

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DO RIO GRANDE DO NORTE

PAULO MANOEL DA SILVA CARDOSO

UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE ONDAS GRAVITACIONAIS

SANTA CRUZ

2023

PAULO MANOEL DA SILVA CARDOSO

UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE ONDAS GRAVITACIONAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso Superior de Licenciatura em Física do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte - IFRN Campus Santa Cruz, em cumprimento às exigências legais como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Me. Jardel Lucena da Silva.

SANTA CRUZ

2023

Cardoso, Paulo Manoel da Silva

C268u Uma introdução ao estudo de ondas gravitacionais / Paulo Manoel da Silva
Cardoso - 2023.
168 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Física) – Instituto
Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte.
Orientador: Prof. Me. Jardel Lucena da Silva.

1. Ensino de física moderna. 2. Relatividade geral. 3. Ondas gravitacionais.
I. Silva, Jardel Lucena da. II. Instituto Federal de Educação, Ciência e
Tecnológica do Rio Grande do Norte. III. Título.

CDU 53

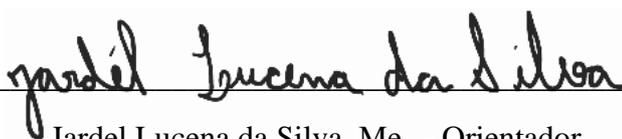
PAULO MANOEL DA SILVA CARDOSO

UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE ONDAS GRAVITACIONAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso Superior de Licenciatura em Física do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte - IFRN Campus Santa Cruz, em cumprimento às exigências legais como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Física.

Apresentado e aprovado em: 17 de fevereiro de 2023.

BANCA EXAMINADORA



Jardel Lucena da Silva, Me. – Orientador
IFRN / Campus Santa Cruz



Roney Roberto de Melo Sousa, Me – 1º Examinador
IFRN / Campus Santa Cruz



Alyson José Alves Carvalho, Dr. – 2º Examinador
UFPE / Campus Recife

Dedico este trabalho a Jesus Cristo e à minha amada namorada Laryza Denyze, cujo amor e apoio constante foram fundamentais para a conclusão deste curso. Obrigado por serem a minha rocha, meu eterno amor e minha razão para sorrir todos os dias.

AGRADECIMENTOS

Cara Monografia!

É com muita alegria e satisfação que apresento este trabalho ao término da minha jornada acadêmica, pois não seria possível sem o apoio e incentivo de muitas pessoas ao longo deste caminho.

Gostaria de começar agradecendo a Deus por sua constante presença e força durante toda a minha jornada acadêmica e processo de elaboração desta monografia. Com sua graça e sabedoria, consegui superar os desafios e obter a minha formação como professor de Física. Agradeço por suas bênçãos e proteção durante todo esse tempo. Que Deus continue também a abençoar meu caminho e a guiar-me em todas as minhas conquistas futuras.

Quero agradecer aos meus pais por sempre estarem ao meu lado, em especial à minha mãe, por sempre me apoiar e acreditar em mim. Sua dedicação e amor foram fundamentais para a conclusão deste trabalho.

Agradeço também às minhas irmãs Ivone, Isabel e Hilany, pelo carinho e amizade que sempre me deram. Sua presença e apoio foram essenciais para que eu pudesse ultrapassar as dificuldades e alcançar este objetivo.

À minha amada namorada, Laryza Denyze, meu agradecimento mais especial por ela estar ao meu lado em todos os momentos e por ser paciente e compreensiva ao longo da minha jornada acadêmica. Obrigado, meu amor, por ser minha fonte de inspiração, por sempre estar presente, acreditando e me dando forças para continuar. Seu amor e apoio são inestimáveis.

Não posso deixar de agradecer ao meu orientador, Me. Jardel Lucena, por sua disponibilidade para orientar essa etapa final da minha jornada acadêmica, por sua compreensão e paciência ao longo de toda a produção desta monografia, e por sua dedicação e conhecimento. Suas orientações foram valiosas na minha formação e decisivas para a realização deste trabalho.

Expresso também minha gratidão ao Me. Roney Melo e ao Dr. Alyson Carvalho, pela disponibilidade e comprometimento em participar da Banca de Avaliação do meu trabalho de conclusão de curso intitulado "Uma Introdução ao Estudo de Ondas Gravitacionais". Sua disposição em dedicar seu tempo e conhecimento para ler e avaliar este trabalho é de extrema importância para a conclusão da minha jornada acadêmica. Agradeço por todas as sugestões e

contribuições valiosas que, certamente, enriquecerão o trabalho e minha formação como professor de Física.

Aos professores Geógenes Melo, do IFRN Campus Nova Cruz, Maria Emília, do IFRN Campus Natal Zona Norte, Caio Vasconcelos, Giulliano José, atual Diretor Acadêmico do IFRN Campus Santa Cruz, e demais educadores deste Campus, agradeço por seus ensinamentos, contribuições e por terem me proporcionado uma formação sólida.

Por fim, gostaria também de agradecer as equipes de gestão e diretoria do IFRN Campus Santa Cruz e seu motorista Zeca, que muitas vezes conduziu os veículos que nos levaram aos eventos da nossa área de formação. Obrigado também às equipes que serviram as refeições e lanches no refeitório do nosso campus, à equipe de limpeza, ao pessoal da manutenção estrutural e a todos aqueles que de alguma forma contribuíram direta ou indiretamente prestando suporte à minha jornada acadêmica e na realização deste trabalho.

Agradecidamente,

Paulo Manoel da Silva Cardoso.

A gravidade não é uma força, é uma consequência da geometria do espaço-tempo.

Albert Einstein.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
FMC	Física Moderna e Contemporânea
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
LIGO	<i>Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory</i>
Tensor EMT	Tensor Energia-Momentum Tensão
TRE	Teoria da Relatividade Especial
TRG	Teoria da Relatividade Geral

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo introduzir um estudo bibliográfico a respeito das soluções da equação de onda que se revelam adequadas para descrever o comportamento das Ondas Gravitacionais, que foram postuladas em 1915 na Teoria da Relatividade Geral de Albert Einstein. Inicialmente, é apresentada uma contextualização que justifica o desenvolvimento deste estudo como um subsídio para a formação de futuros professores de Física. Em seguida, o tema é abordado sob uma perspectiva histórica não aprofundada, com a discussão das principais ideias da Teoria da Relatividade Especial e da Teoria da Relatividade Geral. Esse arcabouço teórico é utilizado para subsidiar a obtenção das soluções para as Ondas Gravitacionais e suas implicações Físicas, como o comportamento e as consequências observacionais, incluindo a relação dessas ondas com a curvatura do espaço-tempo. Por fim, são apresentadas algumas informações relevantes sobre a comprovação da existência das Ondas Gravitacionais pelo *Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory* (LIGO) em 2016, o que corroborou a predição da Teoria da Relatividade Geral de Einstein quanto a essas ondas. Essa comprovação é importante para novas pesquisas relacionadas a eventos cósmicos altamente energéticos, como as Ondas Gravitacionais, que podem levar a possíveis ajustes e/ou definições de novas hipóteses e teorias da Física, da Astrofísica e da Cosmologia, bem como tem o potencial de proporcionar a experimentação por parte dessas áreas da Ciência e trazer novas descobertas sobre as origens de fenômenos cosmológicos desse tipo e sobre o surgimento do Universo. Nesse contexto, conclui-se que este trabalho pode desempenhar um papel importante no panorama do ensino de Física Moderna e Contemporânea, se utilizado como um material didático norteador para apropriação do referido tema.

Palavras-chave: Ensino de Física Moderna; Relatividade Geral; Ondas Gravitacionais.

ABSTRACT

The present work aims to introduce a bibliographic study on the solutions of the wave equation that are suitable for describing the behavior of gravitational waves, which were postulated in 1915 in Albert Einstein's Theory of General Relativity. Initially, a contextualization is presented that justifies the development of this study as a subsidy for the formation of future Physics teachers. Next, the topic is approached from an unexplored historical perspective, discussing the main ideas of the Theory of Special Relativity and the Theory of General Relativity. This theoretical framework is used to support the obtaining of solutions for gravitational waves and their physical implications, such as behavior and observational consequences, including the relationship of these waves with the curvature of space-time. Finally, some relevant information is presented on the confirmation of the existence of gravitational waves by the Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory (LIGO) in 2016, which corroborated Einstein's prediction in the Theory of General Relativity regarding these waves. This confirmation is important for new research related to highly energetic cosmic events, such as gravitational waves, which can lead to possible adjustments and/or definitions of new hypotheses and theories of Physics, Astrophysics, and Cosmology, as well as have the potential to provide experimentation by these areas of Science and bring new discoveries about the origins of such cosmological phenomena and the emergence of the Universe. In this context, it is concluded that this work can play an important role in the panorama of the teaching of Modern and Contemporary Physics, if used as guiding didactic material for the appropriation of the aforementioned topic.

Keywords: Modern Physics Teaching; General Relativity; Gravitational Waves.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	12
1. UMA BREVE CONTEXTUALIZAÇÃO SOBRE ONDAS GRAVITACIONAIS	14
2. ALGUNS ASPECTOS SOBRE A TEORIA DA RELATIVIDADE ESPECIAL (TRE)	20
2.1 UMA BREVE CONTEXTUALIZAÇÃO SOBRE O SURGIMENTO DA TEORIA DA RELATIVIDADE ESPECIAL (TRE).....	20
2.2 OS POSTULADOS DA TRE.....	23
2.3 CONSEQUÊNCIAS DOS POSTULADOS	25
2.3.1 Dilatação do tempo.....	25
2.3.2 Contração do comprimento.....	27
2.4 ESPAÇO-TEMPO.....	29
2.4.1 Métrica do espaço-tempo.....	32
2.4.2 Quadri-velocidade	34
2.4.3 Quadri-momentum.....	35
2.4.4 Tensor energia-momentum-tensão (EMT).....	36
3. RELATIVIDADE GERAL.....	45
3.1 PRINCÍPIO DE EQUIVALÊNCIA DE EINSTEIN	45
3.2 ALGUNS RECURSOS PRELIMINARES	48
3.2.1 Relação do símbolo de Christoffel com a métrica	53
3.2.2 Derivada covariante	55
3.2.3 Símbolo de Christoffel com vetores duais	56
3.2.4 Transformando Λ^r_{js} no símbolo de Christoffel.....	57
3.3 TENSOR DE RIEMANN	60
3.4 EQUAÇÃO DE EINSTEIN	72
4. ONDAS GRAVITACIONAIS	82
4.1 O OPERADOR DE D'ALEMBERT.....	82
4.2 A GRAVIDADE LINEARIZADA	84
4.2.1 Métrica inversa.....	86
4.2.2 Símbolo de Christoffel linearizado	88
4.2.3 Tensor de Riemann linearizado	89
4.2.4 Tensor de Ricci linearizado	90
4.2.5 Escalar de Ricci linearizado	91
4.2.6 Tensor de Einstein linearizado.....	92
4.2.7 Equação de Einstein linearizada.....	94

4.3	GAUGE DE LORENZ.....	95
4.3.1	Coordenadas do Gauge de Lorenz.....	99
4.3.2	mudança de coordenadas de $g_{\mu\nu}$	101
4.3.3	mudança de coordenadas de $h_{\mu\nu}$	103
4.3.4	mudança de coordenadas de $R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}$	103
4.3.5	mudança de coordenadas de \bar{h}	105
5.	CONSEQUÊNCIAS OBSERVACIONAIS.....	111
5.1	INTRODUÇÃO À POLARIZAÇÃO DA ONDA GRAVITACIONAL.....	111
5.2	BREVE REVISÃO SOBRE ONDAS PLANAS.....	112
5.2.1	Derivada da onda plana.....	114
5.2.2	Vetor de onda nulo.....	115
5.3	COMPONENTES DA AMPLITUDE $A_{\mu\nu}$ DE ONDA.....	116
5.3.1	Transverse-Traceless Gauge.....	121
5.3.2	Determinado os componentes da amplitude $A_{\mu\nu}$ de onda.....	123
5.3.3	Os componentes de polarização da Onda Gravitacional.....	125
5.4	ONDAS GRAVITACIONAIS VS COORDENADAS ONDULADAS.....	125
5.4.1	Geodésica para uma partícula perturbada por uma Onda Gravitacional.....	128
5.4.2	Comprimento próprio entre geodésicas.....	130
5.4.3	Interpretando a polarização <i>plus</i> + e <i>cross</i> × da Onda Gravitacional.....	135
5.4.4	Onda Gravitacional e a curvatura do espaço-tempo.....	138
5.5	DETECÇÃO DAS ONDAS GRAVITACIONAIS.....	141
	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	145
	REFERÊNCIAS.....	147
	APÊNDICE A – UMA BREVE JUSTIFICATIVA PARA ESTE APÊNDICE.....	150
	APÊNDICE B – UMA BREVE JUSTIFICATIVA PARA ESTE APÊNDICE.....	163

INTRODUÇÃO

A Física compreende um dos importantes ramos da Ciência, responsável por estudar o comportamento da natureza e do universo e seus fenômenos em seus aspectos gerais. É a parte da Ciência responsável por analisar as relações e propriedades desses eventos, bem como descrever e explicar suas origens e consequências.

Ao longo de sua história, o desenvolvimento da Física se deu em um contexto de desafios culturais e tecnológicos desde os tempos em que a crença em deuses e mitos impediam o avanço científico, descreve Toribio (2015, p. 9). Segundo Bittar (2009, p. 16) e Rosa (2012, p. 23-24), essa evolução foi gradual, não apenas como uma ciência em si, mas também no contexto educacional.

A formação educacional e profissional do indivíduo foi, e ainda é, crucial para o avanço da Ciência e das tecnologias que transformam a sociedade. A Física, em particular, desempenha um papel fundamental nesse processo, pois suas evoluções frequentemente resultam no desenvolvimento de novas tecnologias que impactam direta e indiretamente a vida das pessoas, sendo, portanto, necessária sua compreensão tanto no aspecto de fomentar o desenvolvimento de mais aparatos que melhorem a vida dessas pessoas, como para inserir o indivíduo de maneira consciente na realidade que habita.

No Brasil, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) vigentes, entre outros documentos norteadores da educação no país, são responsáveis por orientar a elaboração dos currículos das escolas públicas e privadas da Educação Básica. No que diz respeito ao ensino de Física, a BNCC (2018, p. 7-20) destaca a importância da formação e preparação de professores de Física e incentiva a contextualização da Física Moderna junto à Física Clássica, visto que este é um importante ramo da Ciência em evolução e cujo ensino deve se manter atualizado conforme as novas descobertas, defende Sabino (2015, p. 8-14).

Apesar desta recomendação, é notório na literatura acadêmica trabalhos que mencionam problemas sobre uma efetiva inserção de temas da Física Moderna e Contemporânea (FMC) em ambientes de sala de aula, seja na educação básica, ou mesmo em cursos de formação de professores de Física (MONTEIRO, NARDI e BASTOS FILHO, 2012; OLIVEIRA, VIANNA e GERBASSI, 2007). Nessa perspectiva, com o intuito de contribuir para uma dissolução deste quadro no cenário de formação associado à Física, pretendemos neste trabalho realizar uma

revisão bibliográfica sobre um tema da FMC que, por não ser ainda amplamente discutido em tal contexto, poderá vir a desempenhar um papel de fonte introdutória ao tema para professores de Física e/ou estudantes da área ainda em período de formação. O tema correspondente a tal escolha se trata das Ondas Gravitacionais. A ausência da discussão sobre este fenômeno no ensino de Física pode ser justificada pelo fato da sua recente verificação observacional, ocorrida em 2015.

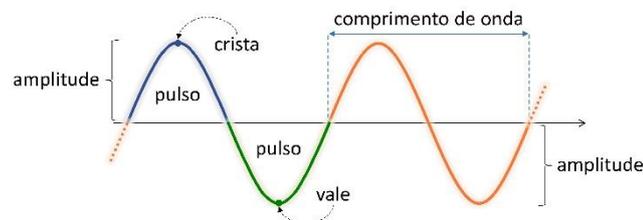
Deste modo, o presente trabalho se encontra organizado da seguinte forma: o primeiro capítulo será introdutório, abordando o tema de forma geral. Em seguida, o segundo capítulo fará uma análise prévia da TRE de Einstein, com enfoque no formalismo vetorial e da Álgebra Tensorial, para posteriormente adentrar no formalismo matemático necessário para estudar a TRG. O terceiro capítulo apresentará a TRG de Einstein, que se baseia no Princípio da Equivalência de Einstein, e que é uma extensão da TRE para fenômenos físicos em referenciais não inerciais. Serão definidos alguns recursos preliminares à definição de algumas grandezas físicas quadri-dimensionais invariantes. Já o quarto capítulo tratará sobre Ondas Gravitacionais, considerando o limite de campo fraco, também conhecido como gravidade linearizada, como uma condição da TRG para descrever o comportamento físico de uma Onda Gravitacional. Serão definidas algumas grandezas físicas invariantes que levam às soluções que descrevem o comportamento físico de uma Onda Gravitacional. O quinto capítulo descreverá as consequências observacionais da Onda Gravitacional, como ondas que se propagam no vácuo na velocidade da luz, analisando o comportamento físico da geodésica de algumas partículas massivas no vácuo, com as quais é possível descrever a perturbação da métrica do espaço-tempo causada por uma Onda Gravitacional. Por fim, esse capítulo trará informações sobre a comprovação das Ondas Gravitacionais pelo *Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory* (LIGO) em 2015. Em seguida, o capítulo final trará as considerações finais.

1. UMA BREVE CONTEXTUALIZAÇÃO SOBRE ONDAS GRAVITACIONAIS

O estudo da propagação de ondas é de fundamental importância para a formação do conhecimento científico desenvolvido na vivência escolar do ser humano, por isso se justifica que dentro do processo de formação de professores de Física esse seja um tema relevante para que ele tenha domínio e possa explorá-lo em outros contextos educacionais. Dessa forma, desenvolveremos neste trabalho, com base em conceitos acessíveis aos alunos do curso de Licenciatura em Física, o estudo sobre o fenômeno físico das Ondas Gravitacionais, previsto na Teoria da Relatividade Geral (TRG) e recentemente comprovada sua existência. Nesse contexto antes de respondermos o questionamento fundamental “o que são Ondas Gravitacionais?” este é um lugar razoável para começarmos nossos estudos partindo da pergunta “o que exatamente é uma onda?”

Como descrevem Richard P. Feynman (2008, cap. 51) e Daniel Fleisch (2015, p. 1-2), no formalismo da Física, uma onda é caracterizada como uma série consecutiva de pulsos energéticos (uma perturbação oscilante de alguma grandeza física) que se propaga através de um meio material ou no espaço vazio com uma velocidade definida e transportando, exclusivamente, energia de um ponto a outro no espaço de forma periódica no tempo. Assim, se observa que confere aos fenômenos ondulatórios certas características intrínsecas, como amplitude de onda, comprimento de onda, velocidade de propagação da onda, frequência. A Fig. 1.1 ilustra o recorte da representação geométrica de uma onda unidimensional e identifica essas grandezas.

Figura 1.1: Representação de uma onda unidimensional e suas características.



Fonte: Produção própria.

No entanto, as grandezas físicas de uma onda e seu comportamento somente são possíveis se forem descritas a partir de uma equação fundamental, particular aos fenômenos

ondulatórios, chamada equação de onda:

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0, \quad (1.1)$$

em que c é a velocidade da luz no vácuo e A é uma função que determina a grandeza física perturbada que parametriza a onda.

Conhecida também como equação de Euler¹ para o estudo de ondas, a eq. (1.1) é como uma forma padrão para descrever o comportamento de uma onda, seja ela uma onda sonora, onda na superfície de um fluido, onda eletromagnética, entre outros tipos de onda. Além de Euler, outros personagens como d'Alembert², Bernoulli³ e Lagrange⁴ também contribuíram com estudos sobre ondulatória.

A eq. (1.1) não especifica uma solução de único resultado para ondas, mas permite encontrar uma família de funções bem definidas que satisfazem essa equação fundamental como solução possível, e essas funções estão aptas a descrever uma onda. A partir dessas funções os físicos, de um ponto de vista matemático, conseguem descrever o comportamento de vários tipos de onda.

As ondas, assim como os tipos de movimento, por exemplo, podem ser classificadas. No estudo dos fenômenos ondulatórios a classificação mais geral empregada pela Física é feita quanto à natureza da onda: Ondas Mecânicas, Ondas Eletromagnéticas, Ondas de Matéria, e a recente comprovação das Ondas Gravitacionais, à qual explicaremos no presente trabalho.

Nesse contexto introdutório, para podermos compreender o fenômeno das Ondas Gravitacionais, também se faz necessário discorrer sobre o tema da gravitação universal, que remete ao que se acreditava na explicação do filósofo Aristóteles⁵, que os corpos pesados caem mais rápido que os corpos leves. Nesse estudo os corpos pesados também eram chamados de “*corpus gravis*”, e associada à essa expressão surgiu a ideia de Gravitação, a primeira tentativa de explicar a interação observada entre os corpos e a Terra. Essa concepção aristotélica

¹ Leonhard Paul Euler (1707 – 1783) – Matemático e Físico suíço.

² Jean le Rond d'Alembert (1707 – 1783) – Filósofo, Matemático e Físico francês.

³ Daniel Bernoulli (1700 – 1782) – Matemático suíço.

⁴ Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813) – Matemático italiano.

⁵ Aristóteles (384 a.C. – 322 a.C.) – Filósofo grego.

perdurou até mais ou menos o final do século XVII, quando o físico Galileo Galilei⁶ postulou que todos os objetos caem com a mesma aceleração, a menos que haja resistência do ar ou alguma outra força externa e oposta ao movimento de queda.

No entanto, foi em 1687, na sua obra intitulada *Principia* ou *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, que o físico Isaac Newton⁷, se baseando nos dados precisos de observações feitas pelos astrônomos Tycho Brahe⁸ e Johannes Kepler⁹, publicou a Lei da Gravitação universal¹⁰, a qual descreve a existência de uma força de interação mútua entre os corpos que contém massa e estão presente não somente na Terra, mas em todo o Universo.

Segundo a Lei da Gravitação, no universo quaisquer duas partículas que possuem massa estão submetidas a uma força de atração mútua, que é diretamente proporcional ao produto das massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que separa o centro gravitacional de cada uma delas. Para ajustar tal proporção a uma igualdade, foi realizada a inserção de uma constante chamada constante gravitacional universal (G), a qual primeiramente foi calculada pelo físico Henry Cavendish¹¹. Com essa constante, a equação da Lei da Gravitação fica matematicamente escrita como

$$\vec{F} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}. \quad (1.2)$$

Nessa descrição Newtoniana, a gravidade é experimentada como uma interação atrativa originada pela massa particular de cada corpo, uma força de campo que age radialmente apontando para o centro gravitacional dele, de forma que a intensidade dessa força atrativa

⁶ Galileo di Vincenzo Bonauti de Galilei (1564 – 1642) – Físico, Astrônomo e Engenheiro italiano.

⁷ Sir Isaac Newton (1643 – 1727) – Físico e Matemático italiano.

⁸ Tycho Brahe (1546 – 1601) – Astrônomo dinamarquês.

⁹ Johannes Kepler (1571 – 1630) – Astrônomo e Matemático alemão.

¹⁰ A Lei da Gravitação universal, denominada por Isaac Newton, descreve a força de interação mútua entre partículas que apresentam massa. Por longo tempo, o termo "Universal" foi utilizado nesta lei por ser capaz de explicar a Gravitação dos corpos celestes e terrestres a partir de uma perspectiva física única. Não obstante, a evolução da Ciência trouxe à tona o fóton, a primeira partícula constatada com ausência intrínseca de massa e interação gravitacional, revelando limitações na aplicação da Lei da Gravitação Newtoniana, visto que esta é fisicamente incompatível com a descrição do fenômeno gravitacional para partículas que não possuem massa. Em virtude disso, houve a necessidade de uma nova ferramenta física capaz de teorizar e descrever a Gravitação envolvendo partículas com tais peculiaridades, e tal tarefa foi cumprida por Albert Einstein ao postular a Teoria da Relatividade Geral. Cumpre destacar que os avanços científicos da Astrofísica nos séculos XX e XXI permitiram reconhecer que a Lei da Gravitação Newtoniana não é aplicável em qualquer ponto do Universo, o que reforça a importância de se considerar novas abordagens teóricas para compreender a natureza do fenômeno gravitacional em toda sua complexidade.

