

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DO RIO GRANDE DO NORTE

JONATHAS MATHEUS REGIS CHAVES

**O USO DA REALIDADE AUMENTADA COMO FERRAMENTA EXPERIMENTAL
PARA O ENSINO DA GRAVITAÇÃO UNIVERSAL**

NATAL

2023

JONATHAS MATHEUS REGIS CHAVES

**O USO DA REALIDADE AUMENTADA COMO FERRAMENTA EXPERIMENTAL
PARA O ENSINO DA GRAVITAÇÃO UNIVERSAL**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Física do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte, em cumprimento às exigências legais como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Física.

Orientador: Dr. Antonio Marques dos Santos

NATAL
2023

Chaves, Jonathas Matheus Regis.
C512u O uso da realidade aumentada como ferramenta experimental
para o ensino da gravitação universal / Jonathas Matheus Regis
Chaves. – 2023.
38 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (licenciatura) – Instituto Federal
de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte, Natal,
2023.

Orientador: Dr. Antônio Marques dos Santos.

1. Física – Estudo e ensino. 2. Realidade aumentada – Aplicativo.
3. Gravitação universal. 4. Experimentos – Aprendizagem prática e
empírica. I. Título.

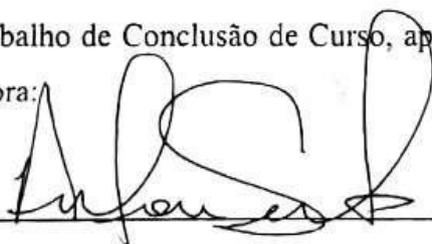
CDU 53:37

JONATHAS MATHEUS REGIS CHAVES

**O USO DA REALIDADE AUMENTADA COMO FERRAMENTA EXPERIMENTAL
PARA O ENSINO DA GRAVITAÇÃO UNIVERSAL**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso Licenciatura em Física do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte, em cumprimento às exigências legais como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Física.

Trabalho de Conclusão de Curso, aprovado (a) em 24/07/2023 pela seguinte Banca Examinadora:



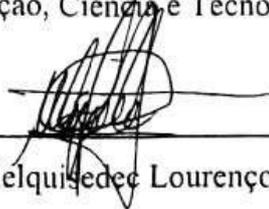
Dr. Antônio Marques dos Santos. – Orientador:

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte



Dr. Tibério Magno de Lima Alves

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte



Dr. Melquisedec Lourenço da Silva

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado força, coragem e determinação durante essa longa jornada para alcançar meus objetivos.

Aos meus pais e familiares, que me apoiaram e me incentivaram nas decisões que tomei.

À minha namorada Jennyff Raissa por nunca ter deixado faltar paciência, apoio e amor. Sua presença foi a razão da minha motivação e confiança. Sou muito agradecido por ter você ao meu lado e grato por tudo que você fez por mim.

Ao FNDE, pelo apoio financeiro por meio da manutenção da bolsa de auxílio do Programa de Educação Tutorial (PET).

A todos os professores do IFRN, que foram responsáveis pela minha formação, em especial ao Prof. Dr. Otto Augusto de Moraes Costa, pelo acolhimento e incentivo no início do curso.

Ao Prof. Dr. Tibério Magno de Lima Alves pelo seu apoio e incentivo prestados enquanto estive no Programa de Educação Tutorial (PET).

Ao Prof. Antônio Marques dos Santos por ter dedicado seu tempo e conhecimentos para a orientação deste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC).

Aos professores participantes da banca examinadora pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.

Aos colegas e amigos de turma, que estiveram presentes durante essa caminhada e permitiram que a vida acadêmica fosse mais leve.

"A coisa mais incompreensível sobre o mundo é que ele é compreensível."
(Albert Einstein, 1936).

RESUMO

Dentre as disciplinas obrigatórias no ensino médio temos que a física é composta essencialmente pela aprendizagem prática e empírica. Entretanto, nem sempre é possível apresentar de forma prática o seu estudo devido à sua complexidade e à falta de ferramentas no ensino público. Dessa maneira, a busca por soluções tecnológicas eficientes de baixo custo capaz de proporcionar ao aluno a visualização dos fenômenos gravitacionais é um tema bastante relevante no ensino das ciências em geral. À vista disso, foi utilizado neste trabalho o motor de jogos Unity com o pacote Vuforia para desenvolver um aplicativo em realidade aumentada contendo animações que buscam ajudar o aluno na compreensão e no estudo da gravitação universal. Para isso, houve a necessidade de realizar várias adaptações e testes que possibilitassem representar de forma mais aproximada os fenômenos reais da gravitação.

Palavras-chave: realidade aumentada, gravitação universal, experimentos, ensino.

ABSTRACT

Among the required subjects in high school that teaches physics is essentially to practical and empirical learning. However, it is not always possible possible to present your study in a practical way due to its complexity and lack of tools in public education. In this way, the search for effective technological solutions low-cost devices capable of providing the student with a visualization of phenomena gravitational forces is a very relevant topic in science teaching in general. a view In addition, the Unity game engine with the Vuforia package was used in this work to develop an application in augmented reality containing animations that seek help the student understand and study universal gravitation. For that, there was the need to carry out several genetics and testicles that would make it possible to represent more closely to the real phenomena of gravitation

Keywords: augmented reality, universal gravitation, experiments, teaching.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Órbitas elípticas.	11
Figura 2 – Lei das áreas.	12
Figura 3 – Lei das áreas.	12
Figura 4 – Tabela 3 lei de Kepler.	14
Figura 5 – Translação da terra.	15
Figura 6 – Rotação e translação da terra.	17
Figura 7 – Precessão da terra.	18
Figura 8 – Aplicativo utilizando Vuforia.	21
Figura 9 – Imagem gatilho utilizada.	22
Figura 10 – Imagem gatilho utilizada.	23
Figura 11 – Precessão da terra.	24
Figura 12 – Experimento Marte no Unity.	25
Figura 13 – Experimento de marte em RA.	25
Figura 14 – Experimento Modelo no Unity.	27
Figura 15 – Experimento Modelo em RA	27
Figura 16 – Experimento do satélite.	29
Figura 17 – Experimento do satellite.	29
Figura 18 – Fases da lua em RA.	31
Figura 19 – Eclipse lunar em RA.	31
Figura 20 – Eclipse solar em RA.	32
Figura 21 – Experimento do satélite.	32
Figura 22 – Experimento do satélite.	33

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	8
1.1	REALIDADE AUMENTADA X REALIDADE VIRTUAL	9
2	REFERENCIAL TEÓRICO	10
2.1	LEIS DE KEPLER	10
2.1.1	Lei das órbitas	10
2.1.2	Lei das áreas	11
2.1.3	Lei dos períodos	13
2.2	LEI DA GRAVITAÇÃO UNIVERSAL	14
2.3	MOVIMENTOS DA TERRA	15
2.3.1	Translação	15
2.3.2	Rotação	16
2.3.3	Precessão	17
2.4	VELOCIDADE DE ESCAPE	18
2.5	SATÉLITES	20
3	METODOLOGIA	21
3.1	FERRAMENTAS DE DESENVOLVIMENTO	21
3.2	EXPERIMENTO DE MARTE	22
3.3	EXPERIMENTO MODELO SOL-TERRA-LUA	25
3.4	EXPERIMENTO DE SATÉLITES	28
4	RESULTADOS	30
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	34
	REFERÊNCIAS	35

1 INTRODUÇÃO

Nos últimos séculos, diversos estudos e teorias foram desenvolvidos na tentativa de explicar as interações presentes no movimento dos corpos celestes. A lei da gravitação universal, enunciada por Isaac Newton (1643-1727) em 1687, em sua obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, oferece uma explicação fundamental sobre a dinâmica desses corpos e as forças envolvidas. No entanto, a visualização e compreensão desses fenômenos em toda a sua complexidade não é uma tarefa intuitiva, uma vez que em sua grande maioria só é possível observar de forma 2D ou através de equipamentos específicos, fazendo-se necessário a busca por ferramentas tecnológicas que possam proporcionar ao aluno uma visão completa e didática das interações presentes no estudo desses corpos.

