg L$ , o campo magnético é típico de um fio fino infinito percorrido por uma corrente elétrica de intensidade  $I = KL$ .

**QUESTÃO I.10.** Seja um cilindro uniformemente carregado com densidade volumétrica  $\rho_0$  no vácuo, com eixo principal coincidindo com o eixo  $z$  de um sistema cartesiano.

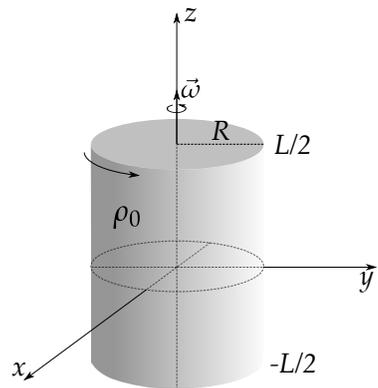
O cilindro possui de raio  $R$  e está compreendido entre  $z = -L/2$  e  $z = L/2$ , tendo comprimento  $L$ . Este cilindro é posto sob uma rotação de velocidade angular  $\vec{\omega}$  em torno do eixo  $z$ . Calcule o campo magnético para pontos sobre o eixo  $z$  para  $|z| > L/2$  e  $|z| < L/2$ , ou seja, para pontos dentro e fora do cilindro.

**QUESTÃO I.11.** Considere duas espiras circulares de raio  $R$  percorridas por uma corrente elétrica  $I$ , ambas circulando no sentido anti-horário, paralelas ao plano  $x$ - $y$ , com os mesmos eixos de simetria no eixo  $z$ , em  $z = \pm h$ , como mostra a figura 6.14 a seguir.

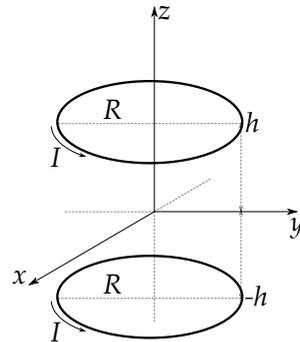
Determine:

- O campo magnético  $\vec{B}(z)$  para pontos no eixo  $z$ . Faça um esboço do gráfico de  $B(z)$ .
- Mostre que, na origem, o campo magnético possui intensidade máxima.
- Mostra que, na configuração de Helmholtz ( $2h = R$ ), o campo magnético é uniforme nas proximidades da origem. Dica: Calcule a segunda derivada de  $B(z)$  em relação à  $z$ .

**FIGURA 6.13:** CILINDRO UNIFORMEMENTE CARREGADO DE COMPRIMENTO  $L$  E RAIO  $R$  ROTACIONANDO COM VELOCIDADE ANGULAR  $\vec{\omega}$  EM TORNO DE SEU EIXO PRINCIPAL.

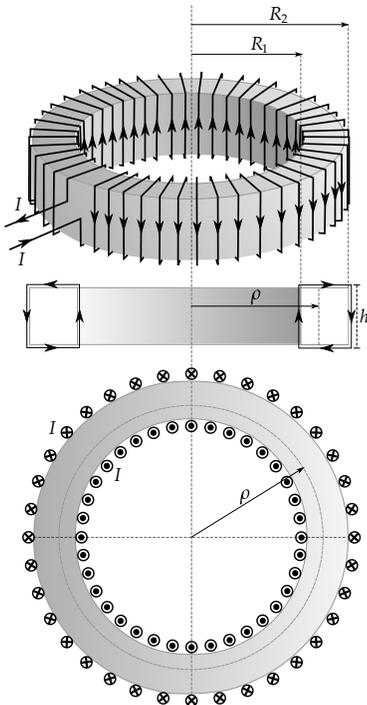


**FIGURA 6.14:** PAR DE ESPIRAS CIRCULARES DE RAIO  $R$  PERCORRIDAS POR UMA CORRENTE ELÉTRICA  $I$ , AMBAS CIRCULANDO NO SENTIDO ANTI-HORÁRIO, DISTANTES  $2h$ .



**QUESTÃO I.12.** Considere uma bobina de enrolamento toroidal de  $N$  voltas, com secção retangular compreendida entre um raio interno  $R_1$ , raio externo  $R_2$  e altura  $h$  percorrida por uma corrente  $I$ , como mostra a figura 6.15 a seguir.

**FIGURA 6.15:** TRÊS VISTAS DA BOBINA DE ENROLAMENTO TOROIDAL COM SECÇÃO RETANGULAR COMPREENDIDA ENTRE UM RAO INTERNO  $R_1$ , RAO EXTERNO  $R_2$  E ALTURA  $h$  PERCORRIDO POR UMA CORRENTE  $I$ . DE CIMA PARA BAIXO, UMA VISÃO EM PERSPECTIVA, NA SECÇÃO RETANGULAR E NA SECÇÃO CIRCULAR DA BOBINA.



Considerando coordenadas cilíndricas  $(\rho, \phi, z)$  e que o material do núcleo enrolado não é magnético (considere o vácuo), determine (no CGS e no SI):

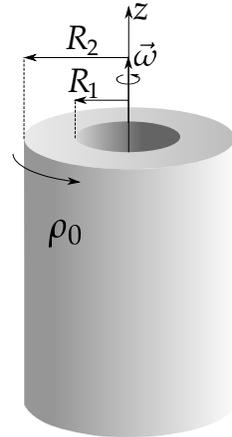
- O campo magnético  $\vec{B}(\rho)$  no interior da bobina a um distância  $\rho$  do eixo principal.
- Uma expressão para energia magnetostática armazenada na bobina.
- A indutância da bobina.
- Considerando  $N = 1000$  voltas,  $R_1 = 5,0$  cm,  $R_2 = 10,0$  cm,  $I = 1$  A e  $h = 3,0$  cm, calcule a energia armazenada e a indutância da bobina.

**QUESTÃO I.13.** Considere uma coroa cilíndrica isolante muito longa de raio interno  $R_1$  e raio externo  $R_2$ , carregada com densidade volumétrica de carga  $\rho_0$ . Esta coroa é posta sob rotação de velocidade  $\vec{\omega}$  em torno do seu eixo principal a figura 6.16 a seguir.

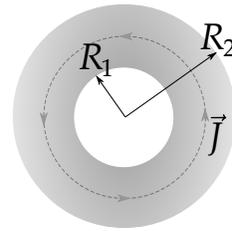
Considerando as coordenadas cilíndricas  $(\rho, \phi, z)$ , determine (no CGS):

- A expressão para a densidade volumétrica de corrente  $\vec{j}$  em função de uma distância  $\rho$  do eixo de rotação da coroa.
- As expressões para o campo magnético em todas as regiões do espaço, ou seja, para pontos dentro da cavidade da coroa ( $\rho < R_1$ ), para pontos dentro da coroa ( $R_1 < \rho < R_2$ ) e para pontos fora da coroa ( $\rho > R_2$ ). Dica: Use argumentos de simetria e o fato do campo magnético ser contínuo para distribuições volumétricas de correntes.
- As expressões para o potencial vetor magnético em todas as regiões do espaço.
- A energia magnetostática por comprimento.

**FIGURA 6.16:** COROA CILÍNDRICA ISOLANTE CARREGADA GIRANTE.



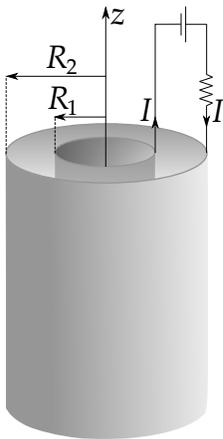
(a)



(b)

**QUESTÃO I.14.** Considere um cabo coaxial percorrido por uma corrente elétrica de intensidade  $I$  devida a um gerador e que alimenta um resistor. O cabo possui condutor interno de raio  $R_1$  e condutor externo de raio  $R_2$ , tal como mostra a figura 6.17 a seguir.

**FIGURA 6.17:** CABO COAXIAL PERCORRIDO POR UMA CORRENTE ELÉTRICA DE INTENSIDADE  $I$  DEVIDA A UM GERADOR E QUE ALIMENTA UM RESISTOR.

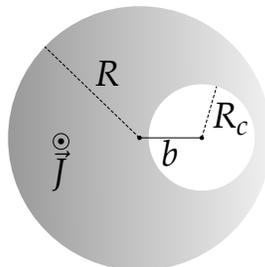


Considerando coordenadas cilíndricas  $(\rho, \phi, z)$  e que não há nenhum material magnético no cabo (considere o vácuo), determine (no SI):

- O campo magnético  $\vec{B}(\rho)$  no interior do cabo entre os condutores a uma distância  $\rho$  do eixo principal.
- A indutância por unidade de comprimento do cabo.

**QUESTÃO I.15.** Um fio condutor cilíndrico muito longo de  $R$  possui uma cavidade também cilíndrica de raio  $R_c$ , com eixo principal a uma distância  $b$  ( $b > R_c$ ) do eixo principal do cilindro, como mostra a figura 6.18 a seguir. Uma densidade volumétrica de corrente elétrica uniforme  $\vec{J}$  é estabelecida no cilindro na mesma direção do seu eixo principal. Determine o campo magnético em todos os pontos do espaço, isto é, dentro da cavidade, dentro do fio e fora dele. Faça um esboço das linhas de campo magnético geradas pelo fio.

**FIGURA 6.18:** FIO CONDUTOR CILÍNDRICO COM CAVIDADE.

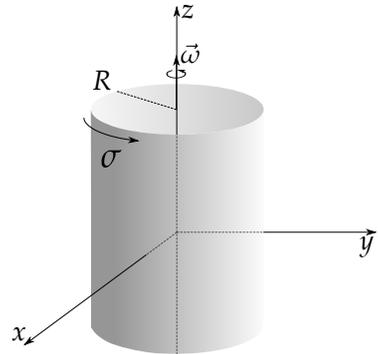


**QUESTÃO I.16.** Determine a expressão para energia magnetostática para a superfície esférica girante do exemplo 4.3.

**QUESTÃO I.17.** Considere uma superfície cilíndrica uniformemente carregada com densidade superficial  $\sigma$  no vácuo, com eixo principal coincidindo com o eixo  $z$  de um sistema cartesiano, de raio  $R$ , de comprimento  $L \gg R$  (aproximação que representa uma superfície cilíndrica infinita).

A figura 6.19 a seguir apresenta um corte seccional de comprimento finito desta superfície. Esta superfície cilíndrica é posta então sob uma rotação de velocidade  $\vec{\omega}$  em torno do eixo  $z$ . Encontre o campo elétrico  $\vec{E}(x)$  sobre pontos no eixo  $x$  ( $\vec{r} = x\hat{x}$ ) para  $x > R$  (fora da superfície cilíndrica) e para  $x < R$  (dentro da superfície cilíndrica).

**FIGURA 6.19:** SUPERFÍCIE CILÍNDRICA INFINITA UNIFORMEMENTE CARREGADA DE RAIO  $R$  POSTA ENTÃO SOB UMA ROTAÇÃO DE VELOCIDADE  $\vec{\omega}$  EM TORNO DO EIXO  $z$ .





# II

## MAGNETOSTÁTICA NA MATÉRIA

“[...] UM CORPO MAGNETIZÁVEL DEVE, PORTANTO, SER CONCEBIDO COMO A UNIÃO DE INÚMERAS PARTÍCULAS, DOS QUAIS CADA UM CONTÉM UMA CERTA QUANTIDADE DE FLUXO MAGNÉTICO NORTE E UMA QUANTIDADE IGUALMENTE GRANDE DO SUL, ESPECIFICAMENTE, DE MODO QUE ELES SEJAM HOMOGENEAMENTE MISTURADOS (O MAGNETISMO É LATENTE), OU SOFRERAM UMA SEPARAÇÃO MENOR OU MAIOR (O MAGNETISMO É DESENVOLVIDO), UMA SEPARAÇÃO, NO ENTANTO, QUE NUNCA PODE ENVOLVER UM TRANSBORDAMENTO DE FLUXO DE UMA PARTÍCULA PARA OUTRA.”

---

CARL FRIEDRICH GAUSS



# 7

## MAGNETIZAÇÃO

Toda matéria, seja ela condensada em sólidos e líquidos ou em estado gasoso, apresenta-se com uma constituição de cargas elétricas positivas (núcleos atômicos) e cargas elétricas negativas (elétrons) formando átomos e/ou moléculas. O movimento dos elétrons em torno do núcleo devido à força Coulombiana gera o que normalmente denominamos de **correntes atômicas**. Na maioria dos materiais, essas “espiras fundamentais” possuem momento de dipolo magnético que em média se cancelam, fazendo o material não exibir naturalmente qualquer manifestação magnética. Na presença de um campo magnético  $\vec{B}$ , surge um torque sobre essas espiras fundamentais com expressão análoga ao torque sobre dipolos elétricos, ou seja,

$$\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}. \quad (7.1)$$

Este torque gira os momentos magnéticos elementares fazendo com que surja um momento magnético líquido diferente de zero. Dizemos então que o material foi **magnetizado** e sua **magnetização** é definida da seguinte forma:

$$\vec{M} \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_i \vec{m}_i, \quad (7.2)$$

com  $\Delta V$  sendo um elemento de volume contendo um conjunto de momentos de dipolo magnéticos  $\vec{m}_i$ .

A existência de um momento magnético não nulo de um objeto magnetizado gera um campo magnético em seu entorno. A origem deste campo pode ser atribuída ao que chamamos de **correntes de magnetização**. Além de torque, um momento magnético sofre uma força quando submetido a um campo magnético expressa por

$$\vec{F} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}). \tag{7.3}$$

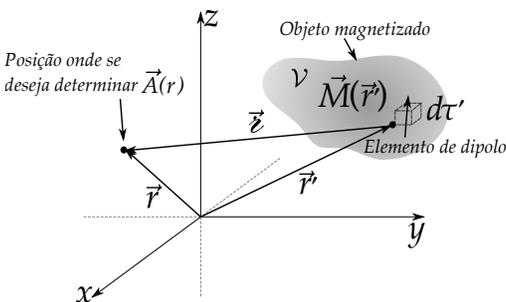
### 7.1 CORRENTES DE MAGNETIZAÇÃO

Considere um material magnético com sua magnetização  $\vec{M}(\vec{r}')$  especificada em todo volume. Podemos idealizá-lo como sendo composto por elementos infinitesimais de volume  $d\tau'$  com momento magnético puro  $\vec{m}$ . Sendo a posição do elemento considerado  $\vec{r}'$ , o potencial vetor magnético devido a este momento magnético num ponto de posição  $\vec{r}$  é dado por

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{z}}{z^2}, \tag{7.4}$$

como  $\vec{z} = \vec{r} - \vec{r}'$  (veja figura 7.1, abaixo).

**FIGURA 7.1:** REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DE UM MATERIAL MAGNETIZADO E AS QUANTIDADES DE INTERESSE PARA O CÁLCULO DO POTENCIAL VETOR MAGNÉTICO. O OBJETO DELIMITA UMA REGIÃO DE VOLUME  $\mathcal{V}$  CONTORNADO POR UMA SUPERFÍCIE  $\mathcal{S}$ .