¹¹ Henry Cavendish (1731 – 1810) – Físico e Químico franco-britânico.

depende fundamentalmente da quantidade de matéria constituinte de cada corpo, e está presente em todo o Universo.

Apesar da Lei da Gravitação Newtoniana ser bem-sucedida no que diz respeito a descrever o movimento de corpos que possuem massa, ela não prevê em seu arcabouço teórico soluções matemáticas que possam descrever uma onda, ou antevê o próprio fenômeno em si das Ondas Gravitacionais. Desse modo, o que é necessário para explicar esse fenômeno e sua origem? As Ondas Gravitacionais somente são possíveis de serem explicadas num contexto além da Mecânica Clássica de Newton; é explicada pela TRG, formulada em 1915 pelo físico Albert Einstein¹², já no contexto da Física Moderna.

Mas antes de chegarmos à TRG é necessário compreendermos a Teoria da Relatividade Especial (TRE), publicada por Einstein em 1905. Ela substitui os conceitos independentes de espaço e tempo postulados na Teoria Mecânica de Newton pela ideia de espaço-tempo como uma entidade geométrica unificada, o que consiste em uma variedade diferencial de quatro dimensões: três espaciais e uma temporal. Essa é uma das grandes contribuições dessa teoria, o que nos permite vislumbrar uma descrição dos fenômenos físicos dentro de um espaço mais abrangente.

A construção da TRE possibilitou os físicos descreverem perfeitamente o movimento de partículas que se movem próximo à velocidade da luz, e para isso propõe que a própria velocidade da luz é invariante no contexto relativístico desta teoria, cuja proposição leva a um dos seus postulados fundamentais, a não simultaneidade do tempo. Ou seja, um fenômeno que acontece simultaneamente em mais de um referencial inercial da relatividade Galileana e Newtoniana, necessariamente não será observado acontecendo de forma simultânea no contexto da TRE. Assim, para um evento qualquer que acontece num sistema de referencial inercial relativamente em movimento a outro sistema inercial fixo, serão registrados tempos diferentes em ambos os sistemas com relação ao mesmo fenômeno.

Nesse contexto, a TRG vai abarcar todo o ferramental teórico da TRE, o que, de certa forma, leva essa primeira teoria a ser entendida como um tipo de extensão da segunda. No entanto, vale ressaltar que a ideia original de Einstein sobre estender a TRE era unicamente para incluir a descrição de fenômenos em referenciais não inerciais. Mas a partir do princípio da equivalência (que veremos no próximo capítulo) ele percebeu que um referencial não inercial é equivalente a um referencial inercial na presença de um campo gravitacional. Assim, a nova

¹² Albert Einstein (1879 – 1955) – Físico Teórico alemão.

teoria relativística para referenciais não inerciais acabou se tornando uma nova teoria da gravitação, conhecida como Teoria da Relatividade Geral (TRG). Um dos fenômenos físicos mais importantes descritos por essa teoria é o fenômeno das Ondas Gravitacionais.

Uma predição de suma importância que surge da TRG, como bem explica Ramos (2016, p. 11-12), diz respeito aos corpos que possuem uma certa distribuição de massa e energia poder imprimir no espaço-tempo à sua volta uma certa curvatura. Mas apenas os corpos supermassivos com uma certa aceleração são capazes de produzir Ondas Gravitacionais. No entanto, corpos pouco massivos produzem Ondas Gravitacionais em intensidades tão pequenas que são consideradas desprezíveis, incapazes de serem identificadas pelos atuais equipamentos tecnológicos. Essas ondas somente são produzidas em quantidades consideráveis quando originadas por fenômenos violentos no cosmos, tais como o colapso de núcleos estelares, a colisão entre estrelas de nêutrons, fusão buracos negros, aglomerados de estrelas anãs brancas ou o próprio resíduo de radiação gravitacional gerada pelo evento cataclísmico que deu origem ao Universo.

Segundo Einstein, eventos dessa magnitude perturbam o tecido do espaço-tempo, de tal forma que as ondas de espaço distorcido irradiam a partir da fonte, semelhante às ondas produzidas na superfície de um lago calmo quando atiramos uma pedra nele. Nesse contexto, as Ondas Gravitacionais são distorções ondulatórias no tecido do espaço-tempo viajando na velocidade da luz através do Universo. Ao contrário das Ondas Eletromagnéticas, as Ondas Gravitacionais não são bloqueadas nem alteradas por interações com a matéria ao se propagarem no Universo.

Segundo matéria publicada no sítio eletrônico do LIGO, desde a predição das Ondas Gravitacionais na TRG, sua real existência ficou por um longo período limitado apenas a discussões teóricas. Só a partir da década de 60 que os físicos intensificaram as buscas para detecção dessas ondulações no espaço-tempo. Mas somente no centésimo aniversário de publicação da TRG, no dia 14 de setembro de setembro de 2015, que finalmente a equipe de colaboradores do LIGO anunciou a primeira detecção de Ondas Gravitacionais, o que veio a ser mais um aspecto importante da comprovação da TRG de Einstein, dentre tantas outras que já existem. Nessa oportunidade, ainda de acordo com a equipe, os físicos não só fizeram a primeira observação direta das próprias Ondas Gravitacionais como concluíram que elas se originaram durante a fração final de 1 segundo da fusão entre dois buracos negros, segundo consta o relato da descoberta publicado no sítio eletrônico do Observatório, LIGO (2015).

O LIGO é o maior Observatório detector de Ondas Gravitacionais do mundo, que atua na missão principal de observar essas ondas de origem cósmica. Foi fundado em 1992, com o início das atividades em 2002. Consiste em dois braços de aproximadamente 4,0 km de comprimento e que formam um "L". Nesses braços ele opera dois detectores/sensores em sincronia, um em Livingston, Louisiana e outro na Reserva Nuclear Hanford, localizada perto de Richland, Washington. Em suma o LIGO é um grande interferômetro de Michelson isolado de interferências externas. A Fig. 1.2 é uma imagem aérea das instalações desse Observatório.

Figura 1.2: Recorte representativo de uma onda e suas características.



Fonte: Google Imagens.

A detecção de Ondas Gravitacionais não só comprovou a predição da TRG sobre esse fenômeno quanto inaugurou outras pesquisas que buscam detectar novas ondas desse tipo. Segundo o LIGO (2015), este é um fenômeno natural raro e de extrema valia para Ciência, por transportar muito mais que *momentum* e energia, leva consigo informações valiosas sobre as origens cataclísmicas dessas ondas e outras evidências importantes quanto à natureza da própria gravidade e a formação do Universo, que não podem ser obtidas através de radiotelescópios, telescópios de raios-x, telescópios de radiação infravermelho, dentre outros equipamentos para obtenção de informações cosmológicas.

No entanto, para compreender o comportamento das Ondas Gravitacionais é necessário ir muito além no que foi discutido até aqui. Precisamos conhecer o básico sobre a TRE para podermos compreender o básico necessário da TRG e assim podermos chegar a soluções para equação de onda que, por sua vez, são capazes de explicar o comportamento físico acerca desse fenômeno. Realizaremos esse estudo neste e nos demais capítulos.

2. ALGUNS ASPECTOS SOBRE A TEORIA DA RELATIVIDADE ESPECIAL (TRE)

Como mencionado no capítulo anterior, as soluções de Ondas Gravitacionais emergem naturalmente do contexto da TRG. No entanto, para se compreender tais soluções com uma maior qualidade, digamos assim, é necessário que façamos um estudo introdutório sobre alguns aspectos importantes da TER, a fim de subsidiar melhor a compreensão do desenvolvimento das soluções de Ondas Gravitacionais. Para isto, vamos considerar uma breve contextualização sobre o surgimento da TRE e da própria Física Moderna.

2.1 UMA BREVE CONTEXTUALIZAÇÃO SOBRE O SURGIMENTO DA TEORIA DA RELATIVIDADE ESPECIAL (TRE)

A história da Física pode ser traçada a partir do momento em que a humanidade começou a observar os fenômenos naturais de modo racional, na busca de entender e explicar a natureza. Muitos estudiosos fizeram parte desse processo de evolução e aprimoramento da Física ao longo dos séculos. Nesse contexto, é válido ressaltar que os conceitos e ideias estruturantes da Física não estabelecem um processo linear ao longo do tempo, não se mantém uma continuidade integral do processo evolutivo. Por muitas vezes, em qualquer que seja a etapa de desenvolvimento ao longo dos séculos, houve conflitos entre ideias e pensamentos científicos, evidenciando que nem todas as concepções e ideias no contexto da Física são absolutas ou imutáveis.

O século XVII se constitui um marco histórico, quando as Leis de Newton da Mecânica Clássica e a Lei da Gravitação Newtoniana conferiram à Física uma base sólida e, com esse feito, ela começou a ser reconhecida como uma Ciência. As novas descobertas realizadas no finalzinho do século XIX, principalmente a descoberta dos Raios-X, realizada por Wilhelm Roentgen¹³, a descoberta da radioatividade, realizada por Henri Becquerel¹⁴ e Madame Curie¹⁵, e a descoberta do elétron, realizada por J.J. Thomson¹⁶, juntamente com a Teoria (Mecânica)

¹³ Wilhelm Conrad Röntgen (1845 – 1923) – Físico e Engenheiro Mecânico alemão.

¹⁴ Antoine-Henri Becquerel (1852 – 1908) – Físico francês.

¹⁵ Marie Skłodowska-Curie (1867 – 1934) – Física e Química polonesa.

¹⁶ Joseph John Thomson (conhecido como J.J. Thomson) (1856 – 1940) – Físico britânico.

Quântica, iniciada com Max Planck¹⁷, da qual surge a famosa equação da energia $E = hf$ (em que $h \equiv \text{const. de Planck}$ e $f \equiv \text{frequência}$) que resultou na revolução quântica, e a TRE, postulada por Einstein, que resultou na revolução relativística, desencadearam o processo que originou a Física Moderna, a qual é essencialmente constituída da Física desenvolvida nas três décadas iniciais do século XX. Esse feito causou uma grande revolução dos conhecimentos construídos ao longo de toda a Física Clássica.

A Física Moderna foi assim nomeada em virtude do conjunto de teorias que a originou, a começar com a Mecânica Quântica e a TRE e as alterações na concepção científica daí decorrentes, bem como todas as ideias e teorias posteriores. A Mecânica Quântica é responsável pelo estudo das partículas subatômicas, e a TRE é responsável pelo estudo de partículas com e sem massa que se movem a velocidades próximas ou igual a velocidade da luz.

Ambas as teorias, quântica e relativística, desenvolvem estudos os quais a Mecânica Clássica não foi capaz de comportar. Nesse sentido, a Física Moderna tem possibilitado aos físicos realizar previsões e cálculos muito precisos em todas as áreas de estudo deste ramo da Ciência, permitindo chegar a uma série de novas descobertas que são essenciais para a compreensão da estrutura da matéria e a natureza da luz.

Muitos dos conceitos científicos sobre a quântica e a relatividade podem divergir das interpretações da Física Clássica; no entanto, o advento da Física Moderna tem sido a base fundamental para várias pesquisas científicas dentro da própria Física e em áreas científicas afins, cujos resultados são observados no cotidiano a partir do aparecimento de novas tecnologias e aperfeiçoamento contínuo das já existentes, proporcionando desenvolvimento e avanço científico/tecnológico significativo a diversas áreas da Ciência por todo o mundo.

A partir de Galileo Galilei, no século XVI, até mais ou menos o final do século XIX, os físicos já haviam formulado inúmeros postulados que sustentavam toda a Física Clássica. Acreditavam já haver sido descoberto quase tudo em relação aos estudos da Física. Todas as teorias pareciam estar completas, exaustivamente testadas por longos anos e aprovadas por toda a sociedade de físicos, a ponto de serem consideradas inquestionáveis, desconsiderando o posicionamento de qualquer indivíduo que ousasse elaborar alguma ideia divergente a estes pensamentos, nos elucida Pereira (2015, p. 177).

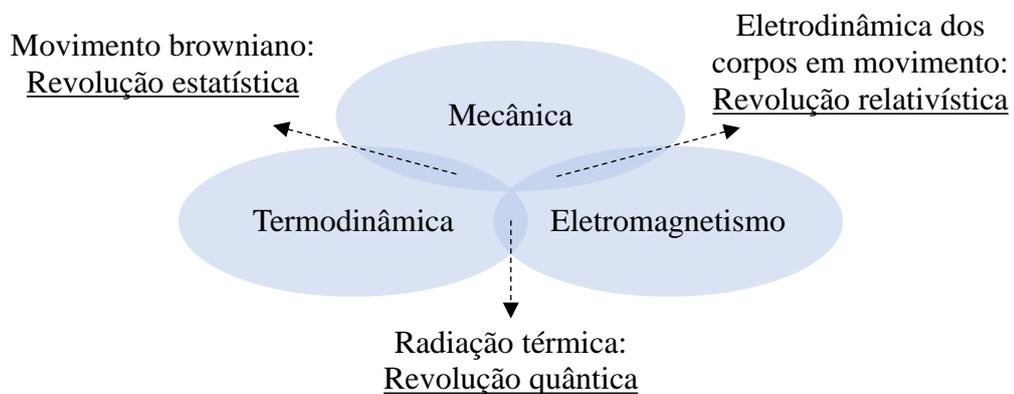
No entanto, na correspondência entre as áreas de estudo da Física Clássica no final do

¹⁷ Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858 – 1947) – Físico alemão.

século XIX, respectivas Mecânica Clássica, Termodinâmica e Eletromagnetismo (observe a Fig. 2.1), se encontravam problemas nos quais diferentes conceitos básicos entravam em conflito. Dentre esses problemas, talvez o maior deles, foi comprovado por Hendrik Lorentz¹⁸, e outros físicos, que os fenômenos eletrodinâmicos apresentavam divergência quando descritos em referenciais que estão em movimento relativo entre si com velocidade próxima da luz. Ou seja, as Leis de Maxwell do Eletromagnetismo não condiziam com a Mecânica Clássica de Newton. No entanto, ambas as teorias se mostravam corretas quando trabalhadas cada qual no seu contexto.

Na tentativa de resolver esse impasse, observando a incompatibilidade entre o princípio da relatividade galileana presente na Mecânica Newtoniana e as Leis do Eletromagnetismo, Albert Einstein decidiu consultar os trabalhos escritos por Hendrik Lorentz e Henri Poincaré¹⁹. Nesse processo, ele também considerou trabalhar partindo do princípio de que a velocidade da luz é constante, como já afirmava Albert Michelson²⁰ e Edward Morley²¹ a partir da realização da experiência de interferometria da luz.

Figura 2.1: As revoluções na Física Clássica do final do século XIX.



Fonte: Adaptado de Penteadó (2015, p. 17).

O resultado foi eficaz! Einstein causou uma grande revolução no pensamento científico

¹⁸ Hendrik Antoon Lorentz (1853 – 1928) – Físico neerlandês.

¹⁹ Jules Henri Poincaré (1854 – 1912) – Físico, Matemático e Filósofo da Ciência francês.

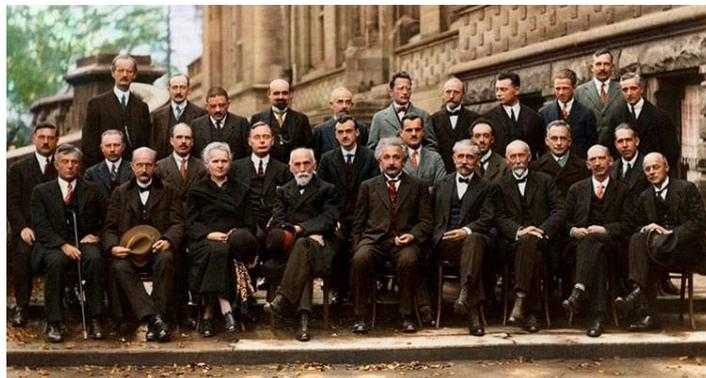
²⁰ Albert Abraham Michelson (1852 – 1931) – Físico norte-americano.

²¹ Edward Williams Morley (1838 – 1923) – Físico norte-americano.

ao substituir os conceitos independentes de espaço e tempo postulados na Física Newtoniana pela ideia de espaço-tempo como uma entidade geométrica unificada. Várias grandezas físicas trabalhadas na Mecânica Newtoniana foram redefinidas e se tornaram válidas, igualmente as leis do Eletromagnetismo, no contexto da relatividade einsteiniana. Até esse ponto, os estudos realizados por Einstein lhe renderam cinco grandes artigos científicos, que ele mesmo publicou em 1905, dentre os quais um deles originou a TRE.

O marco oficial para questionamentos acerca dos novos estudos e a considerar novas possibilidades para a Física é a primeira Conferência de Solvay, realizada em 1911, patrocinada por Ernest Solvay²², a qual foi limitada por convite a um público de 30 físicos de todos os lugares do mundo, considerando a importância de seus trabalhos para a Física e as descobertas realizadas. Os cinco primeiros encontros, que aconteceram entre 1911 e 1927, orquestraram a crônica do desenvolvimento da Física do século XX, descreve Pereira (2015, p. 180). A Fig. 2.2 é uma cópia do registro fotográfico desse importante momento histórico para a Física Moderna.

Figura 2.2: Cientistas participantes da primeira Conferência de Solvay, em 1911.



Fonte: Google Imagens.

2.2 OS POSTULADOS DA TRE

A TRE não foi assim intitulada por Einstein. Dado o contexto no qual foram realizados os estudos, o físico primeiramente a nomeou como *teoria da invariância*. O nome teoria da

²² Ernest Solvay (1838 – 1922) – Químico Industrial belga.

relatividade foi primeiramente utilizado por Poincaré e Planck, que logo se tornou comum e, também, foi adotado por Einstein.

Um dos artigos de Einstein deu origem à TRE, mais precisamente o intitulado *Sobre a Eletrodinâmica dos Corpos em Movimento*, que fora publicado em 1905, no periódico científico *Annalen der Physik*, e do qual reproduzimos a seguir partes do texto

...nenhuma propriedade dos fatos observados corresponde ao conceito de repouso absoluto... para todos os sistemas de coordenadas para os quais valem as equações da Mecânica, valem também as equações equivalentes da Eletrodinâmica e Ótica... A seguir nós fazemos estas suposições (que chamaremos subsequentemente de Princípio da Relatividade) e introduzimos uma hipótese adicional [...] que a luz se propaga no vácuo com a velocidade c , independentemente da natureza do movimento do corpo que a emite. Estas duas hipóteses são bastante suficientes para nos dar uma teoria simples e consistente da Eletrodinâmica dos corpos em movimento, baseada na teoria Maxwelliana para os corpos em repouso. (EINSTEIN, 1905) in (RESNICK, 1968, p. 39).

Nesse trecho do artigo, Einstein apresenta os principais argumentos que suportam a TRE, bem como estabelece os dois postulados dessa teoria e sugere que o éter, substância exótica e universalmente estacionária na qual se acreditava está mergulhada a Terra, se mostrará como algo supérfluo para essa nova teoria. Nessa ótica, podemos expressar os postulados da TRE como:

1. Postulado da relatividade:

As leis da Física²³ são as mesmas em todos os referenciais inerciais. Não existe preferência por nenhum referencial inercial.

2. Postulado da constância da velocidade da luz:

A velocidade da luz no vácuo tem o mesmo valor em todos os referenciais inerciais e independe do movimento de sua fonte.

O primeiro postulado, também referido como princípio da relatividade, como acompanha o raciocínio de Resnick (1968, p. 40), vai além do princípio da relatividade delineada por Isaac Newton, que considera tratar unicamente as leis da Mecânica, a fim de incluir todas as leis da Física. Nesse postulado, ao enfatizar que as leis da Física são as mesmas para todos os referenciais inerciais, Einstein também está afirmando que é impossível, por meio

²³ A utilização da expressão "as leis da Física" remete às leis fundamentais da Mecânica e Eletrodinâmica, as quais são contextualizadas dentro da Teoria da Relatividade de Einstein (TER).

de qualquer tipo de medida física, escolher um referencial inercial como intrinsecamente estacionário ou em movimento. Ou seja, afirma que todos os fenômenos físicos não apresentam sequer qualquer propriedade que possa corresponder à ideia de existência de repouso absoluto. Nesse contexto, podemos unicamente considerar haver ou não movimento relativo entre dois referenciais. Portanto, não há como qualquer fenômeno físico ou experiência realizada inteiramente num referencial inercial apresentar provas do estado de movimento desse referencial com relação a outro.

Quanto ao segundo postulado, vai afirmar que a velocidade da luz no espaço vazio é a mesma para todos os referenciais inerciais. Assim, a luz deve viajar em linhas retas e ter a mesma velocidade em todas as direções do espaço e em todos os referenciais inerciais. Esse princípio, de constância da velocidade da luz, é consistente com o experimento de Michelson e Morley, realizado em 1887: interferometria da luz; bem como se mostrou também ser consistente com outras experiências posteriormente realizadas. Portanto, se mostra segura a afirmativa quanto à velocidade de propagação da luz não depender da velocidade da fonte que a origina.

No tópico a seguir discutiremos brevemente as consequências mais importantes que decorrem dos postulados de Einstein na TRE.

2.3 CONSEQUÊNCIAS DOS POSTULADOS

A partir dos dois postulados que sustentam a TRE encontramos algumas duas importantes consequências relacionadas, tais como: dilatação do tempo e contração do comprimento. Por meio de experimentos de pensamento propostos por Einstein, iremos entender como cada uma delas ocorre.

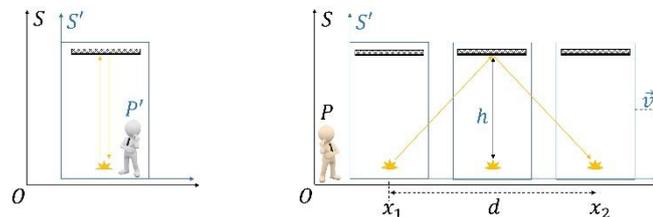
2.3.1 Dilatação do tempo

Considere a situação na qual um observador P está posicionado no referencial inercial S orientado pelo sistema de coordenadas (x, y, z) , os quais estão em repouso. Há também, além do referencial S , um referencial inercial S' que é orientado pelo sistema de coordenadas (x', y', z') , no qual está um observador P' em repouso no interior de um vagão de trem que também

está em repouso com relação a S' . Considere também que os relógios de ambos os referenciais foram sincronizados anteriormente ao movimento, e que S' se move na direção crescente dos eixos paralelos x e x' com uma velocidade constante \vec{v} em relação a S , e que as origens dos sistemas de coordenadas coincidem no instante $t = t' = 0$. No vagão há um relógio fotoelétrico que se constitui por uma fonte emissora de luz, que foi posicionada no lastro do vagão, um espelho acima da fonte, colocado preso ao teto, e um detector de luz, que se encontra ao lado da fonte. Esse relógio mede o intervalo de tempo gasto por um pulso de luz que vai da fonte ao espelho e é refletido para o detector.

No interior do vagão, o observador P' perceberá que um pulso de luz emitido na vertical e refletido de volta à fonte descreve um trajeto normal a direção do movimento, conforme ilustrado na Fig. 2.3 da esquerda. Ao mesmo tempo, o observador P perceberá que esse mesmo pulso de luz descreve um trajeto que, complementado pelo lastro do vagão, condiz com a figura geométrica de um triângulo, conforme ilustrado na Fig. 2.3 da direita.

Figura 2.3: Referenciais inerciais distintos e o fenômeno de dilatação do tempo.



Fonte: Produção própria.

Desenvolvendo matematicamente, chegaremos a uma equação que descreve a relação dos intervalos de tempo de duração destes eventos quando avaliados a partir dos referenciais inerciais que estão em movimento relativo entre si:

$$\Delta t = \Delta \tau \gamma, \quad (2.1)$$

em que Δt corresponde ao tempo transcorrido no referencial S , e $\Delta \tau$ corresponde ao tempo próprio, transcorrido no referencial S' , o v é a velocidade relativa entre os referenciais S e S' , o c é a velocidade da luz no vácuo, e γ é o fator de Lorentz:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad (2.2)$$

que pode ser interpretado como um fator de proporcionalidade relativa entre grandezas físicas em referenciais inerciais que apresentam movimento relativo entre si.