Novas tecnologias têm sido exploradas no intuito de aperfeiçoar a visualização da dinâmica desses corpos. Uma das tecnologias que tem apresentado destaque nessa área pela sua capacidade de representar objetos virtuais no mundo real é a realidade aumentada (RA). A realidade aumentada está surgindo como uma solução tecnológica que pode superar essas limitações e fornecer uma abordagem mais envolvente e concreta para o ensino desses conceitos. Vidak, Šapic e Mesic (2021) utilizaram essa ferramenta para conseguir demonstrar a força gravitacional através da distância em que os objetos são instanciados no mundo real. Já Dornel et al. (2021) também aplicou essa ferramenta como apoio ao ensino da física para explicar o funcionamento dos eclipses de forma tridimensional no estudo da relatividade geral. Dessa forma, a aplicação da realidade aumentada no estudo da dinâmica dos corpos celestes tem se mostrado promissora, proporcionando uma visualização mais imersiva e interativa dos fenômenos astronômicos. Portanto, o objetivo deste artigo é desenvolver animações em realidade aumentada que possibilitem o estudo e a compreensão dos conceitos teóricos e práticos da Gravitação Universal.

A escolha dessa ferramenta revelou-se a mais eficiente devido ao seu enorme potencial de sobrepor elementos virtuais ao ambiente real, abrindo novas perspectivas de interação e visualizações do material de estudo com os dados e resultados em tempo real (MILGRAM e KISHINO, 1994; AZUMA, 1997). Além disso, um dos benefícios que torna essa tecnologia tão promissora é a facilidade de manipulação dos

objetos sem a necessidade de equipamentos especiais, como telescópios, e proporcionando uma interação ampliada do usuário com o experimento estudado (ZORZAL, 2009; SOUSA et al., 2011).

No contexto educacional podemos ainda relacionar a realidade aumentada como um recurso relevante no processo de ensino-aprendizagem. A utilização dessa ferramenta, em discussões sobre temas abstratos ou distantes da realidade dos alunos, desempenha um papel fundamental ao facilitar a compreensão e assimilação do conteúdo, uma vez que possibilita a exposição de modelos virtuais com uma maior riqueza de detalhes em relação aos modelos tradicionais (Forte e Kirner, 2009; Silva e Rufino, 2021). Além disso, a RA ainda permite ao aluno vivenciar experiências dentro e fora da sala de aula, incentivando-os a interagirem e explorarem a ferramenta em qualquer ambiente que estejam (BILLINGHURST e DUENSER, 2012).

1.1 REALIDADE AUMENTADA X REALIDADE VIRTUAL

Embora as nomenclaturas sejam semelhantes, é importante ressaltar que a Realidade Aumentada (RA) e a Realidade Virtual (RV) se distiguem bastante em suas definições e objetivos. De acordo com Cardoso et al. (2018), a RA trás para o mundo real a adição de elementos computacionais, enquanto a RV desconsidera a visão do mundo real, concentrando-se na criação de um ambiente virtual simulado. Forte e Kirner (2009) complementam que a RV busca como objetivo transportar o usuário exclusivamente para o ambiente virtual, enquanto na Realidade Aumentada a ideia é fazer com que o virtual se complete ao mundo real. Por fim, de acordo com Pinho (1996) e Ribeiro e Zorzal (2011) afirmam que a vantagem da RV é a possibilidade de aprendizagem em locais inacessíveis na realidade, enquanto a realidade aumentada cria um ambiente utilizando objetos virtuais.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

A tentativa da humanidade de compreender as interações dos corpos celestes começou há séculos atrás, com várias contribuições importantes ao longo da história. As primeiras ideias a respeito da gravidade foram desenvolvidas por Aristóteles (384a.C - 322a.C) afirmando que os objetos caíam em direção à Terra porque sua natureza inerente os levava a buscar seu lugar natural. Tempos depois Ptolomeu (90d.C. - 168d.C.) trouxe descrições matemáticas detalhada dos movimentos do Sol e da Lua, em seguida Copérnico (1473-1543) apresentou a sua teoria do heliocentrismo¹ com movimentos circulares, uniformes e concêntricos. Entretanto, somente com Johannes Kepler (1571-1630) que foi possível descrever o movimento detalhado dos planetas em torno do sol. Baseando-se nas observações de Tycho Brahe (1546-1601), Kepler percebeu que as órbitas planetárias não eram perfeitamente circulares, como Copérnico havia postulado, mas sim elípticas. Dessa forma Kepler desenvolveu suas três leis para explicar esses movimentos.

2.1 LEIS DE KEPLER

As leis de Kepler são três princípios fundamentais que descrevem o movimento dos corpos celestes no espaço. Elas foram formuladas pelo astrônomo alemão Johannes Kepler no início do século XVII, com base em observações do movimento dos planetas, principalmente de Marte, feitas pelo seu superior de trabalho, Tycho Brahe. Essas leis forneceram uma base crucial para a compreensão do sistema solar e da mecânica dos astros.

2.1.1 Lei das órbitas

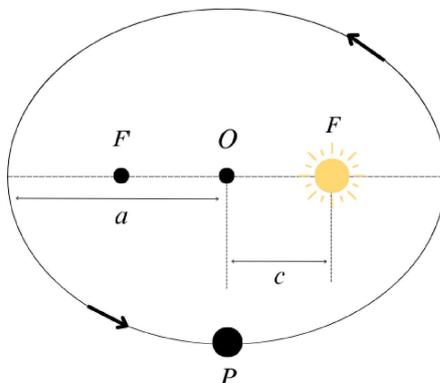
A primeira Lei de Kepler, também conhecida como a lei das órbitas, afirma que os planetas descrevem órbitas elípticas ao redor do Sol, onde o Sol ocupa um dos focos da elipse. Uma das características que diferenciam as orbitas dos planetas é a sua *excentricidade*², que pode ser calculada pela razão de $e = c / a$, sendo a o semieixo

¹ Heliocentrismo é um modelo criado onde o sol ocupa o centro do universo.

² Excentricidade é o grau de achatação da elipse. Para $e = 0$ a elipse degenera num círculo.

maior de uma elipse e c a distância focal, conforme a figura abaixo:

Figura 1 – Órbitas elípticas.



Fonte: Autor

Essa afirmação só foi possível através dos estudos de Kepler sobre o movimento do planeta Marte, conseguindo verificar que sua órbita não se comportava de forma circular. Além disso, Kepler conseguiu observar que o movimento do planeta não era uniforme, pois a velocidade variava quando o planeta estava mais próximo do sol ou mais afastado.

2.1.2 Lei das áreas

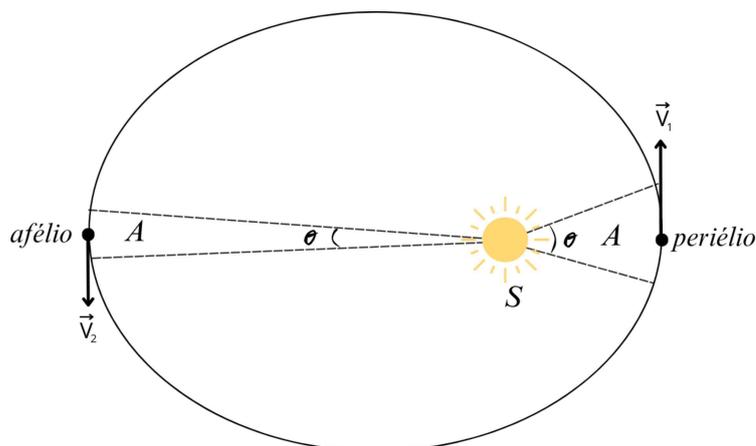
A segunda Lei, conhecida como lei das áreas, afirma que o vetor raio, ligando um planeta ao Sol, varre áreas iguais em intervalo de tempo iguais. Ou seja, no periélio³ o planeta se move mais rápido, enquanto no afélio⁴ o planeta se move mais lentamente.