Para calcularmos o potencial vetor magnético  $\vec{A}(\vec{r})$  devido a toda distribuição, temos que integrar sobre todo volume  $\mathcal{V}$  com  $\vec{m} = \vec{M}(\vec{r}')d\tau'$ , ou seja,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times \hat{z}}{z^2} d\tau'. \tag{7.5}$$

Podemos reescrever o integrando usando o fato que

$$\frac{\hat{z}}{z^2} = \nabla' \left( \frac{1}{z} \right), \tag{7.6}$$

o que conduz a

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} \vec{M}(\vec{r}') \times \nabla' \left( \frac{1}{z} \right) d\tau'. \tag{7.7}$$

Usando a regra do produto para o rotacional, ou seja,

$$\vec{M}(\vec{r}') \times \nabla' \left( \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{z} \left[ \nabla' \times \vec{M}(\vec{r}') \right] - \nabla' \times \left[ \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{z} \right], \quad (7.8)$$

o potencial vetor magnético pode ser escrito como sendo

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \iiint_{\mathcal{V}} \frac{1}{z} \left[ \nabla' \times \vec{M}(\vec{r}') \right] d\tau' - \iint_{\mathcal{V}} \nabla' \times \left[ \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{z} \right] d\tau' \right\}. \quad (7.9)$$

Por último, vamos o seguinte teorema do cálculo vetorial:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \nabla \times \vec{v} d\tau = - \iint_S \vec{v} \times \hat{n} da \quad (7.10)$$

na segunda integral para chegar ao seguinte resultado:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \iiint_{\mathcal{V}} \frac{1}{z} \left[ \nabla' \times \vec{M}(\vec{r}') \right] d\tau' + \iint_S \frac{1}{z} \left[ \vec{M}(\vec{r}') \times \hat{n} da' \right] \right\}, \quad (7.11)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \iiint_{\mathcal{V}} \frac{1}{z} \left[ \nabla' \times \vec{M}(\vec{r}') \right] d\tau' + \iint_S \frac{1}{z} \left[ \vec{M}(\vec{r}') \times \hat{n} \right] da' \right\}. \quad (7.12)$$

Nesta última integral, percebemos claramente que o potencial vetor magnético possui uma contribuição volumétrica e uma contribuição superficial. Podemos identificar essas contribuições como sendo provenientes de densidades volumétricas e superficiais de correntes que denominamos de **correntes de magnetização**. São elas  $\vec{J}_M$  e  $\vec{K}_M$ , calculadas por

$$\boxed{\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}}, \quad (7.13)$$

$$\boxed{\vec{K}_M = \vec{M} \times \hat{n}}. \quad (7.14)$$

Portanto, para um objeto magnetizado com magnetização  $\vec{M}$  definida, o potencial vetor magnético pode ser escrito como

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\vec{J}_M(\vec{r}')}{z} d\tau' + \iint_S \frac{\vec{K}_M(\vec{r}')}{z} da' \right\}}. \quad (7.15)$$

## 7.2 O CAMPO MAGNÉTICO $\vec{H}$ E DENSIDADE DE POLOS MAGNÉTICOS

A descrição feita acima apresenta o potencial vetor magnético devido a um objeto magnetizado com sua natureza atrelada às densidades de correntes de magnetização volumétricas e superficiais do objeto, também chamadas de **correntes ligadas**, pelo fato de a natureza destas correntes estarem associadas ao comportamento coletivo de momentos magnético atômico. Do ponto de vista geral, o potencial vetor magnético pode ser visto como oriundo tanto das correntes de magnetização, como também das **correntes livres**. Essas correntes geralmente são provenientes de elétrons de condução motivadas por alguma diferença de potencial aplicada ou por indução eletromagnética. Sendo assim, a densidade total de corrente elétrica  $\vec{J}$  de um objeto pode ser escrita como a soma da densidade volumétrica de correntes livres  $\vec{J}_l$  e densidade volumétrica de correntes de magnetização  $\vec{J}_M$ , isto é,

$$\vec{J} = \vec{J}_l + \vec{J}_M. \quad (7.16)$$

Por outro lado, a lei de Ampère (na magnetostática) nos diz que

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} = \mu_0 (\vec{J}_l + \vec{J}_M), \quad (7.17)$$

sendo  $\vec{B}$  o campo magnético e  $\mu_0$  a permeabilidade magnética do espaço livre. Reescrevendo a equação 7.17 e usando o fato que  $\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}$ , temos que

$$\nabla \times \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{J}_l. \quad (7.18)$$

Podemos definir uma nova quantidade para o termo entre parênteses na equação anterior. Chamamos este termo de **campo magnético**  $\vec{H}$ ,

$$\boxed{\vec{H} \equiv \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}}, \quad (7.19)$$

o que nos permite escrever a lei de Ampère para o campo  $\vec{H}$  da seguinte forma:

$$\boxed{\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_l}. \quad (7.20)$$

Na forma integral, a lei de Ampère se torna

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = I_{enc}^l, \quad (7.21)$$

sendo  $I_{enc}^l$  a corrente livre total que flui através da Amperiana  $C$ .

No sistema Gaussiano de unidades, como já visto anteriormente, a lei de Ampère será expressa pela seguinte equação:

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}. \quad (7.22)$$

Convertendo a expressão para a densidade volumétrica de corrente de magnetização para o CGS, temos

$$\vec{J}_m = \frac{1}{c} \nabla \times \vec{M}, \quad (7.23)$$

e repetindo o procedimento anterior, temos

$$\nabla \times \frac{c\vec{B}}{4\pi} = \left( \vec{J}_l + \frac{1}{c} \nabla \times \vec{M} \right), \quad (7.24)$$

$$\nabla \times \left( \frac{c\vec{B}}{4\pi} - \frac{1}{c} \vec{M} \right) = \vec{J}_l, \quad (7.25)$$

$$\nabla \times \left( \vec{B} - 4\pi\vec{M} \right) = \frac{4\pi}{c} \vec{J}_l, \quad (7.26)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}_l, \quad (7.27)$$

com  $\vec{H}$  sendo definido por

$$\boxed{\vec{H} \equiv \vec{B} - 4\pi\vec{M}}. \quad (7.28)$$

Um resultado interessante para materiais magnetizados, é o caso em que não há densidades volumétricas de correntes livres, ou seja,  $\vec{J}_l = 0$ . Isso faz com que o campo  $\vec{H}$  seja **irrotacional**. Desta forma, tal campo magnético pode ser escrito como o gradiente de um potencial escalar, digamos  $\psi$ , que chamamos de **potencial escalar magnético**, com efeito

$$\vec{H} = -\nabla\psi. \quad (7.29)$$

Escrevendo o campo magnético em termos do potencial vetor magnético, temos que

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}, \quad (7.30)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times \hat{z}}{z^2} d\tau' \right], \quad (7.31)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} \nabla \times \left[ \vec{M}(\vec{r}') \times \frac{\hat{z}}{z^2} \right] d\tau', \quad (7.32)$$

onde temos que recorrer à identidade vetorial

$$\nabla \times (\vec{C} \times \vec{D}) = (\nabla \cdot \vec{D})\vec{C} - (\nabla \cdot \vec{C})\vec{D} + (\vec{D} \cdot \nabla)\vec{C} - (\vec{C} \cdot \nabla)\vec{D}. \quad (7.33)$$

Com efeito, fazendo a correspondência,  $\vec{C} = \vec{M}(\vec{r}')$  e  $\vec{D} = \frac{\hat{z}}{z^2}$ , temos

$$\begin{aligned} \nabla \times \left[ \vec{M}(\vec{r}') \times \frac{\hat{z}}{z^2} \right] &= \underbrace{\left[ \nabla \cdot \left( \frac{\hat{z}}{z^2} \right) \right]}_{4\pi\delta(\vec{z})} \vec{M}(\vec{r}') - \cancel{\left[ \nabla \cdot \vec{M}(\vec{r}') \right]} \frac{\hat{z}}{z^2} \\ &\quad + \left( \frac{\hat{z}}{z^2} \cdot \nabla \right) \vec{M}(\vec{r}') - \cancel{\left[ \vec{M}(\vec{r}') \cdot \nabla \right]} \frac{\hat{z}}{z^2}, \end{aligned} \quad (7.34)$$

com dois termos que se anulam pelo fato de  $\nabla$  atuar apenas em funções que dependem de  $\vec{r}$ . Como  $\vec{M}(\vec{r}')$  depende apenas de  $\vec{r}'$ , temos que

$$\nabla \times \left[ \vec{M}(\vec{r}') \times \frac{\hat{z}}{z^2} \right] = 4\pi\delta(\vec{z})\vec{M}(\vec{r}') - \left[ \vec{M}(\vec{r}') \cdot \nabla \right] \frac{\hat{z}}{z^2}. \quad (7.35)$$

Podemos, ainda, usando o fato de  $\nabla$  atuar apenas em funções que dependem de  $\vec{r}$ , escrever que

$$\nabla \times \left[ \vec{M}(\vec{r}') \times \frac{\hat{z}}{z^2} \right] = 4\pi\delta(\vec{z})\vec{M}(\vec{r}') - \nabla \left[ \vec{M}(\vec{r}') \cdot \frac{\hat{z}}{z^2} \right]. \quad (7.36)$$

Substituindo agora na expressão 7.32, temos que o campo magnético será

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \iiint_{\mathcal{V}} 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')\vec{M}(\vec{r}')d\tau' - \iiint_{\mathcal{V}} \nabla \left[ \vec{M}(\vec{r}') \cdot \frac{\hat{z}}{z^2} \right] d\tau' \right\}, \quad (7.37)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 M(\vec{r}) - \mu_0 \nabla \left\{ \frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} \left[ \vec{M}(\vec{r}') \cdot \frac{\hat{z}}{z^2} \right] d\tau' \right\}. \quad (7.38)$$

Fazendo a correspondência com a expressão  $\vec{B} = \mu_0 \vec{M} + \mu_0 \vec{H}$ , temos que  $\vec{H} = -\nabla \psi$  com

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} \left[ \vec{M}(\vec{r}') \cdot \frac{\hat{z}}{z^2} \right] d\tau', \quad (7.39)$$

sendo o **potencial escalar magnético**. Usando agora o fato que  $\frac{\hat{z}}{z^2} = \nabla' \left( \frac{1}{z} \right)$ , o potencial escalar magnético será

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} \left[ \vec{M}(\vec{r}') \cdot \nabla' \left( \frac{1}{z} \right) \right] d\tau'. \quad (7.40)$$

Por outro lado, a regra do produto para a divergência garante que

$$\nabla' \cdot \left[ \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{z} \right] = \frac{\nabla' \cdot \vec{M}(\vec{r}')}{z} + \vec{M}(\vec{r}') \cdot \nabla' \left( \frac{1}{z} \right), \quad (7.41)$$

$$\vec{M}(\vec{r}') \cdot \nabla' \left( \frac{1}{z} \right) = -\frac{\nabla' \cdot \vec{M}(\vec{r}')}{z} + \nabla' \cdot \left[ \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{z} \right]. \quad (7.42)$$

Substituindo na expressão do potencial escalar magnético da equação 7.39, temos

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \left\{ -\iiint_{\mathcal{V}} \frac{1}{z} \left[ \nabla' \cdot \vec{M}(\vec{r}') \right] d\tau' + \iiint_{\mathcal{V}} \nabla' \cdot \left[ \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{z} \right] d\tau' \right\}. \quad (7.43)$$

Usando o teorema da divergência na segunda integral, teremos o seguinte resultado:

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \left[ \iiint_{\mathcal{V}} \frac{-\nabla' \cdot \vec{M}(\vec{r}')}{z} d\tau' + \iint_S \frac{\vec{M}(\vec{r}') \cdot \hat{n}}{z} da' \right]. \quad (7.44)$$

Este resultado para o potencial escalar magnético é análogo ao resultado para o potencial eletrostático devido a um objetivo polarizado. A primeira integral se refere à parcela do potencial escalar magnético devido à densidade volumétrica de cargas magnéticas  $\rho_M$ ,

$$\rho_M = -\nabla \cdot \vec{M}(\vec{r}), \quad (7.45)$$

ao passo que a segunda parcela se refere à densidade superficial de cargas magnética  $\sigma_M$ ,

$$\sigma_M = \vec{M}(\vec{r}) \cdot \hat{n}, \quad (7.46)$$

de tal maneira que

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \left[ \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho_M}{z} d\tau' + \iint_S \frac{\sigma_M}{z} da' \right]. \quad (7.47)$$

É salutar neste momento abordar os modelos do magnetismo do ponto de vista da origem do campo magnético nos materiais e sua associação com correntes de magnetização e polos magnéticos. Até o momento, vimos que o campo magnético  $\vec{B}$  é oriundo de correntes elétricas, sejam elas de correntes livres ou correntes de magnetização (correntes ligadas). Este modelo de descrição da origem do campo magnético é chamado de **modelo de Ampère**. Muitos anos antes do estabelecimento de que campos magnéticos são oriundos apenas de correntes elétricas, os físicos utilizavam outro modelo para descrever o campo magnético, o chamado **modelo de Gilbert**. Este modelo consiste basicamente em considerar que o magnetismo se manifesta sempre de forma análoga ao observado para o dipolo elétrico, atribuindo sempre dois polos magnéticos (sul e norte) para explicação do campo magnético observado. Durante séculos este modelo permaneceu vigente, até Ampère mostrar que campos magnéticos são gerados exclusivamente por correntes elétricas. Apesar de o modelo de Gilbert ser útil para alguns casos, como, por exemplo, a perfeita analogia entre dipolos puros elétricos e magnéticos, ele não traz a verdadeira essência do comportamento do campo magnético  $\vec{B}$ , podendo incorrer, inclusive, a erros conceituais.

Não se deve confundir aqui a definição de polos magnéticos como sendo cargas que podem estar isoladas, configurando assim monopolos magnéticos, o que, de fato, no conteúdo do eletromagnetismo clássico não existe. É importante reforçar que o campo magnético continua sendo **solenoidal**, isto é,  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ , mesmo em situações que envolvam a magnetostática na matéria, mantendo seu comportamento de linhas de campo circulares fechadas, não emergindo nem convergindo em carga alguma.

Os polos magnéticos, neste contexto, se referem ao campo magnético  $\vec{H}$ , sendo este um campo que, ao contrário de  $\vec{B}$ , **não é solenoidal**. Basta calcularmos a divergência de  $\vec{B}$  na equação  $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ , ou seja,

$$\nabla \cdot \vec{B} = \mu_0(\nabla \cdot \vec{H} + \nabla \cdot \vec{M}), \quad (7.48)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = -\nabla \cdot \vec{M}, \quad (7.49)$$

para perceber que as densidades de polos magnéticos são as “cargas fontes” para o campo magnético  $\vec{H}$ .

Se usarmos o modelo de Gilbert, os momentos magnéticos elementares que compõem o material magnetizado são vistos na verdade como pequenos

ímãs com polos de sinais opostos. A densidade volumétrica  $\rho_M$  de polos magnéticos surge quando os ímãs elementares adjacentes não têm seus polos de sinais opostos compensados totalmente. Quando a compensação existe em todos os pontos do volume do objeto magnetizado, isto implica que a magnetização é uniforme, restando apenas as polos magnéticos na superfície.

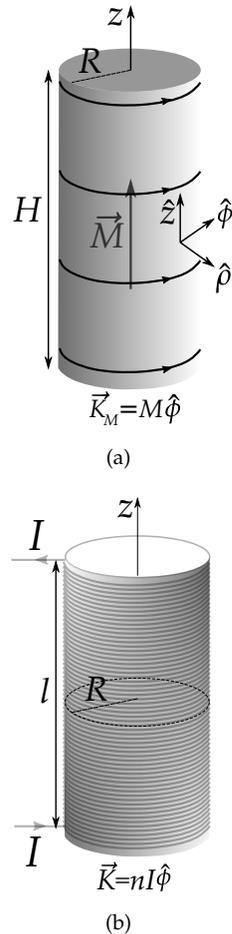
Para visualizar o exposto acima, considere um ímã em formato cilíndrico de raio  $R$  e altura  $H$ , com magnetização uniforme  $\vec{M}$  apontando ao longo do eixo principal do cilindro (direção  $z$ , veja a figura 7.2(a)) isolado no vácuo.

Teremos neste caso somente densidade superficial de corrente superficial  $\vec{K}_M$  de magnetização na superfície lateral do cilindro, pois  $\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M} = 0$  (magnetização uniforme). Com efeito,  $\vec{K}_M = \vec{M} \times \hat{n} = M\hat{z} \times \hat{\rho} = M\hat{\phi}$ . Do ponto de vista do campo magnético, a situação é análoga a um solenoide cilíndrico (veja figura 7.2(b)) de tal maneira que a densidade superficial de corrente do ímã é equivalente a uma densidade de corrente elétrica do solenoide dada por  $\vec{K} = nI\hat{\phi}$ , com  $n$  sendo a densidade de voltas do enrolamento (número de voltas  $N$  por comprimento  $n = N/H$ ) e  $I$  a intensidade de corrente elétrica.