Note que o observador no referencial S registra os dois eventos de forma que o pulso de luz parte da fonte em uma posição x_1 e chega ao detector na posição x_2 . Portanto, é necessário utilizar dois relógios previamente sincronizados para medir o intervalo de tempo que corresponde a duração desse evento²⁴. Nessas situações, o relógio mede o tempo próprio do observador P . No referencial S' o observador registra os mesmos dois eventos, emissão e captura do pulso de luz, na mesma posição $x'_1 = x'_2$ e com o mesmo relógio. Nessas situações, o relógio do observador P' mede um intervalo de tempo relativo na duração do evento.

Perceba na eq. (2.1) que, apenas $v < c$ permite, para γ , um valor real, que poderá ser sempre $\gamma \geq 1$. Com isso, temos que $\Delta t > \Delta \tau$ apenas quando há movimento relativo entre dois referenciais inerciais. Ou seja, o observador no referencial S em repouso cronometra um intervalo de tempo maior do que o cronometrado pelo observador no referencial S' , que se move relativamente ao primeiro. Apenas para $\gamma = 1$ teremos $\Delta t = \Delta \tau$, o que significa que não há movimento relativo entre os referenciais. Portanto, se conclui que um mesmo evento não acontece simultaneamente em mais de um referencial inercial quando há movimento relativo entre eles, porque o intervalo tempo medido no referencial S passa de forma mais lenta do que no referencial S' . Esse é o fenômeno de dilatação do tempo.

2.3.2 Contração do comprimento

Considere dois referenciais inerciais S e S' , e que os relógios de ambos foram sincronizados anteriormente ao movimento de S' relativamente a S e que as origens dos sistemas de coordenadas coincidem no instante $t = \tau = 0$. O referencial inercial S' é orientado pelo sistema de coordenadas (x', y', z') , e nele há uma régua em repouso com uma das extremidades em x'_2 e a outra em x'_1 , como ilustrado na Fig. 2.4 da esquerda. Um observador

²⁴ Conceitualmente, um evento é entendido como um fenômeno físico que ocorre em um determinado ponto do tempo e do espaço, o qual pode ser identificado e localizado por meio das coordenadas espaciais de um sistema de referência específico, previamente escolhido pelo observador de maneira adequada.

P' nesse referencial mede o comprimento próprio da régua, que é dado por

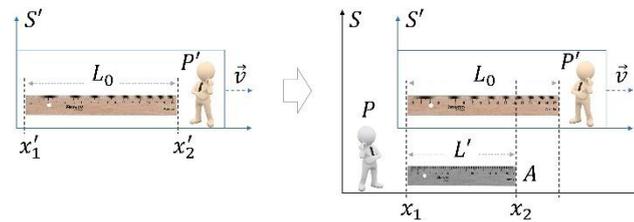
$$L_0 = x'_2 - x'_1. \quad (2.3)$$

O referencial inercial S é orientado pelo sistema de coordenadas (x, y, z) e está em repouso. O referencial S' se move na direção crescente dos eixos paralelos x e x' com uma velocidade constante \vec{v} em relação a S . Então, para um observador P que está em repouso em S , o comprimento da régua nesse referencial é dado por

$$L = x_2 - x_1, \quad (2.4)$$

em que x_1 é a posição de uma das extremidades em um certo instante t_1 e x_2 é a posição da outra extremidade da régua no mesmo instante $t_2 = t_1$, como ilustrado na Fig. (2.4) da direita. No entanto, lembre-se, que por se tratar de um movimento no contexto relativístico, esses instantes não são iguais em S' .

Figura 2.4: Movimento relativo entre S e S' e o fenômeno de contração do comprimento.



Fonte: Produção própria.

A partir das Transformações de Lorentz e das medidas realizadas por ambos os observadores em seus referenciais, é possível desenvolver uma equação que descreve a relação de comprimento de um corpo em referenciais que estão em movimento relativo entre si. Assim, aplicando as Transformações de Lorentz, teremos

$$x'_2 = \gamma(x_2 - vt) \quad \text{e} \quad x'_1 = \gamma(x_1 - vt). \quad (2.5)$$

Mas como em S temos $t_2 = t_1$, dessas transformações na eq. (2.5), temos

$$x'_2 - x'_1 = \gamma[(x_2 - x_1) + (vt_2 - vt_1)],$$

que resulta

$$x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1) . \quad (2.6)$$

Agora substituindo as eq. (2.3) e (2.4) na eq. (2.6), temos que o comprimento da régua, a partir do ponto de vista do observador em S , é dado por

$$L' = \gamma L_0 . \quad (2.7)$$

Portanto, a partir da eq. (2.7) é possível concluir que, quando não há movimento relativo entre os referenciais ou o corpo a ser medido está em repouso em relação ao observador, $\gamma = 1$ e a medida do comprimento do corpo não se altera: $L_0 = L'$. Essa igualdade também é válida quando a medição é realizada ortogonalmente à direção de movimento relativo entre os referenciais. Por outro lado, quando se mede na mesma direção do movimento relativo entre os referenciais, a relação de comprimento de um corpo resulta $L_0 > L'$. Esse é o fenômeno de contração do comprimento ou contração de Lorentz.

No nosso cotidiano não percebemos os fenômenos de dilatação do tempo nem de contração de Lorentz porque as velocidades que atingimos são infinitamente pequenas se comparadas a velocidade da luz, o que resulta num fator de Lorentz $\gamma \approx 1$, e como vimos nas eq. (2.1) e (2.7), o tempo e o comprimento medidos não se alteram.

A partir desses resultados, procedentes das consequências dos postulados da TER, é possível concluirmos que, entre outras, as grandezas físicas espaço e tempo não são absolutas como foi postulado na Mecânica Clássica de Newton, são grandezas relativas que dependem dos referenciais inerciais, a partir do qual são observados os fenômenos físicos, e do movimento relativo entre eles. Por outro lado, é possível construirmos grandezas físicas com a propriedade de se manterem invariantes no contexto da TRE, ou seja, grandezas absolutas que expressam as mesmas medidas independentemente do referencial e do movimento relativo entre eles. A principal grandeza física com essa característica é o quadrado do intervalo de espaço-tempo.

2.4 ESPAÇO-TEMPO

O espaço-tempo é um dos conceitos mais fundamentais da Física. Grosso modo, confere um espaço topológico em que as vizinhanças de cada ponto por vez se parecem com um espaço euclidiano de n dimensões.

Nesse espaço, são chamados de evento os fenômenos físicos localizados no espaço e no

tempo. Conforme desenvolve Gazzinelli (2009, p. 83), consideremos um evento ao qual vamos nos referir pelo instante em que ocorre e pelas coordenadas espaciais que o localizam em um referencial inercial S : (t, x, y, z) . Este mesmo evento também é descrito pelas coordenadas (t', x', y', z') no referencial inercial S' relativamente ao primeiro.

A distância entre os dois eventos no referencial inercial S em repouso é nomeada de quadrado do intervalo de espaço-tempo (ΔS^2) , definido matematicamente como

$$\Delta S^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2, \quad (2.8)$$

em que a parcela com (t) corresponde ao deslocamento que a luz faz de um ponto a outro, e as parcelas com (x, y, z) correspondem às coordenadas que localizam o evento no espaço.

A eq. (2.8) pode ser reescrita como uma sequência x_n ($n = 1, 2, 3$):

$$\Delta S^2 = (\Delta x_0)^2 - (\Delta x_1)^2 - (\Delta x_2)^2 - (\Delta x_3)^2 \quad (2.9)$$

Se fizermos uma analogia com o espaço tridimensional, a eq. (2.8) pode ser entendida como uma espécie de “extensão” do Teorema de Pitágoras para quatro dimensões, em que o ΔS^2 representaria o quadrado do módulo de um vetor situado num espaço quadri-dimensional. A partir dessa interpretação é possível substituir os conceitos independentes de “espaço” e “tempo”, postulados na Teoria Mecânica de Newton, pela ideia de espaço-tempo, uma espécie de união dessas duas grandezas físicas, originando uma entidade geométrica quadri-dimensional.

O espaço-tempo “nada mais é do que uma extensão do espaço euclidiano tridimensional para quatro dimensões e é também, portanto, geometricamente plano. A propósito, o espaço euclidiano pode ser estendido para qualquer número de dimensões n ” (SOARES, 2013). Contudo, a presença de parcelas com sinal negativo, como expressa a eq. (2.8), significa que esse espaço quadri-dimensional não é estritamente um espaço euclidiano e sim um espaço pseudo-euclidiano. Nesse contexto, as distâncias nesse espaço são medidas por uma métrica pseudo-euclidiana, como representa a própria equação em questão.

Seguindo a narrativa de Gazzinelli (2009, p. 82), essa ideia inicialmente foi proposta por Henri Poincaré, sendo posteriormente introduzida pouco tempo após a publicação da TRE, em 1907, por Hermann Minkowski²⁵, que havia sido professor de Einstein na universidade em

²⁵ Hermann Minkowski (1864 – 1909) – Matemático alemão.

Zurique.

Nessa lógica, o espaço-tempo pode ser caracterizado como um campo vetorial quadri-dimensional, cujos elementos desse espaço são chamados eventos ou quadri-vetores.

O intervalo de espaço euclidiano tridimensional, distância entre dois pontos nesse espaço, pode ser calculada através do Teorema de Pitágoras, ou seja, um vetor no contexto clássico. Nessa lógica, o intervalo de espaço-tempo, distância entre dois pontos no espaço pseudo-euclidiano, também é invariante, ou seja $\Delta S'^2 = \Delta S^2$.

Uma forma de verificarmos isso pode ser através da utilização das leis de transformação das coordenadas do sistema S e do sistema S' , numa situação na qual o movimento relativo entre esses dois referenciais inerciais se dá na direção dos eixos paralelos x e x' . Esse conjunto de transformações são conhecidas como Transformações de Lorentz:

$$t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right), \quad (2.10)$$

$$x' = \gamma(x - vt), \quad (2.11)$$

$$y' = \gamma(y - vt), \quad (2.12)$$

$$z' = \gamma(z - vt), \quad (2.13)$$

em que (t', x', y', z') corresponde as coordenadas de S' , calculadas a partir do ponto de vista de um observador em repouso no sistema S .

Dado o quadrado do intervalo relativístico $\Delta S'^2$ definido no sistema S'

$$\Delta S'^2 = (\Delta x_0)^2 - (\Delta x_1)^2 - (\Delta x_2)^2 - (\Delta x_3)^2, \quad (2.14)$$

podemos escrever:

$$\Delta x'_0 = \gamma(\Delta x_0 - \beta \Delta x_1), \quad (2.15)$$

$$\Delta x'_1 = \gamma(\Delta x_1 - \beta \Delta x_0), \quad (2.16)$$

$$\Delta x'_2 = \Delta x_2, \quad (2.17)$$

$$\Delta x'_3 = \Delta x_3. \quad (2.18)$$

Agora utilizando essas Transformações de Lorentz podemos mostrar que

$$\Delta S'^2 = (\Delta x_0)^2 - (\Delta x_1)^2 - (\Delta x_2)^2 - (\Delta x_3)^2$$

$$\Delta S'^2 = \gamma(\Delta x_0 - \beta\Delta x_1)^2 - \gamma(\Delta x_1 - \beta\Delta x_0)^2 - (\Delta x_2)^2 - (\Delta x_3)^2$$

$$\Delta S'^2 = \gamma^2(\Delta x_0)^2 - \gamma^2(\beta\Delta x_1)^2 - \gamma^2(\Delta x_1)^2 + \gamma^2(\beta\Delta x_0)^2 - (\Delta x_2)^2 - (\Delta x_3)^2.$$

E evidenciando γ^2 e β podemos unir os termos Δx_0 e unir os termos Δx_1 dessa última equação

$$\Delta S'^2 = \gamma^2(\Delta x_0)^2 + \gamma^2\beta^2(\Delta x_0)^2 - \gamma^2(\Delta x_1)^2 - \gamma^2\beta^2(\Delta x_1)^2 - (\Delta x_2)^2 - (\Delta x_3)^2$$

$$\Delta S'^2 = \gamma^2(1 + \beta^2)(\Delta x_0)^2 - \gamma^2(1 - \beta^2)(\Delta x_1)^2 - (\Delta x_2)^2 - (\Delta x_3)^2.$$

Substituindo $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ nessa última equação e desenvolvendo ela, chegaremos a

$$\Delta S'^2 = \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta^2} (\Delta x_0)^2 - \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta^2} (\Delta x_1)^2 - (\Delta x_2)^2 - (\Delta x_3)^2,$$

que resulta em

$$\Delta S'^2 = (\Delta x_0)^2 - (\Delta x_1)^2 - (\Delta x_2)^2 - (\Delta x_3)^2. \quad (2.19)$$

Observe que o lado direito da igualdade na eq. (2.19) é igual ao lado direito na eq. (2.14).

Portanto, concluímos que, de fato, $\Delta S'^2 = \Delta S^2$.

A partir desse resultado podemos afirmar que o quadrado do intervalo de espaço-tempo é invariante sob transformação de Lorentz, ou seja, é independente do observador e do referencial no qual está definido. Isso se faz possível por conferir ao tempo uma dimensão física de espaço, correlacionando essa primeira grandeza física a uma das coordenadas espaciais que compõe o espaço de quatro dimensões, o qual conhecemos por espaço-tempo. Portanto, apesar de “espaço” e “tempo” serem relativos, o espaço-tempo é absoluto.

Para entendermos o espaço-tempo como uma quantidade absoluta é necessário entendermos a métrica do espaço-tempo.

2.4.1 Métrica do espaço-tempo

A métrica é um ente matemático que define a distância entre dois pontos no espaço, condicionado a um determinado sistema coordenadas. Conhecer a métrica de um espaço é fundamental para descrevermos e a geometria desse espaço, define Collier (2012, p. 102).

A partir de então, o comprimento do intervalo de espaço-tempo será representado em termos de deslocamentos infinitesimais, chamados coordenadas diferenciais, e a equação passa

a ser chamada de elemento de linha de Minkowski:

$$\Delta S^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2. \quad (2.20)$$

Cada coeficiente (Δt , Δx , Δy , Δz) na equação acima tem valor 1. Independente do sinal, os coeficientes das n dimensões são chamados de coeficientes métricos, que, por convenção, vão de 0 a 3. Eles podem ser organizados através de uma matriz (4×4) com α linhas e β colunas, nomeada de métrica ou tensor métrico. Ela nos diz como multiplicar cada diferencial das coordenadas para obter o elemento de linha de Minkowski:

$$\Delta S^2 = \underbrace{\begin{bmatrix} \eta_{00} & \eta_{01} & \eta_{02} & \eta_{03} \\ \eta_{10} & \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} \\ \eta_{20} & \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} \\ \eta_{30} & \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33} \end{bmatrix}}_{\text{métrica}} \begin{bmatrix} \Delta x^2 \\ \Delta y^2 \\ \Delta z^2 \\ \Delta t^2 \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

A métrica na eq. (2.21) em sistema de coordenadas cartesianas quadri-dimensional é dada pelo Delta de Kronecker $\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & \Rightarrow i \neq j \\ 1 & \Rightarrow i = j \end{cases}$. Mas como estamos num espaço pseudo-euclidiano, a métrica será assim descrita:

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

em que a diagonal principal dessa matriz é o elemento de linha de Minkowski. Outra forma de escrever a métrica de Minkowski, apresentada na eq. (2.21), é:

$$\Delta S^2 = \sum_{\beta=1}^{\eta} \sum_{\alpha=1}^{\eta} dx^{\alpha} dx^{\beta}. \quad (2.23)$$

Compare a diagonal principal na matriz na eq. (2.22) com a mesma diagonal na eq. (2.21). Perceba que os índices α e β se repetem. Logo, podemos utilizar a convenção de soma de Einstein e omitir o símbolo de somatório na eq. (2.22), e reescrever esta equação como

$$\Delta S^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}. \quad (2.24)$$

No contexto da descrição de fenômenos físicos em um espaço com essas características, cuja geometria é descrita pela métrica de Minkowski, surge a necessidade de redefinirmos várias grandezas físicas de forma que elas se tornem consistentes com o formalismo adequado ao espaço quadri-dimensional. Onde o quadrado do intervalo de espaço-tempo desempenha

papel análogo a norma de um vetor deslocamento nesse espaço. Além disso, existem outras grandezas físicas que satisfazem a propriedade da invariância e que também podem ser redefinidas. Mostraremos algumas delas nos próximos tópicos.

2.4.2 Quadri-velocidade

O caminho de uma partícula no espaço tridimensional pode ser descrito através das funções paramétricas de uma variável $f(t) = (x, y, z)$, que fornecem um vetor tangente ao caminho curvo no espaço e cujas componentes representam a velocidade espacial da partícula, e não se transforma usando transformações de Lorentz.

No entanto, há um tipo de vetor velocidade cuja forma é invariante, a quadri-velocidade. Ela possui componentes temporal e espacial (t, x, y, z) . Assim, segundo Collier (2012, p. 218), a quadri-velocidade de uma partícula é definida fisicamente como sendo a taxa de mudança de sua quadri-posição em relação ao tempo próprio, que é invariante; é um vetor tangente à linha de mundo da partícula e é definido como (em que τ é o tempo próprio)

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \left(c \frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau} \right). \quad (2.25)$$

As componentes de linha da quadri-velocidade podem ser calculadas a partir da expressão do tempo coordenado (Δt) em relação ao tempo próprio $(\Delta \tau)$:

$$\Delta t = \gamma \Delta \tau. \quad (2.26)$$

Usando ct unidades de tempo nessa eq. (2.26), ficará

$$x^0 = ct = c\gamma\tau,$$

e agora derivando em relação ao tempo próprio, teremos

$$u^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = c\gamma.$$

Agora, desenvolvendo a regra da cadeia, encontramos as componentes espaciais de u^α ($\alpha = i = 1, 2, 3$):

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dx^i}{dx^0} \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{dx^i}{dx^0} c\gamma = \frac{dx^i}{d(ct)} c\gamma = \frac{dx^i}{cdt} c\gamma = \frac{dx^i}{dt} \gamma,$$

em que $\frac{dx^i}{dt}$ é o vetor velocidade espacial \vec{v} da partícula, cujas componentes são $v_x = \frac{dx^1}{dt}$, $v_y = \frac{dx^2}{dt}$ e $v_z = \frac{dx^3}{dt}$. Dessa forma, a quadri-velocidade da partícula é

$$u^\alpha = (u^0, u^1, u^2, u^3) = \frac{dx^\alpha}{d\tau} = (c\gamma, \gamma\vec{v}) = \gamma(c, \vec{v}). \quad (2.27)$$

Temos ainda que, na TRE, o produto escalar entre dois quadri-vetores $\vec{A} \cdot \vec{B}$ é definido usando a métrica de Minkowski e é uma quantidade invariante sob transformação de Lorentz:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \eta_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta = A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3. \quad (2.28)$$

Assim, o produto escalar entre duas quadri-velocidade será dado por

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \eta_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = \gamma^2 c^2 - \gamma^2 [(u_x)^2 + (u_y)^2 + (u_z)^2] = \gamma^2 (c^2 - u^2). \quad (2.29)$$

Mas, como

$$\gamma^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right)^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2},$$

temos que o produto escalar entre as duas quadri-velocidade na eq. (2.29) é dado por

$$c^2 = \eta_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta. \quad (2.30)$$

2.4.3 Quadri-momentum

O quadri-momentum é uma grandeza física que fornece uma descrição completa da energia relativística total de uma partícula em movimento no espaço, ou seja, seu comportamento, além de fornecer o momentum relativístico e seus componentes. Pode ser obtido fazendo

$$P^\alpha = m u^\alpha. \quad (2.31)$$

Relembrando da definição de quadri-velocidade $u^\alpha = (c\gamma, \gamma\vec{v})$ e multiplicando por m (massa da partícula), teremos

$$P^\alpha = (mc\gamma, m\gamma\vec{v}). \quad (2.32)$$

Seja a energia relativística total $E = \gamma mc^2$ e a equação para o momentum relativístico $P = m\gamma\vec{v}$, podemos então fazer a energia relativística total dividida pela velocidade da luz, e reescrever a eq. (2.32) como

$$P^\alpha = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right). \quad (2.33)$$

Schutz (2009) *in* Collier (2012, p. 226) explica que o quadri-momentum é um vetor quadri-dimensional cujas componentes em algum referencial concebem à partícula energia e momentum em relação a esse referencial.

Existem várias outras grandezas físicas que podem ser definidas nesse contexto, e pode se mostrar, com algum esforço, que essas grandezas físicas aparecem invariantes e, portanto, se mostram pertinentes para descrever os fenômenos físicos dentro desse contexto, como se elas estivessem acontecendo dentro de um espaço de quatro dimensões.

2.4.4 Tensor energia-momentum-tensão (EMT)

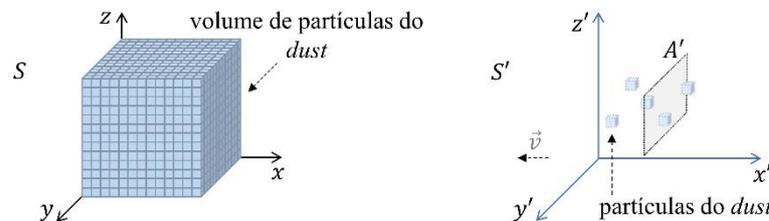
No entanto, para algumas aplicações físicas no contexto da TRG, para descrever o comportamento de alguns sistemas físicos mais complexos no espaço quadri-dimensional, surge a necessidade de se definir um objeto matemático mais complexo, que seja capaz de reunir em si várias informações acerca do comportamento e propriedades físicas de fenômenos físicos. O objeto matemático que atende essas necessidades está além de um vetor, portanto também não está presente no espaço vetorial (V); ele é definido por um espaço mais geral e mais complexo formado unicamente por entes matemáticos denominados Tensores.

Para realçar a utilidade do tensor na Física vamos analisar, segundo Schutz (2009, p. 84-85), que em muitas situações a fonte de um campo gravitacional pode ser considerada um “fluido ideal” e contínuo no espaço quadri-dimensional. Para o autor, a descrição relativística mais simples apresentada para esse “fluido” é de um “*dust*”, que em tradução livre significa “pó” ou “poeira”. Esse “*dust*” é formado por uma coleção de partículas numerosamente grande que estão em repouso com relação a um referencial inercial S , cujas propriedades físicas são descritas em termos de valores médios, obtidas a partir de um elemento de certo volume dessa coleção de partículas.

Nesse contexto, para descrever o comportamento do “*dust*” no seu referencial inercial S

quanto às leis da Física, precisaremos definir algumas grandezas físicas relevantes a este propósito, como a densidade de número de partículas, densidade de energia, densidade de momentum, densidade de fluxo, tensão etc. Para isso, iremos tomar mão de um certo volume do “*dust*” e orientá-lo quadri-dimensionalmente, como ilustrado na Fig. 2.5 da esquerda. Vamos inserir também um observador acoplado a um referencial inercial S' que se move na direção do “*dust*”, apenas ao longo dos eixos x e x' que se sobrepõe. Observe a Fig. 2.5 da direita. A impossibilidade de representar a quarta dimensão (t) na Fig. 2.5 nos obriga a desenhar apenas três dimensões, nos eixos (x, y, z) .

Figura 2.5: Volume de um fluido em movimento relativo entre os referenciais S e S' .



Fonte: Produção própria.

Como ilustrado na Fig. 2.5 da esquerda, o conjunto “*dust*” e referencial inercial S estão em repouso. Mas, para um observador no referencial inercial S' , que se movem juntos em relação a S , terá a impressão do “*dust*” estar se movendo na sua direção. Então, observando o “*dust*” em repouso com relação a S e depois observando o movimento de S' relativamente a S , podemos definir a primeira grandeza física para descrever o comportamento do “*dust*”, que é a densidade de número de partículas (n), assim denotada para S e S' , respectivamente:

$$n = \frac{N}{V} = \frac{N}{\Delta x \Delta y \Delta z} \quad \text{e} \quad n' = \frac{N}{\left(\frac{\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \Delta y \Delta z} = \frac{n}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (2.34)$$

em que N é o número de partículas do “*dust*” e V é o volume ocupado por ele.