A figura abaixo mostra a esquematização dessa lei:

³ Periélio é a posição mais perto do sol.

⁴ Afélio é a posição mais afastada do sol.

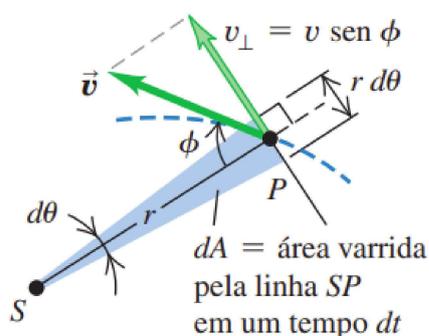
Figura 2 – Lei das áreas.



Fonte: Autor

A área varrida A é varrida no mesmo intervalo de tempo em ambas as posições, mas com velocidades v_1 e v_2 diferentes. Além disso podemos analisar uma área dA para um tempo dt conforme a figura abaixo:

Figura 3 – Lei das áreas.



Fonte: (YOUNG; FREEDMAN, 2015)

Para um intervalo de tempo dt , a linha que liga o Sol S ao planeta P descreve um ângulo $d\theta$, sendo a área varrida dada pelo triângulo sombreado de altura r , base $r d\theta$ e área $dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$. Dessa forma a taxa com a qual essa área é varrida, dA/dt , é denominada velocidade setorial ou velocidade areolar:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} \quad (1)$$

A partir da Figura (2) é possível observamos que para uma distância r menor, como no periélio, teremos um ângulo θ formando a área A , já para uma distância r

maior, como no afélio, teremos um θ menor formando a mesma área, dessa forma o r e o $d\theta/dt$ se relacionam de forma inversamente proporcionais, resultando em uma velocidade setorial dA/dt constante em qualquer ponto da órbita.

Também é possível observarmos que essa lei está diretamente ligada ao princípio da conservação do momento angular, pois partindo da definição do momento angular temos:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (2)$$

Substituindo o momento linear p , obtemos:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

Obtendo o módulo do momento angular e sabendo que a velocidade linear é dada por $v = \omega r$, temos que:

$$L = m\omega r^2 \quad (3)$$

Sabendo que a velocidade angular é $\omega = d\theta/dt$, podemos substituir a equação (3) na equação (1), obtendo o seguinte resultado:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} \quad (4)$$

Portanto, ao dizer que dA/dt é constante é o mesmo que dizermos que o momento angular é conservado.

2.1.3 Lei dos períodos

A lei dos períodos define que o quadrado do período de revolução de qualquer planeta é proporcional ao cubo do semieixo maior da órbita. Para um planeta em órbita adotamos a força gravitacional como a força centrípeta. Partindo da segunda lei de Newton e adotando r como a distância do planeta ao sol, podemos afirmar que:

$$F_g = F_{cp}, \quad (5)$$

$$\frac{GMm}{r^2} = (m)(\omega^2 r), \quad (6)$$

$$\frac{GMm}{r^2} = (m) \left(\frac{4\pi^2 r}{T^2} \right),$$

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM} \right) r^3. \quad (7)$$

A partir da equação (7) é possível explicar a relação entre o período e a distância do semieixo maior. Podemos verificar também que quando comparamos o período entre dois planetas T_1 e T_2 temos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 &= \frac{\left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) r_1^3}{\left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) r_2^3}, \\ \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 &= \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3, \\ \left(\frac{T_1^2}{r_1^3}\right) &= \left(\frac{T_2^2}{r_2^3}\right). \end{aligned} \quad (8)$$

Através da equação (8) Kepler foi capaz de analisar que para qualquer planeta do nosso sistema solar o valor T^2/r^3 se mantinha constante, a tabela abaixo mostra alguns exemplos com os dados atuais obtidos:

Figura 4 – Tabela 3 lei de Kepler.

Planeta	Raio médio da órbita (R) em UA	Período (T) em anos terrestres	T^2/R^3
Mercúrio	0,387	0,241	1,002
Vênus	0,723	0,615	1,001
Terra	1,00	1,00	1,000
Marte	1,524	1,881	1,000
Júpiter	5,203	11,860	0,999
Saturno	9,539	29,460	1,000
Urano	19,190	84,010	0,999
Netuno	30,060	164,800	1,000

Fonte: Aprova Total

2.2 LEI DA GRAVITAÇÃO UNIVERSAL

Por meio das contribuições de Kepler, Newton foi capaz de descrever a dinâmica responsável pelo movimento desses corpos, concluindo que todo objeto que possui massa era capaz de atrair outro corpo com massa, o que chamamos de Gravitação. Foi observado que esse fator não ocorria apenas na terra, mas também se estendia para todo o universo, dessa maneira Newton propôs uma lei chamada de lei da gravitação cujo módulo é expresso por:

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \quad (9)$$

A equação (9) nos mostra que a força gravitacional e a distância são inversamente proporcionais, ou seja, a força gravitacional entre duas partículas diminui com o aumento da distância r : se a distância dobra, a força se reduz a um quarto e assim em diante

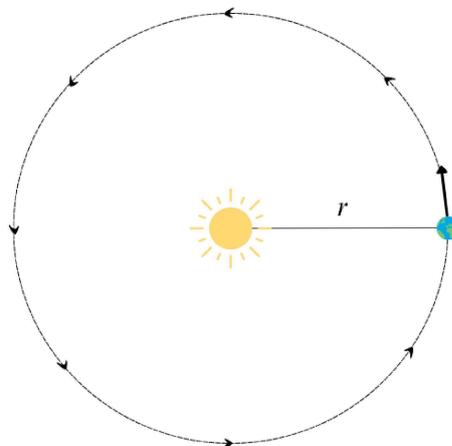
2.3 MOVIMENTOS DA TERRA

Os movimentos realizados pela Terra são fenômenos relevantes que nos ajudam a compreender a dinâmica do nosso planeta. Esses movimentos estão ligados diretamente aos fenômenos climáticos, períodos do dia e estações do ano.

2.3.1 Translação

A translação é o movimento que a terra executa em torno do sol em forma de elipse. O período que a terra dura para dar uma volta completa é de aproximadamente 365 dias. Um dos efeitos mais importantes do movimento translacional é a variação sazonal. À medida que a Terra gira em torno do Sol, sua inclinação axial de cerca de 23,5 graus em relação ao plano de sua órbita permanece constante. A inclinação desse eixo é responsável pela inclinação da luz solar em diferentes partes do planeta em diferentes épocas do ano. A figura abaixo representa a translação da terra com r constante:

Figura 5 – Translação da terra.