Do ponto de vista do campo magnético  $\vec{H}$ , como neste caso não há correntes livres, sua origem está atrelada às densidades de polos magnéticos  $\rho_M$  e  $\sigma_M$ . Como a magnetização é uniforme, não há densidade volumétrica de polos magnéticos, ou seja,  $\rho_M = -\nabla \cdot \vec{M} = 0$ . As fontes de linhas de campo magnético  $\vec{M}$  devem estar ligadas à densidade superficial de polos magnéticos  $\sigma_M$  que, neste caso, será  $\sigma_M = \vec{M} \cdot \hat{n} = M\hat{z} \cdot \hat{z} = M$  para superfície superior e  $\sigma_M = \vec{M} \cdot \hat{n} = -M\hat{z} \cdot \hat{z} = -M$  para a superfície inferior do cilindro (veja a figura 7.2(a)).

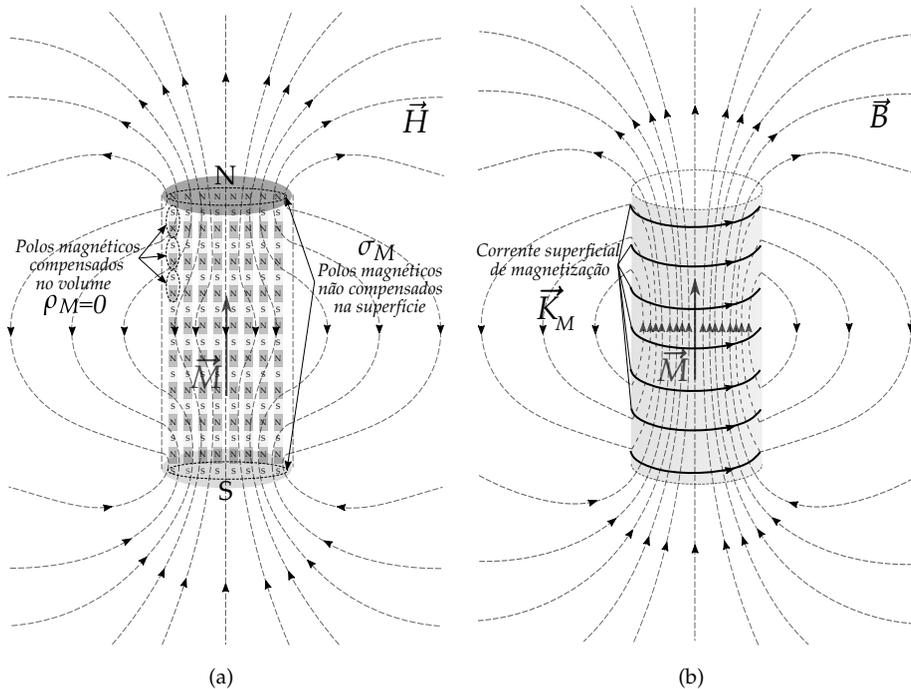
A densidade de polos com sinal positivo, convencionam-se como polo norte, ao passo que a den-

FIGURA 7.2: EM (A), TEMOS O ÍMÃ CILÍNDRICO UNIFORMEMENTE MAGNETIZADO AO LONGO DO EIXO  $z$ . EM (B), UM SOLENOIDE EQUIVALENTE AO ÍMÃ CILÍNDRICO.



sidade com sinal negativo, convencionam-se como polo sul. A magnetização é representada pela coleção de dipolos magnéticos elementares (norte e sul) distribuída no volume do ímã e, pelo fato de ser uniforme, tem todos seus polos adjacentes compensados por terem exatamente a mesma intensidade, mas de sinais opostos. Essa configuração, apresenta compensação no volume do ímã, não gerando densidade volumétrica de polos magnéticos, mas apresenta polos não compensados nas superfícies superior e inferior do ímã. Esses polos não compensados nas superfícies que são responsáveis pelo comportamento do campo magnético  $\vec{H}$ . Note na figura 7.3(a), que as linhas de campo auxiliar  $\vec{H}$  partem do superfície superior (polo norte não compensado), para a superfície inferior do ímã (polo sul não compensado), **em toda extensão do espaço**.

**FIGURA 7.3:** Em (A), TEMOS OS POLOS MAGNÉTICOS NO VOLUME E NAS SUPERFÍCIES DO CILINDRO BEM COMO AS LINHAS DE CAMPO MAGNÉTICO  $\vec{H}$ . Em (B), TEMOS A CORRENTE SUPERFICIAL DE MAGNETIZAÇÃO  $\vec{K}_M$  NA SUPERFÍCIE LATERAL DO CILINDRO MAGNETIZADO E A CONFIGURAÇÃO DE LINHAS DE CAMPO PARA O CAMPO MAGNÉTICO  $\vec{B}$ .



Do ponto de vista do campo magnético  $\vec{B}$ , sua circulação será motivada

pela corrente superficial gerada pela magnetização, **não emergindo ou convergindo** em polo algum. Este campo irá realizar circulações completas em torno de  $\vec{K}_M$  (veja a figura 7.3(b)). A menos que se refira apenas à região do espaço **externa** ao material magnetizado, onde de fato  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ , tendo eles a mesma configuração de linhas de campo, dizer que o campo magnético  $\vec{B}$  “sai” de um polo e “entra” em outro não se mostra uma afirmação coerente com a teoria eletromagnética, pois, como já vimos, campos solenoidais não saem e entram em lugar algum.

De forma resumida, podemos dizer que o campo magnético  $\vec{H}$  é um campo **irrotacional** para objetos apenas magnetizados ( $\vec{J}_l = 0$ ,  $\nabla \times \vec{H} = 0$ ), emergindo ou convergindo em polo magnéticos, ao passo que o campo magnético  $\vec{B}$  é um campo **solenoidal**, completando circulações ao redor das correntes de magnetização.

### 7.3 MEIOS MAGNÉTICOS LINEARES

Há uma classe de materiais magnéticos que respondem de forma linear e isotrópica a campos  $\vec{H}$  aplicados. Esses materiais são denominados de **materiais magnéticos lineares** e sua magnetização é dada por

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}, \quad (7.50)$$

sendo  $\chi_m$  uma constante adimensional denominada de **susceptibilidade magnética** associada ao material em questão. Nestes tipos de materiais, o campo magnético pode ser escrito como

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \chi_m \vec{H}, \quad (7.51)$$

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H}, \quad (7.52)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (7.53)$$

onde percebemos que o campo magnético também responde de forma linear com o campo  $\vec{H}$  aplicado. A constante  $\mu \equiv \mu_0(1 + \chi_m)$  é definida como a **permeabilidade magnética** do meio com  $\mu_0$  sendo a já conhecida permeabilidade magnética do espaço livre, de valor  $4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ .

Na tabela 7.1, apresentamos alguns valores típicos para a susceptibilidade magnética de alguns materiais.

**TABELA 7.1:** SUSCEPTIBILIDADE MAGNÉTICA DE ALGUNS MATERIAIS.

Material	$\chi_m$	Tipo de magnetismo
Água	$-9,1 \times 10^{-6}$	Diamagnética
Bismuto	$-1,6 \times 10^{-6}$	Diamagnética
Chumbo	$-1,8 \times 10^{-5}$	Diamagnética
Prata	$-2,6 \times 10^{-5}$	Diamagnética
Sódio	$7,2 \times 10^{-6}$	Paramagnética
Alumínio	$2,2 \times 10^{-5}$	Paramagnética
Platina	$2,6 \times 10^{-4}$	Paramagnética
Lítio	$1,4 \times 10^{-5}$	Paramagnética

## 7.4 CONDIÇÕES DE CONTORNO

Como consequência das equações fundamentais da magnetostática para o campo magnético, ou seja,  $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$  e  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ , temos que através de interfaces

$$B_1^\perp = B_2^\perp, \tag{7.54}$$

$$\vec{B}_1^\parallel - \vec{B}_2^\parallel = \mu_0 \vec{K} \times \hat{n}, \tag{7.55}$$

sendo  $B^\parallel$  e  $B^\perp$  as componentes paralelas e perpendiculares do campo magnético, respectivamente, calculadas imediatamente acima e abaixo da interface. A equação 7.55 se refere a uma Amperiana perpendicular à densidade superficial de corrente. No caso do campo  $\vec{H}$ ,  $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_l$  e  $\nabla \cdot \vec{H} = -\nabla \cdot \vec{M}$ .

Considere uma curva Amperiana de formato retangular de largura  $L$  e altura  $h$  com metade de sua área acima de uma interface com densidade superficial de corrente livre  $\vec{K}_l$  e a outra metade abaixo desta interface (veja figura 7.4).

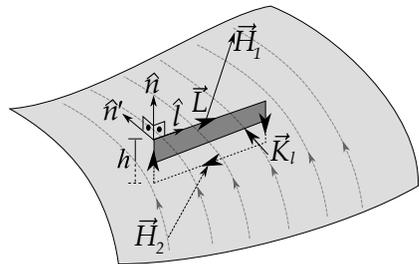
O versor  $\hat{n}'$  representa a direção perpendicular à área da Amperiana (tangencial à interface) e o versor  $\hat{n}$  representa a direção perpendicular à interface. Desta forma, podemos afirmar que

$$\hat{n}' = \hat{n} \times \hat{L} \tag{7.56}$$

com  $\hat{L}$  sendo um versor na direção do segmento da Amperiana. A densidade superficial de corrente livre  $\vec{K}_l$  que penetra na área retangular da Amperiana definindo assim uma corrente encerrada dada por  $\vec{K}_l \cdot \hat{n}' L$ . No limite  $h \rightarrow 0$ , a circulação será dada apenas pelo produto escalar dos campos  $\vec{H}_1$  e  $\vec{H}_2$  nos segmentos da Amperiana imediatamente acima e abaixo da interface, ou seja, aplicando a equação 7.21, temos

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = I_{enc}^l, \tag{7.57}$$

**FIGURA 7.4:** INTERFACE COM DENSIDADE SUPERFICIAL DE CORRENTE LIVRE  $\vec{K}_l$ . UMA CURVA AMPERIANA  $C$  EM FORMATO RETANGULAR DE LARGURA  $L$  PARA CÁLCULO DA CIRCULAÇÃO DE  $\vec{H}$ . OS VETORES  $\vec{H}_1$  E  $\vec{H}_2$  REPRESENTAM OS CAMPOS  $\vec{H}$  IMEDIATAMENTE ACIMA E ABAIXO DA INTERFACE, RESPECTIVAMENTE, QUANDO TOMAMOS O LIMITE  $h \rightarrow 0$ .



$$\vec{H}_1 \cdot \vec{L} - \vec{H}_2 \cdot \vec{L} = (\vec{K}_l \cdot \hat{n}')L. \tag{7.58}$$

Usando a relação entre os versores da equação 7.56, temos que

$$\vec{H}_1 \cdot \vec{L} - \vec{H}_2 \cdot \vec{L} = \vec{K}_l \cdot (\hat{n} \times \hat{L})L, \tag{7.59}$$

$$(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \cdot \vec{L} = (\vec{K}_l \times \hat{n}) \cdot \vec{L}, \tag{7.60}$$

$$\boxed{\vec{H}_1^\parallel - \vec{H}_2^\parallel = \vec{K}_l \times \hat{n}}, \tag{7.61}$$

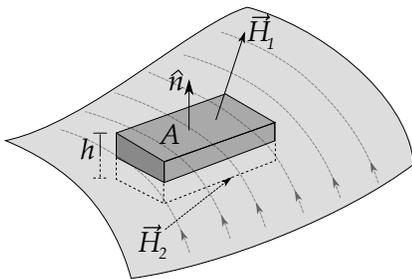
com  $\hat{n}$  sendo o versor normal a superfície.

Por outro lado, usando o fato que  $\nabla \cdot \vec{H} = -\nabla \cdot \vec{M}$ , o teorema de Gauss garante que

$$\iiint_V (\nabla \cdot \vec{H})d\tau = \iiint_V (-\nabla \cdot \vec{M})d\tau, \tag{7.62}$$

$$\oiint_S \vec{H} \cdot \hat{n}da = -\oiint_S \vec{M} \cdot \hat{n}da. \tag{7.63}$$

**FIGURA 7.5:** VOLUME ESCOLHIDO PARA O CÁLCULO DAS INTEGRAIS DAS DIVERGÊNCIAS  $\vec{H}$  E  $\vec{M}$ . OS VETORES  $\vec{H}_1$  E  $\vec{H}_2$  REPRESENTAM OS CAMPOS IMEDIATAMENTE ACIMA E ABAIXO DA INTERFACE, RESPECTIVAMENTE.



Escolhendo um volume com formato de uma “caixa de pílulas” de espessura muito pequena (veja a figura 7.5), a integral nas superfícies acima e abaixo da interface para  $\vec{H}$  e para  $\vec{M}$ , no limite  $h \rightarrow 0$ , conduz ao seguinte cálculo,

$$\vec{H}_1 \cdot \hat{n}A - \vec{H}_2 \cdot \hat{n}A = -(\vec{M}_1 \cdot \hat{n}A + \vec{M}_2 \cdot \hat{n}A), \tag{7.64}$$

$$\boxed{H_1^\perp - H_2^\perp = -\left(M_1^\perp - M_2^\perp\right)}. \tag{7.65}$$

Para meios magnéticos lineares,  $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ , o que permite escrever

$$H_1^\perp - H_2^\perp = -\left(\chi_{m1}H_1^\perp - \chi_{m2}H_2^\perp\right), \tag{7.66}$$

$$H_1^\perp + \chi_{m1}H_1^\perp = H_2^\perp + \chi_{m2}H_2^\perp, \tag{7.67}$$

$$(1 + \chi_{m1})H_1^\perp = (1 + \chi_{m2})H_2^\perp, \quad (7.68)$$

e se  $\nabla \times \vec{H} = \vec{0}$ ,

$$\boxed{\mu_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial n}}. \quad (7.69)$$

Um outro resultado interessante para meios magnéticos lineares e homogêneos é o fato que a densidade volumétrica de corrente de polarização depende linearmente da densidade volumétrica de correntes livres, ou seja,

$$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M} = \nabla \times (\chi_m \vec{H}), \quad (7.70)$$

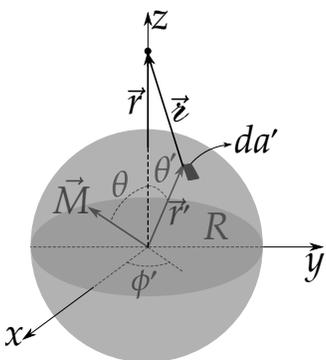
$$\vec{J}_M = \chi_m \vec{J}_l, \quad (7.71)$$

Isto indica que, se não há densidade volumétrica de correntes livres, não haverá também densidade volumétrica de correntes de magnetização, isto é, toda corrente de magnetização, se houver, será superficial.

**EXEMPLO 7.1.** Encontre o potencial vetor magnético e o campo magnético produzidos por uma esfera uniformemente magnetizada de raio  $R$  dentro e fora desta esfera.

**SOLUÇÃO 1:** Para facilitar o cálculo e nossa visualização do problema, vamos supor que a magnetização da esfera se encontra no plano  $x$ - $z$  fazendo um ângulo  $\theta$  com o eixo  $z$  (veja a figura a 7.6 seguir).

**FIGURA 7.6:** REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DE UMA ESFERA UNIFORMEMENTE MAGNETIZADA. O VETOR MAGNETIZAÇÃO APONTA NA DIREÇÃO DEFINIDA PELO ÂNGULO  $\theta$  ENTRE  $\vec{M}$  E  $\hat{z}$  NO PLANO  $x$ - $z$ .