Evidenciando N na eq. (2.34) da esquerda com relação a S' ($N = n'V$), tomando V também com relação a S' ($\Delta x', \Delta y', \Delta z'$) e fazendo Δx em termos de t' ($v = \Delta x' / \Delta t' \therefore \Delta x' = v \Delta t'$), podemos substituí-los na equação do fluxo (Φ) e desenvolvê-la com relação a S' , para

obter o fluxo do número de partículas do “*dust*” quando passam por uma área $A' = \Delta y' \Delta z'$ paralela ao plano (y', z') e fixa num valor de x' , conforme foi ilustrado na Fig. 2.5 da direita:

$$N = \frac{n}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v \Delta t' (\Delta y' \Delta z') \rightarrow \Phi = \frac{N}{\Delta t' \Delta A'} \quad (2.35)$$

$$\Phi^{x'} = \frac{\left(\frac{n}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v \Delta t' (\Delta y' \Delta z') \right)}{\Delta t' \Delta A'} \quad (2.36)$$

$$\Phi^{x'} = \frac{nv^x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \Phi^{y'} = \frac{nv^y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \Phi^{z'} = \frac{nv^z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.37)$$

Com relação ao referencial S' a eq. (2.37) indica um fluxo de partículas do “*dust*” através de uma área (A') fixa em S' quando há movimento desse referencial relativamente ao “*dust*”. Se a velocidade relativa entre S' e o “*dust*” for nula, não haverá fluxo de partículas através de A' . Como definimos as partículas do “*dust*” como estando em repouso com relação ao referencial S , toda a eq. (2.37) para este referencial terá valor nulo, ou seja, não haverá fluxo de partículas em S . Porém, por mais que o “*dust*” esteja espacialmente em repouso, no espaço quadri-dimensional este sistema sempre estará em movimento através do tempo, e sempre haverá um fluxo de partículas através uma hiper-superfície determinada pelas coordenadas espaciais no espaço-tempo, na qual o tempo está constante, define Schutz (2009, p. 85-87).

Ainda acompanhando a linha de raciocínio de Schutz (2009, p. 87-88), precisamos definir uma outra grandeza física importante para descrever o movimento do “*dust*” no espaço de quatro dimensões: a quadri-velocidade (\vec{U}^μ), uma grandeza física invariante no contexto relativístico. Isso será feito a partir da eq. (2.37) considerando também o fluxo de partículas do “*dust*” através do tempo, relacionando às dimensões (t, x, y, z) do espaço quadri-dimensional:

$$\vec{U}^\mu = (c, v^x, v^y, v^z) = \underbrace{(c, 0, 0, 0)}_{(U^0, U^1, U^2, U^3)}. \quad (2.38)$$

Relacionando a eq. (2.37) com a eq. (2.36), podemos definir a \vec{U}^μ do “*dust*” para S' como sendo

$$\vec{U}^\mu = \underbrace{\left(\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{v^x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{v^y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{v^z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)}_{(U^0, U^1, U^2, U^3)}. \quad (2.39)$$

Além da eq. (2.38) e eq. (2.39) que descrevem o movimento do “*dust*” nos referenciais quadri-dimensional S e S' , respectivamente, definimos também com a eq. (2.37) o fluxo de partículas que se aplica a ambos os referenciais. Mas essa última equação não descreve o fluxo como uma grandeza física invariante no espaço quadri-dimensional. Para isso é necessário definirmos um quadri-fluxo (\vec{N}^μ), que é dado pelo produto escalar da eq. (2.34) com a eq. (2.39)

$$\vec{N}^\mu = n\vec{U}^\mu = \underbrace{\left(\frac{nc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{nv^x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{nv^y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{nv^z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)}_{(N^0, N^1, N^2, N^3)}. \quad (2.40)$$

A expressão acima descreve o quadri-fluxo de partículas para ambos os referenciais inerciais S e S' . A partir dessa equação interpretamos que no referencial S só haverá quadri-fluxo através do tempo. Pois as partículas de “*dust*” foram definidas em repouso com relação a esse referencial. Para o referencial S' haverá um quadri-fluxo quando a velocidade desse referencial relativamente ao referencial S não for nula.

Ainda com relação a quadri-velocidade, definida pela eq. (2.31), podemos pensar que se há uma energia cinética associada a cada partícula do “*dust*”, então podemos descrever a energia de cada partícula através da equação

$$E = mc^2. \quad (2.41)$$

A partir da expressão acima podemos calcular a densidade de energia (ρ), para analisar a energia total do “*dust*”, uma outra grandeza física invariante no espaço quadri-dimensional (relembre que N é o número de partículas do volume de “*dust*”, e a densidade de número de partículas é $n = N/V \therefore N = nV$). Assim, para ambos os referenciais S e S' , teremos que a densidade de energia será, respectivamente

$$\rho = \frac{E}{V} = \frac{Nmc^2}{V} = nmc^2, \quad \rho' = \frac{nc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\rho}{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (2.42)$$

Observe que na equação da direita surgiram dois fatores $\gamma = \sqrt{1 - v^2/c^2}$. Para Schutz (2009, p. 91-92), os quadri-vetores se transformam apenas com uma lei transformação, então não poderemos mais pensar em representar a densidade de energia (ρ) como um quadri-vetor, mas sim interpretá-la como uma das componentes de um Tensor de segunda ordem, visto que um tensor desse *ranking* se transforma do produto entre duas leis de transformação, nesse caso o produto entre o duplo γ na eq. (2.42).

Antes de definirmos o tensor, perceba como as grandezas físicas que já definimos estão relacionadas umas às outras. A primeira fração da eq. (2.42) da direita equivale a densidade de número de partículas, definida na eq. (2.34) para o referencial S' , e equivale a componente zero do quadri-fluxo, definido na eq. (2.40); a segunda fração da eq. (2.42) da direita descreve a energia relacionada a cada partícula do “*dust*”, que é a componente zero de uma outra grandeza física invariante que envolve a energia do “*dust*”: o quadri-momentum, dado por

$$\vec{p}^\mu = m\vec{U}^\mu = \underbrace{\left(\frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{mU^x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{mU^y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{mU^z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)}_{\left(\frac{E}{c}, p^1, p^2, p^3 \right)}. \quad (2.43)$$

Finalmente, de acordo com Renteln (2014, p. 30-33) e Schutz (2009, p.92-93), podemos definir o tensor de segunda ordem mencionado anteriormente, e para isso aplicaremos aos vetores de quadri-fluxo e quadri-momentum um novo produto denominado produto tensorial, convencionalmente denotado pelo símbolo \otimes :

$$T = \vec{p}^\mu \otimes \vec{N}^\mu = nm\vec{U} \otimes \vec{U}. \quad (2.44)$$

O tensor definido na expressão acima é denominado: Tensor Energia-Momentum-Tensão (EMT). Seguindo a linha de pensamento de Renteln e Schutz, o tensor é um objeto matemático dotado de várias componentes que se mostram invariantes aos observadores e aos diferentes referenciais inerciais no contexto relativístico. O tensor tem a capacidade de reunir em suas componentes diversas informações sobre as diferentes grandezas físicas relacionadas ao fenômeno físico no qual se trabalha com este ente. Portanto, o Tensor EMT reúne informações sobre as grandezas físicas densidade de energia, fluxo de energia, densidade de momentum e tensão (que a depender da situação física pode ser pressão e/ou tensão cisalhamento).

O número de componentes do tensor é dado pelo número de dimensões (N) elevado ao número de índices (n) do tensor (o número de índices corresponde a quantidade bases vetoriais no produto tensorial; a quantidade de bases vetoriais define a ordem (n) do tensor). Deste modo, o Tensor EMT possui $N^n = 4^2 = 16$ componentes, assim descritas:

$$T^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{bmatrix}, \quad (2.45)$$

em que “ $T^{\alpha\beta}$ = fluxo da componente α do quadri-momentum através da hiper-superfície de constante x^β ”. Schutz (2009, p.92).

Nosso próximo passo é especificar cada componente desse tensor, representado na eq. (2.43), quanto às grandezas físicas nas quais recaem cada uma delas.

Segundo Schutz, para especificar as componentes do Tensor EMT podemos tomar a eq. (2.42) como um produto escalar. Logo, se a quadri-velocidade do “*dust*” foi definida na eq. (2.39) como $\vec{U}^\mu = (c, 0, 0, 0)$, cuja componente zero é $U^0 = c$, então o produto escalar entre a componente zero na eq. (2.43) com a componente zero na eq. (2.40), e substituindo $U^0 = 1$, lembrando $n = N/V$, resultará

$$T^{00} = p^0 N^0 = \frac{E}{c} n c = E n = \frac{E}{V} N = \rho, \quad (2.46)$$

em que T^{00} = densidade de energia, Schutz (2009, p.92).

As componentes T^{01} , T^{02} e T^{03} chamaremos de T^{0i} ($i = 1, 2, 3$). Considerando $U^\mu = (c, 0, 0, 0)$, em que a segunda componente descreve a velocidade do “*dust*” na direção do eixo x , temos que

$$T^{0i} = p^0 N^i = E n U^i, \quad (2.47)$$

em que T^{0i} = fluxo de energia através de uma superfície de x^i constante, Schutz (2009, p.92).

As componentes T^{10} , T^{20} e T^{30} chamaremos de T^{i0} , e as componentes p^1 , p^2 e p^3 na eq. (2.42) chamaremos de p^i ($i = 1, 2, 3$). Considerando $U^\mu = (c, 0, 0, 0)$, com a componente zero sendo $U^0 = c$, e lembrando que $n = N/V$, teremos:

$$T^{i0} = p^i N^0 = p^i n U^0 = p^i n = \frac{p^i}{V} N. \quad (2.48)$$

A equação acima representa o fluxo de momentum através de uma hiper-superfície em que t é constante: T^{i0} = densidade de momentum, Schutz (2009, p.92).

As demais componentes que faltam ser especificadas chamaremos de T^{ij} ($ij = 1, 2, 3$): para abranger T^{11} , T^{12} , T^{13} , T^{21} , T^{22} , T^{23} , T^{31} , T^{32} , T^{33} . Iremos considerar agora duas situações na direção de movimento do “*dust*”:

1ª situação: o vetor velocidade do “*dust*” tem direção perpendicular a área A , determinada por (y', z') e fixa num valor de x , e considerando a quadri-velocidade como sendo $U^\mu = (c, 0, 0, 0)$, temos que

$$T^{ij} = p^i N^j . \quad (2.49)$$

A equação acima interpreta a ação do quadri-momentum do “*dust*” perpendicularmente através de A , idêntico a atuação de uma força aplicada perpendicularmente a uma área, cuja definição é da grandeza física denominada pressão. Portanto, essa equação acima é a pressão.

2ª situação: vetor velocidade do “*dust*” tem direção inclinada entre os eixos x' , y' e z' . Desta forma há um vetor componente do vetor velocidade cuja direção é paralela a mesma área A descrita na situação anterior. Também considerando $U^\mu = (c, 0, 0, 0)$, teremos

$$T^{ij} = p^i N^j = p^i n U^j . \quad (2.50)$$

A equação acima interpreta a ação de componentes do quadri-momentum do “*dust*” paralelamente a A' , idêntico a atuação de uma força aplicada paralelamente a uma área, que é a definição da grandeza física denominada tensão de cisalhamento.

Mas ambas as situações que construímos interpretam as mesmas componentes T^{ij} . Portanto, elas representam uma única grandeza física denominada tensão. Ou seja, dependendo do comportamento do vetor velocidade do “*dust*”, as componentes T^{ij} poderão representar pressão e/ou tensão de cisalhamento: T^{ij} = fluxo de i momentum através da superfície j , explica Schutz (2009, p.92).

Deste modo, o Tensor EMT

$$T^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

que descreve o comportamento do fluido que chamamos de “*dust*”, cujas partículas foram

definidas como estando em repouso com relação a um referencial inercial inserido no espaço quadri-dimensional, e após especificar cada uma de suas componentes quanto as grandezas físicas interpretadas nelas, terá a forma

$$T^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix}. \quad (2.51)$$

Para um fluido ideal, podemos escrever

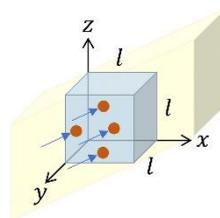
$$T^{\alpha\beta} = \frac{(\rho + p)}{c^2} U^\alpha U^\beta - p \eta^{\alpha\beta}. \quad (2.52)$$

Como explica Schutz (2009, p. 97-98), o Tensor EMT é simétrico, e sua simetria é válida para casos generalizados. Ou seja, matematicamente temos que

$$T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}. \quad (2.53)$$

Uma outra propriedade decorrente do Tensor EMT pode ser definida a partir da conservação da energia. Seguindo o raciocínio de Schutz (2009, p. 99), considere uma certa superfície retangular de lado l em repouso em um referencial inercial ou ligeiramente inercial no espaço quadri-dimensional. Considere também um fluxo de energia que passa por esta superfície, como ilustrado na Fig. 2.6, próxima página.

Figura 2.6: Fluxo de energia na dimensão do tempo no espaço quadri-dimensional.



Fonte: Produção própria.

Pelo princípio de conservação da energia, temos que a soma das taxas de variação da energia que passa por cada uma das faces da superfície é igual a zero. Como explicado em Schutz (2009, p. 99), o fluxo total de energia através da superfície é em relação ao tempo é

$$\begin{aligned} \frac{\partial(T^{00}l^3)}{\partial t} = l^2\{[T^{0x}(x=0) - T^{0x}(x=l)] + [T^{0y}(y=0) - T^{0y}(y=l)] + \\ + [T^{0z}(z=0) - T^{0z}(z=l)]\}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Dividindo a eq. (2.54) pelo volume da superfície l^3 ilustrada na Fig. 2.6 e tomando o limite em que $l \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(T^{00})}{\partial t} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{T^{0x}(x=0) - T^{0x}(x=l)}{l} + \lim_{l \rightarrow 0} \frac{T^{0y}(y=0) - T^{0y}(y=l)}{l} + \\ + \lim_{l \rightarrow 0} \frac{T^{0z}(z=0) - T^{0z}(z=l)}{l}, \end{aligned}$$

temos que, por definição, essa equação recai na definição de derivada:

$$\frac{\partial(T^{00})}{\partial t} = -\frac{\partial T^{0x}}{\partial x} - \frac{\partial T^{0y}}{\partial y} - \frac{\partial T^{0z}}{\partial z}. \quad (2.55)$$

Agora, acompanhando o raciocínio de Schutz (2009, p. 99), podemos pensar em passar todo o segundo termo na eq. (2.55) para o primeiro termo. O resultado é uma equação que representa a conservação da energia representada na componente T^{00} do Tensor EMT:

$$\frac{\partial(T^{00})}{\partial t} + \frac{\partial T^{0x}}{\partial x} + \frac{\partial T^{0y}}{\partial y} + \frac{\partial T^{0z}}{\partial z} = 0 \quad (2.56)$$

Portanto, o Tensor EMT se conserva. Esta é exatamente a propriedade à qual que nos referimos anteriormente, de obter em relação à conservação de energia. De acordo com Schutz (2009, p. 99), outras conservações também são possíveis, como a conservação do momentum por exemplo, em que basta aplicar à eq. (2.56) as componentes adequadas do Tensor EMT para verificar a afirmativa.

Esse Tensor EMT que definimos não é exatamente a forma generalizada, mas poderemos utilizar ele para nossos objetivos. Acreditamos também que o exemplo de Tensor EMT é eficaz para esclarecer ao leitor a potencialidade matemática que os tensores têm de reunir em si diversas informações sobre as propriedades físicas de fenômenos complexos quando analisados no espaço-tempo.

Além do Tensor EMT existem outros tensores que, igualmente este, descrevem o comportamento de outras grandezas físicas em eventos e fenômenos físicos complexos quando analisados no espaço-tempo.

3. RELATIVIDADE GERAL

Uma vez postulada a TRE, que unifica as leis de transformação entre referenciais inerciais para partículas leves e mecânicas no movimento relativo, Albert Einstein voltou sua atenção para como esta teoria da relatividade, aplicável apenas ao caso restrito de espaço-tempo plano e seus referenciais inerciais globais, poderia ser generalizada para problemas envolvendo a gravidade. Segundo Guidry (2019, c. 1.7), Einstein buscava uma nova teoria gravitacional sem as inconsistências da gravidade Newtoniana em relação aos princípios da TRE. Nessa busca tentou várias abordagens para generalização dessa teoria, porém sem muito sucesso até o final de 1907, momento em que uma eventual ideia levou o físico a entender a natureza da gravidade e daí formular a relatividade geral, que apenas em 1915 conseguiu apresentar tal ideia matematicamente em uma teoria completa que posteriormente foi chamada Teoria da Relatividade Geral (TRG).

Para entendermos a natureza do fenômeno físico da gravidade, que é explicada pela TRG, precisamos entender primeiramente a ideia chave que levou Einstein à formulação desta.

3.1 PRINCÍPIO DE EQUIVALÊNCIA DE EINSTEIN

O ponto de partida que levou Einstein a pensar em uma nova teoria gravitacional foi o fato da universalidade do fenômeno físico da gravidade considerada na Gravitação Newtoniana, assim considerada desde a época de Galileu, segundo Guidry (2019, c. 1.8), já que houve a constatação de que objetos de massa e/ou composição diferentes descrevem um movimento de queda em mesma proporção dentro do campo gravitacional da Terra; e mais tarde demonstrado por Newton que massa inercial e massa gravitacional são equivalentes de alta precisão.

A equivalência entre as massas gravitacionais e inerciais era uma coincidência interessante, mas inexplicável para Newton. No entanto, para Einstein, tornou-se a chave para desvendar a verdadeira natureza da gravidade, que se desdobrou na formulação de uma nova teoria gravitacional, a TRG. Sobre a universalidade da gravidade, Einstein percebeu a implicação óbvia de independência entre aceleração gravitacional e qualquer propriedade específica da matéria sendo acelerada:

Se a gravidade atua universalmente sobre todas as massas, independentemente de suas características específicas, então a força gravitacional não pode ser uma propriedade das próprias massas e, portanto, deve ser uma propriedade universal do espaço-tempo em que a gravidade atua. (EINSTEIN, [1907], *in* GUIDRY, 2019, c.1.8).

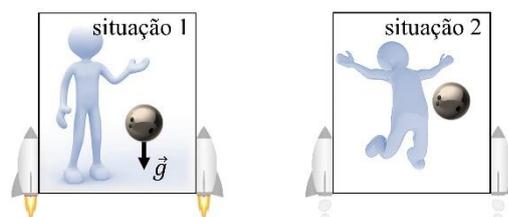
O novo princípio de equivalência proposto por Einstein, de acordo com McMahon (2006, p. 126-130), Schutz (2009, p. 114-115) e d’Inverno (2022, p. 162-164), pode ser descrito a partir de um conjunto simples de experimentos mentais, conhecido como experimento do “elevador” de Einstein.

Tal como concebido por Einstein na época, segundo os autores referenciados, considere um “elevador” como um dispositivo idealizado no qual um astronauta permanece totalmente isolado do ambiente exterior. Sua percepção depende apenas de alguns equipamentos para realizar experimentos dinâmicos simples no interior do próprio “elevador”. Considere também que as dimensões do “elevador” são pequenas o suficiente para que os efeitos de maré da gravidade não possam ser observados. O objetivo do astronauta é tentar determinar seu estado de movimento considerando quatro situações:

Situação 1: o “elevador” está num foguete nas profundezas do espaço interestelar vazio, longe de qualquer matéria que produza campo gravitacional. Ele se desloca para cima com aceleração g constante em relação a um observador inercial na Terra. A intensidade da aceleração do foguete é igual a intensidade da aceleração gravitacional da Terra. O astronauta libera do repouso um objeto e o observa cair com aceleração g , conforme ilustra a situação 1 na Fig. 3.1.

Situação 2: o motor do foguete é desligado para que o mesmo passe a descrever um movimento uniforme em relação ao observador inercial. O astronauta libera o objeto do repouso e o vê flutuar em repouso ao seu lado, conforme ilustra a situação 2 na Fig. 3.1.

Figura 3.1: “Elevador” de Einstein nas profundezas do espaço interestelar vazio.

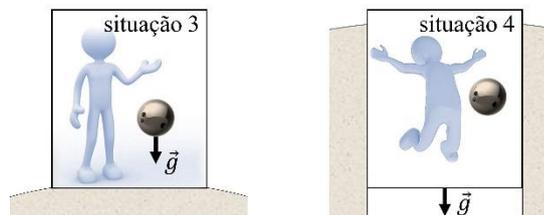


Fonte: Adaptada do Google Imagens.

Situação 3: “o elevador” agora é colocado na superfície da Terra. O astronauta libera o objeto do repouso e, desconsiderando os movimentos rotacionais e orbitais do planeta, o vê cair com aceleração g , conforme ilustra a situação 3 na Fig. 3.3.

Situação 4: o “elevador” é colocado num poço de elevador profundo e evacuado, no qual ele cai livremente em direção ao centro da Terra. O astronauta libera o objeto do repouso e, mais uma vez desconsiderando os movimentos rotacionais e orbitais do planeta, o vê flutuar em repouso com relação a ele, conforme ilustra a situação 4 na Fig. 3.3.

Figura 3.2: “Elevador” de Einstein na Terra.



Fonte: Adaptada do Google Imagens.

A partir do ponto de vista do astronauta, analisando essa série de experimentos, nas situações 1 e 3 ele sente uma força de contato atuando sob seus pés (a força peso do seu corpo em contato com o chão do elevador). Já nas situações 2 e 4 ele percebe a ausência dessa força.

Sobre as situações 2 e 4, o astronauta pode enunciar que um referencial em movimento de queda livre no campo gravitacional da Terra, livre da resistência do ar e efeitos de rotação do planeta, é experimentalmente indistinguível de um referencial em movimento uniforme na ausência de campo gravitacional no espaço interestelar vazio. Esse resultado respeita a relação de distribuição de massa e energia no espaço-tempo proposta na TRE. De acordo com McMahon (2006, p. 130-131), essas duas lições de física condizem ao princípio de equivalência fraca ou Newtoniana: campos gravitacionais são de natureza universal e se acoplam da mesma forma a toda massa e energia presente no Universo.

Sobre as situações 1 e 3, o astronauta pode enunciar que um referencial estático e sujeito à ação de um campo gravitacional é experimentalmente indistinguível de um referencial uniformemente acelerado com a mesma intensidade da aceleração experimentada no campo gravitacional. Ou seja, podemos perceber que “campos gravitacionais uniformes são

equivalentes a referenciais que aceleram uniformemente em relação a referenciais inerciais. Este é o princípio de equivalência entre gravidade e aceleração, e é uma pedra angular da TRG de Einstein”. (SCHUTZ, 2009, p. 114-115). Esse resultado, explica McMahon (2006, p. 130-131), é a princípio de equivalência forte ou Einsteiniana: as leis da Física são as mesmas em referenciais acelerados e em campos gravitacionais uniformes e estáticos.

Acompanhando o raciocínio de Schutz (2009, p. 175), o princípio de equivalência forte significa que, grosso modo, as leis locais da Física quando expressas em forma tensorial na TRE, devem ter a mesma forma matemática quando expressas em um referencial localmente inercial de um espaço-tempo curvo, independente do sistema de coordenadas escolhido, e nos leva à estratégia matemática de descrever as consequências da gravidade como a geometria curva do espaço-tempo, também descreve Carroll (2014, p. 48;52).

3.2 ALGUNS RECURSOS PRELIMINARES

Como descreve Einstein na TRG, a distribuição de massa e energia presente no Universo imprime ao espaço-tempo uma certa curvatura, cuja principal consequência disso é a gravidade, uma força fictícia que surge como efeito ou consequência da geometria curva característica do espaço-tempo, o que implica aos corpos sob ação de um campo gravitacional seguirem um caminho espacialmente curvo, explica Carroll (2014, p. 2). Consequentemente, essa curvatura no espaço-tempo não permite considerarmos referenciais inerciais amplamente extensos.