Fonte: Autor

Para calcularmos a velocidade de translação da terra podemos adotar que sua orbita possui um raio constante. Pela segunda lei de Newton podemos afirmar as forças presentes no objeto em órbita é dado por:

$$F_{cp} = F_g, \quad (10)$$

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}, \quad (11)$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}. \quad (12)$$

Seguindo a mesma ideia chegamos também na velocidade angular, sendo na forma de:

$$v = wr,$$

$$v^2 = w^2 r^2,$$

$$w^2 = \frac{v^2}{r^2},$$

$$w = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}. \quad (13)$$

Sabendo que o espaço percorrido pela terra é dado pelo comprimento da sua circunferência, é possível encontrarmos o tempo orbital de uma volta completa:

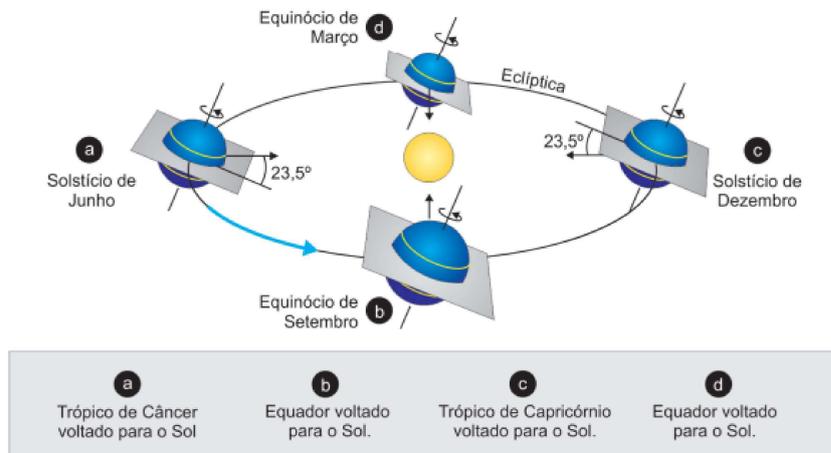
$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t},$$

$$\Delta t = \frac{2\pi R}{v}. \quad (14)$$

2.3.2 Rotação

Além da translação, a terra também realiza rotação em torno do seu próprio eixo. A translação juntamente com a inclinação, entre o equador da Terra e a eclíptica de $23,5^\circ$, são responsáveis pelas estações do ano. A figura abaixo apresenta o esquema de rotação da terra com a translação:

Figura 6 – Rotação e translação da terra.



Fonte: (FILHO; SARAIVA, 2014)

Para realizar uma rotação completa de 360° a terra leva aproximadamente 24 horas. Dessa maneira, cada dia do nosso calendário representa uma rotação completa da terra. Esse movimento é responsável pela mudança entre a visualização do sol e da lua. Para podermos calcular a velocidade angular de rotação da terra utilizamos a seguinte equação:

$$\omega = \frac{2\pi \text{ (rad)}}{T \text{ (s)}} \quad (15)$$

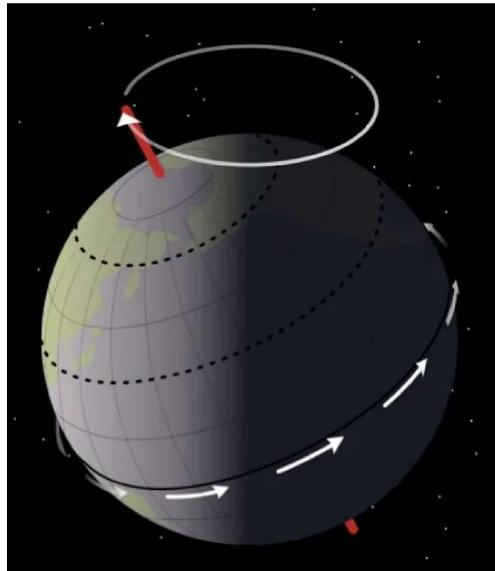
2.3.3 Precessão

A precessão da Terra, ao contrário que muitos livros abordam, foi descoberta inicialmente por Hiparco (190 a.C - 120 a.C) ao comparar suas medidas de posição da estrela Spica com as de Timocharis. A mudança desta posição foi interpretada por Hiparco como uma rotação da esfera das estrelas fixas em torno de um eixo perpendicular ao plano da órbita da Terra, a eclíptica. Em seguida, Copérnico foi o responsável pela interpretação correta em sua teoria do heliocentrismo.

Para entender a precessão, é importante entender alguns conceitos básicos. O eixo de rotação da Terra não é fixo, mas sim inclinado em relação ao plano de sua órbita ao redor do sol. Essa inclinação causa as estações em diferentes regiões da Terra pois recebem diferentes quantidades de luz solar ao longo do ano. No entanto, além dessa inclinação, o eixo de rotação da Terra também sofre uma rotação lenta

semelhante à de um pião. Este movimento é chamado de precessão. O eixo de rotação da Terra descreve um círculo completo a cada aproximadamente 26.000 anos. Segundo Newton, esse fato ocorre devido a Terra não ter uma forma esférica e seu eixo de rotação ser inclinado, a força de atração gravitacional do Sol que atua no lado da Terra mais próximo a ele é maior que a exercida sobre o lado mais afastado dele. A figura abaixo representa a esquematização de como ocorre esse movimento:

Figura 7 – Precessão da terra.



Fonte: NASA

2.4 VELOCIDADE DE ESCAPE

A velocidade de escape pode ser definida como a menor velocidade necessária para que o objeto consiga se distanciar infinitamente da terra. Dessa forma, se pensarmos no lançamento vertical de um objeto a partir da superfície da terra, notaremos que será necessário o objeto realizar trabalho. Para encontrarmos o trabalho W realizado pelo objeto para sair da superfície ao infinito usamos:

$$W = \int_R^{\infty} \vec{F}(r) \cdot d\vec{r} \quad (16)$$

Sabendo que o produto escalar entre $\vec{F}(r)$ e o deslocamento é dado por:

$$\vec{F}(r) \cdot d\vec{r} = F(r) dr \cos \phi \quad (17)$$

Sendo ϕ o ângulo entre $\vec{F}(r)$ e $d\vec{r}$ e $\cos(180) = -1$, podemos substituir $F(r) = GMm/r^2$ obtemos:

$$\vec{F}(r) \cdot d\vec{r} = -\frac{GMm}{r^2} dr \quad (18)$$

Sendo M a massa da terra e m a massa do objeto. Substituindo o valor da equação(11) na equação(9), teremos:

$$W = -GMm \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr,$$

$$W = \left[\frac{GMm}{r} \right]_R^\infty,$$

$$W = -\frac{GMm}{R}. \quad (19)$$

Sendo W o trabalho minimo necessário para deslocar o objeto da superfície da terra ao infinito. A partir do Teorema trabalho-energia cinética temos que $\Delta U = -W$, dessa forma podemos escrever em termos da energia cinética

$$U_\infty - U = -W \quad (20)$$

Temos que a energia potencial no infinito é nula, portanto:

$$U = W = -\frac{GMm}{R} \quad (21)$$

Sabendo o valor da energia potencial podemos agora encontrar a velocidade de escape para um planeta qualquer. No instante em que o objeto atinge o infinito, ele para, e sua energia potencial e gravitacional são anuladas, dessa forma de acordo com a lei de conservação da energia, teremos:

$$U + K = 0,$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{GMm}{R} \right) = 0,$$

$$v^2 = \frac{2GM}{R},$$

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \quad (22)$$

2.5 SATÉLITES

Satélites são corpos celestes feitos pelo homem que orbitam a Terra e desempenham uma variedade de funções importantes. Eles desempenham um papel importante em áreas como telecomunicações, observação da Terra, meteorologia, navegação e pesquisa científica. O movimento desses satélites segue os princípios básicos da física e é regido pelas leis da gravidade e do movimento orbital. Para um Satélite que gira em torno da Terra é necessário uma energia mínima para que esse objeto possa permanecer em órbita. Para encontrarmos essa energia, vamos partir da segunda lei de Newton e considerar inicialmente r como circular:

$$F = m.a, \quad (23)$$

$$\frac{GMm}{r^2} = (m)(\omega^2 r), \quad (24)$$

$$\frac{GMm}{r^2} = (m)\left(\frac{v^2}{r^2}\right) r, \quad (25)$$

$$\frac{GMm}{r^2} = m \frac{v^2}{r}. \quad (26)$$

Sabendo que a Energia Cinética é dada por $mv^2/2$ então temos que a energia para esse caso é dado por:

$$K = \frac{GMm}{2r} \quad (27)$$

Substituindo a equação (26) na equação (27) podemos afirmar que a Energia Cinética é:

$$K = -\frac{U}{2} \quad (28)$$

Portanto a Energia Mécânica será na forma:

$$E = K + U = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r} \quad (29)$$