Sendo assim, a magnetização é escrita como sendo

$$\vec{M} = M (\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{z}). \tag{7.72}$$

O elemento de área em coordenadas esféricas é dado por  $da' = R^2 \sin \theta' d\theta' d\phi'$  com

$$\vec{r}' = R [\sin \theta' \cos \phi' \hat{x} + \sin \theta' \sin \phi' \hat{y} + \cos \theta' \hat{z}]. \tag{7.73}$$

Escolhendo o vetor posição  $\vec{r}$  na direção  $z$ , ou seja,  $\vec{r} = r\hat{z}$ , a lei dos cossenos garante que  $r = \sqrt{R^2 + r'^2 - 2Rr' \cos \theta'}$ . Calculando as densidades volumétricas e superficiais de corrente de magnetização, temos

$$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M} = 0, \tag{7.74}$$

$$\vec{K}_M = \vec{M} \times \hat{n} = M (\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{z}) \times \vec{r}', \tag{7.75}$$

$$\vec{K}_M = M (\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{z}) \times (\sin \theta' \cos \phi' \hat{x} + \sin \theta' \sin \phi' \hat{y} + \cos \theta' \hat{z}), \tag{7.76}$$

$$\vec{K}_M = M [-(\cos \theta \sin \theta' \sin \phi') \hat{x} + (\cos \theta \sin \theta' \cos \phi' - \sin \theta \cos \theta') \hat{y} + (\sin \theta \sin \theta' \sin \phi') \hat{z}]. \tag{7.77}$$

Note que todos os termos, exceto o termo  $(-\sin \theta \cos \theta') \hat{y}$ , contém  $\sin \phi'$  ou  $\cos \phi'$ . Substituindo  $\vec{K}_M$  na equação 7.15, para calcular o potencial vetor mag-

nético do problema, a integral na coordenada azimutal  $\phi'$  anula todos os termos, exceto o termo citado, visto que

$$\int_0^{2\pi} \cos \phi' d\phi' = \int_0^{2\pi} \sin \phi' d\phi' = 0. \quad (7.78)$$

Desta forma, ficamos apenas com a integral

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{MR^2 \sin \theta \cos \theta' \sin \theta' d\theta' d\phi'}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta'}} \hat{y}, \quad (7.79)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 MR^2 \sin \theta}{2} \int_0^\pi \frac{\cos \theta' \sin \theta' d\theta'}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta'}}. \quad (7.80)$$

Esta integral está resolvida em detalhes no apêndice B.1, e vale

$$\int_0^\pi \frac{\cos \theta' \sin \theta' d\theta'}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta'}} = \begin{cases} \frac{2r}{3R^2}, & r \leq R \\ \frac{2R}{3r^2}, & r \geq R. \end{cases} \quad (7.81)$$

Sendo assim, o potencial vetor magnético será expresso por

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{\mu_0 MR^2 \sin \theta}{2} \frac{2r}{3R^2} \hat{y}, & r \leq R \\ -\frac{\mu_0 MR^2 \sin \theta}{2} \frac{2R}{3r^2} \hat{y}, & r \geq R. \end{cases} \quad (7.82)$$

Perceba que  $-Mr \sin \theta \hat{y} = M(\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{z}) \times r\hat{z} = \vec{M} \times \vec{r}$ , portanto, o potencial vetor magnético pode ser escrito de forma geral

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0}{3} (\vec{M} \times \vec{r}), & r \leq R \\ \frac{\mu_0 R^3}{3} \frac{(\vec{M} \times \vec{r})}{r^3}, & r \geq R. \end{cases} \quad (7.83)$$

Vamos agora fazer a magnetização apontar na direção  $\hat{z}$  e deixar o vetor posição  $\vec{r}$  numa direção arbitrária. Desta forma,  $\vec{M} = M\hat{z}$  e  $\vec{r} = r\hat{r}$ ,  $\vec{M} \times \vec{r} = Mr \hat{z} \times \hat{r} = Mr \sin \theta \hat{\phi}$ . O potencial vetor magnético nesta nova configuração fica igual a

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 M}{3} r \sin \theta \hat{\phi}, & r \leq R \\ \frac{\mu_0 R^3}{3} \frac{M \sin \theta}{r^2} \hat{\phi}, & r \geq R. \end{cases} \quad (7.84)$$

Podemos agora calcular o campo magnético através de  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ . Em coordenadas esféricas, o rotacional de um campo vetorial  $\vec{A}$  é dado por

$$\vec{B} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{\phi}. \quad (7.85)$$

Nosso potencial vetor magnético possui apenas componente  $A_\phi \neq 0$ , então,

$$\vec{B} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \hat{\theta}. \quad (7.86)$$

Para  $r < R$ ,

$$\vec{B} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\mu_0 M}{3} r \sin^2 \theta \right) \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\mu_0 M}{3} r^2 \sin \theta \right) \hat{\theta}, \quad (7.87)$$

$$\vec{B} = \frac{2\mu_0 M}{3} (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}), \quad (7.88)$$

$$\vec{B} = \frac{2\mu_0}{3} \vec{M}, \quad (7.89)$$

onde usamos o fato que  $\hat{z} = \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}$ . Isto mostra que o campo magnético no interior da esfera uniformemente magnetizada é **uniforme**. Para  $r > R$ ,

$$\vec{B} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\mu_0 R^3}{3} \frac{M \sin^2 \theta}{r^2} \right) \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\mu_0 R^3}{3} \frac{M \sin \theta}{r} \right) \hat{\theta}, \quad (7.90)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 R^3 M}{3} \frac{1}{r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}). \quad (7.91)$$

Este último resultado indica que fora da esfera magnetizada o campo magnético é típico de **dipolo magnético puro**. Perceba que o momento de dipolo  $\vec{m}$  para a esfera é dado por

$$\vec{m} = \vec{M} \frac{4\pi R^3}{3}, \quad (7.92)$$

e que

$$\sin \theta \hat{\theta} = \cos \theta \hat{r} - \hat{z}. \quad (7.93)$$

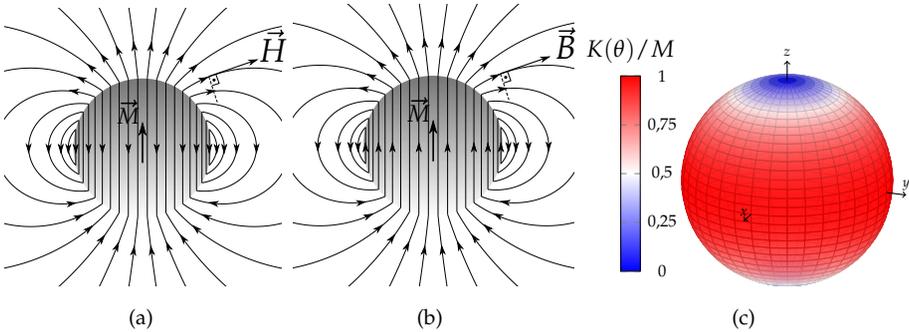
Desta forma, a equação 7.91 se torna

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{r^3} (3 \cos \theta \hat{r} - \hat{z}), \quad (7.94)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} [3(\vec{m} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{m}], \quad (7.95)$$

que é exatamente o campo magnético devido a um dipolo de momento igual a  $\vec{m}$  localizado na origem do sistema de coordenadas. Na figura 7.7, são apresentados os gráficos das linhas de campo magnético  $\vec{B}$  e  $\vec{H}$  dentro e fora da esfera uniformemente magnetizada.

**FIGURA 7.7:** EM (A) E EM (B) TEMOS, RESPECTIVAMENTE, AS CONFIGURAÇÃO DE LINHAS DE CAMPO MAGNÉTICO FORA E DENTRO DA ESFERA MAGNETIZADA. EM (C), TEMOS UMA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA TRIDIMENSIONAL PARA A DENSIDADE SUPERFICIAL DE CORRENTE DE MAGNETIZAÇÃO (EM  $K_M/M$ ) NA SUPERFÍCIE DA ESFERA UNIFORMEMENTE MAGNETIZADA COM CÓDIGO DE CORES. OS ANÉIS REPRESENTAM A CIRCULAÇÃO DAS CORRENTE DE MAGNETIZAÇÃO NA SUPERFÍCIE COM INTENSIDADE MÍNIMA NOS POLOS E INTENSIDADE MÁXIMA NA LINHA EQUATORIAL DA ESFERA.



Vale reconhecer que o resultado para a esfera uniformemente magnetizada é perfeitamente análogo ao caso dinâmico de uma casca esférica com densidade superficial de carga  $\sigma$  girando com velocidade  $\vec{\omega}$  em torno de seu eixo. Considerando  $\vec{\omega}$  na direção  $\hat{z}$ , a densidade superficial de corrente neste caso seria igual a

$$\vec{K} = \sigma \vec{v} \quad (7.96)$$

com  $\vec{v}$  sendo a velocidade linear na superfície da esfera girante. Como  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}\hat{r} = \omega R \sin \theta \hat{\phi}$ , temos que

$$\vec{K} = \sigma \omega R \sin \theta \hat{\phi}. \quad (7.97)$$

No caso da esfera uniformemente magnetizada, temos que

$$\vec{K}_M = M \sin \theta \hat{\phi}. \quad (7.98)$$

Na figura 7.7(c), temos uma representação gráfica em mapa de cores para a densidade superficial de corrente de magnetização. Note a maior intensidade na linha equatorial da esfera e a menor intensidade nos polos

**SOLUÇÃO 2:** Vamos recorrer agora a outra forma de resolver o exemplo proposto já assumindo que a magnetização aponta na direção  $z$ , ou seja,  $\vec{M} = M \hat{z}$ . Neste caso, o problema terá simetria azimutal e o potencial escalar magnético será só função de  $r$  e  $\theta$ , ou seja,  $\psi = \psi(r, \theta)$ . Vamos atribuir o índice 1 ao meio interno à esfera e o índice 2 ao meio externo à esfera (vácuo). Considerando isto, as condições de contorno para  $\psi$  e  $\vec{H}$  serão (com  $\vec{K}_l = 0$ , veja a equação 7.65)

$$\lim_{r \rightarrow R} \psi_1 = \lim_{r \rightarrow R} \psi_2, \quad (7.99)$$

$$\lim_{r \rightarrow R} (H_1^\perp - H_2^\perp) = - (M_1^\perp - M_2^\perp), \quad (7.100)$$

$$\lim_{r \rightarrow R} (H_1^\perp - H_2^\perp) = -M \cos \theta, \quad (7.101)$$

que em termos do potencial escalar magnético será

$$\lim_{r \rightarrow R} \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial r} - \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \right) = M \cos \theta. \quad (7.102)$$

Note que  $\sigma_M = M \cos \theta$  é a densidade superficial de polos magnéticos na esfera. Como não há densidade de correntes livres, o potencial escalar magnético obedece à equação de Laplace,  $\nabla^2 \psi = 0$ . Podemos então atacar o problema através da solução da equação de Laplace em coordenadas esféricas com simetria azimutal,

$$\psi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta), \quad (7.103)$$

Sabendo que o potencial escalar deve ser finito, para  $r \leq R$ , temos que  $B_l = 0$  para todo  $l$ , ou seja, para região interna à esfera

$$\psi_1(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta). \quad (7.104)$$

Para  $r \geq R$ , temos que  $B_l = 0$  para todo  $l$ , ou seja, para região externa à esfera

$$\psi_2(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta). \quad (7.105)$$

Aplicando a condição de continuidade do potencial escalar,

$$\lim_{r \rightarrow R} \psi_1 = \lim_{r \rightarrow R} \psi_2, \quad (7.106)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos \theta), \quad (7.107)$$

$$B_l = A_l R^{2l+1}. \quad (7.108)$$

Aplicando a equação de descontinuidade da componente normal do campo  $\vec{H}$  através da interface,

$$\lim_{r \rightarrow R} \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial r} - \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \right) = M \cos \theta. \quad (7.109)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l l R^{l-1} P_l(\cos \theta) - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{-(l+1)B_l}{R^{l+2}} P_l(\cos \theta) = M \cos \theta, \quad (7.110)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l l R^{l-1} P_l(\cos \theta) - \sum_{l=0}^{\infty} -(l+1)A_l R^{l-1} P_l(\cos \theta) = M \cos \theta, \quad (7.111)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)A_l R^{l-1} P_l(\cos \theta) = M \cos \theta, \quad (7.112)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)A_l R^{l-1} P_l(\cos \theta) = M P_1(\cos \theta), \quad (7.113)$$

o que nos faz concluir que

$$A_l = \begin{cases} 0, & l \neq 1 \\ \frac{M}{3}, & l = 1. \end{cases} \quad (7.114)$$

Portanto, somente  $A_1 = M/3$  é o termo não nulo da série do potencial elétrico. Usando a equação 7.108, temos que

$$B_l = \begin{cases} 0, & l \neq 1 \\ \frac{MR^3}{3}, & l = 1. \end{cases} \quad (7.115)$$

Logo, a solução para o potencial escalar magnético, via solução da equação de Laplace, devido a uma esfera uniformemente magnetizada ao longo da direção  $z$ , é

$$\psi(r, \theta) = \begin{cases} \frac{M}{3} r \cos \theta, & r \leq R \\ \frac{MR^3}{3} \frac{\cos \theta}{r^2}, & r \geq R. \end{cases} \quad (7.116)$$

Calculando agora o campo  $\vec{H} = -\nabla\psi$ ,

$$\vec{H}(r, \theta) = \begin{cases} -\frac{M}{3} \hat{z}, & r < R \\ \frac{MR^3}{3} \frac{1}{r^3} [2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}], & r > R \end{cases} \quad (7.117)$$

e usando a relação  $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ , o campo magnético será

$$\vec{B}(r, \theta) = \begin{cases} \frac{2\mu_0 M}{3} \hat{z}, & r < R \\ \mu_0 \frac{MR^3}{3} \frac{1}{r^3} [2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}], & r > R. \end{cases} \quad (7.118)$$

**EXEMPLO 7.2.** Uma esfera de raio  $R$  de material magnético linear e homogêneo de permeabilidade magnética  $\mu$  é colocada em região com campo  $\vec{H}_0 = H_0 \hat{z}$  inicialmente uniforme. Encontre os campos  $\vec{H}$  e  $\vec{B}$  dentro e fora da esfera magnética após a inserção dela no referido campo.