No entanto, pelo princípio de equivalência forte o espaço-tempo deve ser localmente plano, ou seja, correspondente a uma Variedade Riemanniana: um espaço contínuo de pontos infinitesimalmente distante do anterior e que podem ser curvos globalmente, mas localmente se parece com um espaço plano, explica os autores McMahon (2006, p. 47-48) e Guidry (2019, c. 6.9). Assim, um conjunto de pontos de uma área pequena o suficiente a geometria euclidiana se aplica. Ou seja, se variedade é um espaço diferenciável de 4 dimensões, três espaciais e uma temporal, munida de uma métrica pseudo-Riemanniana, o que permite que noções de geometria possam ser utilizadas na descrição do espaço, então é possível descrever cada ponto deste espaço como uma quantidade numérica.

De acordo com Fleisch (2012, p. 140), seja qual for sua escolha para aritmetizar um espaço com um sistema de coordenadas adequado, há um tensor elementar que permite definir

quantidades fundamentais, como comprimentos e ângulos. Esse tensor é o mesmo que fornece a métrica do sistema de coordenadas no espaço de n dimensões: o Tensor Métrico²⁶.

Acompanhando o raciocínio de Fleisch (2012, p. 140), considere dois pontos separados por uma distância infinitesimal ds , e um vetor $d\vec{r}$ que vai de um ponto a outro. Logo, o quadrado do elemento de comprimento pode ser escrito como

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} . \quad (3.1)$$

Considere também que $d\vec{r} = \vec{e}_\mu dx^\mu$. Então, substituindo nessa eq. (3.1), temos que

$$ds^2 = \vec{e}_\mu dx^\mu \cdot \vec{e}_\nu dx^\nu .$$

Agora evidenciando os vetores de base

$$ds^2 = (\vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu) dx^\mu dx^\nu ,$$

o produto escalar entre eles, segundo Fleisch (2012, p. 140), é chamado Tensor Métrico:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu . \quad (3.2)$$

Como os vetores de base que definem a eq. (3.2) são covariantes, o Tensor Métrico foi definido com componentes covariantes $g_{\mu\nu}$. Mas, também poderíamos definir o Tensor Métrico com componentes contravariantes $g^{\mu\nu}$. Para isso, basta retomar a eq. (3.1) e desta vez considerar que o vetor $d\vec{r}$ é formado por vetor da base dual $d\vec{r} = \vec{e}^\mu dx_\mu$. Assim, o Tensor Métrico de componentes contravariantes será denotado por

$$ds^2 = g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu . \quad (3.3)$$

Poderíamos também pensar em definir o Tensor Métrico a partir de um vetor covariante $d\vec{r} = \vec{e}_\mu dx^\mu$ e outro contravariante $d\vec{r} = \vec{e}^\nu dx_\nu$:

$$ds^2 = (\vec{e}_\mu \cdot \vec{e}^\nu) dx^\mu dx_\nu .$$

Nesse caso, não teremos um Tensor Métrico! Porque o produto escalar de um vetor da base normal e um vetor da base dual define um delta de Kronecker δ_ν^μ : $(\vec{e}_\mu \cdot \vec{e}^\nu) = 0$ quando $\mu \neq \nu$; $(\vec{e}_\mu \cdot \vec{e}^\mu) = 1$ quando $\mu = \nu$, explica Fleisch (2012, p. 141). Assim, essa equação ficará

²⁶ Caso o leitor não possua uma certa familiaridade com o tensor em questão, faz-se necessário ressaltar que há uma leitura mais detalhada no Apêndice A.

$$ds^2 = dx^\mu dx_\nu . \quad (3.4)$$

Sobre o número de componentes do Tensor Métrico, como definimos no Apêndice sobre tensores, pode ser determinado pela relação matemática M^N : em que M é o número de dimensões e N é o número de componentes do tensor. Por exemplo, se o Tensor Métrico for definido no tridimensional terá $M^N = 3^2 = 9$ componentes. Por definição, os componentes da métrica são agrupados em uma matriz com μ linhas e ν colunas:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} . \quad (3.5)$$

Sobre o Tensor Métrico, não importa se tem componentes covariantes ou contravariantes, não importa o sistema de coordenadas escolhido, a distância entre dois pontos deve ser a mesma. Portanto, ainda de acordo com Fleisch (2012, p. 141-142), “o trabalho do Tensor Métrico e seus componentes é transformar o produto de mudanças de coordenadas incrementais expressas em componentes contravariantes ou covariantes na distância invariante entre pontos”. Essa é a lógica do Tensor Métrico, ao afirmar que ele “fornece a geometria” do espaço-tempo.

Uma das muitas funções úteis do Tensor Métrico \vec{g} , é converter entre os componentes covariantes e contravariantes de outros tensores:

$$g_{\mu\nu} A^\nu = A_\mu , \quad (3.6)$$

$$g^{\mu\nu} A_\mu = A^\nu , \quad (3.7)$$

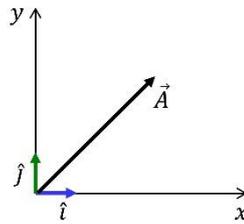
em que esse processo desenvolvido pelo Tensor Métrico também é chamado de levantamento e abaixamento de índice no tensor, como definido no Apêndice sobre tensores.

De acordo com McMahon (2006, p. 32-38), a métrica do Tensor Métrico é responsável por codificar toda a geometria de uma variedade, tornando possível expressar a curvatura da variedade a partir dos desvios sofridos na eq. (2.7).

Além do tensor o métrico, enquanto entidade fundamental para descrever a geometria da variedade, e muitas vezes para alguns aplicações, acaba sendo importante saber como o campo vetorial muda. Para isso, utilizaremos a diferenciação vetorial, que nada mais é do que qualquer mudança nos vetores de base atrelados a um sistema de coordenadas para representar um vetor em um espaço de n dimensões.

Acompanhado o raciocínio de Fleisch (2012, p. 148), Schutz (2009, p. 126-127) e Guidry (2019, c. 3.3), considere o vetor $\vec{A} = A^i \vec{e}_i$ acoplado a um sistema de coordenadas cartesianas, que pode ser bidimensional, cuja base vetorial (\hat{i}, \hat{j}) é fixa a este sistema de coordenadas, como ilustrado na Fig. 3.3.

Figura 3.3: Sistema de coordenadas cartesianas: base vetorial fixa.



Fonte: Produção própria.

De acordo com os autores, podemos analisar as mudanças sofridas por qualquer vetor tomando sua derivada. Logo, a derivada de $\vec{A} = A^i \vec{e}_i$ em relação ao eixo x será

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} = \frac{\partial (A^i \vec{e}_i)}{\partial x}.$$

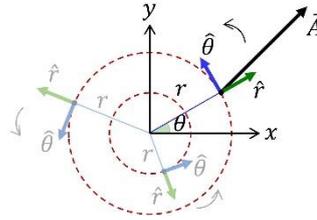
Mas a base vetorial do sistema de coordenadas cartesianas é fixa. Ou seja, os vetores de base (\hat{i}, \hat{j}) não dependem das coordenadas, portanto eles se comportam como constantes. Logo, podemos retirar \vec{e}_i do argumento da derivada

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x} \right) \vec{e}_i. \quad (3.8)$$

Com a eq. (3.8) vemos o quão simples é o processo de diferenciação de um vetor em movimento no espaço aritmetizado por um sistema de coordenadas cuja base vetorial é fixa.

Ainda de acordo com Schutz (2009, p. 126-127), Fleisch (2012, p. 148) e Gray (2019, p. 52-53), façamos o mesmo processo de diferenciação vetorial considerando agora o sistema de coordenadas polares como exemplo; e observe como o mesmo vetor $\vec{A} = A^i \vec{e}_i$ e a base vetorial desse sistema de coordenadas variam junto as coordenadas, como ilustrado na Fig. 3.4.

Figura 3.4: Sistema de coordenadas polares: base vetorial variável.



Fonte: Produção própria.

Desenvolvendo a derivada de $\vec{A} = A^i \vec{e}_i$ em relação ao eixo x

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \theta} = \frac{\partial (A^i \vec{e}_i)}{\partial \theta},$$

como os vetores de base no sistema de coordenadas polares são variáveis, eles se comportam como uma variável no argumento da derivada. Logo, desenvolvendo o produto de Leibniz e avaliando a derivada de \vec{A} em relação a direção x^j , temos que

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^j} = \frac{\partial A^i}{\partial x^j} \vec{e}_i + A^i \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j}, \quad (3.9)$$

em que o termo $\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j}$ é uma derivada do vetor de base variável. Logo, dessa equação, temos que

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \vec{e}_k, \quad (3.10)$$

em que, Schutz (2009, p. 126-127), Fleisch (2012, p. 148) e Gray (2019, p. 52-53), na quantidade $\Gamma_{ij}^k \vec{e}_k$ o componente Γ_{ij}^k é chamado coeficiente de conexão ou Símbolo de Christoffel²⁷, cujos índices:

$$\Gamma_{ij}^k: \begin{cases} i \rightarrow & \text{especifica o vetor de base para o qual a derivada está sendo tomada.} \\ j \rightarrow & \text{denota a coordenada que está sendo variada na derivada.} \\ k \rightarrow & \text{identifica a direção na qual o componente da derivada aponta.} \end{cases}$$

Algumas observações devem ser feitas a respeito do símbolo de Christoffel, explica Carroll (2014, p. 93) e Gray (2019, p. 54): na primeira delas, os autores esclarecem que o

²⁷ Caso o leitor esteja interessado, é possível encontrar uma análise mais aprofundada acerca dos símbolos de Christoffel no livro intitulado *A Student's Guide to Vectors and Tensors*, escrito por Daniel Fleisch em 2012, cujas informações estão disponíveis nas páginas 148 a 153 da obra.

símbolo de Christoffel Γ_{ij}^k não é um tensor; na segunda, explica que o conjunto de índices no símbolo de Christoffel Γ_{ij}^k codifica todas as informações sobre como as coordenadas e seus vetores básicos associados mudam dentro do espaço.

Sobre o símbolo de Christoffel, observe na eq. (3.9) que ele surge da derivada de um vetor de base, cujo resultado é um outro vetor. Como qualquer vetor, esse vetor pode ser descrito como a combinação linear dos vetores de base no ponto em consideração. Deste modo, substituindo a eq. (3.10) na eq. (3.9), e teremos que

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^j} = \frac{\partial A^i}{\partial x^j} \vec{e}_i + A^i \Gamma_{ij}^k \vec{e}_k. \quad (3.11)$$

3.2.1 Relação do símbolo de Christoffel com a métrica

É importante destacar que o símbolo de Christoffel tem uma grande relevância para descrição matemática de uma variedade. Por isto, é essencial entendermos a relação matemática entre o símbolo de Christoffel e a métrica do espaço. Para isso, considere evidenciar o componente Γ_{ij}^k na eq. (3.10). Segundo o raciocínio de Fleisch (2012, p. 150) e Collier (2012, c. 6.2), fazemos isso multiplicando os dois termos dessa equação por um vetor da base dual \hat{e}^l :

$$\Gamma_{ij}^k \vec{e}_k \cdot \hat{e}^l = \hat{e}^l \cdot \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j} \rightarrow \Gamma_{ij}^k (\vec{e}_k \cdot \hat{e}^l) = \hat{e}^l \cdot \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j},$$

mas o produto entre parênteses define um delta de Kronecker δ_k^l , que podemos utilizar para trocar o índice k por l no símbolo de Christoffel Γ_{ij}^k , ficando

$$\Gamma_{ij}^k \delta_k^l = \hat{e}^l \cdot \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j} \rightarrow \Gamma_{ij}^l = \hat{e}^l \cdot \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j}.$$

Tomando agora o artifício da simetria entre os índices do símbolo de Christoffel

$$\Gamma_{ij}^k \vec{e}_k = \Gamma_{ji}^k \vec{e}_k, \quad (3.12)$$

podemos reescrever a equação anterior na seguinte forma:

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} \hat{e}^l \cdot \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j} + \frac{1}{2} \hat{e}^l \cdot \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial x^i}.$$

Como em Fleisch (2012, p. 151), podemos utilizar alguns artifícios da álgebra tensorial

e inserir um termo nulo em cada lado dessa equação anterior:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^l = & \frac{1}{2} \vec{e}^l \cdot \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j} + \left(\frac{1}{2} g^{kl} \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial x^j} \cdot \vec{e}_i - \frac{1}{2} g^{kl} \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial x^k} \cdot \vec{e}_i \right) + \frac{1}{2} \vec{e}^l \cdot \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial x^i} + \\ & + \left(\frac{1}{2} g^{kl} \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial x^i} \cdot \vec{e}_j - \frac{1}{2} g^{kl} \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^k} \cdot \vec{e}_j \right), \end{aligned}$$

que utilizando o artifício da métrica, em que $\vec{e}^l = g^{kl} \vec{e}_k$, ficará

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^l = & \frac{1}{2} g^{kl} \vec{e}_k \cdot \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j} + \left(\frac{1}{2} g^{kl} \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial x^j} \cdot \vec{e}_i - \frac{1}{2} g^{kl} \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial x^k} \cdot \vec{e}_i \right) + \frac{1}{2} g^{kl} \vec{e}_k \cdot \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial x^i} + \\ & + \left(\frac{1}{2} g^{kl} \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial x^i} \cdot \vec{e}_j - \frac{1}{2} g^{kl} \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^k} \cdot \vec{e}_j \right). \end{aligned}$$

Agora, podemos evidenciar a quantidade $\frac{1}{2} g^{kl}$

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} g^{kl} \left[\vec{e}_k \cdot \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j} + \left(\frac{\partial \vec{e}_k}{\partial x^j} \cdot \vec{e}_i - \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial x^k} \cdot \vec{e}_i \right) + \vec{e}_k \cdot \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial x^i} + \left(\frac{\partial \vec{e}_k}{\partial x^i} \cdot \vec{e}_j - \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^k} \cdot \vec{e}_j \right) \right],$$

e reorganizando toda a equação, teremos

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} g^{kl} \left[\left(\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j} \cdot \vec{e}_k + \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial x^j} \cdot \vec{e}_i \right) + \left(\frac{\partial \vec{e}_j}{\partial x^i} \cdot \vec{e}_k + \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial x^i} \cdot \vec{e}_j \right) + \left(-\frac{\partial \vec{e}_j}{\partial x^k} \cdot \vec{e}_i - \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^k} \cdot \vec{e}_j \right) \right].$$

Ainda nessa última equação, podemos reescrever os termos entre parênteses e desenvolver o produto de Leibniz

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} g^{kl} \left[\frac{\partial(\vec{e}_k \cdot \vec{e}_i)}{\partial x^j} + \frac{\partial(\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k)}{\partial x^i} - \frac{\partial(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j)}{\partial x^k} \right],$$

em que, segundo Fleisch (2012, p. 151), Collier (2012, c. 6.2) e d'Inverno (2022, p. 103), o produto escalar dos vetores de base em cada um dos termos são tensores métricos. Logo, podemos reescrever essa equação e reorganizar as parcelas entre parênteses, como

$$\Gamma_{ji}^l = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right), \quad (3.13)$$

ou ainda, em uma nova notação:

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}). \quad (3.14)$$

Como explica Fleisch (2012, p. 152) e Collier (2012, c. 6.2), a eq. (3.14) é a forma mais

simples de encontrar o símbolo de Christoffel para qualquer sistema de coordenadas para o qual o Tensor Métrico é conhecido: basta relacionar os componentes dessa equação com os respectivos componentes da métrica do espaço; os componentes nulos da métricas terão um resultado também nulo; os componentes não nulos da métrica serão aplicados na eq. (3.13), e o resultado é o símbolo de Christoffel em termos da métrica do espaço.

3.2.2 Derivada covariante

Ainda de acordo com Fleisch (2012, p. 154) e Collier (2012, c. 6.3), a partir do símbolo de Christoffel também podemos obter a derivada de vetores ou tensores de ordem superior levando em conta as mudanças nos vetores de base e nos seus componentes. Essa forma de diferenciação, chamada derivada covariante, é essencial para compararmos e combinarmos vetores ou tensores de ordem superior preservando a invariância desses objetos geométricos entre os sistemas de coordenadas.

Seguindo o raciocínio dos autores, para entendermos como funciona a diferenciação covariante, considere o vetor $\vec{A} = A^i \vec{e}_i$ e sua derivada numa direção j :

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^j} = \frac{\partial (A^i \vec{e}_i)}{\partial x^j} \rightarrow \frac{\partial \vec{A}}{\partial x^j} = \frac{\partial A^i}{\partial x^j} \vec{e}_i + A^i \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j}. \quad (3.15)$$

Como já sabemos que a quantidade $\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j}$ define o símbolo de Christoffel, então:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^j} = \frac{\partial A^i}{\partial x^j} \vec{e}_i + A^i \Gamma_{ij}^k \vec{e}_k.$$

Como os índices dos vetores de base denotam uma soma de Einstein, então, por definição, podemos trocar i por k e colocar o vetor de base em evidência

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^j} = \left(\frac{\partial A^k}{\partial x^j} + A^i \Gamma_{ij}^k \right) \vec{e}_k. \quad (3.16)$$

E segundo Fleisch (2012, p. 155) e Collier (2012, c. 6.3), a combinação desses dois termos entre parênteses define a derivada covariante, cuja notação comumente utilizada para componente contravariante é:

$$A^k{}_{;j} \equiv \frac{\partial A^k}{\partial x^j} + A^i \Gamma_{ij}^k, \quad (3.17)$$

em que o ; indica uma derivada covariante, o índice j após o ponto e vírgula indica a direção na qual a derivada está sendo obtida.

Um processo análogo leva à derivada covariante com componentes covariantes:

$$A_k{}_{;j} \equiv \frac{\partial A_k}{\partial x^j} - A_i \Gamma_{kj}^i. \quad (3.18)$$

Mais adiante você entenderá o porquê da eq. (3.18) ter o segundo termo negativo. Nesse momento queremos chamar sua atenção para a forma de notação utilizada para representar a derivada covariante de um vetor com componente contravariante:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^j} = \nabla_j \vec{A} \rightarrow \nabla_j \vec{A} = A^k{}_{;j} \vec{e}_k, \quad (3.19)$$

em que, $\nabla_j \vec{A}$ indica uma derivada covariante do vetor \vec{A} em uma direção j .

Processo análogo pode ser feito para obter notação para derivada covariante de um vetor com componente covariante:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^j} = \nabla_j \vec{A} \rightarrow \nabla_j \vec{A} = A_{s;j} \vec{e}^s \quad (3.20)$$

Avaliando a eq. (3.20), percebemos que o resultado da derivada covariante de um vetor é um outro vetor, que pode ser expresso em termos dos vetores de base do vetor original. Porém, o surgimento do símbolo de Christoffel no resultado da derivada, como nessa mesma equação por exemplo, faz o componente se comportar como o componente de um tensor segunda ordem. Ou seja, “o processo de diferenciação covariante produz um resultado que retém as propriedades de um tensor, o que significa que o resultado se transforma entre sistemas de coordenadas de acordo com as regras de transformação tensorial”. (FLEISCH, 2012, p. 154).

3.2.3 Símbolo de Christoffel com vetores duais

Retornando ao símbolo de Christoffel, poderíamos pensar em defini-lo com vetores da base dual e componentes covariantes. A ideia é a mesma desenvolvida no símbolo de Christoffel com vetores da base normal, explicado em Fleisch (2012, p. 148-149) e Collier

(2012, c. 6.2). Considere o vetor $\vec{A} = A_r \vec{e}^r$, cuja derivada ao longo de uma direção j é

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^j} = \frac{\partial A_r}{\partial x^j} \vec{e}^r + A_r \frac{\partial \vec{e}^r}{\partial x^j}, \quad (3.21)$$

e cujo resultado será

$$\frac{\partial \vec{e}^r}{\partial x^j} = \Lambda_{js}^r \vec{e}^s, \quad (3.22)$$

em que, Λ_{js}^r é o componente do vetor resultante da derivada do vetor da base dual \vec{e}^r , cujos índices:

$$\Lambda_{js}^r: \begin{cases} r \rightarrow & \text{especifica o vetor de base para o qual a derivada está sendo tomada.} \\ j \rightarrow & \text{denota a coordenada que está sendo variada na derivada.} \\ s \rightarrow & \text{identifica a direção na qual o componente da derivada aponta.} \end{cases}$$

Mas tenha muita atenção com a eq. (3.22)! Isso porque Λ_{js}^r não é o símbolo de Christoffel, embora tenha sido definida de forma semelhante. No entanto, essa quantidade desempenha um papel análogo ao símbolo de Christoffel.