Dessa forma temos que a Energia necessária para um satélite continuar em órbita circular é da forma

$$E = -K \quad (30)$$

Para órbita elíptica substituímos a distância r pelo valor do semieixo maior a :

$$E = -\frac{GMm}{2a} \quad (31)$$

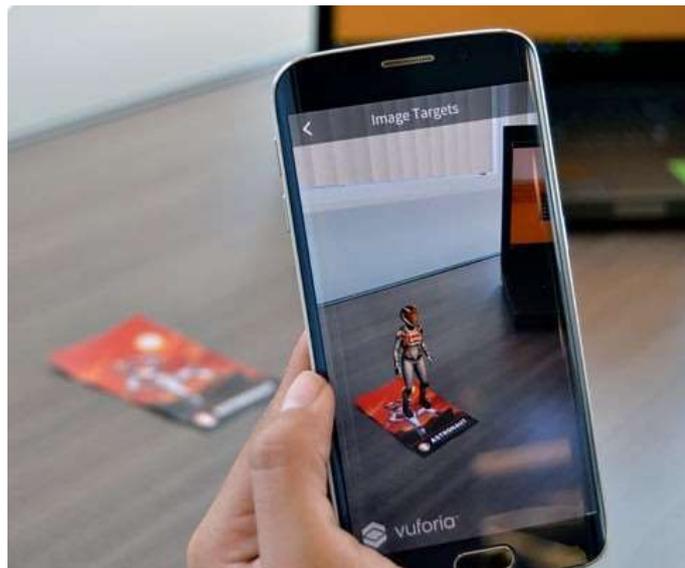
3 METODOLOGIA

O desenvolvimento do aplicativo em realidade aumentada aconteceu em 4 etapas: implementação do pacote responsável pelo reconhecimento da imagem gatilho, criação dos cenários, elaboração dos scripts responsáveis pela dinâmica do experimento, e finalmente a construção da interface do usuário.

3.1 FERRAMENTAS DE DESENVOLVIMENTO

Para o desenvolvimento da plataforma foi utilizado o motor de jogos Unity. A escolha dessa plataforma se mostrou a mais eficiente para a construção do experimento pois é a principal plataforma de criação e operação de conteúdo 3D interativo em tempo real. Além disso, por meio do Unity é possível criar diversos cenários e objetos das mais diversas formas geométricas, podendo ainda modificar sua estrutura e texturas. Por fim, o Unity ainda conta com um kit de sistemas físicos prontos, aplicável a todos os objetos 3D, oferecendo uma melhor experiência e facilidade para o desenvolvimento de aplicações de experimentos físicos. A imagem abaixo mostra um exemplo de aplicação do desenvolvimento de um aplicativo utilizando o Vuforia:

Figura 8 – Aplicativo utilizando Vuforia.

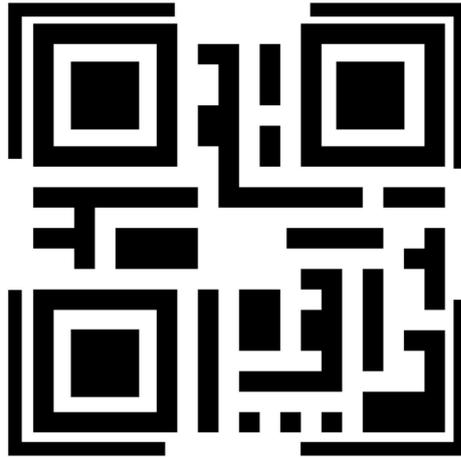


Fonte: Vuforia

Para realizar a transformação do cenário 3D criado no Unity em um ambiente de

realidade aumentada se fez necessário a utilização do pacote Vuforia Engine. O seu funcionamento se baseia na tecnologia de visão computacional para reconhecer e rastrear imagens planares chamadas de “marcadores” ou "triggers". Por meio desse mecanismo, quando o objeto ou imagem é reconhecida pela câmera, instantaneamente é instanciado o cenário 3D criado.

Figura 9 – Imagem gatilho utilizada.



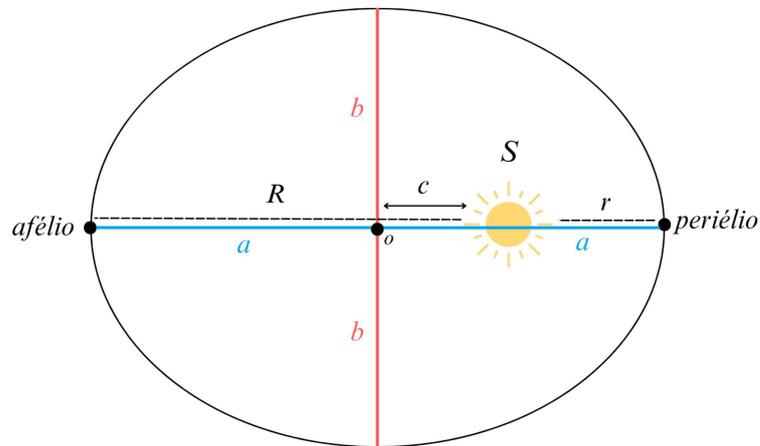
Fonte: Entitas-Physics

3.2 EXPERIMENTO DE MARTE

A construção do experimento de animação da órbita de Marte tem por objetivo que o usuário possa compreender e analisar a aplicação das leis de Kepler a partir da representação orbital. A escolha de Marte para o estudo desse assunto foi devido a sua excentricidade $e = 0,039$ que permite uma melhor visualização da elipse e da mudança da velocidade em posições diferentes.

Para conseguir reproduzir a sua órbita foi necessário inicialmente ter noção da menor e da maior distância entre Marte e o sol, sendo a maior distância no valor de $249,2 \cdot 10^6 km$ e a menor distância $206,6 \cdot 10^6 km$. A partir desses dados podemos encontrar o semieixo maior dessa elipse, a imagem abaixo mostra algumas variáveis da órbita de Marte

Figura 10 – Imagem gatilho utilizada.



Fonte: Autor

A partir da figura (10) observamos que o semieixo a pode ser dado pela seguinte equação:

$$a = \frac{R + r}{2} \quad (32)$$

A partir do semieixo maior também é possível encontrarmos a distância c :

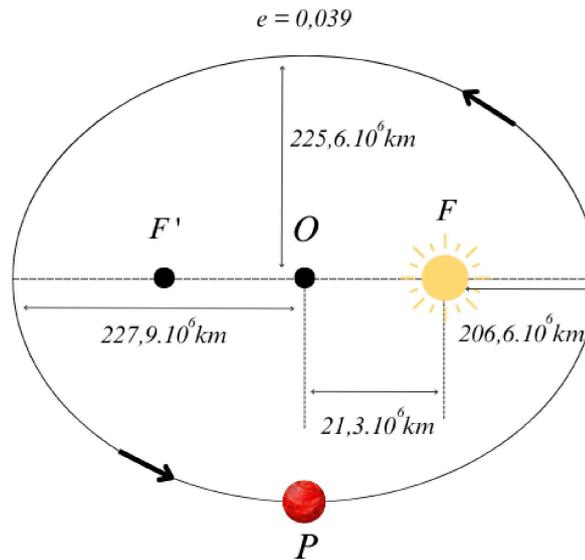
$$c = R - a \quad (33)$$

Para finalizar foi necessário encontrar também o semieixo menor b da elipse, utilizando a equação do semieixo menor:

$$\begin{aligned} b &= a\sqrt{1 - e^2} \\ b &= 227,9\sqrt{(1 - 0,093^2)} \\ b &= 227,9\sqrt{(1 - 0,000086)} \\ b &= 227,9\sqrt{0,99} \\ b &\approx 256.10^6 km \end{aligned} \quad (34)$$

Desta forma, agora temos todos os dados que precisamos para representar a sua órbita. A figura abaixo representa todos os dados coletados:

Figura 11 – Precessão da terra.