**SOLUÇÃO:** Como não há densidade volumétrica de correntes livres, temos que  $\vec{j}_l = 0$ . Logo, podemos resolver usando  $\nabla^2 \psi = 0$  através do conceito de potencial escalar magnético. O problema possui simetria esférica azimutal. Podemos então usar a solução geral da equação de Laplace

$$\psi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta). \quad (7.119)$$

Os coeficientes  $A_l$ s e  $B_l$ s são determinados obedecendo às seguintes condições de contorno:

- (i)  $\psi_{dentro} = \psi_{fora}$ , em  $r = R$  (interface)
- (ii)  $\mu_0 \frac{\partial \psi_{fora}}{\partial r} = \mu \frac{\partial \psi_{dentro}}{\partial r}$ , em  $r \rightarrow R$  (interface)
- (iii)  $\psi_{fora} \rightarrow -H_0 r \cos \theta$ , para  $r \gg R$  (potencial escalar magnético de campo uniforme)

Para fora, o potencial escalar magnético deve ser finito e deve obedecer ao item (iii), ou seja, todos os  $A_l$ s são nulos, exceto  $A_1 = -H_0$ . Podemos escrever que

$$\psi_{fora}(r, \theta) = -H_0 r \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta). \quad (7.120)$$

Para dentro, o potencial escalar magnético também deve ser finito, o que faz com que todos os  $B_l$ s sejam nulos, ou seja,

$$\psi_{dentro}(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta). \quad (7.121)$$

Aplicando a condição (i), temos

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos \theta) = -H_0 R \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta), \quad (7.122)$$

que conduz às seguintes equações:

$$\begin{cases} A_l R^l = -H_0 R + \frac{B_l}{R^{l+1}}, & l = 1 \\ A_l R^l = \frac{B_l}{R^{l+1}}, & l \neq 1 \end{cases}. \quad (7.123)$$

Aplicando a condição (ii), temos

$$\mu \sum_{l=0}^{\infty} A_l l R^{l-1} P_l(\cos \theta) = \mu_0 \left[ -H_0 \cos \theta - \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) \frac{B_l}{R^{l+2}} P_l(\cos \theta) \right], \quad (7.124)$$

que conduz às seguintes equações

$$\begin{cases} \mu A_l l R^{l-1} = -\mu_0 H_0 - \mu_0 (l+1) \frac{B_l}{R^{l+2}}, & l = 1 \\ \mu A_l l R^{l-1} = -\mu_0 (l+1) \frac{B_l}{R^{l+2}}, & l \neq 1 \end{cases}. \quad (7.125)$$

Para  $l \neq 1$ , temos da condição (i) que  $B_l = A_l R^{2l+1}$  e da condição (ii) que  $B_l = -\frac{\mu A_l l R^{2l+1}}{\mu_0 (l+1)}$ . Estas equações só são compatíveis se  $B_l = A_l = 0$  para  $l \neq 1$ . Para  $l = 1$ , resta-nos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} A_1 R = -H_0 R + \frac{B_1}{R^2} \\ \mu A_1 = -\mu_0 H_0 - \mu_0 \frac{2B_1}{R^3} \end{cases}, \quad (7.126)$$

que possui as seguintes soluções para  $A_1$  e  $B_1$ :

$$A_1 = -\frac{3\mu_0}{\mu + 2\mu_0} H_0, \quad (7.127)$$

$$B_1 = \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} R^3 H_0. \quad (7.128)$$

Podemos agora escrever a solução para o potencial escalar magnético que obedece a todas as condições de contorno do problema, isto é,

$$\psi(r, \theta) = \begin{cases} -H_0 r \cos \theta + \frac{(\mu - \mu_0) R^3 H_0 \cos \theta}{\mu + 2\mu_0} \frac{1}{r^2}, & r \geq R \\ -\frac{3\mu_0 H_0}{\mu + 2\mu_0} r \cos \theta, & r \leq R \end{cases}. \quad (7.129)$$

Calculando agora o campo  $\vec{H} = -\nabla\psi$ ,

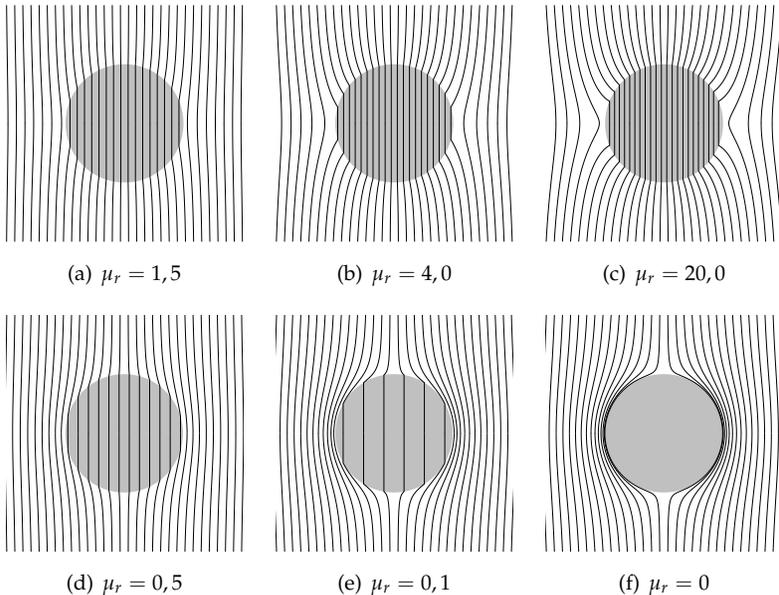
$$\vec{H}(r, \theta) = \begin{cases} H_0 \hat{z} + \frac{(\mu - \mu_0) R^3 H_0}{\mu + 2\mu_0} \frac{1}{r^3} [2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}], & r > R \\ \frac{3\mu_0}{\mu + 2\mu_0} H_0 \hat{z}, & r < R \end{cases} \quad (7.130)$$

e usando as relações  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$  para  $r > R$  e  $\vec{B} = \mu \vec{H}$  para  $r < R$  com  $B_0 = \mu_0 H_0$ , o campo magnético é dado por

$$\vec{B}(r, \theta) = \begin{cases} B_0 \hat{z} + \frac{(\mu - \mu_0) R^3 B_0}{\mu + 2\mu_0} \frac{1}{r^3} [2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}], & r > R \\ \frac{3\mu}{\mu + 2\mu_0} B_0 \hat{z}, & r < R. \end{cases} \quad (7.131)$$

onde percebemos que no interior da esfera magnética o campo  $\vec{B}$  é **uniforme**. Já no exterior, temos a superposição do campo magnético uniforme aplicado com um campo magnético típico de **dipolo puro**. Na figura 7.8, estão apresentados os resultados gráficos para as linhas de campo magnético em várias configurações diferentes para o valor da permeabilidade relativa  $\mu_r = \mu / \mu_0$ .

**FIGURA 7.8:** CONFIGURAÇÃO DE LINHAS DE CAMPO MAGNÉTICO PARA A ESFERA MAGNÉTICA POSTA EM CAMPO MAGNÉTICO INICIALMENTE UNIFORME. PARA (A), (B) E (C), TEMOS OS CASOS COM  $\mu_r = \mu / \mu_0 > 1$ , CONFIGURANDO O PARAMAGNETISMO OU FERROMAGNETISMO PARA BAIXOS CAMPOS. PARA (D), (E) E (F), TEMOS OS CASOS COM  $\mu_r < 1$ , CONFIGURANDO O DIAMAGNETISMO.



Em especial, para materiais que apresentam o valor de  $\mu_r$  próximo de zero, o campo magnético é quase blindado ou totalmente blindado no interior do

material. Isto acontece no chamado efeito Meissner com supercondutores diamagnéticos.

A magnetização adquirida pela esfera é expressa por

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}, \quad (7.132)$$

$$\vec{M} = \chi_m \frac{3\mu_0}{\mu + 2\mu_0} H_0 \hat{z}, \quad (7.133)$$

$$\vec{M} = \frac{3(\mu - \mu_0)}{\mu + 2\mu_0} H_0 \hat{z}, \quad (7.134)$$

com densidade superficial de corrente de magnetização

$$\vec{K}_M = \vec{M} \times \hat{r}, \quad (7.135)$$

$$\vec{K}_M = \frac{3(\mu - \mu_0)}{\mu + 2\mu_0} H_0 \hat{z} \times \hat{r}, \quad (7.136)$$

$$\boxed{\vec{K}_M = \frac{3(\mu - \mu_0)}{\mu + 2\mu_0} H_0 \sin \theta \hat{\phi}}. \quad (7.137)$$

# 8

## ENERGIA EM MATERIAIS MAGNÉTICOS

Vamos agora abordar os conceitos de energia potencial magnetostática e força em materiais magnéticos. Recordemos a expressão para a energia potencial magnetostática de uma configuração volumétrica de correntes  $\vec{J}$ , isto é,

$$U_m = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{V}} \vec{J}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r}) d\tau, \quad (8.1)$$

sendo  $\vec{A}$  o potencial vetor magnético. A partir desta última equação, mostramos que a energia magnetostática pode ser calculada integrando-se a densidade volumétrica de energia  $B^2/2\mu_0$  sobre todo o espaço, ou seja,

$$U_m = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\mathcal{V}} B^2 d\tau, \quad (8.2)$$

que continua sendo válida para qualquer sistema magnetostático.

Como já vimos, materiais magnetizados são modelados através da conjectura de Ampère apresentando correntes superficiais e volumétricas de magnetização. Vamos então calcular, separadamente, as contribuições para energia magnetostática da densidade volumétrica de correntes livres  $\vec{J}_l$  bem como das densidade volumétrica de correntes ( $\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}$ ) e superficiais ( $\vec{K}_M = \vec{M} \times \hat{n}$ ) de magnetização. Portanto, a energia magnetostática de um sistema magnético será calculada mediante todas as contribuições,

$$U_m = \frac{1}{2} \oint_S \vec{K}_M \cdot \vec{A} da + \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{V}} \vec{J}_M \cdot \vec{A} d\tau + \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{V}} \vec{J}_l \cdot \vec{A} d\tau, \quad (8.3)$$

Vamos definir as quantidades para energia magnetostática associadas às correntes livres  $U_{ml}$  e correntes de magnetização  $U_{mag}$  da seguinte forma:

$$U_{ml} \equiv \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{V}} \vec{J}_l \cdot \vec{A} d\tau, \quad (8.4)$$

$$U_{mag} \equiv \frac{1}{2} \oiint_S \vec{K}_M \cdot \vec{A} da + \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{V}} \vec{J}_M \cdot \vec{A} d\tau. \quad (8.5)$$

Vamos calcular primeiro  $U_{ml}$ . A lei de Ampère para  $\vec{H}$  em um material magnetizado finito de volume  $\mathcal{V}$  permite escrever que

$$U_{ml} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{V}} (\nabla \times \vec{H}) \cdot \vec{A} d\tau. \quad (8.6)$$

Usando a regra do produto  $\nabla \cdot (\vec{H} \times \vec{A}) = \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{A})$  na integral, temos

$$U_{ml} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\vec{H} \times \vec{A}) d\tau + \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{V}} \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{A}) d\tau. \quad (8.7)$$

Na primeira integral, podemos aplicar o teorema da divergência de Gauss e, na segunda integral, podemos usar  $\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$ , obtendo

$$U_{ml} = \frac{1}{2} \oiint_S (\vec{H} \times \vec{A}) \cdot \hat{n} da + \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{V}} \vec{H} \cdot \vec{B} d\tau, \quad (8.8)$$

sendo  $S$  a superfície que contorna o volume  $\mathcal{V}$  que contém a distribuição volumétrica de corrente. Esta nova abordagem permite escolhermos qualquer superfície  $S$ , desde que englobe toda a distribuição de corrente livre. Se escolhermos uma superfície esférica de raio  $R$  e tomarmos o limite de  $R \rightarrow \infty$ , o potencial vetor magnético  $\vec{A}(\infty)$  se anula. Logo, a energia magnetostática seria dada apenas pela segunda integral, visto que o integrando da primeira seria nulo, ou seja,

$$U_{ml} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{V}} \vec{H} \cdot \vec{B} d\tau, \quad (8.9)$$

com a integral no volume  $\mathcal{V}$  varrendo **todo espaço**. Para um meio magnético linear,  $\vec{B} = \mu\vec{H}$ , de tal maneira que podemos definir a densidade volumétrica de energia magnetostática  $u_m = B^2/2\mu$ . Esta última integral calcula a energia magnetostática associada à distribuição volumétrica de corrente livre.

Vamos calcular agora a  $U_{mag}$ . Usando as equações  $\vec{K}_M = \vec{M} \times \hat{n}$  e  $\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}$  e aplicando o teorema da divergência na primeira integral, temos

$$U_{mag} = \frac{1}{2} \oint_S \vec{K}_M \cdot \vec{A} da + \frac{1}{2} \iiint_V \vec{J}_M \cdot \vec{A} d\tau, \quad (8.10)$$

$$U_{mag} = \frac{1}{2} \oint_S (\vec{M} \times \hat{n}) \cdot \vec{A} da + \frac{1}{2} \iiint_V (\nabla \times \vec{M}) \cdot \vec{A} d\tau, \quad (8.11)$$

e usando novamente identidade vetorial  $\nabla \cdot (\vec{M} \times \vec{A}) = \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{M}) - \vec{M} \cdot (\nabla \times \vec{A})$  e  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ ,

$$U_{mag} = \frac{1}{2} \oint_S (\vec{M} \times \hat{n}) \cdot \vec{A} da + \frac{1}{2} \iiint_V \nabla \cdot (\vec{M} \times \vec{A}) d\tau + \frac{1}{2} \iiint_V \vec{M} \cdot \vec{B} d\tau, \quad (8.12)$$

$$U_{mag} = -\frac{1}{2} \oint_S (\vec{M} \times \vec{A}) \cdot \hat{n} da + \frac{1}{2} \iiint_V \nabla \cdot (\vec{M} \times \vec{A}) d\tau + \frac{1}{2} \iiint_V \vec{M} \cdot \vec{B} d\tau, \quad (8.13)$$

$$U_{mag} = \cancel{-\frac{1}{2} \iiint_V \nabla \cdot (\vec{M} \times \vec{A}) d\tau} + \frac{1}{2} \iiint_V \nabla \cdot (\vec{M} \times \vec{A}) d\tau + \frac{1}{2} \iiint_V \vec{M} \cdot \vec{B} d\tau, \quad (8.14)$$

$$\boxed{U_{mag} = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{M} \cdot \vec{B} d\tau}, \quad (8.15)$$

com a integral no volume  $\mathcal{V}$  varrendo **todo o material magnetizado**. Esta integral calcula a energia magnetostática para um material magnetizado associada às correntes de magnetização.

Até o momento, fizemos uma descrição das energias magnetostáticas associadas às distribuições de correntes, sejam elas livres ou de magnetização. Esta quantidade não pode ser confundida com o **trabalho realizado** para se alcançar a configuração de correntes do problema. Não podemos dizer, por exemplo, que a energia  $U_{mag}$ , calculada na equação 8.15, representa o trabalho realizado para se magnetizar um objeto a um estado de magnetização  $\vec{M}$  submetido a um campo magnético  $\vec{B}$ . No processo de magnetização, não há somente processos termodinâmicos **reversíveis**, mas também há processos termodinâmicos **irreversíveis**. As energias magnetostáticas  $U_{ml}$  e  $U_{mag}$ , calculadas anteriormente, são energias potenciais no sentido de que elas dependem apenas da configuração das distribuições de correntes no espaço, face ao potencial vetor magnético  $\vec{A}$ . Apresentamos os cálculos para estas energias e não entramos em detalhes de como o sistema magnético acessou a configuração de magnetização.

Do ponto de vista microscópico, o processo de magnetização em um material pode estar associado a várias formas de energia que dependem exatamente do processo que foi executado. Apenas para citar uma dessas formas de energia, temos a energia dispendida em forma de calor quando os dipolos magnéticos induzidos “se atritam” no material magnético, isto é, no processo de magnetização, o material magnetizado pode variar sua temperatura. Nos materiais **ferromagnéticos**, por exemplo, mesmo após um campo magnético indutor ser desligado, estes materiais apresentam, em determinada temperatura, o que chamamos de **magnetização remanente**, permanecendo magnetizados de forma espontânea. É o caso da esfera magnetizada uniformemente do exemplo 7.1. A esfera possui magnetização espontânea, sem a necessidade da manutenção de um campo magnético externo. Neste caso, para magnetizar a esfera ferromagnética, o trabalho realizado para se atingir esta configuração **não é igual** à energia magnetostática associada às correntes de magnetização adquiridas pela esfera. Para se ter uma descrição detalhada do trabalho realizado no processo, devemos estudar o diagrama termodinâmico  $M-H$ . Neste diagrama, para ferromagnetos, percebe-se que não há uma relação **unívoca** entre o campo magnético  $\vec{H}$  e magnetização  $\vec{M}$ , isto é, não existe somente um único estado de magnetização  $\vec{M}$  para um campo magnético  $\vec{H}$ . Este comportamento não unívoco no diagrama  $M-H$  mostra que existe uma **histerese magnética**.

Para um material magnético linear, quando submetido a um campo magnético  $\vec{H}$ , o material irá se comportar de forma **unívoca**, ou seja, o estado de magnetização será atingido única e exclusivamente por processos reversíveis. Consequentemente, o trabalho realizado para magnetizar o material será igual à energia magnetostática do sistema. Isto acontece em materiais **paramagnéticos** sob regime de baixos campos. No exemplo 7.2, o trabalho necessário para magnetizar a esfera de material linear será igual à energia magnetostática devida às correntes de magnetização, e calculada através da equação 8.15, uma vez que não há cargas livres, neste caso. Para abordarmos de forma quantitativa o cálculo de energia magnetostática em materiais magnetizados, vamos usar o exemplo a seguir.