Podemos, então, substituir a eq. (3.21) na eq. (3.20), trocar os índices r por s nos vetores de base e colocá-lo em evidência:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^j} = \frac{\partial A_s}{\partial x^j} \vec{e}^s + A_r \Lambda_{js}^r \vec{e}^s \rightarrow \frac{\partial \vec{A}}{\partial x^j} = \left(\frac{\partial A_s}{\partial x^j} + A_r \Lambda_{js}^r \right) \vec{e}^s. \quad (3.23)$$

3.2.4 Transformando Λ_{js}^r no símbolo de Christoffel

Agora vejamos como transformar a quantidade Λ_{js}^r no símbolo de Christoffel. Para isso, utilizaremos o seguinte artifício com o vetor $\vec{A} = A^i \vec{e}_i$ e vetor dual $\vec{A} = A_r \vec{e}^r$:

$$\frac{\partial(\vec{A} \cdot \vec{A})}{\partial x^j} \rightarrow \frac{\partial(A^i \vec{e}_i \cdot A_r \vec{e}^r)}{\partial x^j},$$

e desenvolvendo o produto de Leibniz, teremos

$$\frac{\partial(A^i \vec{e}_i \cdot A_r \vec{e}^r)}{\partial x^j} = \frac{\partial(A^i \vec{e}_i)}{\partial x^j} \cdot (A_r \vec{e}^r) + (A^i \vec{e}_i) \cdot \frac{\partial(A_r \vec{e}^r)}{\partial x^j}. \quad (3.24)$$

Mas a derivada do vetor de base covariante já foi definida na eq. (3.15), e a derivada do vetor

da base dual foi definida na eq. (3.23). Substituindo tudo nessa eq. (3.24), teremos

$$\frac{\partial(A^i \vec{e}_i \cdot A_r \vec{e}^r)}{\partial x^j} = \left[\left(\frac{\partial A^k}{\partial x^j} + A^i \Gamma_{ij}^k \right) \vec{e}_k \right] \cdot (A_r \vec{e}^r) + (A^i \vec{e}_i) \cdot \left[\left(\frac{\partial A_s}{\partial x^j} + A_r \Lambda_{js}^r \right) \vec{e}^s \right].$$

Nosso objetivo agora é encontrar uma relação entre o símbolo de Christoffel e a quantidade Λ_{js}^r . Começaremos reorganizando os produtos escalares nessa última equação:

$$\frac{\partial(A^i \vec{e}_i \cdot A_r \vec{e}^r)}{\partial x^j} = \left[\left(\frac{\partial A^k}{\partial x^j} + A^i \Gamma_{ij}^k \right) A_r \right] (\vec{e}_k \cdot \vec{e}^r) + \left[\left(\frac{\partial A_s}{\partial x^j} + A_r \Lambda_{js}^r \right) A^i \right] (\vec{e}_i \cdot \vec{e}^s).$$

Lembre-se que o produto escalar entre vetor de base e vetor da base dual pode ser reescrito como sendo um delta de Kronecker:

$$\frac{\partial(A^i \vec{e}_i \cdot A_r \vec{e}^r)}{\partial x^j} = \left(\frac{\partial A^k}{\partial x^j} A_r + A_r A^i \Gamma_{ij}^k \right) \delta_k^r + \left(\frac{\partial A_s}{\partial x^j} A^i + A^i A_r \Lambda_{js}^r \right) \delta_i^s.$$

Perceba que nessa última equação temos os deltas de Kronecker com os índices denotando uma soma de Einstein. Então, podemos trocar os índices r por k e i por s , e teremos

$$\frac{\partial(A^i \vec{e}_i \cdot A_r \vec{e}^r)}{\partial x^j} = \left(\frac{\partial A^k}{\partial x^j} A_k + A_k A^i \Gamma_{ij}^k \right) + \left(\frac{\partial A_s}{\partial x^j} A^s + A^s A_r \Lambda_{js}^r \right).$$

Agora reorganizando essa última equação, teremos o primeiro resultado que precisaremos para estabelecer a relação entre o símbolo de Christoffel e a quantidade Λ_{js}^r :

$$\frac{\partial(A^i \vec{e}_i \cdot A_r \vec{e}^r)}{\partial x^j} = \frac{\partial A^k}{\partial x^j} A_k + A^s \frac{\partial A_s}{\partial x^j} + A_k A^i \Gamma_{ij}^k + A^s A_r \Lambda_{js}^r. \quad (3.25)$$

Vamos agora desenvolver a eq. (2,24) de uma outra forma:

$$\frac{\partial(A^i \vec{e}_i \cdot A_r \vec{e}^r)}{\partial x^j} = \frac{\partial[A^i A_r (\vec{e}_i \cdot \vec{e}^r)]}{\partial x^j}.$$

Observe que podemos reescrever os vetores de base $\vec{e}_i \cdot \vec{e}^r$ nessa última equação como sendo um delta de Kronecker, e podemos aplicar sua propriedade para trocar o índice r por i

$$\frac{\partial(A^i \vec{e}_i \cdot A_r \vec{e}^r)}{\partial x^j} = \frac{\partial(A^i A_r \delta_i^r)}{\partial x^j} \rightarrow \frac{\partial(A^i \vec{e}_i \cdot A_r \vec{e}^r)}{\partial x^j} = \frac{\partial(A^i A_i)}{\partial x^j},$$

e desenvolver o produto de Leibniz, chegando ao segundo resultado na busca por uma relação entre o símbolo Christoffel e a quantidade Λ_{js}^r :

$$\frac{\partial(A^i \vec{e}_i \cdot A_r \vec{e}^r)}{\partial x^j} = \frac{\partial A^i}{\partial x^j} A_i + A^i \frac{\partial A_i}{\partial x^j}. \quad (3.26)$$

As eq. (3.25) e (3.26) são resultados de formas distintas de desenvolver a mesma derivada do produto escalar entre um vetor e um vetor dual. Nessa lógica, deve haver uma compatibilidade das equações, ou seja, devem ter o mesmo resultado. Logo, temos que

$$\underbrace{\frac{\partial A^k}{\partial x^j} A_k + A^s \frac{\partial A_s}{\partial x^j} + A_k A^i \Gamma_{ij}^k + A^s A_r \Lambda_{js}^r}_{\text{eq.(3.24)}} = \underbrace{\frac{\partial A^i}{\partial x^j} A_i + A^i \frac{\partial A_i}{\partial x^j}}_{\text{eq.(3.25)}}.$$

A igualdade acima é possível porque nas derivadas no primeiro termo há componentes contravariantes e covariantes com índices k e s , e no segundo termo há componentes contravariantes e covariantes com índices i . Podemos trocar os índices k e s por i , para relacionar melhor os dois termos dessa equação

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^j} A_i + A^i \frac{\partial A_i}{\partial x^j} + A_k A^i \Gamma_{ij}^k + A^s A_r \Lambda_{js}^r = \frac{\partial A^i}{\partial x^j} A_i + A^i \frac{\partial A_i}{\partial x^j},$$

que resulta no cancelamento das derivadas, restando apenas

$$A_k A^i \Gamma_{ij}^k + A^s A_r \Lambda_{js}^r = 0.$$

Podemos ainda trocar o índice covariante k por r , trocar o índice contravariante i por s , e colocar o símbolo de Christoffel e a quantidade Λ_{js}^r em evidência

$$A_r A^s \Gamma_{sj}^r + A^s A_r \Lambda_{js}^r = 0 \rightarrow A_r A^s (\Gamma_{sj}^r + \Lambda_{js}^r) = 0 \rightarrow \Gamma_{sj}^r + \Lambda_{js}^r = 0.$$

Portanto, de acordo com McMahan (2006, p. 69) e Carroll (2014, p. 98), dessa equação temos que, a relação entre a quantidade Λ_{js}^r com o símbolo de Christoffel Γ_{ij}^k é:

$$\Lambda_{js}^r = -\Gamma_{sj}^r. \quad (3.27)$$

Substituindo a eq. (3.27) na eq. (3.23), chegamos à conclusão de que a derivada de um vetor expresso como uma combinação linear de vetores duais tem como resultado:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^j} = \left(\frac{\partial A_s}{\partial x^j} - A_r \Gamma_{sj}^r \right) \vec{e}^s \quad (3.28)$$

Essa equação tem o mesmo significado da eq. (3.16).

Segundo Schutz (2009, p. 152), Fleisch (2012, p. 156) e Guidry (2019, c. 3.13.3), para tensores de segunda ordem com componentes contravariantes, tensores de segunda ordem com

componentes covariantes e tensores de segunda ordem com componentes contravariantes e covariantes (tensores mistos), o componente que é resultado da derivada covariante do vetor fornecido a cada um desses componentes são denotados, respectivamente:

$$B^{ij};_k \equiv \frac{\partial B^{ij}}{\partial x^k} + B^{mj}\Gamma_{mk}^i + B^{in}\Gamma_{nk}^j \quad (3.29)$$

$$C_{ij};_k \equiv \frac{\partial C_{ij}}{\partial x^k} - C_{mj}\Gamma_{ik}^m - C_{in}\Gamma_{jk}^n \quad (3.30)$$

$$D_j^i;_k \equiv \frac{\partial D_j^i}{\partial x^k} + D_j^m\Gamma_{mk}^i - D_n^i\Gamma_{jk}^n \quad (3.31)$$

Como vemos nas equações acima, independente da ordem do tensor, a ideia da derivada covariante é a mesma. A cada ordem n do tensor o componente resultado da derivada covariante é pertinente a essa ordem tensorial e aos tipos de componentes nele.

3.3 TENSOR DE RIEMANN

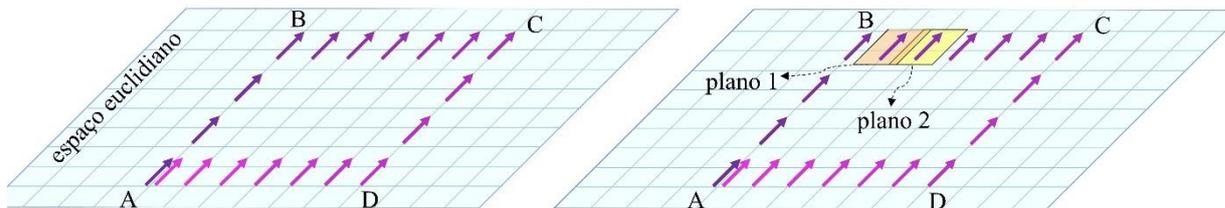
O tensor mais importante na Relatividade Geral, segundo alguns autores, é o tensor de Riemann ou tensor de curvatura de Riemann. A importância deste tensor decorre de suas componentes assumirem valores que identificam a curvatura do espaço ou a ausência dela. Mas antes precisamos entender o conceito de transporte paralelo de vetores e entender como isto se relaciona com as derivadas covariantes.

O transporte paralelo de vetores se refere a um método de mover um vetor pelo espaço mantendo suas características. Ou seja, como explicam Schutz (2009, p. 154-155) e Fleisch (2012, p. 185), considere o espaço plano e um vetor expresso no sistema de coordenadas cartesianas. Movendo esse vetor no caminho de A a B a C a D e volta a A , sem permitir que seus componentes em x , y ou z mudem, perceberemos que o vetor final (desenhado na cor rosa pink) é igual ao inicial, como ilustrado na Fig. 3.5. Logo, se os componentes do vetor transportado não mudam, então o vetor não muda seu comprimento nem direção ou sentido, e isso satisfaz os requisitos do transporte paralelo.

Mas se o vetor for expresso em um sistema de coordenadas cuja base vetorial muda conforme se move no espaço, então o comprimento e a direção de seus vetores de base serão diferentes nas duas localizações (inicial e final). Nesses casos, a função da derivada covariante

é fornecer um meio de transporte paralelo de um dos vetores para a localização do outro, explica Fleisch (2012, p. 153-154).

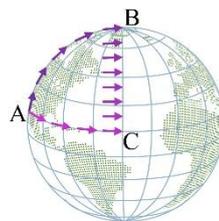
Figura 3.5: Transporte paralelo de vetor no espaço plano.



Fonte: Produção própria.

No entanto, quando se trata de espaço curvo a situação se torna mais complexa e mais difícil de definir vetores apontando na mesma direção. Acompanhando o raciocínio de Schutz (2009, p. 154-156) e Fleisch (2012, p. 185), considere a superfície da Terra como sendo perfeitamente lisa e esférica, e sobre ela um vetor que está inicialmente posicionado no ponto A, como representado na Fig. 3.6. O vetor é desenhado como visto por uma formiga, sempre tangencial à superfície bidimensional do planeta. Esse vetor é então transportado pela formiga ao longo do caminho de A a B a C e de volta a A, de modo que cada vetor é desenhado o mais paralelo possível ao anterior. Neste transporte, o vetor final (desenhado na cor rosa pink) é diferente do inicial. Como vimos que isso não acontece no espaço plano, deve ser um efeito causado pela curvatura da esfera.

Figura 3.6: Transporte paralelo de vetor em um espaço curvo.

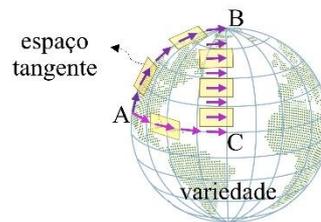


Fonte: Adaptado do Google Fotos.

Em espaços curvos a discrepância entre os vetores inicial e final no transporte paralelo depende do tipo de curvatura do espaço. Portanto, para descrever fenômenos físicos numa variedade é necessário utilizarmos uma geometria rebuscada, e ao mesmo tempo condicionada ao tipo de curvatura da variedade. Vejamos como descrever isto matematicamente.

Como desenvolvido no Apêndice sobre tensores, os vetores são definidos em um espaço euclidiano (plano). Isso permite realizarmos operações com os vetores e até mesmo mover eles espacialmente. Porém, a matemática euclidiana não é aplicável em espaços curvos. No entanto, podemos utilizar conceito de Variedade Riemanniana: considerar o espaço como sendo localmente plano e tangente a superfície bidimensional da esfera, embora globalmente o espaço seja curvo. Com isto, cada vetor paralelamente vizinho ao anterior será definido em um espaço plano, como descreve a Fig. 3.7.

Figura 3.7: Variedade Riemanniana.

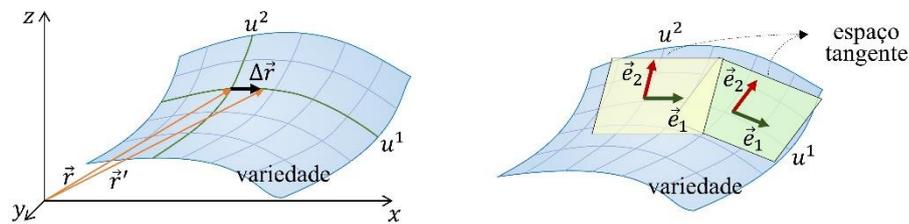


Fonte: Adaptado do Google Fotos.

Mas antes de descrever matematicamente esse processo, precisamos compreender bem o conceito de transporte paralelo de um vetor numa variedade.

Considere o sistema de coordenadas cartesianas tridimensional e uma variedade descrita por algumas curvas, em que u_1 e u_2 descrevem uma certa parametrização da superfície. Um vetor \vec{r} localiza espacialmente um ponto na variedade e, em seguida, é infinitesimalmente deslocado ao longo da curva de parametrização u_1 . Esse deslocamento é representado por um vetor $\Delta\vec{r}$, que representa a diferença entre os vetores \vec{r} e \vec{r}' , como ilustrado a Fig. 3.8 da esquerda.

Figura 3.8: Espaço tangente numa variedade.



Fonte: Produção própria.

Podemos pensar em tomar o limite da razão $\Delta\vec{r}/\Delta u_1$:

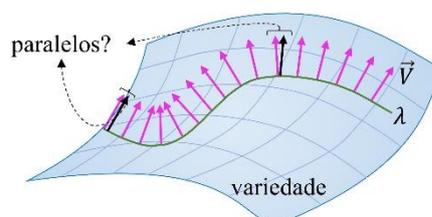
$$\lim_{u_1 \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta u_1} \right) = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u_1} = e_1 \quad (3.32)$$

cuja equação é a definição de derivada. Perceba que o resultado dessa derivada é finito, ou seja, é um vetor de módulo finito. Analogamente em relação a curva u_2 , teremos:

$$\lim_{u_2 \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta u_2} \right) = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u_2} = e_2 \quad (3.33)$$

Observe que esses vetores definidos são tangentes as curvas parametrizadas. Portanto, podemos utilizá-los como vetores de base para definir o espaço tangente no ponto localizado pelo vetor \vec{r} na variedade. Também como resultado, fazendo isto, não se faz necessário continuar utilizando vetores de posição (\vec{r}) e tampouco sistema de coordenadas, como foi ilustrado na Fig. 3.8 da direita.

Figura 3.9: Comparação entre vetores no transporte paralelo.



Fonte: Produção própria.

Imagine agora uma variedade e nela uma curva parametrizada por λ . Essa curva é

definida por uma sequência de pontos infinitesimais, e em cada um desses pontos está definido um vetor \vec{V} , como estivesse saindo da superfície da variedade, formando assim um campo vetorial, como ilustrado a Fig. 3.9.

Como o vetor tangente é uma expansão dos vetores de base do espaço tangente, definido nas eq. (3.31) e (3.32), podemos comparar cada vetor \vec{V} com o infinitesimalmente vizinho, fazendo a diferença da derivada deles sendo tomada ao longo da curva parametrizada por λ . Porém, no transporte paralelo numa variedade, cada vetor é definido em um espaço tangente diferente do anterior. Isso significa que a base vetorial é variável. Logo, será necessário utilizar o conceito de derivada covariante. Segundo Fleisch (2012, p. 153-154), em casos como esse, a derivada covariante serve para projetar a derivada do vetor no espaço tangente. Então, se os vetores são paralelos, o resultado será nulo:

$$\frac{d\vec{V}}{d\lambda} = \vec{0}.$$

Mas a superfície da variedade é descrita por curvas com parametrização u_1 e u_2 . Com isto, é necessário aplicar a regra da cadeia:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial u^j} \frac{du^j}{d\lambda} = \vec{0}.$$

Como a base vetorial do vetor tangente é variável, o primeiro termo na equação acima é uma derivada covariante (e reorganizando os termos):

$$\frac{du^j}{d\lambda} \nabla_j \vec{V} = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \frac{du^j}{d\lambda} \left(\frac{\partial V}{\partial u^j} + \Gamma_{ij}^k V^i \right) \vec{e}_k = \vec{0}.$$

Deste modo:

$$\frac{du^j}{d\lambda} \left(\frac{\partial V}{\partial u^j} + \Gamma_{ij}^k V^i \right) = 0, \quad (3.34)$$

em que,

$$\frac{\partial V^\mu}{\partial u^j} + \Gamma_{ij}^k V^i = 0, \quad (3.35)$$

é a condição necessária que satisfaz o transporte paralelo.

Fazendo a distributividade na eq. (3.34)

$$\frac{\partial V}{\partial u^j} \frac{du^j}{d\lambda} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^j}{d\lambda} V^i = 0,$$

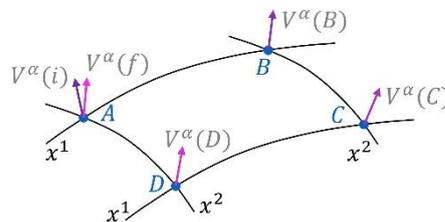
e desenvolvendo a regra da cadeia, teremos definida a equação do transporte paralelo:

$$\frac{dV^k}{d\lambda} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^j}{d\lambda} V^i = 0. \quad (3.36)$$

Essa eq. (3.36) é a definição de transporte paralelo. Observe que ela é a combinação de dois termos, o primeiro dos quais é uma derivada parcial usual e o segundo envolve um símbolo de Christoffel, cujo objetivo deste é levar em conta as mudanças nos vetores de base. Portanto, se a variedade é plana essa equação terá um resultado nulo. O que não acontece numa variedade curva, porque o símbolo de Christoffel não será nulo, explica Fleisch (2012, p. 185-186). Portanto, esta é a definição mais geral de transporte paralelo. Além disso, com essa equação é possível encontrar um vetor paralelo ao original em qualquer lugar em uma variedade. Vejamos então como verificar a curvatura de uma variedade a partir deste conceito.

Seguindo o raciocínio de Schutz (2009, p. 157-158), considere o vetor $\vec{V} = V^\alpha \vec{e}_\alpha$ pertencente ao plano tangente de uma variedade e seu transporte paralelo em *loop*, ao longo de um caminho fechado que vai infinitesimalmente de A a B a C a D e de volta a A . Considere também que as curvas para esse transporte paralelo são parametrizadas por λ e que as curvas que definem a variedade são parametrizadas por x^1 e x^2 , conforme ilustrado na Fig. 3.10.

Figura 3.10: Transporte paralelo em *loop* numa variedade.



Fonte: Produção própria.

Neste caso, temos que $\lambda = x^1$. Desenvolvendo de acordo com Schutz (2009, p. 158), podemos reescrever a eq. (3.35) como

$$\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^1} = -\Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu,$$

e integrar em x^1 ao longo do caminho que vai de A a B

$$\int_A^B \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^1} dx^1 = - \int_A^B \Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu dx^1.$$

Resolvendo a primeira integral na equação acima, teremos

$$\int_A^B \partial V^\alpha = - \int_A^B \Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu dx^1 \rightarrow V^\alpha(B) - V^\alpha(A) = - \int_A^B \Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu dx^1,$$

que evidenciando $V^\alpha(B)$, ficará:

$$V^\alpha(B) = V^\alpha(A_i) - \int_A^B \Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu dx^1, \quad (3.37)$$

em que essa equação descreve o componente de $\vec{V} = V^\alpha \vec{e}_\alpha$ no ponto B .

Processo análogo é desenvolvido para os caminhos entre os demais pontos. Assim sendo, de B a C , temos $\lambda = x^2$. Evidenciando a equação para $V^\alpha(C)$, teremos a equação que descreve o componente de $\vec{V} = V^\alpha \vec{e}_\alpha$ no ponto C :

$$V^\alpha(C) = V^\alpha(B) - \int_B^C \Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu dx^2. \quad (3.38)$$

No transporte paralelo de C a D , temos outra vez $\lambda = x^1$. Evidenciando a equação para $V^\alpha(D)$, teremos a equação que descreve o componente de $\vec{V} = V^\alpha \vec{e}_\alpha$ no ponto D :

$$V^\alpha(D) = V^\alpha(C) - \int_C^D \Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu dx^1. \quad (3.39)$$

Finalmente o transporte paralelo de D a A , outra vez $\lambda = x^2$. Evidenciando a equação para $V^\alpha(A_f)$, teremos a equação que descreve o componente de $\vec{V} = V^\alpha \vec{e}_\alpha$ no ponto A :

$$V^\alpha(A_f) = V^\alpha(D) - \int_D^A \Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu dx^2. \quad (3.40)$$

Precisamos agora avaliar o vetor $\vec{V} = V^\alpha \vec{e}_\alpha$ resultado deste transporte paralelo em *loop* em relação a este mesmo vetor antes de ser transportado (ambos no ponto A na Fig. 3.10, desenhados na cor rosa pink e roxo, respectivamente). Do transporte paralelo no espaço plano

sabemos que, se dois vetores são paralelos a diferença entre eles é nula. Assim, segundo Schutz (2009, p. 158), temos que

$$\delta V^\alpha = V^\alpha(A_f) - V^\alpha(A_i).$$

Mas $V^\alpha(A_f)$ foi definido na eq. (3.40). Substituindo nessa última equação:

$$\delta V^\alpha = V^\alpha(D) - \int_D^A \Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu dx^2 - V^\alpha(A_i).$$

$V^\alpha(D)$ foi definido na eq. (3.39). Substituindo nessa última equação:

$$\delta V^\alpha = V^\alpha(C) - \int_C^D \Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu dx^1 - \int_D^A \Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu dx^2 - V^\alpha(A_i).$$

$V^\alpha(C)$ foi definido na eq. (3.38). Substituindo nessa última equação:

$$\delta V^\alpha = V^\alpha(B) - \int_B^C \Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu dx^2 - \int_C^D \Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu dx^1 - \int_D^A \Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu dx^2 - V^\alpha(A_i).$$

$V^\alpha(B)$ foi definido na eq. (3.37). Substituindo nessa última equação:

$$\delta V^\alpha = V^\alpha(A_i) - \int_A^B \Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu dx^1 - \int_B^C \Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu dx^2 - \int_C^D \Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu dx^1 - \int_D^A \Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu dx^2 - V^\alpha(A_i).$$

Observe que nessa última equação há dois termos que se cancelam. Logo, teremos que

$$V^\alpha = - \int_A^B \Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu dx^1 - \int_B^C \Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu dx^2 - \int_C^D \Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu dx^1 - \int_D^A \Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu dx^2. \quad (3.41)$$

Relembre que a distância entre os pontos do transporte paralelo em *loop* são deslocamentos infinitesimais dados em função da variedade definida por curvas cuja parametrização é x^1 e x^2 . Ou seja, o ponto B está distante $x^1 = a + \delta a$ de A ; o ponto C está a $x^2 = b + \delta b$ de B ; o ponto D está a $x^1 = a + \delta a$ de C ; e o ponto A está a $x^2 = b + \delta b$ de D , como ilustrado na Fig. 3.11.

Substituindo esses deslocamentos nos limites de integração na eq. (3.41), ficará

$$\delta V^\alpha = - \int_a^{a+\delta a} \Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu dx^1 - \int_b^{b+\delta b} \Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu dx^2 - \int_{a+\delta a}^a \Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu dx^1 - \int_{b+\delta b}^b \Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu dx^2.$$

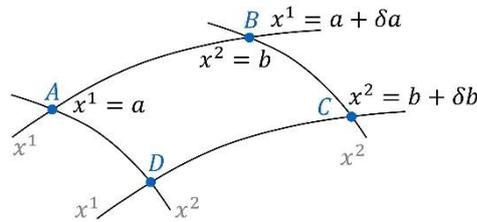
Como as curvas que definem a variedade são parametrizadas por x^1 e x^2 e os limites de integração são dados em função das variações individuais dessas curvas, podemos reorganizar

tais limites de integração. Para fazer isso iremos aplicar uma propriedade dos limites de integração. Assim, teremos que

$$V^\alpha = - \int_a^{a+\delta a} \Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu dx^1 - \int_b^{b+\delta b} \Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu dx^2 + \int_a^{a+\delta a} \Gamma_{\mu 1}^\alpha V^\mu dx^1 + \int_b^{b+\delta b} \Gamma_{\mu 2}^\alpha V^\mu dx^2. \quad (3.42)$$

Há uma semelhança visual entre as integrais. Porém, matematicamente, não são iguais! Isso porque o vetor é diferente quando avaliado em cada ponto do transporte paralelo em *loop*.

Figura 3.11: Transporte paralelo em um *loop* infinitesimal.



Fonte: Produção própria.