Fonte: Autor

Após ter adicionado os dados obtidos nos scripts do projeto, também foi necessário passar a posição de marte em cada instante de tempo, de forma a produzir uma órbita elíptica em torno do sol. As adaptações feitas foram dadas da seguinte forma:

$$x = a \cos(\theta) \quad (35)$$

$$y = b \sin(\theta) \quad (36)$$

$$\theta = \omega t \quad (37)$$

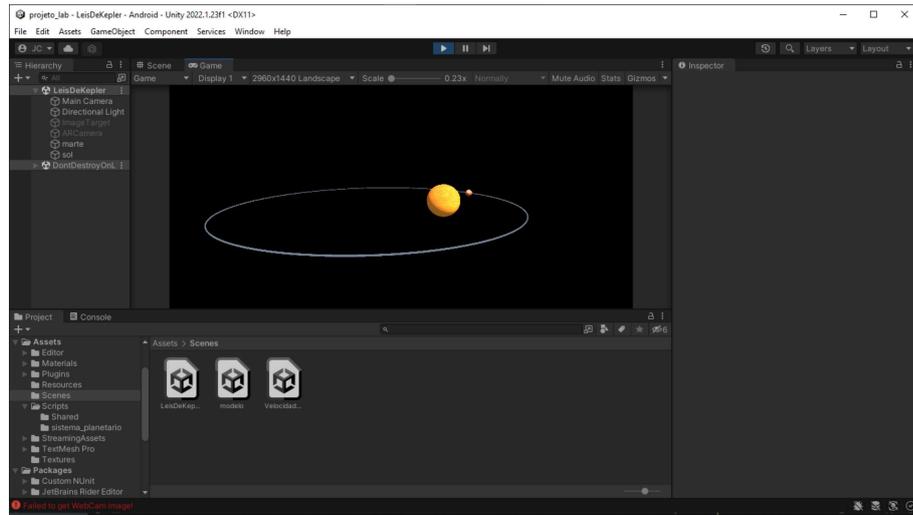
Para conseguir representar a variação da velocidade de acordo com a distância do planeta até o sol foi definido no script o valor de w baseado no cálculo da distância d :

$$w = \frac{1}{d^2} \quad (38)$$

A fim de trazer os valores reais foi necessário realizar um tratamento desse valor w para retornar na interface do usuário uma variação entre a velocidade mínima da órbita de marte igual a $21,97 \text{ km/s}$ e a velocidade máxima igual a $26,50 \text{ km/s}$,

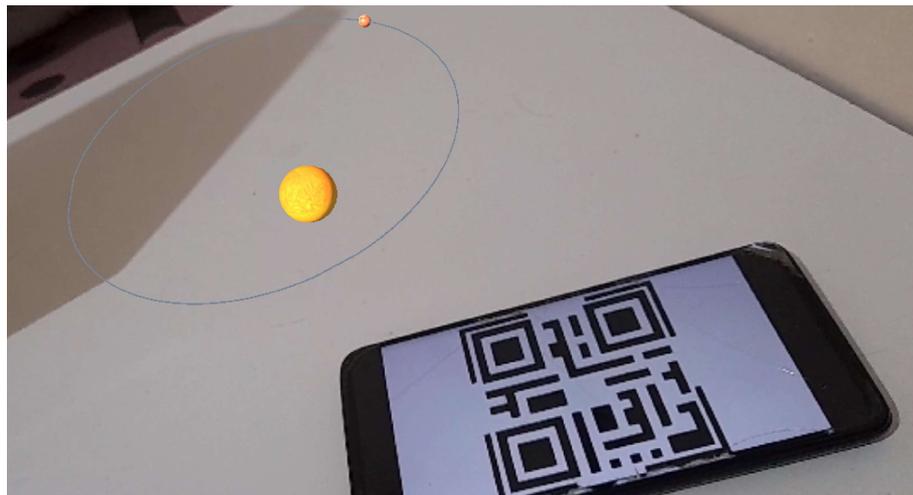
Após implementado toda a dinâmica da animação, foi observado no estágio de testes que o centro da órbita era ocupado pelo sol, para corrigir isso foi configurado para a posição inicial do sol ser igual a $c = 21,3 \cdot 10^6 \text{ km}$, dessa forma a animação foi corrigida para que o sol ocupasse um dos focos da elipse. As imagens abaixo mostram o experimento desenvolvido no Unity e aplicados à realidade aumentada:

Figura 12 – Experimento Marte no Unity.



Fonte: Autor

Figura 13 – Experimento de marte em RA.



Fonte: Autor

3.3 EXPERIMENTO MODELO SOL-TERRA-LUA

Para a construção das animações presente no sistema sol-terra-lua foi necessário adotarmos inicialmente que a distância entre a terra e o sol R , e a distância da terra até a lua r , fossem constantes. Além disso também houve a necessidade de adaptar o diâmetro dos corpos e a distância entre eles para que fosse possível a visualização dos fatores dinâmicos e visuais da animação. Para que não houvesse alterações dos valores de velocidade, posição e das forças esses valores foram corrigidos nas

interfaces de usuário.

Para conseguir realizar o movimento orbital de translação, tanto da terra em torno do sol, quanto da lua em torno da terra, foi utilizado o vetor posição de ambos como forma de localização do corpo no decorrer do tempo. Adotando \vec{x}_t como a posição da terra e \vec{x}_l como a posição da lua, as equações utilizadas na construção dos scripts foram:

$$\vec{x}_t = R \cos \theta \hat{i} + R \sin \theta \hat{j} \quad (39)$$

$$\vec{x}_l = r \cos \theta \hat{i} + r \sin \theta \hat{j} \quad (40)$$

Sendo θ descrito pela equação (37) e a velocidade angular w descrita pela equação (13). Além das posições e das velocidades angulares foi implementado na interface de usuário a velocidade linear da terra v_t e da lua v_l que pode ser facilmente calculada pela na equação (12), substituindo os valores temos que a velocidade linear da lua e da terra pode ser dada por:

$$v_t = \sqrt{\frac{GM_{sol}}{R}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,98 \cdot 10^{30}}{1,5 \cdot 10^{11}}} = 2,96 \cdot 10^4 m/s \quad (41)$$

$$v_l = \sqrt{\frac{GM_{terra}}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{3,84 \cdot 10^8}} = 1,02 \cdot 10^3 m/s \quad (42)$$

Para o movimento de rotação da terra em torno de si mesma foi inicialmente adicionado uma inclinação em seu eixo de módulo igual a $23,5^\circ$. Na definição do seu movimento foi utilizado a equação (15) para conseguir verificar a taxa que o planeta irá rotacionar por segundo, dessa forma o módulo da velocidade de rotação retornada pode ser calculado da seguinte maneira:

$$w_r = \frac{2\pi}{T}$$

$$w_r = \frac{360}{86.400} = 0,0041 rad/s \quad (43)$$

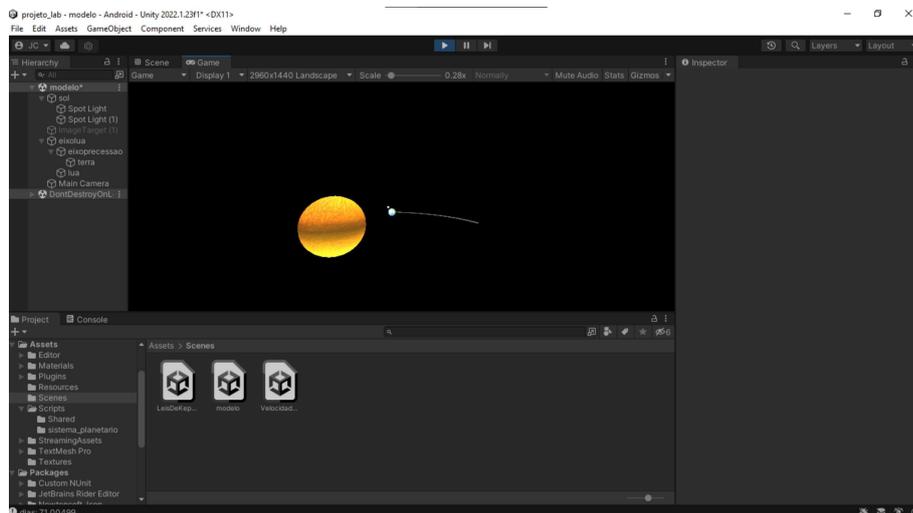
Outro movimento da terra adicionado foi o de precessão da terra que seguiu a mesma ideia da rotação no eixo longitudinal, portanto temos que a variação de rotação será dada por:

$$w_r = \frac{2\pi}{T}$$

$$w_r = \frac{360}{26000} = 0,013rad/ano \quad (44)$$

Por fim, foi adicionado a funcionalidade do Unity chamada de *"point light"* no qual permite adicionar um ponto de luz dentro do objeto 3D do sol, simulando assim a luz solar. Essa luminosidade permite analisar diversos fatores como a visualização da sombra causada pela lua na terra, os eclipses lunares e solares. As figuras abaixo mostram o projeto dentro do Unity e o projeto aplicado a realidade aumentada:

Figura 14 – Experimento Modelo no Unity.



Fonte: Autor

Figura 15 – Experimento Modelo em RA



Fonte: Autor

3.4 EXPERIMENTO DE SATÉLITES

O desenvolvimento desse experimento foi baseado no experimento mental realizado por Newton chamado canhão de Newton. O experimento se baseia na ideia de um canhão isolado, sem nenhuma interferência externa, disparando um projétil a partir de uma certa altura h e com uma velocidade inicial V_0 . A ideia nessa experiência é conseguir observar a mudança na trajetória do projétil devido as forças presentes no seu movimento, além disso também é possível observar a velocidade de escape e a energia mínima para o objeto entrar em órbita, pois a partir de uma certa velocidade o objeto lançado entra em órbita e retorna a sua posição inicial de lançamento.

Para conseguir criar essa animação no Unity foi necessário entender que a velocidade inicial do objeto lançado possui uma distância máxima R , dessa forma as posições do projétil lançado irão variar da seguinte forma:

$$x = R \cos(\theta) \quad (45)$$

$$y = R \sin(\theta) \quad (46)$$

sendo o R obtido através da equação (11), onde GM/r^2 na superfície da terra é constante igual a g , portanto:

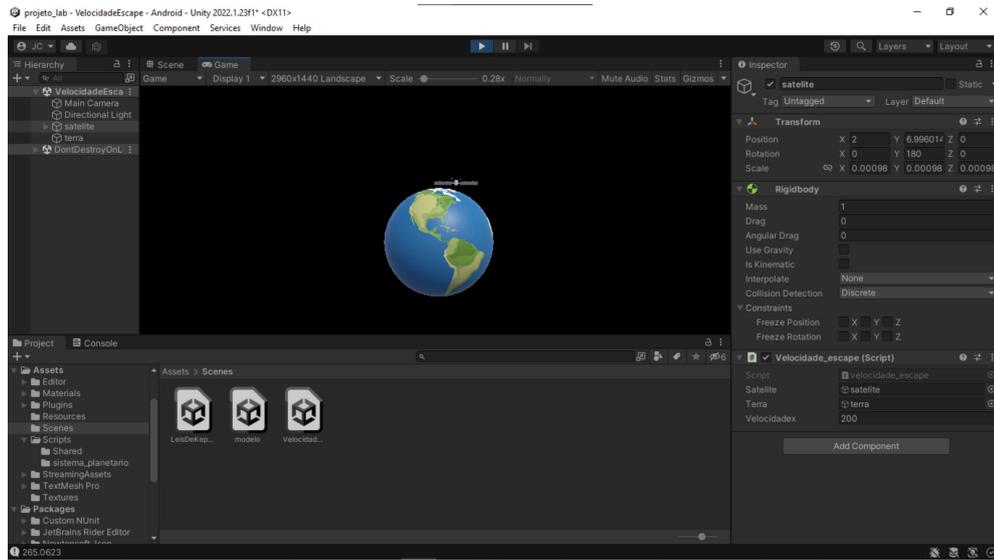
$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{R} &= mg \\ R &= \frac{v^2}{g} \end{aligned} \quad (47)$$

A partir do R podemos obter o θ a partir da equação (37), onde $w = v/R$

$$\theta = \frac{v}{R}t \quad (48)$$

Por fim foi mostrado também na interface de usuário a Energia do objeto em órbita obtida através da equação (31). A figura abaixo mostra a aplicação no Unity e em realidade aumentada

Figura 16 – Experimento do satélite.



Fonte: Autor

Figura 17 – Experimento do satellite.



Fonte: Autor

4 RESULTADOS

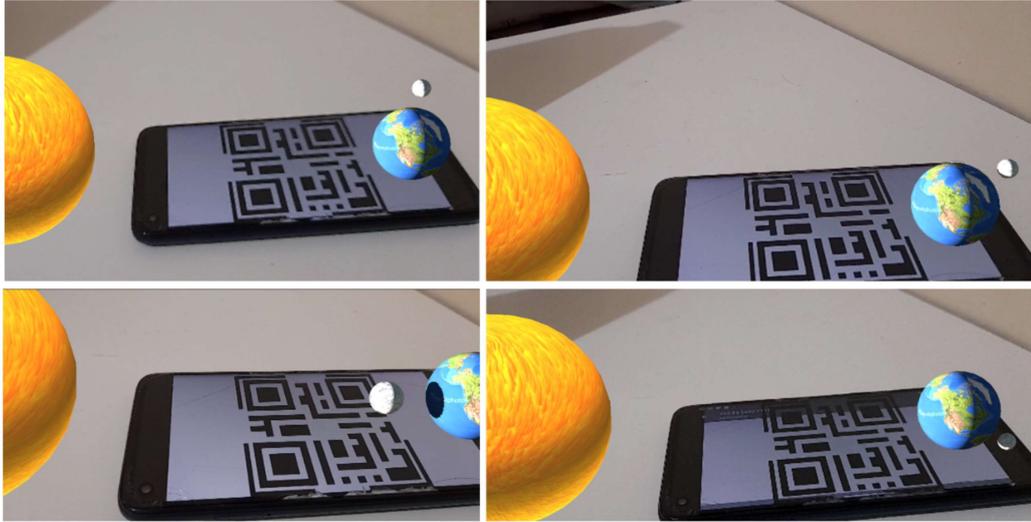
No estágio final do trabalho foi realizada uma análise sobre os experimentos, de forma a perceber como essa ferramenta pode ser aplicada em sala de aula e o que é possível estudar do referencial teórico do conteúdo. O experimento de Marte pode ser utilizado em sala de aula de forma empírica pelos alunos, de forma que eles possam observar alguns fatores como:

1. O formato elíptico da órbita do planeta em relação ao sol e a posição do Sol ocupando um dos focos da elipse.
2. A variação da velocidade linear de Marte dependendo da sua posição dentro da órbita e da distância entre o planeta e o sol.
3. Buscar compreender relação de T^2/R^3 para Marte e para a terra e suas semelhanças.

Será necessário um dispositivo Android e um QRCode impresso para cada aluno. O professor participará como mediador nesse processo, de forma a induzir o aluno a perceber esses pontos dentro do aplicativo e contextualizar historicamente como ocorreu para que fosse possível observar esses fatores e por fim introduzir as leis de Kepler.