**EXEMPLO 8.1.** Calcule a energia magnetostática para esfera ferromagnética uniformemente magnetizada do exemplo 7.1.

**SOLUÇÃO:** A energia magnetostática  $U_m$  pode ser calculada usando a expressão 8.1. Usando o resultado para o campo magnético obtido no exemplo 7.1, temos

$$B^2 = \begin{cases} \frac{M^2 \mu_0^2 R^6}{3^2 r^6} [4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta], & r > R \\ \frac{2^2 M^2 \mu_0^2}{3^2}, & r < R, \end{cases} \quad (8.16)$$

de tal forma que

$$U_m = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\mathcal{V}} B^2 d\tau \quad (8.17)$$

$$U_m = \frac{1}{2\mu_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \frac{2^2 M^2 \mu_0^2}{3^2} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \\ + \frac{1}{2\mu_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_R^\infty \frac{M^2 \mu_0^2 R^6}{3^2 r^6} [4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta] r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi, \quad (8.18)$$

$$U_m = \frac{8\pi}{\mu_0} \frac{M^2 \mu_0^2}{3^2} \int_0^R r^2 dr + \frac{\pi}{\mu_0} \frac{M^2 R^6 \mu_0^2}{3^2} \underbrace{\int_0^\pi [3 \cos^2 \theta + 1] \sin \theta d\theta}_4 \underbrace{\int_R^\infty \frac{dr}{r^4}}_{1/3R^3} dr, \quad (8.19)$$

$$U_m = \frac{8\pi\mu_0 M^2}{3^3 R^3} + \frac{4\pi\mu_0 M^2}{3^3 R^3}, \quad (8.20)$$

$$\boxed{U_m = \frac{4\pi\mu_0 M^2}{9R^3}}. \quad (8.21)$$

É importante frisar que, neste caso, o cálculo da energia magnetostática através da expressão 8.9  $U_{ml}$  resultará em **zero**. Isto pelo fato de que não há correntes livres neste caso, mas somente correntes de magnetização. Poderíamos calcular a energia magnetostática de forma mais simples, considerando apenas a expressão 8.15. Com efeito,

$$U_{mag} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{V}} \vec{M} \cdot \vec{B} d\tau, \quad (8.22)$$

$$U_{mag} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R M \frac{2M\mu_0}{3} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (8.23)$$

$$U_{mag} = \frac{\mu_0 M^2}{3} \frac{4\pi R^3}{3}, \quad (8.24)$$

$$\boxed{U_{mag} = \frac{4\pi\mu_0 M^2}{9R^3}}. \quad (8.25)$$

Outra situação de interesse do ponto de vista energético para materiais magnetizados é mudança de energética devido à inserção de uma material magnético linear em uma região com campo inicialmente especificado no espaço livre, como no exemplo 7.2, em que uma esfera paramagnética (ou diamagnética) linear é colocada no vácuo em uma região com campo magnético inicialmente uniforme. Considere uma região no espaço livre onde atua um campo magnético  $\vec{H}_0$ , de tal forma que  $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}_0$ . Um corpo de susceptibilidade homogênea e isotrópica  $\chi_m$  e volume  $\mathcal{V}$  é colocado numa região do espaço livre e, com efeito do campo magnético aplicado, o material estará sujeito agora a um campo  $\vec{H}$  e adquire uma magnetização  $\vec{M}$ . Considere também que as correntes fontes do campo inicial  $\vec{H}_0$  permanecem inalteradas. Usando a expressão 8.9 para a energia magnetostática, a diferença entre as energias antes e depois da inserção do mesmo será calculada da seguinte forma:

$$\delta U_{ml} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{V}} \vec{H} \cdot \vec{B} d\tau - \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{V}} \vec{H}_0 \cdot \vec{B}_0 d\tau, \quad (8.26)$$

$$\delta U_{ml} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{V}} (\vec{H} \cdot \vec{B} - \vec{H}_0 \cdot \vec{B}_0) d\tau, \quad (8.27)$$

onde podemos reescrever que

$$\delta U_{ml} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{V}} (\vec{H}_0 \cdot \vec{B} - \vec{H} \cdot \vec{B}_0) d\tau + \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{V}} (\vec{H} - \vec{H}_0) \cdot (\vec{B} + \vec{B}_0) d\tau. \quad (8.28)$$

Mas se não há correntes livres nem antes nem depois da inserção do material,  $\nabla \times (\vec{H} - \vec{H}_0) = 0$ , o que nos permite escrever que  $\vec{H} - \vec{H}_0 = -\nabla\psi$ , com  $\psi$  sendo um potencial escalar. Se assim se proceder, a seguinte integral da equação anterior será nula e mostraremos a seguir. Usando a relação vetorial para a divergência

$$\nabla\psi \cdot (\vec{B} + \vec{B}_0) = \nabla \cdot [\psi(\vec{B} + \vec{B}_0)] - \cancel{\psi \nabla \cdot (\vec{B} + \vec{B}_0)}, \quad (8.29)$$

teremos

$$\iiint_{\mathcal{V}} (\vec{H} - \vec{H}_0) \cdot (\vec{B} + \vec{B}_0) d\tau, \quad (8.30)$$

$$\iiint_{\mathcal{V}} \nabla \psi \cdot (\vec{B} + \vec{B}_0) d\tau, \quad (8.31)$$

$$\iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot [\psi(\vec{B} + \vec{B}_0)] d\tau, \quad (8.32)$$

e usando agora o teorema da divergência de Gauss,

$$\oint_S \psi(\vec{B} + \vec{B}_0) \cdot \hat{n} da, \quad (8.33)$$

que se anula, pois a integral sobre todo o espaço leva o valor de  $\psi$  a zero para uma superfície  $\mathcal{S}$  esférica de raio  $R \rightarrow \infty$ . Isto implica que a variação de energia com a inserção do objeto será

$$\delta U_{ml} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{V}} (\vec{H}_0 \cdot \vec{B} - \vec{H} \cdot \vec{B}_0) d\tau. \quad (8.34)$$

Para um material linear,  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ , e usando o fato que, para o espaço livre (vácuo)  $\vec{H}_0 = \vec{B}_0 / \mu_0$ , temos

$$\delta U_{ml} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{V}} (\mu \vec{H} \cdot \vec{H}_0 - \mu_0 \vec{H}_0 \cdot \vec{H}) d\tau, \quad (8.35)$$

$$\delta U_{ml} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{V}} (\mu - \mu_0) \vec{H} \cdot \vec{H}_0 d\tau, \quad (8.36)$$

$$\delta U_{ml} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{V}} (\mu_r - 1) \mu_0 \vec{H} \cdot \vec{H}_0 d\tau, \quad (8.37)$$

$$\delta U_{ml} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{V}} \chi_m \vec{H} \cdot \mu_0 \vec{H}_0 d\tau, \quad (8.38)$$

$$\boxed{\delta U_{ml} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{V}} \vec{M} \cdot \vec{B}_0 d\tau}, \quad (8.39)$$

onde o volume de integração pode ficar restrita **somente ao volume do objeto magnetizado**, pois no vácuo,  $\chi_m = 0$ .

**EXEMPLO 8.2.** Calcule a variação de energia magnetostática depois da inserção da esfera de material linear de raio  $R$  e permeabilidade magnética  $\mu$ , colocada no vácuo em campo  $\vec{H}_0$  uniforme do exemplo 7.2.

**SOLUÇÃO:** A variação da energia magnetostática  $\delta U_{ml}$  pode ser calculada facilmente através da equação 8.39. Neste caso, tanto a magnetização  $\vec{M}$  adquirida pelo objeto, como o campo magnético  $\vec{B}_0$  aplicado são uniformes. Com efeito,

$$\delta U_{ml} = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{M} \cdot \vec{B}_0 d\tau, \quad (8.40)$$

$$\delta U_{ml} = \frac{3}{2} \frac{(\mu - \mu_0) H_0 B_0}{\mu + 2\mu_0} \frac{4\pi R^3}{3}, \quad (8.41)$$

$$\boxed{\delta U_{ml} = \frac{2\pi\mu_0(\mu - \mu_0)R^3 H_0^2}{\mu + 2\mu_0}}. \quad (8.42)$$

Note que, para um material paramagnético  $\mu > \mu_0$ , o que implica que a energia magnetostática é aumentada com a inserção do material, sendo que o contrário acontece com a inserção de um material diamagnético ( $\mu < \mu_0$ ).

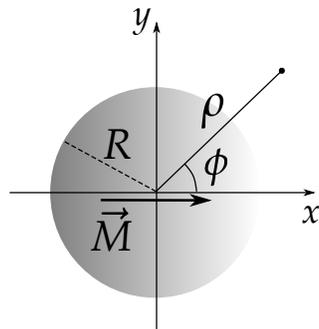
## LISTA DE QUESTÕES II

**QUESTÃO II.1.** Considere um cilindro sólido muito longo (comparado ao seu raio) de raio  $R$ , tendo seu eixo de simetria coincidindo com o eixo cartesiano  $z$  (veja a figura 8.1). Este cilindro está isolado no vácuo e apresenta magnetização permanente e uniforme ao longo de uma direção perpendicular ao eixo principal do cilindro, de tal maneira que sua polarização é dada por  $\vec{M} = M\hat{x}$ .

Determine:

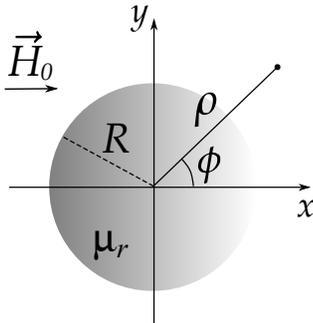
- As densidades de correntes superficial  $\vec{K}_M$  e volumétrica  $\vec{J}_M$  de magnetização. Mostre que a corrente total de magnetização é nula.
- As densidades volumétrica  $\rho_M$  e superficial  $\sigma_M$  de polos magnéticos. Mostre que a quantidade total líquida de polos magnéticos é nula.
- O potencial escalar magnético  $\psi(\rho, \phi)$  dentro e fora do cilindro.
- O campo magnético  $\vec{B}(\rho, \phi)$  dentro e fora do cilindro.
- O campo  $\vec{H}(\rho, \phi)$  dentro e fora do cilindro.
- Faça um esboço para todas as quantidades calculadas anteriormente (se possível, com ajuda computacional).

**FIGURA 8.1:** REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DE UM SISTEMA DE COORDENADAS EM UMA SECÇÃO TRANSVERSAL DE UM CILINDRO MAGNÉTICO LONGO DE RAIO  $R$  COM MAGNETIZAÇÃO  $\vec{M}$ . AS COORDENADAS ASSUMIDAS SÃO AS COORDENADAS CILÍNDRICAS POLARES  $(\rho, \phi)$ .



**QUESTÃO II.2.** Considere um cilindro magnetizado muito longo (comprimento comparado ao seu raio) de raio  $R$ , linear de permeabilidade magnética relativa  $\mu_r$ , posto numa região do vácuo onde um campo uniforme  $\vec{H}_0 = H_0\hat{x}$  inicialmente atuava, tendo seu eixo de simetria coincidindo com o eixo cartesiano  $z$  (veja a figura 8.2).

**FIGURA 8.2:** SEÇÃO TRANSVERSAL DE UM CILINDRO MAGNÉTICO LINEAR LONGO DE RAIO  $R$ , POSTO NUMA REGIÃO COM CAMPO ELÉTRICO INICIALMENTE UNIFORME  $\vec{H}_0$ . AS COORDENADAS ASSUMIDAS SÃO AS COORDENADAS CILÍNDRICAS POLARES  $(\rho, \phi)$ .



Determine:

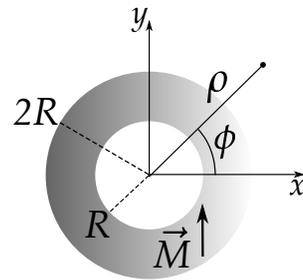
- O potencial escalar  $\psi(\rho, \phi)$  dentro e fora do cilindro, tal que  $\vec{H} = -\nabla\psi$ .
- O campo  $\vec{H}(\rho, \phi)$  dentro e fora do cilindro e sua magnetização.
- O campo magnético  $\vec{B}(\rho, \phi)$  dentro e fora do cilindro.
- As densidades de correntes superficial  $\vec{K}_M$  e volumétrica  $\vec{J}_M$  de magnetização.
- As densidades volumétrica  $\rho_M$  e superficial  $\sigma_M$  de polos magnéticos.
- Faça um esboço para todas as quantidades calculadas anteriormente (se possível, com ajuda computacional).

**QUESTÃO II.3.** Uma coroa magnética cilíndrica muito longa (comprimento muito maior que seus raios), de raio interno  $R$  e raio externo  $2R$ , tem seu eixo de simetria coincidindo com o eixo  $z$  cartesiano. Esta coroa está imersa no vácuo e apresenta magnetização permanente e uniforme ao longo da direção  $\hat{y}$  dada por  $\vec{M} = M\hat{y}$ .

Determine:

- As densidades de correntes superficial  $\vec{K}_M$  e volumétrica  $\vec{J}_M$  de magnetização.
- As densidades volumétrica  $\rho_M$  e superficial  $\sigma_M$  de polos magnéticos.
- O potencial escalar  $\psi(\rho, \phi)$  dentro e fora do cilindro, tal que  $\vec{H} = -\nabla\psi$ .
- O campo magnético  $\vec{B}(\rho, \phi)$  dentro e fora do cilindro.
- Faça um esboço para todas as quantidades calculadas anteriormente (se possível, com ajuda computacional).

**FIGURA 8.3:** SEÇÃO TRANSVERSAL DE UMA COROA CILÍNDRICA MAGNÉTICA LONGA, COM MAGNETIZAÇÃO UNIFORME  $\vec{M} = M\hat{y}$ . AS COORDENADAS ASSUMIDAS SÃO AS COORDENADAS CILÍNDRICAS POLARES  $(\rho, \phi)$ .

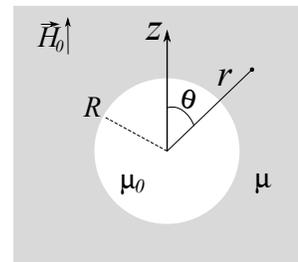


**QUESTÃO II.4.** Um meio magnético linear, de permeabilidade magnética  $\mu$ , possui uma cavidade esférica vazia (vácuo) de raio  $R$ . Um campo  $\vec{H} = H_0\hat{z}$  é então aplicado no referido meio (veja a figura 8.4).

Determine:

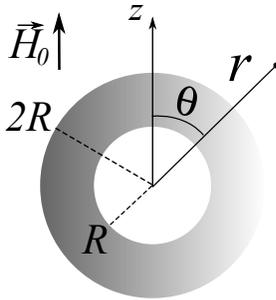
- Encontre o potencial escalar  $\psi(\rho, \phi)$  dentro e fora do cilindro, tal que  $\vec{H} = -\nabla\psi$ .
- Determine o campo magnético  $\vec{B}(\rho, \phi)$  dentro e fora do cilindro.
- Encontre as magnetizações no líquido e na esfera.
- Determine as densidades de correntes superficial  $\vec{K}_M$  e volumétrica  $\vec{J}_M$  de magnetização.
- Determine as densidades volumétrica  $\rho_M$  e superficial  $\sigma_M$  de polos magnéticos.

**FIGURA 8.4:** SEÇÃO TRANSVERSAL DE UMA CAVIDADE ESFÉRICA EM UM MEIO MAGNÉTICO. AS COORDENADAS ASSUMIDAS SÃO AS COORDENADAS ESFÉRICAS  $(r, \theta)$ .



**QUESTÃO II.5.** Uma coroa magnética esférica de material linear com permeabilidade magnética  $\mu$  possui raio interno  $R$  e raio externo  $2R$ . Esta coroa é então imersa no vácuo numa região com campo inicialmente uniforme dado por  $\vec{H}_0 = H_0\hat{z}$ , como indica a figura 8.5.

**FIGURA 8.5:** SECCÃO TRANSVERSAL DE UMA COROA ESFÉRICA NO VÁCUO SUBMETIDA A UM CAMPO INICIALMENTE UNIFORME  $\vec{H}_0 = H_0\hat{z}$ . AS COORDENADAS ASSUMIDAS SÃO AS COORDENADAS ESFÉRICAS  $(r, \theta)$ .