Retornando a Fig. 3.11, perceba que no deslocamento de A a B a curva de parametrização x^1 varia enquanto a curva de parametrização x^2 permanece constante, portanto a primeira integral na equação acima é avaliada em $x^2 = b$; de B a C temos x^2 variando e x^1 constante, e a segunda integral é avaliada em $x^1 = a + \delta a$; de C a D temos x^1 variando e x^2 constante, e a terceira integral é avaliada em $x^2 = b + \delta b$; de D a A temos x^1 variando e x^2 constante, e a quarta integral é avaliada em $x^1 = a$. Desse modo, da eq. (3.42), teremos que

$$\begin{aligned} \delta V^\alpha = & - \int_a^{a+\delta a} \Gamma_{\mu 1}^\alpha(b) V^\mu(b) dx^1 - \int_b^{b+\delta b} \Gamma_{\mu 2}^\alpha(a + \delta a) V^\mu(a + \delta a) dx^2 + \\ & + \int_a^{a+\delta a} \Gamma_{\mu 1}^\alpha(b + \delta b) V^\mu(b + \delta b) dx^1 + \int_b^{b+\delta b} \Gamma_{\mu 2}^\alpha(a) V^\mu(a) dx^2. \end{aligned}$$

Observe que nessa última equação há pares de integrais com os mesmos limites de integração. Aplicando a propriedade de que a soma das integrais é igual a integral das somas, teremos

$$\begin{aligned} \delta V^\alpha = & \int_a^{a+\delta a} [-\Gamma_{\mu_1}^\alpha(b)V^\mu(b) + \Gamma_{\mu_1}^\alpha(b+\delta b)V^\mu(b+\delta b)]dx^1 + \\ & + \int_b^{b+\delta b} [\Gamma_{\mu_2}^\alpha(a)V^\mu(a) - \Gamma_{\mu_2}^\alpha(a+\delta a)V^\mu(a+\delta a)]dx^2. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Mas os termos avaliados em $a + \delta a$ e $b + \delta b$ na equação acima precisam ser aferidos em torno de $x = a$ e $x = b$, respectivamente. Assim, poderemos relacionar esses termos aos demais. Para isso, as funções $V^\mu(a + \delta a)$ e $V^\mu(b + \delta b)$ e seus respectivos símbolos de Christoffel $\Gamma_{\mu_2}^\alpha(a + \delta a)$ e $\Gamma_{\mu_1}^\alpha(b + \delta b)$ serão expandidos em Série de Taylor, definida por

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n. \quad (3.44)$$

Mas como os deslocamentos no *loop* são infinitesimais, será necessário expandir em Série de Taylor até o termo de primeira ordem. Então, aplicando $V^\mu(a + \delta a)$ na eq. (3.44), teremos que

$$\sum_{n=0}^{n=1} \frac{V^\mu(a + \delta a)^n(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = V^\mu(a) + \frac{\partial V^\mu}{\partial x^1} \delta a, \quad (3.45)$$

$$\sum_{n=0}^{n=1} \frac{\Gamma_{\mu_2}^\alpha(a + \delta a)^n(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = \Gamma_{\mu_2}^\alpha(a) + \frac{\partial \Gamma_{\mu_2}^\alpha}{\partial x^1} \delta a, \quad (3.46)$$

$$\sum_{n=0}^{n=1} \frac{V^\mu(b + \delta b)^n(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = V^\mu(b) + \frac{\partial V^\mu}{\partial x^2} \delta b, \quad (3.47)$$

$$\sum_{n=0}^{n=1} \frac{\Gamma_{\mu_1}^\alpha(b + \delta b)^n(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = \Gamma_{\mu_1}^\alpha(b) + \frac{\partial \Gamma_{\mu_1}^\alpha}{\partial x^2} \delta b. \quad (3.48)$$

Agora, podemos substituir os resultados das eq. (3.45), (3.46), (3.47) e (3.48) na eq. (3.43):

$$\begin{aligned} \delta V^\alpha = & \int_a^{a+\delta a} \left\{ -\Gamma_{\mu_1}^\alpha(b)V^\mu(b) + \left[\Gamma_{\mu_1}^\alpha(b) + \frac{\partial \Gamma_{\mu_1}^\alpha}{\partial x^2} \delta b \right] \left[V^\mu(b) + \frac{\partial V^\mu}{\partial x^2} \delta b \right] \right\} dx^1 + \\ & + \int_b^{b+\delta b} \left\{ \Gamma_{\mu_2}^\alpha(a)V^\mu(a) - \left[\Gamma_{\mu_2}^\alpha(a) + \frac{\partial \Gamma_{\mu_2}^\alpha}{\partial x^1} \delta a \right] \left[V^\mu(a) + \frac{\partial V^\mu}{\partial x^1} \delta a \right] \right\} dx^2. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Por questões de organização iremos nos referir ao produto na primeira integral como * e na segunda integral como **, e vamos resolver fora da eq. (3.49) e depois substituir nela:

$$* = \Gamma_{\mu_1}^\alpha(b)V^\mu(b) + \frac{\partial \Gamma_{\mu_1}^\alpha}{\partial x^2} \delta b V^\mu(b) + \Gamma_{\mu_1}^\alpha(b) \frac{\partial V^\mu}{\partial x^2} \delta b + \frac{\partial \Gamma_{\mu_1}^\alpha}{\partial x^2} \delta b \frac{\partial V^\mu}{\partial x^2} \delta b, \quad (3.50)$$

$$** = \Gamma_{\mu_2}^\alpha(a)V^\mu(a) + \frac{\partial \Gamma_{\mu_2}^\alpha}{\partial x^1} \delta a V^\mu(a) + \Gamma_{\mu_2}^\alpha(a) \frac{\partial V^\mu}{\partial x^1} \delta a + \frac{\partial \Gamma_{\mu_2}^\alpha}{\partial x^1} \delta a \frac{\partial V^\mu}{\partial x^1} \delta a. \quad (3.51)$$

Feito isso podemos somar * com o termo fora de colchetes na primeira integral na eq. (3.49) e ** com o termo fora de colchetes na segunda integral. Nisso, observe que o termo $\Gamma_{\mu_1}^\alpha(b)V^\mu(b)$ no produto * se cancela com o termo $-\Gamma_{\mu_1}^\alpha(b)V^\mu(b)$ na primeira integral, igualmente o termo $\Gamma_{\mu_2}^\alpha(a)V^\mu(a)$ no produto ** se cancela com o termo $\Gamma_{\mu_2}^\alpha(a)V^\mu(a)$ na segunda integral, isso após o jogo de sinais. Finalmente, teremos

$$\begin{aligned} \delta V^\alpha = & \int_a^{a+\delta a} \left[\frac{\partial \Gamma_{\mu_1}^\alpha}{\partial x^2} \delta b V^\mu(b) + \Gamma_{\mu_1}^\alpha(b) \frac{\partial V^\mu}{\partial x^2} \delta b + \frac{\partial \Gamma_{\mu_1}^\alpha}{\partial x^2} \delta b \frac{\partial V^\mu}{\partial x^2} \delta b \right] dx^1 - \\ & - \int_b^{b+\delta b} \left[\frac{\partial \Gamma_{\mu_2}^\alpha}{\partial x^1} \delta a V^\mu(a) + \Gamma_{\mu_2}^\alpha(a) \frac{\partial V^\mu}{\partial x^1} \delta a + \frac{\partial \Gamma_{\mu_2}^\alpha}{\partial x^1} \delta a \frac{\partial V^\mu}{\partial x^1} \delta a \right] dx^2, \end{aligned}$$

em que δa e δb podem ser reorganizados, ficando

$$\begin{aligned} \delta V^\alpha = & \int_a^{a+\delta a} \left[\left(\frac{\partial \Gamma_{\mu_1}^\alpha}{\partial x^2} V^\mu(b) + \Gamma_{\mu_1}^\alpha(b) \frac{\partial V^\mu}{\partial x^2} \right) \delta b + \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu_1}^\alpha}{\partial x^2} \frac{\partial V^\mu}{\partial x^2} \right) \delta b^2 \right] dx^1 - \\ & - \int_b^{b+\delta b} \left[\left(\frac{\partial \Gamma_{\mu_2}^\alpha}{\partial x^1} V^\mu(a) + \Gamma_{\mu_2}^\alpha(a) \frac{\partial V^\mu}{\partial x^1} \right) \delta a + \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu_2}^\alpha}{\partial x^1} \frac{\partial V^\mu}{\partial x^1} \right) \delta a^2 \right] dx^2. \end{aligned}$$

Mas os deslocamentos são infinitesimais: $\delta a^2 \approx 0 \approx \delta b^2$. Então, dessa última equação, temos

$$\begin{aligned} \delta V^\alpha \approx & \int_a^{a+\delta a} \left[\left(\frac{\partial \Gamma_{\mu_1}^\alpha}{\partial x^2} V^\mu(b) + \Gamma_{\mu_1}^\alpha(b) \frac{\partial V^\mu}{\partial x^2} \right) \delta b \right] dx^1 - \\ & - \int_b^{b+\delta b} \left[\left(\frac{\partial \Gamma_{\mu_2}^\alpha}{\partial x^1} V^\mu(a) + \Gamma_{\mu_2}^\alpha(a) \frac{\partial V^\mu}{\partial x^1} \right) \delta a \right] dx^2. \end{aligned}$$

Perceba que nas integrais acima temos derivadas que são constantes em relação aos índices de integração. Logo, podemos retirar essas derivadas das integrais

$$\begin{aligned} \delta V^\alpha \approx & \left[\left(\frac{\partial \Gamma_{\mu_1}^\alpha}{\partial x^2} V^\mu(b) + \Gamma_{\mu_1}^\alpha(b) \frac{\partial V^\mu}{\partial x^2} \right) \delta b \right] \int_a^{a+\delta a} dx^1 - \\ & - \left[\left(\frac{\partial \Gamma_{\mu_2}^\alpha}{\partial x^1} V^\mu(a) + \Gamma_{\mu_2}^\alpha(a) \frac{\partial V^\mu}{\partial x^1} \right) \delta a \right] \int_b^{b+\delta b} dx^2. \end{aligned}$$

Como o papel de (a) e (b) apenas é indicar o vetor numa curva no *loop*, podem ser

retirados da equação. Agora resolvendo as integrais nessa última equação

$$\delta V^\alpha \approx \left[\left(\frac{\partial \Gamma_{\mu 1}^\alpha}{\partial x^2} V^\mu + \Gamma_{\mu 1}^\alpha \frac{\partial V^\mu}{\partial x^2} \right) \delta b \right] \delta a - \left[\left(\frac{\partial \Gamma_{\mu 2}^\alpha}{\partial x^1} V^\mu + \Gamma_{\mu 2}^\alpha \frac{\partial V^\mu}{\partial x^1} \right) \delta a \right] \delta b ,$$

e colocando δa e δb em evidência, teremos que

$$\delta V^\alpha \approx \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu 1}^\alpha}{\partial x^2} V^\mu + \Gamma_{\mu 1}^\alpha \frac{\partial V^\mu}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma_{\mu 2}^\alpha}{\partial x^1} V^\mu - \Gamma_{\mu 2}^\alpha \frac{\partial V^\mu}{\partial x^1} \right) \delta a \delta b .$$

Podemos reescrever a condição do transporte paralelo, definida na eq. (3.34), de acordo com cada derivada do componente V^μ na equação acima: $\frac{\partial V^\mu}{\partial x^1} = -\Gamma_{\nu 1}^\mu V^\nu$ e $\frac{\partial V^\mu}{\partial x^2} = -\Gamma_{\nu 2}^\mu V^\nu$. Substituindo nessa última equação e reorganizando os termos, teremos

$$\delta V^\alpha \approx \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu 1}^\alpha}{\partial x^2} V^\mu - \frac{\partial \Gamma_{\mu 2}^\alpha}{\partial x^1} V^\mu + \Gamma_{\mu 2}^\alpha \Gamma_{\nu 1}^\mu V^\nu - \Gamma_{\mu 1}^\alpha \Gamma_{\nu 2}^\mu V^\nu \right) \delta a \delta b .$$

Mas com a substituição apareceram índices repetidos que denotam uma soma. Podemos renomear índices de modo que favoreça evidenciar o componente V^μ , ficando

$$\delta V^\alpha \approx \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu 1}^\alpha}{\partial x^2} V^\mu - \frac{\partial \Gamma_{\mu 2}^\alpha}{\partial x^1} V^\mu + \Gamma_{\nu 2}^\alpha \Gamma_{\mu 1}^\nu V^\mu - \Gamma_{\nu 1}^\alpha \Gamma_{\mu 2}^\nu V^\mu \right) \delta a \delta b .$$

Além disso, lembrando que δa e δb são as diferenças infinitesimais nos pontos ao longo das curvas coordenadas, então, por isso, podemos escrever $\delta a = \delta x^1$ e $\delta b = \delta x^2$. Substituindo na equação acima e evidenciando o componente V^μ , teremos

$$\delta V^\alpha \approx \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu 1}^\alpha}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma_{\mu 2}^\alpha}{\partial x^1} + \Gamma_{\nu 2}^\alpha \Gamma_{\mu 1}^\nu - \Gamma_{\nu 1}^\alpha \Gamma_{\mu 2}^\nu \right) V^\mu \delta x^1 \delta x^2 . \quad (3.52)$$

Perceba que na eq. (3.52), a quantidade $V^\mu \delta x^1 \delta x^2$ se comporta como um ente matemático de terceira ordem, enquanto δV^α se comporta como um de primeira ordem. Então, tudo que está entre parênteses deve ser uma certa quantidade que torne os dois lados da igualdade objetos de mesma ordem. Daí, teremos que eq. (3.52) pode ser reescrita como

$$\delta V^\alpha \approx R_{\beta \mu \nu}^\alpha V^\mu \delta x^\mu \delta x^\nu , \quad (3.53)$$

em que, $R_{\beta \mu \nu}^\alpha$ é um tensor de quarta ordem: o Tensor de Curvatura de Riemann, explicam Fleisch (2012, p. 188), Collier (2012, c. 6.6) e Schutz (2009, p. 159), definido por:

$$R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} \equiv \frac{\partial \Gamma_{\beta\nu}^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \Gamma_{\beta\mu}^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\sigma\mu}^{\alpha} \Gamma_{\beta\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha} \Gamma_{\beta\mu}^{\sigma}, \quad (3.54)$$

ou ainda, em uma outra notação:

$$R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} \equiv \partial_{\mu}(\Gamma_{\beta\nu}^{\alpha}) - \partial_{\nu}(\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha}) + \Gamma_{\sigma\mu}^{\alpha} \Gamma_{\beta\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha} \Gamma_{\beta\mu}^{\sigma}. \quad (3.55)$$

Perceba que o tensor de curvatura envolve a derivada dos símbolos de Christoffel. Segundo Fleisch (2012, p. 188) e Schutz (2009, p. 160), em qualquer espaço podemos definir um sistema de coordenadas para o qual os símbolos de Christoffel sejam nulos em algum ponto. Porém, se o espaço não é plano, os símbolos de Christoffel não serão nulos em todos os locais, o que significa que suas derivadas parciais não serão nulas. Portanto, uma condição necessária e suficiente para o transporte paralelo no espaço-tempo plano, é:

$$\delta V^{\alpha} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} = 0.$$

3.4 EQUAÇÃO DE EINSTEIN

Como vimos no princípio da equivalência, há uma certa relação entre a curvatura do espaço-tempo e a distribuição de massa e energia. Mas como descreve a famosa equação da energia na TER, a massa se comporta como energia: $E = mc^2$. Isso implica que a curvatura do espaço-tempo está relacionada a distribuição de energia²⁸. Nosso objetivo agora é tentar descrever isso matematicamente.

Vimos anteriormente que o tensor de Riemann permite descrever a curvatura da variedade, cuja causa é a distribuição de energia, e essa distribuição de energia pode ser descrita pelo Tensor EMT. Para entender essa afinidade buscaremos estabelecer uma relação entre as grandezas físicas Tensor EMT ($T^{\alpha\beta}$), definido no primeiro capítulo, e o tensor de Riemann ($R_{\beta\mu\nu}^{\alpha}$). Só que estes são tensores de ordem diferente um do outro. Então, antes de irmos à definição matemática que relacione essas duas grandezas físicas, precisamos explorar algumas propriedades, para que a partir delas possamos relacionar tais tensores.

O tensor de Riemann possui algumas simetrias, e uma delas é a antissimetria. Podemos

²⁸ A energia atrelada a massa de um buraco negro causa uma curvatura significativa no espaço-tempo. Mas o fato dele girar significa que há um outro tipo de energia que também induz ao espaço-tempo um efeito de curvatura. Portanto, falar que a energia causa uma curvatura no espaço-tempo é uma forma generalizada para toda a energia.

verificar isso matematicamente multiplicando a eq. (3.54) por -1 e depois comparar a equação resultante com a equação original. O resultado é que esse tensor não é alterado no processo. Portanto, como explica Collier (2012, c. 6.6) e Schutz (2009, p. 160), o tensor de Riemann é antissimétrico nos índices que compõe o primeiro par e o segundo par de índices:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu}. \quad (3.56)$$

Outra propriedade do tensor de Riemann, que decorre da anterior, segundo Schutz (2009, p. 160), é a simetria entre os índices, que permutados ciclicamente resultam três equações que somadas teremos que todos os termos no lado direito se eliminam, ficando

$$R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} + R_{\mu\nu\beta}^{\alpha} + R_{\nu\beta\mu}^{\alpha} = 0. \quad (3.57)$$

Podemos multiplicar a equação acima pela métrica da variedade ($g_{\alpha\lambda}$) e, pela propriedade de levantar ou baixar índices, podemos reescrever a equação com índices covariantes, na forma

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} + R_{\alpha\nu\beta\mu} = 0. \quad (3.58)$$

Ainda segundo Collier (2012, c. 6.6) e Schutz (2009, p. 160), dessas duas propriedades de simetrias do tensor de Riemann, temos que

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (3.59)$$

Vamos retomar os componentes do tensor de Riemann, e considerando que este tensor foi definido em um referencial localmente inercial, ou seja, os vetores de base não mudam, então $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = 0$. Logo, se tomarmos a derivada covariante dessa equação em relação a uma coordenada x^{λ} , teremos

$$R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} \equiv \frac{\partial \Gamma_{\beta\nu}^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \Gamma_{\beta\mu}^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\sigma\mu}^{\alpha} \Gamma_{\beta\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha} \Gamma_{\beta\mu}^{\sigma} \rightarrow R_{\beta\mu\nu;\lambda}^{\alpha} = \frac{\partial \Gamma_{\beta\nu}^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \Gamma_{\beta\mu}^{\alpha}}{\partial x^{\nu}},$$

e permutando ciclicamente os índices nessa última equação, obteremos três equações:

$$R_{\beta\mu\nu;\lambda}^{\alpha} = \frac{\partial \Gamma_{\beta\nu}^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\lambda}} - \frac{\partial \Gamma_{\beta\mu}^{\alpha}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}}, \quad R_{\beta\lambda\mu;\nu}^{\alpha} = \frac{\partial \Gamma_{\beta\nu}^{\alpha}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma_{\beta\mu}^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}},$$

$$R_{\beta\nu\lambda;\mu}^{\alpha} = \frac{\partial \Gamma_{\beta\nu}^{\alpha}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\mu}} - \frac{\partial \Gamma_{\beta\mu}^{\alpha}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\mu}},$$

cuja soma destas, e convenientemente multiplicando pela métrica $g_{\alpha k}$ para baixar o índice α e depois trocando a letra k por α para padronizar, como em Schutz (2009, p. 163), resulta numa identidade invariante chamada Identidade de Bianchi:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} = 0. \quad (3.60)$$

Essa identidade ainda será muito importante para o nosso trabalho.

Ainda acompanhando o raciocínio de Schutz (2009, p. 164), considere a eq. (3.51) e utilizar a métrica para baixar o índice α , deixando o tensor de Riemann em termos de componentes covariantes $R_{\alpha\beta\mu\nu}$. A partir da métrica também podemos executar a contração deste tensor, cujo processo matemático define um outro tensor denominado Tensor de Ricci:

$$g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\mu\nu} \equiv R_{\beta\mu\nu}^{\mu} = R_{\beta\nu}. \quad (3.61)$$

Schutz destaca que, em virtude da propriedade antissimétrica do tensor Riemann, a contração deste objeto matemático acontece no primeiro e terceiro índice. Outras contrações também seriam possíveis, mas elas se reduzem a zero ou à própria equação acima.

Ainda segundo Schutz (2009, p. 160), podemos também pensar em executar a contração do tensor de Ricci, cujo resultado define o Escalar de Curvatura de Ricci:

$$g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = R_{\beta}^{\beta} = RT^{\alpha\beta}. \quad (3.62)$$

Vimos com a eq. (2.53) que o Tensor EMT é simétrico, e a partir do princípio de conservação da energia vimos que a derivada dele é igual a zero. Mas, de acordo com Schutz (2009, p. 99), se este tensor for definido em um referencial localmente inercial, então, por definição, a sua derivada covariante também será igual a zero:

$$T^{\mu\nu};_{\mu} = 0. \quad (3.63)$$

Estas propriedades servirão como lastro para demonstrar a relação entre as grandezas físicas Tensor EMT ($T^{\alpha\beta}$) e o tensor de Riemann ($R_{\beta\mu\nu}^{\alpha}$). Como só é possível relacionar tensores de mesma ordem, seguindo o raciocínio de Schutz (2009, p. 164), iremos utilizar a identidade de Bianchi, definida na eq. (3.60), e a métrica para manipular o tensor de Riemann na intenção de contrair ele para um tensor de segunda ordem:

$$g^{\alpha\mu} (R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu}) = 0 \rightarrow R_{\beta\mu\nu;\lambda}^{\mu} + R_{\beta\lambda\mu;\nu}^{\mu} + R_{\beta\nu\lambda;\mu}^{\mu} = 0.$$

E agora utilizaremos a propriedade de antissimetria nos índices da segunda parcela nessa última equação, teremos

$$R_{\beta\nu;\lambda} - R_{\beta\mu\lambda;\nu}^{\mu} + R_{\beta\nu\lambda;\mu}^{\mu} = 0 \rightarrow R_{\beta\nu;\lambda} - R_{\beta\lambda;\nu} + R_{\beta\nu\lambda;\mu}^{\mu} = 0.$$

Ainda sim essa última equação é um tensor de quarta ordem. Na mesma lógica de contração tensorial, iremos agora multiplicar essa equação pela métrica $g^{\beta\nu}$:

$$g^{\beta\nu} \left(R_{\beta\nu;\lambda} - R_{\beta\lambda;\nu} + R_{\beta\nu\lambda;\mu}^\mu \right) = 0 \rightarrow R_{\nu;\lambda}^\nu - R_{\lambda;\nu}^\nu + R_{\nu\lambda;\mu}^{\mu\nu} = 0,$$

e pela propriedade de antissimetria, na segunda parcela, ainda de acordo com Schutz, temos

$$R_{;\lambda} - R_{\lambda;\nu}^\nu - R_{\lambda\nu;\mu}^{\mu\nu} = 0 \rightarrow R_{;\lambda} - R_{\lambda;\nu}^\nu - R_{\lambda;\mu}^\mu = 0,$$

em que, os índices repetidos denotando uma soma de Einstein, que podem ser reescritos como

$$R_{;\lambda} - R_{\lambda;\mu}^\mu - R_{\lambda;\mu}^\mu = 0 \rightarrow R_{;\lambda} - 2R_{\lambda;\mu}^\mu = 0.$$

Agora, vamos dividir toda essa última equação por -2 , inserir no termo negativo um produto com um delta de Kronecker definido por g_λ^μ e multiplicar tudo pela métrica $g^{\nu\lambda}$:

$$R_{\lambda;\mu}^\mu - \frac{1}{2} R_{;\lambda} = 0 \rightarrow g^{\nu\lambda} R_{\lambda;\mu}^\mu - \frac{1}{2} g^{\nu\lambda} g_\lambda^\mu R_{;\lambda} = 0,$$

teremos que

$$R_{;\mu}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R_{;\mu} = 0,$$

que colocando a derivada covariante em evidência, ficará

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right)_{;\mu} = 0, \quad (3.64)$$

em que o termo entre parênteses, como em Schutz (2009, p. 165), é o Tensor de Einstein:

$$G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R, \quad (3.65)$$

ou ainda, em uma outra notação:

$$(G^{\nu\mu})_{;\mu} = 0. \quad (3.66)$$

Ainda de acordo com o autor, podemos considerar também o Tensor de Einstein na forma covariante:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R. \quad (3.67)$$

Com a TRG Einstein propôs estabelecer uma relação entre o Tensor EMT e o tensor de

Riemann, e nós reproduzimos a ideia anteriormente, e o resultado foi tensor de Einstein, definido na eq. (3.65). Este tensor de segunda ordem carrega em si informações que codificam a curvatura da variedade. No entanto, ainda não foi esclarecida a relação que mencionamos reproduzir. Nessa busca algo interessante chama atenção, que é sobre o tensor de Einstein e o Tensor EMT possuem derivada covariante nula. A partir disso renovamos a proposta de reproduzir a ideia de descrever a relação entre a distribuição de energia e curvatura do espaço-tempo. Para isto, como em Collier (2019, c. 7.6), é necessário estabelecer uma relação entre o tensor de Einstein e o Tensor EMT. Segundo o autor, esse foi o acerto de Einstein que o permitiu descrever tal relação, pelo menos teoricamente. Isso significa que, matematicamente:

$$G_{\mu\nu} \propto T_{\mu\nu} , \quad (3.68)$$

Só que a Física não trabalha com proporção, mas sim com equações. Porém, esta é a forma mais simples de definir a equação de Einstein, como o próprio o fez, explica Collier (2019, c. 7.6). Então, da proporção na eq. (3.68) temos que:

$$G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu} , \quad (3.69)$$

ou ainda, em uma outra notação:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = kT_{\mu\nu} , \quad (3.70)$$

em que, k é uma constante de ajuste, que surge da transformação de uma proporção para equação.