Para o experimento do modelo da terra-lua-sol foram observados alguns fenômenos decorrente da interação entre a terra e a lua. Um dos efeitos que pode ser observado é a mudança nas fases da lua, decorrente do movimento da terra e da própria lua. A figura abaixo mostra o efeito das fases da lua :

Figura 18 – Fases da lua em RA.



Fonte: Autor

Outro fenômeno que foi observado na animação foram os eclipses solares e lunares das interações entre a lua-terra-sol como a figura abaixo mostra:

Figura 19 – Eclipse lunar em RA.



Fonte: Autor

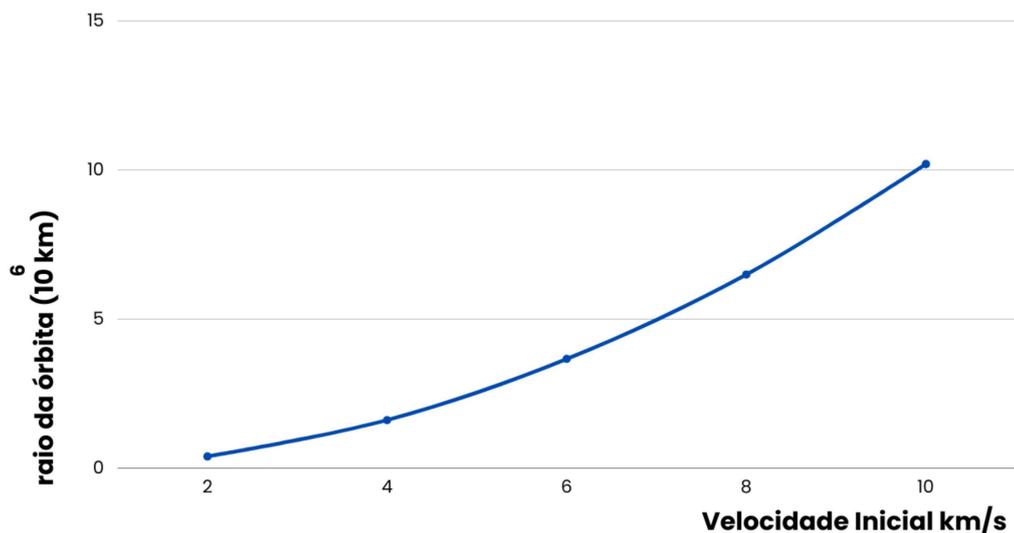
Figura 20 – Eclipse solar em RA.



Fonte: Autor

Para o experimento do satélite foram verificados os raios obtidos da órbita pelos projetos lançados de acordo com sua velocidade inicial. Os raios obtidos para algumas velocidades iniciais testadas foram:

Figura 21 – Experimento do satélite.



Fonte: Autor

Sabendo que altura inicial que o satélite é lançado é de 6400km, em relação ao centro da terra, esses testes resultaram na órbita de apenas dois valores descritos na tabela abaixo:

Figura 22 – Experimento do satélite.

v (km/s)	Órbita
2	Não
4	Não
6	Não
8	Sim
10	Sim

Fonte: Autor

Analisando o gráfico com a tabela notamos que apenas os valores de 8km/s e 10km/s conseguiram entrar em órbita com a terra, esse fato pode ser justificado justamente pelo raio de suas órbitas serem maiores que o raio da terra (6371km), tornando possível o seu movimento de translação.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com base no que foi apresentado sobre a busca por tecnologias que possibilitem a visualização completa do estudo teórico de gravitação universal, podemos concluir que o uso do aplicativo pode ser muito eficiente para o estudo dos fenômenos gravitacionais. O resultado da animação se mostrou fiel visualmente, ainda que com limitações e adaptações, à física estudada na área da Gravitação Universal, portanto, trata-se de uma ferramenta que auxiliará muito nos momentos de prática, buscando uma redução da carência experimental dos discentes. Além disso sabemos que os smartphones são dispositivos cada vez mais presentes em qualquer idade, por isso um aplicativo gratuito, de fácil acesso e que contenha experimentos tridimensionais em realidade aumentada tem um enorme potencial de tornar o estudo da matéria mais interativo para o aluno. Indo mais além, por se tratar de um laboratório, o aplicativo contará com novas atualizações para aumentar ainda mais experimentos e simulações de todas as ramificações da física (Mecânica, Termodinâmica, Ondas, Óptica, Eletromagnetismo etc.). O aplicativo e a imagem gatilho podem ser acessados pelo link no [Drive](#) .

REFERÊNCIAS

- AZUMA, R. T. A survey of augmented reality. **Presence: Teleoperators and Virtual Environments**, v. 6, p. 355–385, 1997.
- BILLINGHURST, M.; DUENSER, A. Augmented reality in the classroom. **Computer**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 45, n. 7, p. 42–49, 2012.
- CARDOSO, A. et al. O desafio de projetar recursos educacionais com uso de realidade virtual e aumentada. **Anais do Workshop de Desafios da Computação Aplicada À Educação (Desafie!)**, Sociedade Brasileira de Computação - SBC, p. 1–8, 2018.
- DORNEL, A. P. et al. Eclipses, relatividade geral e sobral: Uma abordagem usando realidade aumentada. **XI Encontro Científico de Física Aplicada**, v. 7, 2021.
- FILHO, K. de souza O.; SARAIVA, M. de F. O. **Astronomia e Astrofísica**. [S.l.]: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2014.
- FORTE, C. E.; KIRNER, C. Usando realidade aumentada no desenvolvimento de ferramentas para aprendizagem de física e matemática. **Renote**, v. 9, n. 1, p. 1–9, 2011.
- MILGRAM, P.; KISHINO, F. A taxonomy of mixed reality visual displays. **IEICE Transactions on Information Systems**, E77-D, n. 12, 1994.
- M.PINHO; KIRNER, C. Introdução à realidade virtual. **Minicurso JAI/SBC**, 1996.
- NASA. 2023. Disponível em: <https://mundoeducacao.uol.com.br/geografia/movimento-rotacao.htm>
Acesso em: 27 de jul. 2023.
- NEWTON, I. *Philosophiæ naturalis principia mathematica*. **Londini: Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater**, 1687.
- NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica**. 5. ed. [S.l.]: Blucher, 2013. v. 1.
- RESNICK, J. W. R.; HALLIDAY, D. **Fundamentos de Física**. 9. ed. [S.l.]: LTC, 2012. v. 2.
- RIBEIRO M. W. S; ZORZAL, E. R. **Realidade Virtual e Aumentada: Aplicações e Tendências**. [S.l.]: Editora SBC, 2011.
- ROCHA, J. F. **Origens E Evolução Das Ideias Da Física**. 1. ed. [S.l.]: Edufba, 2002. v. 1.
- SILVA, L. G. P. da; RUFINO, H. L. P. O ensino de história e o uso de realidade aumentada. **REVISTA INTERSABERES**, v. 16, n. 37, p. 138–159, 2021.
- TARSIA, R. D. O movimento de precessão da terra. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, 1999.
- TOTAL, A. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/geografia/precessao-dos-equinocios.htm>. Acesso em: 06 de jul. 2023.

U. Plataforma de desenvolvimento em tempo real do Unity 3D, 2D VR e Engine AR. Technologies. 2021. Disponível em: <https://unity.com/pt>. Acesso em: 11 de maio. 2021.

VUFORIA DEVELOPER PORTAL. 2021. Disponível em: <https://developer.vuforia.com>. Acesso em: 12 de dez. 2021.

YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. **Termodinâmica e Ondas**. 14. ed. São Paulo: Pearson Universidades, 2015. v. 2.

ŠAPIĆ, M. et al. Learning about the force of gravity: findings from a survey research. **Journal of Physics**, 2022.