Determine:

- O potencial escalar  $\psi$  associado ao campo  $\vec{H}$  em todo espaço, tal que  $\vec{H} = -\nabla\psi$ .
- O campo  $\vec{H}$  em todo espaço.
- A magnetização  $\vec{M}$  na coroa.
- O campo magnético  $\vec{B}$  em todo espaço.
- As densidades de correntes superficial  $\vec{K}_M$  e volumétrica  $\vec{J}_M$  de magnetização.
- As densidades volumétrica  $\rho_M$  e superficial  $\sigma_M$  de polos magnéticos.
- Faça um esboço para todas as quantidades calculadas anteriormente (se possível, com ajuda computacional).

# APÊNDICES



# A

## SÉRIES DE TAYLOR

### A.1 SÉRIES DE POTÊNCIAS

Algumas séries de Maclaurin úteis:

$$(i) \quad (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots \quad (|x| < 1).$$

$$(ii) \quad (1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \dots \quad (|x| < 1).$$

$$(iii) \quad (1+x)^{-3} = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + 15x^4 - \dots \quad (|x| < 1).$$

$$(iv) \quad (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \dots \quad (-1 < x \leq 1).$$

$$(v) \quad (1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - \dots \quad (-1 < x \leq 1).$$

$$(vi) \quad (1+x)^{3/2} = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + \frac{3}{128}x^4 + \dots \quad (-1 < x \leq 1).$$

$$(vii) \quad (1+x)^{-3/2} = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{15}{8}x^2 - \frac{35}{16}x^3 + \frac{315}{128}x^4 - \dots \quad (-1 < x \leq 1).$$

$$(viii) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad (-\infty < x < \infty).$$

$$(ix) \quad a^x = 1 + x \ln a + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \frac{(x \ln a)^3}{3!} + \frac{(x \ln a)^4}{4!} + \dots \quad (-\infty < x < \infty).$$

$$(x) \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (-1 < x \leq 1).$$

$$(xi) \quad \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \quad (-1 < x < 1).$$

$$(xii) \quad \tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots \quad \left( |x| < \frac{\pi}{2} \right).$$

$$(xiii) \quad \sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + \dots \quad \left( |x| < \frac{\pi}{2} \right).$$

$$(xiv) \quad \arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \dots \quad (|x| < 1).$$

$$(xv) \quad \arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} - \frac{5x^7}{112} + \dots \quad (|x| < 1).$$

# B

## INTEGRAIS ÚTEIS

### B.1 INTEGRAL I

$$I \equiv \int_0^\pi \frac{\cos \theta' \sin \theta' d\theta'}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta'}}. \quad (\text{B.1})$$

Usando a substituição  $u = z^2 + R^2 - 2Rz \cos \theta'$ , temos que  $\sin \theta' d\theta' = du/2Rz$  e  $\cos \theta' = \frac{z^2 + R^2 - u}{2zR}$ . Portanto, a integral fica

$$\int_0^\pi \frac{\cos \theta' \sin \theta' d\theta'}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta'}} = \frac{1}{(2zR)^2} \int_{(R-z)^2}^{(R+z)^2} \left[ \frac{(z^2 + R^2)}{u^{\frac{1}{2}}} - u^{\frac{1}{2}} \right] du. \quad (\text{B.2})$$

$$= \frac{1}{(2zR)^2} \left[ (z^2 + R^2) \frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \Big|_{(R-z)^2}^{(R+z)^2} - \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \Big|_{(R-z)^2}^{(R+z)^2} \right], \quad (\text{B.3})$$

$$= \frac{1}{(2zR)^2} \left[ 2(z^2 + R^2)(|R+z| - |R-z|) - \frac{2}{3}(|R+z|^3 - |R-z|^3) \right]. \quad (\text{B.4})$$

Para  $z > R$ ,  $|R + z| = R + z$  e  $|R - z| = z - R$ . Dessa forma,

$$\int_0^\pi \frac{\cos \theta' \sin \theta' d\theta'}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta'}} = \frac{1}{(2zR)^2} \left\{ 2(z^2 + R^2)(R + z - z + R) - \frac{2}{3}[(z + R)^3 - (z - R)^3] \right\}, \quad (\text{B.5})$$

$$= \frac{1}{(2zR)^2} \left\{ 4(Rz^2 + R^3) - \frac{2}{3}[z^3 + 3z^2R + 3zR^2 + R^3 - z^3 + 3z^2R - 3zR^2 + R^3] \right\}, \quad (\text{B.6})$$

$$= \frac{1}{(2zR)^2} \left\{ 4(Rz^2 + R^3) - \frac{4}{3}[3z^2R + R^3] \right\}, \quad (\text{B.7})$$

$$= \frac{1}{(2zR)^2} \frac{4}{3} \left\{ 3Rz^2 + 3R^3 - 3z^2R - R^3 \right\} = \frac{8R^3}{12z^2R^2}, \quad (\text{B.8})$$

$$\int_0^\pi \frac{\cos \theta' \sin \theta' d\theta'}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta'}} = \frac{2R}{3z^2}, \quad z > R. \quad (\text{B.9})$$

Para  $z < R$ ,  $|R + z| = R + z$  e  $|R - z| = R - z$ . Dessa forma,

$$\int_0^\pi \frac{\cos \theta' \sin \theta' d\theta'}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta'}} = \frac{1}{(2zR)^2} \left\{ 2(z^2 + R^2)(z + R - R + z) - \frac{2}{3}[(z + R)^3 - (R - z)^3] \right\}, \quad (\text{B.10})$$

$$= \frac{1}{(2zR)^2} \left\{ 4(z^3 + zR^2) - \frac{2}{3}[z^3 + 3z^2R + 3zR^2 + R^3 - R^3 + 3R^2z - 3Rz^2 + z^3] \right\}, \quad (\text{B.11})$$

$$= \frac{1}{(2zR)^2} \left\{ 4(z^3 + zR^2) - \frac{4}{3}[3R^2z + R^3] \right\}, \quad (\text{B.12})$$

$$= \frac{1}{(2zR)^2} \frac{4}{3} \left\{ 3zR^2 + 3z^3 - 3R^2z - R^3 \right\} = \frac{8z^3}{12z^2R^2}, \quad (\text{B.13})$$

$$\int_0^\pi \frac{\cos \theta' \sin \theta' d\theta'}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta'}} = \frac{2z}{3R^2}, \quad z < R. \quad (\text{B.14})$$

De forma resumida, teremos:

$$I \equiv \int_0^\pi \frac{\cos \theta' \sin \theta' d\theta'}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta'}} = \begin{cases} \frac{2z}{3R^2}, & z \leq R \\ \frac{2R}{3z^2}, & z \geq R. \end{cases} \quad (\text{B.15})$$

## B.2 INTEGRAL II

$$II \equiv \int_0^\pi \frac{\sin^3 \theta' d\theta'}{(R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta')^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{B.16})$$

Por substituição  $u = z^2 + R^2 - 2Rz \cos \theta'$ , de tal forma que  $\sin \theta' d\theta' = du/2Rz$  e

$$\cos^2 \theta' = \frac{(z^2 + R^2)^2 - 2(z^2 + R^2)u + u^2}{4z^2 R^2}. \quad (\text{B.17})$$

Com efeito, usando  $\sin^2 \theta' = 1 - \cos^2 \theta'$ ,

$$II = \int_0^\pi \frac{\sin \theta' d\theta'}{(R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta')^{\frac{3}{2}}} - \int_0^\pi \frac{\cos^2 \theta' \sin \theta' d\theta'}{(R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta')^{\frac{3}{2}}}, \quad (\text{B.18})$$

$$= \frac{1}{2zR} \int_{(R-z)^2}^{(R+z)^2} u^{-\frac{3}{2}} du - \frac{(R^2 + z^2)^2}{8R^3 z^3} \int_{(R-z)^2}^{(R+z)^2} u^{-\frac{3}{2}} du + \frac{(R^2 + z^2)}{4R^3 z^3} \int_{(R-z)^2}^{(R+z)^2} u^{1-\frac{3}{2}} du - \frac{1}{8R^3 z^3} \int_{(R-z)^2}^{(R+z)^2} u^{2-\frac{3}{2}} du, \quad (\text{B.19})$$

$$= \frac{1}{2zR} \left. \frac{u^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} \right|_{(R-z)^2}^{(R+z)^2} - \frac{(R^2 + z^2)^2}{8R^3 z^3} \left. \frac{u^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} \right|_{(R-z)^2}^{(R+z)^2} + \frac{(R^2 + z^2)}{4R^3 z^3} \left. \frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right|_{(R-z)^2}^{(R+z)^2} - \frac{1}{8R^3 z^3} \left. \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right|_{(R-z)^2}^{(R+z)^2}, \quad (\text{B.20})$$

$$= -\frac{1}{zR} \left. \frac{1}{\sqrt{u}} \right|_{(R-z)^2}^{(R+z)^2} + \frac{(R^2 + z^2)^2}{4R^3 z^3} \left. \frac{1}{\sqrt{u}} \right|_{(R-z)^2}^{(R+z)^2} + \frac{(R^2 + z^2)}{2R^3 z^3} \sqrt{u} \Big|_{(R-z)^2}^{(R+z)^2} - \frac{1}{12R^3 z^3} \left. u^{\frac{3}{2}} \right|_{(R-z)^2}^{(R+z)^2}, \quad (\text{B.21})$$

$$= \left[ \frac{(R^2 + z^2)^2}{4R^3 z^3} - \frac{1}{zR} \right] \left. \frac{1}{\sqrt{u}} \right|_{(R-z)^2}^{(R+z)^2} + \frac{(R^2 + z^2)}{2R^3 z^3} \sqrt{u} \Big|_{(R-z)^2}^{(R+z)^2} - \frac{1}{12R^3 z^3} \left. u^{\frac{3}{2}} \right|_{(R-z)^2}^{(R+z)^2}, \quad (\text{B.22})$$

$$= \left[ \frac{R^4 + z^4 + 2z^2 R^2 - 4z^2 R^2}{4R^3 z^3} \right] \left( \frac{1}{|z + R|} - \frac{1}{|z - R|} \right) + \frac{(R^2 + z^2)}{2R^3 z^3} (|z + R| - |z - R|) - \frac{1}{12R^3 z^3} (|z + R|^3 - |z - R|^3), \quad (\text{B.23})$$

$$= \frac{(z^2 - R^2)^2}{4R^3z^3} \left( \frac{1}{|z+R|} - \frac{1}{|z-R|} \right) + \frac{(R^2 + z^2)}{2R^3z^3} (|z+R| - |z-R|) - \frac{1}{12R^3z^3} (|z+R|^3 - |z-R|^3). \quad (\text{B.24})$$

Para  $z > R$ ,  $|z+R| = z+R$  e  $|z-R| = z-R$ . Dessa forma,

$$II = \frac{(z^2 - R^2)^2}{4R^3z^3} \left( \frac{1}{z+R} - \frac{1}{z-R} \right) + \frac{(R^2 + z^2)}{2R^3z^3} (z+R - z+R) - \frac{1}{12R^3z^3} [(z+R)^3 - (z-R)^3], \quad (\text{B.25})$$

$$= \frac{(z^2 - R^2)^2}{4R^3z^3} \left( \frac{z-R - z-R}{z^2 - R^2} \right) + \frac{(R^2 + z^2)}{2R^3z^3} (2R) - \frac{1}{12R^3z^3} [2R^3 + 6Rz^2], \quad (\text{B.26})$$

$$= \frac{(z^2 - R^2)}{4R^3z^3} (-2R) + \frac{(R^2 + z^2)}{2R^3z^3} (2R) - \frac{1}{12R^3z^3} [2R^3 + 6Rz^2], \quad (\text{B.27})$$

$$= \frac{-6R(z^2 - R^2) + 12R(R^2 + z^2) - 2R^3 - 6Rz^2}{12R^3z^3}, \quad (\text{B.28})$$

$$= \frac{-6Rz^2 + 6R^3 + 12R^3 + 12Rz^2 - 2R^3 - 6Rz^2}{12R^3z^3}, \quad (\text{B.29})$$

$$= \frac{16R^3}{12R^3z^3} = \frac{4}{3z^3}. \quad (\text{B.30})$$

Para  $-R < z < R$ ,  $|z+R| = z+R$  e  $|z-R| = R-z$ . Dessa forma,

$$II = \frac{(z^2 - R^2)^2}{4R^3z^3} \left( \frac{1}{z+R} - \frac{1}{R-z} \right) + \frac{(R^2 + z^2)}{2R^3z^3} (z+R - R+z) - \frac{1}{12R^3z^3} [(z+R)^3 - (R-z)^3], \quad (\text{B.31})$$

$$= \frac{(z^2 - R^2)^2}{4R^3z^3} \left( \frac{z-R + z+R}{z^2 - R^2} \right) + \frac{(R^2 + z^2)}{2R^3z^3} (2z) - \frac{1}{12R^3z^3} [2z^3 + 6R^2z], \quad (\text{B.32})$$

$$= \frac{(z^2 - R^2)}{4R^3z^3} (2z) + \frac{(R^2 + z^2)}{2R^3z^3} (2z) - \frac{1}{12R^3z^3} [2z^3 + 6R^2z], \quad (\text{B.33})$$

$$= \frac{6z(z^2 - R^2) + 12z(R^2 + z^2) - 2z^3 - 6R^2z}{12R^3z^3}, \quad (\text{B.34})$$

$$= \frac{6z^3 - 6zR^2 + 12zR^2 + 12z^3 - 2z^3 - 6R^2z}{12R^3z^3}, \quad (\text{B.35})$$

$$= \frac{16z^3}{12R^3z^3} = \frac{4}{3R^3}. \quad (\text{B.36})$$

Para  $z < -R$ ,  $|z + R| = -(z + R)$  e  $|z - R| = -(z - R)$ . Dessa forma,

$$II = \frac{(z^2 - R^2)^2}{4R^3z^3} \left( -\frac{1}{z + R} + \frac{1}{z - R} \right) + \frac{(R^2 + z^2)}{2R^3z^3} [-(z + R) + (z - R)] - \frac{1}{12R^3z^3} [-(z + R)^3 + (z - R)^3], \quad (\text{B.37})$$

onde podemos fatorar -1 da expressão,

$$= -1 \left\{ \frac{(z^2 - R^2)^2}{4R^3z^3} \left( \frac{1}{z + R} - \frac{1}{z - R} \right) + \frac{(R^2 + z^2)}{2R^3z^3} [(z + R) - (z - R)] - \frac{1}{12R^3z^3} [(z + R)^3 - (z - R)^3] \right\}, \quad (\text{B.38})$$

resultando na expressão oposta para o caso com  $z > R$ ,

$$- \frac{16R^3}{12R^3z^3} = - \frac{4}{3z^3}. \quad (\text{B.39})$$

De forma resumida, a solução da integral será

$$II \equiv \int_0^\pi \frac{\sin^3 \theta' d\theta'}{(R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta')^{\frac{3}{2}}} = \begin{cases} \frac{4}{3z^3}, & z \geq R \\ \frac{4}{3R^3}, & -R \leq z \leq R, \\ -\frac{4}{3z^3}, & z \leq -R. \end{cases} \quad (\text{B.40})$$

### B.3 INTEGRAL III

$$\boxed{\iiint_{\mathcal{V}} \{\vec{J}(\vec{r}')(\vec{r} \cdot \vec{r}') + [\vec{r} \cdot \vec{J}(\vec{r}')] \vec{r}'\} d\tau' = \vec{0}. \quad (\text{B.41})$$

Chamemos a integral  $\vec{a}$  e façamos o produto escalar com outro vetor  $\vec{b}$ ,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \iiint_{\mathcal{V}} \{\vec{J}(\vec{r}')(\vec{r} \cdot \vec{r}') + [\vec{r} \cdot \vec{J}(\vec{r}')] \vec{r}'\} d\tau' \cdot \vec{b}, \quad (\text{B.42})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \iiint_{\mathcal{V}} \{[\vec{J}(\vec{r}') \cdot \vec{b}](\vec{r} \cdot \vec{r}') + [\vec{r} \cdot \vec{J}(\vec{r}')](\vec{r}' \cdot \vec{b})\} d\tau', \quad (\text{B.43})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \iiint_{\mathcal{V}} \{[\vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla'(\vec{b} \cdot \vec{r}')](\vec{r} \cdot \vec{r}') + [\vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla'(\vec{r} \cdot \vec{r}')](\vec{r}' \cdot \vec{b})\} d\tau', \quad (\text{B.44})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \iiint_{\mathcal{V}} \vec{J}(\vec{r}') \cdot [\nabla'(\vec{b} \cdot \vec{r}')(\vec{r} \cdot \vec{r}') + \nabla'(\vec{r} \cdot \vec{r}')(\vec{r}' \cdot \vec{b})] d\tau', \quad (\text{B.45})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \iiint_{\mathcal{V}} \vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla' [(\vec{b} \cdot \vec{r}')(\vec{r} \cdot \vec{r}') + (\vec{r} \cdot \vec{r}')(\vec{r}' \cdot \vec{b})] d\tau', \quad (\text{B.46})$$

Definiremos agora um escalar  $\phi(\vec{r}') \equiv (\vec{b} \cdot \vec{r}')(\vec{r} \cdot \vec{r}') + (\vec{r} \cdot \vec{r}')(\vec{r}' \cdot \vec{b})$ . Teremos que a divergência será

$$\nabla' \cdot [\vec{J}(\vec{r}')\phi(\vec{r}')] = [\nabla' \cdot \vec{J}(\vec{r}')] \phi(\vec{r}') + \vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla' \phi(\vec{r}'), \quad (\text{B.47})$$

$$\nabla' \cdot [\vec{J}(\vec{r}')\phi(\vec{r}')] = \vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla' \phi(\vec{r}'), \quad (\text{B.48})$$

onde usamos o fato que  $\nabla' \cdot \vec{J}(\vec{r}') = 0$  na magnetostática. Dessa forma, o cálculo de  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  conduz a

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \iiint_{\mathcal{V}} \vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla' [(\vec{b} \cdot \vec{r}')(\vec{r} \cdot \vec{r}') + (\vec{r} \cdot \vec{r}')(\vec{r}' \cdot \vec{b})] d\tau', \quad (\text{B.49})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \iiint_{\mathcal{V}} \vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla' \phi(\vec{r}') d\tau', \quad (\text{B.50})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \iiint_{\mathcal{V}} \nabla' \cdot [\vec{J}(\vec{r}')\phi(\vec{r}')] d\tau', \quad (\text{B.51})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \oiint_S \phi(\vec{r}') \vec{J}(\vec{r}') \cdot \hat{n} da' = 0, \quad (\text{B.52})$$

com  $\mathcal{S}$  sendo a superfície que contém toda densidade  $\vec{J}$  e, no contorno, temos que  $\vec{J} \cdot \hat{n} da' = 0$ , sendo  $\vec{J}$  tangente à superfície  $\mathcal{S}$ . A conclusão é que se  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ , para qualquer  $\vec{b}$ , então  $\vec{a} = 0$ , e a integral é nula.

## B.4 INTEGRAIS DADAS PARA AS LISTAS DE QUESTÕES

Considerando  $a, b, c$  e  $k$  constantes reais:

- (i) 
$$\int \frac{udu}{(u^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}} + k$$
- (ii) 
$$\int \frac{u^2 du}{(u^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{u}{\sqrt{u^2 + a^2}} + \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + k$$
- (iii) 
$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + k$$
- (iv) 
$$\int \frac{du}{(u^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2 \sqrt{u^2 + a^2}} + k$$
- (v) 
$$\int \frac{udu}{(u^2 + a^2)^{1/2}} = \sqrt{u^2 + a^2} + k$$
- (vi) 
$$\int \frac{udu}{\sqrt{au^2 + bu + c}} = \frac{\sqrt{au^2 + bu + c}}{a} - \frac{b}{2a\sqrt{a}} \ln \left[ 2\sqrt{a}\sqrt{au^2 + bu + c} + 2au + b \right] + k$$
- (vii) 
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{a + b \cos \phi} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \text{ para } a > b.$$

# C

## INTEGRAIS ELÍPTICAS

### C.1 DEFINIÇÕES

As integrais elípticas de primeiro tipo ( $K(k)$ ) e segundo tipo ( $E(k)$ ) são definidas da seguinte forma:

$$K(k) \equiv \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\beta)}}, \quad (\text{C.1})$$

$$E(k) \equiv \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\beta)} d\beta, \quad (\text{C.2})$$

para  $0 \leq k < 1$ . Essas integrais não possuem funções elementares como solução, sendo geralmente resolvidas por métodos numéricos.

### C.2 SÉRIES DE POTÊNCIAS PARA $K(k)$ E $E(k)$

Uma outra alternativa para se resolver as integrais elípticas é expandir o integrando em séries de potências em  $k$ . Usando as expansões

$$(1 - x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \frac{35}{128}x^8 + \dots \quad (\text{C.3})$$

e

$$(1 - x^2)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 - \dots \tag{C.4}$$

teremos que os integrandos serão expressos por:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\beta)}} = 1 + \frac{1}{2}k^2 \sin^2(\beta) + \frac{3}{8}k^4 \sin^4(\beta) + \frac{5}{16}k^6 \sin^6(\beta) + \frac{35}{128}k^8 \sin^8(\beta) - \dots \tag{C.5}$$

e

$$\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\beta)} = 1 - \frac{1}{2}k^2 \sin^2(\beta) - \frac{1}{8}k^4 \sin^4(\beta) - \frac{1}{16}k^6 \sin^6(\beta) - \frac{5}{128}k^8 \sin^8(\beta) - \dots \tag{C.6}$$

Perceba que para integrar essas expansões, precisaremos integrar de forma recorrente potências pares de  $\sin(\beta)$ . Vamos então recorrer à seguinte integral:

$$\int_0^\pi \sin^n \theta d\theta = \frac{n-1}{n} \int_0^\pi \sin^{n-2} \theta d\theta. \tag{C.7}$$

Com efeito,

$$\int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{2}, \tag{C.8}$$

$$\int_0^\pi \sin^4 \theta d\theta = \frac{4-1}{4} \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta = \frac{3\pi}{8}, \tag{C.9}$$

$$\int_0^\pi \sin^6 \theta d\theta = \frac{6-1}{6} \int_0^\pi \sin^4 \theta d\theta = \frac{5\pi}{16}, \tag{C.10}$$

$$\int_0^\pi \sin^8 \theta d\theta = \frac{8-1}{8} \int_0^\pi \sin^6 \theta d\theta = \frac{35\pi}{128}. \tag{C.11}$$

Usando o fato que

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n(\beta) d\beta = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin^n(\beta) d\beta, \text{ para } n \text{ par}, \tag{C.12}$$

teremos os seguintes resultados para as integrações termo a termo:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\beta)}} &= \int_0^{\pi/2} d\beta + \frac{1}{4}k^2 \int_0^\pi \sin^2(\beta) d\beta \\ &+ \frac{3}{16}k^4 \int_0^\pi \sin^4(\beta) d\beta + \frac{5}{32}k^6 \int_0^\pi \sin^6(\beta) d\beta \\ &+ \frac{35}{256}k^8 \int_0^\pi \sin^8(\beta) d\beta - \dots \end{aligned} \tag{C.13}$$

$$K(k) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}k^2 + \frac{9\pi}{128}k^4 + \frac{25\pi}{512}k^6 + \frac{1225\pi}{32768}k^8 + \dots \quad (\text{C.14})$$

e também,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\beta)} d\beta &= \int_0^{\pi/2} d\beta - \frac{1}{4}k^2 \int_0^{\pi} \sin^2(\beta) d\beta \\ &- \frac{1}{16}k^4 \int_0^{\pi} \sin^4(\beta) d\beta - \frac{1}{32}k^6 \int_0^{\pi} \sin^6(\beta) d\beta \\ &- \frac{5}{256}k^8 \int_0^{\pi} \sin^8(\beta) d\beta + \dots \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

$$E(k) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}k^2 - \frac{3\pi}{128}k^4 - \frac{5\pi}{512}k^6 - \frac{175\pi}{32768}k^8 - \dots \quad (\text{C.16})$$



# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BASSALO, J. M. F. *Eletrodinâmica Clássica*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

BASSALO, J. M. F. *Elementos de Física Matemática*. São Paulo: Livraria da Física, 2010. v. 1, 2 e 3.

BROMLEY, D.; GREINER, W. *Classical Electrodynamics*. Nova York: Springer New York, 2012.

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. *Numerical analysis*. 9. ed. Boston: Brooks Cole, 2010.

BUTKOV, E. *Mathematical Physics*. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1973.

CRISTINA, M.; CUNHA, C. *Métodos Numéricos*. Campinas: Editora UNICAMP, 2015.

GARG, A. *Classical Electromagnetism in a Nutshell*. Princeton: Princeton University Press, 2012.

GRIFFITHS, D. J. *Eletrodinâmica*. 3. ed. São Paulo: Pearson, 2010.

HAYT, W.; BUCK, J. *Engineering Electromagnetics*. Nova York: McGraw-Hill Education, 2018.

JACKSON, J. *Classical Electrodynamics*. 3. ed. Singapura: Wiley, 1999.

LIM, Y.; CLASS, Z. da xue. P. C. *Problems and Solutions on Electromagnetism*. Singapore: World Scientific, 1993.

LIU, J.; SPIEGEL, M.; LIPSCHUTZ, S. *Schaum's Outline of Mathematical Handbook of Formulas and Tables*. 5. ed. New York: McGraw-Hill Education, 2017.

LORRAIN, P.; CORSON, D. *Electromagnetism: Principles and Applications*. São Francisco: W.H. Freeman, 1990.

MACCHI, A.; MORUZZI, G.; PEGORARO, F. *Problems in Classical Electromagnetism: 157 Exercises with Solutions*. Cham: Springer International Publishing, 2017.

MACHADO, K. D. *Eletromagnetismo*. Ponta Grossa: Editora Todapalavra, 2012. v. 1, 2 e 3.

MACHADO, K. D. *Equações diferenciais aplicadas*. Ponta Grossa: Editora Todapalavra, 2012. v. 1 e 2.

MAXWELL, J. C. *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Nova York: Dover Publications, 1954. v. 1 e 2.

NASAR, S. A. *2008+ Solved Problems in Electromagnetics*. Raleigh: Institution of Engineering and Technology, 2008.

NETO, J. B. *Matemática para físicos com aplicações: Vetores, tensores e spinors*. São Paulo: Livraria da Física, 2010. v. 1 e 2.

NETO, J. B. *Teoria eletromagnética: parte clássica*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.

OHANIAN, H. *Classical Electrodynamics*. Massachusetts: Allyn and Bacon, 1988.

OLIVEIRA, N. A. *Fundamentos da teoria eletromagnética*. 1. ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2019.

REITZ, J. R.; MILFORD, F. J.; CHRISTY, R. W. *Fundamentos da teoria eletromagnética*. 3. ed. Rio de Janeiro: Editora Campus, 2007.

VANDERLINDE, J. *Classical Electromagnetic Theory*. Dordrecht: Springer Netherlands, 2006.

ZANGWILL, A. *Modern Electrodynamics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2012.

# ÍNDICE REMISSIVO

## C

### **Campo magnético**

Auxiliar  $\vec{H}$ , 150

Cilindro uniformente magnetizado, 155

Condições de contorno, 88

Dinâmica da partícula, 38

Dipolo puro, 106

Disco carregado girante, 47

Divergente, 60

Esfera maciça carregada girante, 55

Esfera magnética linear em campo magnético uniforme, 171

Esfera uniformemente magnetizada, 164

Espira circular, 45

Espira como dipolo, 80

Exato de uma espira, 114

Fio cilíndrico e maciço muito longo, 65

Fio finito, 43

Fio infinito, 44

Lei de Biot-Savart, 42

Lei de força de Lorentz, 34

Modelos de Gilbert e Ampere, 154

Rotacional, 61

Rotacional de  $\vec{A}$ , 69

Solenóide, 50

Superfície esférica carregada girante, 52

Terrestre, 46

Unidade Tesla, 37

Carga elétrica

Corrente elétrica em um cilindro, 27

Equação da continuidade, 29

Força de Lorentz, 34

## D

### **Dipolo**

Atômicos, 147

Campo magnético, 107

Definição de momento magnético, 104

Esfera uniformemente magnetizada, 164

Espira, 80

Expansão em multipolos magnetostáticos, 100

Físico, 115

Magnético puro, 85

Potencial escalar magnético, 108

Potencial vetor magnético, 104

## E

### Energia

Cinética de uma partícula carregada, 41

Materiais magnéticos, 175

Potencial magnetostática, 121

Potencial magnetostática em indutores, 124

Solenóide cilíndrico, 125

## F

### Fluxo

Campo solenoidal, 61

Condições de contorno para  $\vec{B}$ , 88

Densidade de fluxo magnético, 118

Divergência de  $\vec{B}$ , 60

Lei de Faraday, 117

Magnético em um par de espiras coplanares, 133

Magnético em um solenóide, 126

### Força

Coulombiana, 147

De Lorentz, 34

Eletromotriz, 118

Entre espiras, 118

Entre segmentos percorridos por corrente elétrica, 137

Hemisférios da superfície esférica carregada girante, 91

Lei de Ampère, 31

Lei de Biot-Svart, 42

Lei de Coulomb, 33

Materiais magnéticos, 173

### Funções

Elípticas, 78

## G

### Gradiente

Potencial escalar magnético, 94, 151

## I

### Indutores

Definição, 124

Energia potencial magnetostática, 124

### Indutância

Definição, 124

Unidades, 124

## L

### Lei

De Ampère, 150

De Biot-Svart, 43

De Coulomb, 23, 32, 33, 35

De Faraday, 36, 117

De força de Ampère, 31, 33, 35

De força de Lorentz, 24, 34

De Lenz, 118

Dos cossenos, 75

Experimental, 23

### Linhas de campo

Cilindro magnetizado, 156

Dipolo magnético, 115

Esfera linear posta em campo magnético uniforme, 171

Esfera uniformemente magnetizada, 165

Fio cilíndrico com cavidade, 142

Fio infinito, 44

## M

### Magnetização

Definição, 149

### Momento de dipolo

Campo magnético de dipolo puro,  
108

Definição, 103

Densidades superficiais e volumétricas de corrente elétrica, 104

Esfera uniformemente magnetizada,  
164

### **Multipolos magnetostáticos**

Definições, 100

## **P**

### **Potencial**

Escalar magnético

Definição, 94

Dipolo, 108

Superfície esférica uniformemente carregada girante, 94

Vetor magnético

Condições de contorno, 88

Definição, 70, 80

Dipolo, 102

Espira circular, 75

Fio finito, 74

Superfície esférica uniformemente carregada girante, 82

## **S**

### **Susceptibilidade magnética**

Alguns materiais, 158

Definição, 157



editora**ifrn**

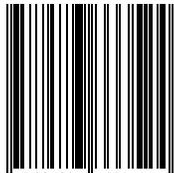
**Tipografias utilizadas:**

opensans  
mathpazo  
newpxtext

Esta obra foi submetida e selecionada por meio de edital específico para publicação pela Editora IFRN, tendo sido analisada por pares no processo de editoração científica.

Dando continuidade ao texto da obra *Eletromagnetismo Clássico*, neste segundo volume abordaremos a Magnetostática, ramo de estudo da Teoria Eletromagnética que, resumidamente, se restringe ao comportamento estático dos campos magnéticos e potenciais, tanto no vácuo como na matéria. Continuamos com a mesma abordagem sólida baseada nos métodos matemáticos da Física e didática baseada na solução de problemas fundamentais e avançados do eletromagnetismo. No vácuo, estudaremos as leis de Ampère, Lorentz e Biot-Savart, os potenciais magnéticos, expansão em multipolos da magnetostática, energia magnetostática e indutância. Na matéria, apresentaremos o fenômeno da magnetização e o campo magnético  $\vec{H}$ , as correntes de magnetização, susceptibilidade e permeabilidade magnética, entre outros conceitos.

ISBN 978-8-58333-352-4



9 788583 333524



INSTITUTO FEDERAL  
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
Rio Grande do Norte



Associação Brasileira  
das Editoras Universitárias