Observe que todo o primeiro termo na eq. (3.70) codifica a curvatura da variedade, e todo o segundo termo codifica a distribuição e a fonte da curvatura. Mas para verificar a validade dessa relação matemática entre distribuição de energia e curvatura do espaço-tempo, é necessário conhecer como o campo gravitacional influencia o comportamento da matéria.

Considere um campo gravitacional, como o da Terra por exemplo. Cada ponto desse campo pode ser associado a um número bem definido que caracteriza uma grandeza física, nesse caso o campo gravitacional. A partir da segunda lei de Newton e da equação da Gravitação Newtoniana, conhecemos que o campo gravitacional influencia o estado de movimento da matéria. Então, para uma partícula em repouso nesse campo, temos que:

$$\vec{F} = m_i \vec{a} = m_g \vec{g} = -Gm_g \frac{M}{r^2} \hat{r} .$$

Observe que a massa está presente em todas as igualdades na equação acima. Portanto, é notório que $m_i = m_g$. Isso significa que:

$$\vec{a} = \vec{g}. \quad (3.71)$$

Por definição também temos que \vec{g} é um campo gravitacional conservativo. Então, segundo Gray (2019, p. 98), matematicamente podemos escrever

$$\vec{g} = -\nabla\Phi, \quad (3.72)$$

em que, Φ é uma função que define o campo gravitacional, e o negativo do gradiente ($-\nabla$) desse campo define um campo escalar chamado Potencial Gravitacional. A partir da eq. (3.71) relacionada a eq. (3.72), temos

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\nabla\Phi, \quad (3.73)$$

que, na Gravitação Newtoniana, de acordo com Gray (2019, p. 98), descreve como se dá a aceleração de um corpo em um campo gravitacional. Ou seja, descreve como o campo gravitacional influencia o comportamento da matéria e sua trajetória no campo gravitacional.

Considere agora a opção de tomar a divergência da equação da Gravitação Newtoniana:

$$\nabla \cdot \vec{g} = \nabla \cdot \left(-G \frac{M}{r^2} \hat{r} \right), \quad (3.74)$$

e como utilizamos a Terra como exemplo, considere sua geometria como sendo esférica. Acompanhando o raciocínio de Collier (2019, c. 3.5.7.3), vamos agora aplicar nessa geometria a eq. (3.74):

$$\nabla \cdot \vec{g} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \left(-G \frac{M}{r^2} \right) \right] + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin(\theta) g_\theta] + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial g_\varphi}{\partial \varphi}.$$

Mas como a eq. (3.74) não tem componentes em θ nem φ , essa última equação ficará

$$\nabla \cdot \vec{g} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 G \frac{M}{r^2} \right) \rightarrow \nabla \cdot \vec{g} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (GM).$$

Se M é a massa da Terra, considerando a definição matemática de densidade de massa como sendo $\rho_m = M/V$, em que o volume do planeta é $V = (4/3)\pi r^3$, podemos reescrever M na equação anterior como

$$\nabla \cdot \vec{g} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(G \rho_m \frac{4}{3} \pi r^3 \right) \rightarrow \nabla \cdot \vec{g} = -\frac{1}{r^2} G \rho_m \frac{4}{3} \pi \frac{\partial r^3}{\partial r},$$

que resolvendo a derivada, teremos

$$\nabla \cdot \vec{g} = -4\pi G \rho_m . \quad (3.75)$$

Como \vec{g} é um campo conservativo, podemos substituir a eq. (3.72) na eq. (3.75):

$$\nabla \cdot (-\nabla \Phi) = -4\pi G \rho_m ,$$

o que define a equação de Poisson para campos gravitacionais:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho_m . \quad (3.76)$$

Segundo Collier (2019, c. 3.5.7.3), essa equação descreve como a matéria distribuída em um certo volume gera um certo campo gravitacional que é descrito pelo Potencial Gravitacional Φ .

Na visão Newtoniana o campo gravitacional permite que matéria possa interagir mutuamente com matéria: os corpos gravitantes se atraem. No entanto, a partir do ponto de vista da TRG, isso não é comprovado. O que de fato acontece é que a matéria gera uma deformação no espaço-tempo imprimindo uma curvatura nele. Quando um corpo se aproxima de outro, como a Terra orbitando o Sol por exemplo, o que acontece é que não há uma atração entre o Sol e a Terra, mas sim a Terra está seguindo um caminho de menor trajetória entre dois pontos, a qual é determinada pela geometria da curvatura do espaço-tempo. Como explica Schutz (2009, p. 156-157), esse caminho é o “mais reto possível” no espaço-tempo curvo. Tal trajetória é chamada Geodésica, e a equação que a descreve é a Equação da Geodésica²⁹:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 . \quad (3.77)$$

Perceba que se a Equação da Geodésica for aplicada ao espaço-tempo plano, o símbolo de Christoffel será nulo, e ela ficará definida para o espaço-tempo plano, em que a trajetória entre dois pontos é descrita por uma reta.

Acompanhando a linha de raciocínio de Collier (2019, c. 8.1; 8.3) e Guidry (2019, c. 8.1), uma condição muito importante considerada na TRG é o Limite de Campo Fraco:

²⁹ Uma leitura mais detalhada sobre a Equação da Geodésica pode ser encontrada no APÊNDICE B, sobre a Equação da Geodésica.

$$v \ll c, \quad g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \text{com} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \quad \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} = 0, \quad (3.78)$$

em que se considera que um corpo se move com uma velocidade (v) muito menor que a velocidade da luz (c) no vácuo e o espaço-tempo curvo ($g_{\mu\nu}$) é tratado como sendo um espaço-tempo plano ($\eta_{\mu\nu}$) mais uma leve perturbação ($h_{\mu\nu}$), que descreve uma leve curvatura nesse espaço-tempo. Nessa condição, segundo os autores Collier e Guidry, temos que a Equação da Geodésica apresentada na eq. (3.77) reproduz os resultados da eq. (3.73) e eles são compatíveis com a Gravitação Newtoniana. Essa condição de limite de campo fraco da TRG ainda será muito útil nos próximos capítulos, para prever a existência de Ondas Gravitacionais.

Na TRG uma fonte gravitacional pode ser aproximada a um certo volume de “*dust*”, como explicado no tópico 2.4.4. Se o campo gravitacional gerado por esse “*dust*” obedece à condição de Limite Campo Fraco, definido na eq. (3.78), temos que a solução da Equação de Einstein, definida na eq. (3.70), para a distribuição de massa, descrita pelo componente $\rho_m c^2$ na métrica do Tensor EMT,

$$T_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \rho_m c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.79)$$

será dada por:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{2} k c^4 \rho_m, \quad (3.80)$$

que, segundo Collier (2019, c. 7.6), é condizente com a equação da Gravitação Newtoniana, definida na eq. (3.75). E ainda igualando esta equação com a eq. (3.80)

$$4\pi G \rho_m = \frac{1}{2} k c^4 \rho_m,$$

chegaremos a:

$$8\pi G = k c^4, \quad (3.81)$$

em que, k é uma constante:

$$k = \frac{8\pi G}{c^4}. \quad (3.82)$$

Podemos substituir o valor de k na eq. (3.70), e a Equação de Einstein será:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (3.83)$$

ou ainda, em uma outra notação:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (3.84)$$

se considerar $c = 1$ e $G = 1$ na eq. (3.83).

Originalmente Einstein tentou descrever a dinâmica do Universo a partir dessa equação, no sentido de que há uma distribuição de massa e energia em larga escala e essa distribuição deveria causar uma curvatura no espaço-tempo.

Segundo Collier (2019, c. 7.7), em 1917, sem dispositivos sofisticados de observação celeste àquela época, Einstein propôs uma modificação a suas equações de campo, adicionando um termo que ficou conhecido como Constante Cosmológica. Sua convicção na época era que o Universo seria estático. O problema disso é que, sendo estático, a gravidade acabaria por fazer o Universo colapsar sobre si mesmo. A Constante Cosmológica iria “reajustar” suas equações de campo. Essa constante descreveria o papel de uma espécie de pressão negativa, uma força repulsiva ou “antigravitacional”.

Nessa ideia, além da derivada covariante do tensor de Einstein e do Tensor EMT serem nulos, também temos que:

$$g^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0, \quad (3.85)$$

e com isto, foi sugerido que:

$$(G^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu})_{;\mu} = 0, \quad (3.86)$$

em que, Λ é a Constante Cosmológica inserida por Einstein.

Da eq. (3.86), seguindo o raciocínio de Collier (2019, c. 7.7) e Schutz (2009, p. 354), a equação de Einstein pode ainda ser reescrita como:

$$G^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} = kT^{\mu\nu}, \quad (3.87)$$

ou ainda, em uma outra notação:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (3.88)$$

E se considerar $c = 1$ e $G = 1$, a equação de Einstein definida na eq. (3.88), ficará:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu} . \quad (3.89)$$

A Constante Cosmológica³⁰ é um componente adicionado a equação de Einstein para fazer com que o Universo quisesse expandir, isso compensaria a contração causada pela distribuição massa e energia e o Universo passaria ser tratado como estático. Algum tempo depois Einstein declarou que este ter sido o maior erro de sua vida, explica Schutz (2009, p. 187-182).

Pouco depois os físicos descobriram que as soluções das equações de Einstein para um Universo estático eram instáveis. A confirmação disto veio em 1929, com as descobertas feitas pelo astrônomo americano Edwin Hubble (1889-1953), de que o Universo não é estático e não estava se contraindo, muito pelo contrário, o Universo está em expansão acelerada. Essa expansão é consistente com as soluções cosmológicas derivadas das equações de campo de Einstein originalmente não modificadas. Isso levou Einstein a pensar que a Constante Cosmológica foi seu maior erro, explicam Collier (2019, c. 7.7) e Schutz (2009, p. 353).

Desde então a Constante Cosmológica se tornou motivo de muitos questionamentos na sociedade científica, no sentido de que: o que de fato é essa Constante Cosmológica? O que ela representa no Universo? Existem muitas discussões sobre isso, sugestões de que talvez seja energia escura ou energia no vácuo do Universo etc., explica Schutz (2009, p. 355). Por vezes essa Constante Cosmológica também chega a ser desconsiderada como constante e é tida como uma dependência que está condicionada a modelos de quinta essência do Universo, cujo valor varia conforme o próprio Universo envelhece.

Cientificamente há a ideia de que a energia escura e a Constante Cosmológica podem ser teoricamente necessárias para explicar a expansão acelerada do Universo, o que traz credibilidade sobre o que Einstein acreditava ter sido seu maior erro na TRG.

³⁰ Caso o leitor deseje aprofundar seu conhecimento sobre a constante cosmológica presente na equação de Einstein, recomenda-se a consulta do livro intitulado *A First Course in General Relativity*, 2nd, de autoria de Bernard F. Schutz, publicado em 2009, cujas informações pertinentes estão disponíveis nas páginas 353 a 358 da obra.

4. ONDAS GRAVITACIONAIS

Neste capítulo faremos uma introdução à ideia de Ondas Gravitacionais, considerando utilizar a gravidade linearizada, o Gauge de Lorentz e o Gauge transversal com traço e sem traço que nos mostrará as polarizações positiva e cruzada das Ondas Gravitacionais. Iniciaremos com as principais equações da TRG, que são as equações da onda e de campo de Einstein, e vamos mostrar como naturalmente elas conduzem às soluções que descrevem Ondas Gravitacionais.

4.1 O OPERADOR DE D'ALEMBERT

Relembre da equação padrão da onda:

$$\nabla^2 A - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0. \quad (1.1)$$

A eq. (1.1) não só descreve ondas em uma corda, na água ou no ar, ela também descreve as ondas eletromagnético que vêm das equações de Maxwell.

Acompanhando o raciocínio de Chris (2022, ep. 109a), Collier (2019, c. 12.2.1) e Lambourne (2010, p. 228), a eq. (1.1) pode ser escrita em coordenadas cartesianas

$$\nabla^2 A = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \rightarrow \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2},$$

e como c é uma constante pode ser realocada para a derivada de A em função de t :

$$\frac{\partial^2 A}{\partial (ct)^2} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}.$$

Dessa forma, podemos reescrever as coordenadas (ct, x, y, z) como:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial (x^0)^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial (x^1)^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial (x^2)^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial (x^3)^2} = 0, \quad (4.1)$$

ou ainda, como uma outra notação:

$$\partial_0^2 A - \partial_1^2 A - \partial_2^2 A - \partial_3^2 A = 0, \quad (4.2)$$

em que os índices subscritos indicam qual variável do espaço-tempo está sendo derivada.

Observe os sinais de mais e menos na eq. (4.2), como eles estão agrupados igualmente nos termos da métrica de Minkowski

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Segundo Chris (2022, ep. 109a), para o espaço quadri-dimensional, podemos considerar reescrever a eq. (4.2) como uma soma de Einstein envolvendo a métrica de Minkowski, e o operador de derivadas parciais $\partial_\mu \partial_\nu$ como uma derivada de segunda ordem

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu A = 0,$$

e a métrica pode ser usada para levantar o índice ν e trocar por μ :

$$\partial_\mu \partial^\mu A = 0. \quad (4.3)$$

Agora, como explica D’Inverno (2022, p. 210) e Lambourne (2010, p. 228) podemos reescrever esse conjunto de operadores derivativos $\partial_\mu \partial^\mu$ como um único operador denominado operador d’Alembert:

$$\square \equiv \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2. \quad (4.4)$$

Logo, dessa eq. (4.4), teremos que

$$\square \equiv \partial_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2. \quad (4.5)$$

Operador d’Alembert, também conhecido como d’Alembertiano, desempenha um papel análogo ao laplaciano, só que no espaço quadri-dimensional. Essa definição de laplaciano quadri-dimensional se torna mais evidente na eq. (4.3). A combinação de soma do d’Alembertiano com a métrica de Minkowski faz com que esse operador seja uma entidade matemática independente do sistema de coordenadas, explica Schultz (2009, p. 193).

Se substituirmos o d’Alembertiano na eq. (4.3), teremos a definição matemática da onda para o espaço quadri-dimensional:

$$\square A = 0, \quad (4.6)$$

em que A é uma função.

Visto sob esse prisma, e tendo em vista que o comportamento geométrico do espaço-

tempo é descrito por uma métrica bem definida, matematicamente podemos obter Ondas Gravitacionais aplicando a equação de onda ao tensor métrico $g_{\mu\nu}$:

$$\nabla^2 g_{\mu\nu} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial t^2}. \quad (4.7)$$

O resultado disso, pela demonstração que levou à eq. (4.6), é a definição de Ondas Gravitacionais no espaço-tempo:

$$\square g_{\mu\nu} = 0. \quad (4.8)$$

A partir da eq. (4.8) chegamos à ideia de formular as Ondas Gravitacionais como sendo vibrações na métrica ($g_{\mu\nu}$) do espaço-tempo, que são pequenos desvios na métrica ($\eta_{\mu\nu}$) do espaço-tempo de Minkowski, e veremos mais adiante que essas pequenas mudanças são dadas por um termo h nessa métrica plana. No entanto, ainda não é o suficiente para explicar as Ondas Gravitacionais. Precisamos conhecer como se dá essa perturbação da métrica plana para que possamos entender como as Ondas Gravitacionais acontecem; e a base fundamental para isso será a equações de campo de Einstein e a própria métrica do espaço-tempo.

Nesse sentido, nosso objetivo é entender como a métrica do espaço-tempo ($g_{\mu\nu}$) obedece a equação de onda. Para isso, será necessário calcular a forma de cada um dos entes matemáticos que compõem o tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \quad (3.67)$$

e isso será feito considerando uma condição de gravidade linearizada, também chamada gravidade fraca. O procedimento envolve calcular a métrica inversa de Minkowski, depois calcular o símbolo de Christoffel, o tensor de Riemann e, por fim, o tensor de Ricci e o escalar de Ricci. A linearização dessas quantidades facilitará a explicação do porquê a métrica do espaço-tempo obedece a equação de onda e a forma como as Ondas Gravitacionais se propagam no espaço-tempo.

4.2 A GRAVIDADE LINEARIZADA

Embora as Ondas Gravitacionais geralmente sejam produzidas em situações de campo gravitacional forte envolvendo corpos supermassivos, mas, devido à fraqueza da interação

gravitacional, as Ondas Gravitacionais produzidas são apenas pequenos deslocamentos sofridos pela métrica de Minkowski, explica Cheng (2010, p. 337-338). Assim, é possível mostrar que existem soluções ondulatórias das equações de campo de Einstein que se mostram viáveis à descrição de ondas de gravidade utilizando a condição de limite de campo fraco newtoniano. Sendo assim, é necessário definir algumas entidades físico/matemática e recalculá-las como a métrica inversa, símbolo de Christoffel, tensor de Riemann, tensor de Ricci, escalar de Ricci e tensor de Einstein, bem como também calcular a nova forma que assumirá a equação de Einstein considerando a gravidade linearizada.

Chamado também de gravidade linearizada, como explica Schultz (2009, p. 189), o Limite de Campo Fraco Newtoniano nada mais é do que aproximar a métrica do espaço-tempo ($g_{\mu\nu}$) curvo como sendo a métrica de Minkowski ($\eta_{\mu\nu}$) mais uma leve perturbação ($h_{\mu\nu}$) descrita por um tensor de segunda ordem, seja ele com índices covariantes ou contravariantes:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \text{com} \quad \|h_{\mu\nu}\| \ll 1. \quad (4.9)$$

De acordo também com Lambourne (2010, p. 226-227), nessa condição as velocidades consideradas também são muito menores que a velocidade da luz. Dessa forma, as equações que surgem como solução as equações de campo de Einstein são menos complexas e condizem com os resultados consagrados pela Gravitação Newtoniana, explica Collier (2019, c. 9.1).

Em coordenadas cartesianas, a métrica definida na eq. (4.9) tem os componentes da perturbação $h_{\mu\nu}$ são muito menores que os componentes da métrica $\eta_{\mu\nu}$, o que significa que qualquer termo envolvendo $h_{\mu\nu}$ quadrado vai gerar quantidades tão pequenas que podem ser consideradas desprezíveis:

$$h_{\alpha\beta}h_{\mu\nu} \approx 0 \quad \text{e} \quad h^{\alpha\beta}h^{\mu\nu} \approx 0. \quad (4.10)$$

Implicitamente temos que a derivada do tensor de perturbação ($h_{\mu\nu}$) com índices covariantes ou contravariantes, por definição matemática, também gera quantidades muito pequenas:

$$\|\partial_\sigma h_{\mu\nu}\| \ll 1 \quad \text{e} \quad \|\partial^\sigma h^{\mu\nu}\| \ll 1. \quad (4.11)$$

Isso significa que termos envolvendo a derivada do tensor de perturbação, sua derivada ao quadrado ou termos que o envolve em produto com sua derivada, também gera quantidades tão pequenas que também podem ser consideradas desprezíveis:

$$(\partial_\rho h_{\alpha\beta})(\partial_\sigma h_{\mu\nu}) \approx 0 \quad \text{ou} \quad h_{\alpha\beta}(\partial_\sigma h_{\mu\nu}) \approx 0. \quad (4.12)$$

Consideração análoga é válida para o tensor de perturbação com índices contravariantes.

Como explica Chris (2022, ep. 109b), qualquer alteração nas coordenadas vai alterar as derivadas uma vez covariantemente e alterar a métrica inversa duas vezes contravariantemente, e isso acontece para fazer com que o resultado seja independente das coordenadas, portanto, invariante.

4.2.1 Métrica inversa

Seguindo o raciocínio de Chris (2022, ep. 109b), podemos também assumir a gravidade linearizada envolvendo a métrica inversa, em que $k^{\mu\nu}$ é uma leve perturbação acrescentada à métrica de Minkowski $\eta^{\mu\nu}$:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + k^{\mu\nu} \quad \text{com} \quad \|k^{\mu\nu}\| \ll 1. \quad (4.13)$$

Relembre que tomar o produto entre a métrica e a métrica inversa gera uma matriz identidade ou um delta de Kronecker se as métricas formarem uma soma de Einstein:

$$g_{\mu\sigma}g^{\sigma\nu} = \delta_\mu^\nu. \quad (4.14)$$

Sabendo disso, podemos substituir na equação acima a métrica definida na eq. (4.9) e a métrica inversa definida na eq. (4.13)

$$(\eta_{\mu\sigma} + h_{\mu\sigma})(\eta^{\sigma\nu} + k^{\sigma\nu}) = \delta_\mu^\nu,$$

e passando δ_μ^ν para o primeiro termo da equação e realizando a distributiva, teremos

$$\delta_\mu^\nu = \eta_{\mu\sigma}\eta^{\sigma\nu} + h_{\mu\sigma}\eta^{\sigma\nu} + \eta_{\mu\sigma}k^{\sigma\nu} + h_{\mu\sigma}k^{\sigma\nu}.$$

Note que a primeira parcela no segundo termo dessa última equação define um delta de Kronecker, e que pode ser eliminado com o delta de Kronecker no primeiro termo

$$\delta_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu + h_{\mu\sigma}\eta^{\sigma\nu} + \eta_{\mu\sigma}k^{\sigma\nu} + h_{\mu\sigma}k^{\sigma\nu} \quad \rightarrow \quad 0 = h_{\mu\sigma}\eta^{\sigma\nu} + \eta_{\mu\sigma}k^{\sigma\nu} + h_{\mu\sigma}k^{\sigma\nu}.$$

Perceba também que na última parcela há um produto envolvendo h , que pela definição na eq. (4.10) gera uma quantidade que pode ser considerada desprezível. Portanto, teremos

$$0 = h_{\mu\sigma}\eta^{\sigma\nu} + \eta_{\mu\sigma}k^{\sigma\nu} + \underbrace{h_{\mu\sigma}k^{\sigma\nu}}_0 \rightarrow 0 = h_{\mu\sigma}\eta^{\sigma\nu} + \eta_{\mu\sigma}k^{\sigma\nu} .$$

Organizando toda essa última equação, o resultado é que:

$$h_{\mu\sigma}\eta^{\sigma\nu} = -\eta_{\mu\sigma}k^{\sigma\nu} . \quad (4.15)$$

A saber como a métrica inversa se relaciona com métrica normal, conforme Chris (2022, ep. 109b), podemos resolver os componentes de k em termos dos componentes do tensor $h_{\mu\sigma}$. Para isso vamos multiplicar os dois lados da eq. (4.15) pela métrica inversa de Minkowski:

$$\eta^{\rho\mu}\eta_{\mu\sigma}k^{\sigma\nu} = -h_{\mu\sigma}\eta^{\sigma\nu}\eta^{\rho\mu} .$$

Mas o produto entre as métricas no primeiro termo define um delta de Kronecker, que podemos utilizar para mudar o índice de k

$$\delta_{\sigma}^{\rho}k^{\sigma\nu} = -h_{\mu\sigma}\eta^{\sigma\nu}\eta^{\rho\mu} \rightarrow k^{\rho\nu} = -h_{\mu\sigma}\eta^{\sigma\nu}\eta^{\rho\mu} ,$$

e podemos também utilizar a propriedade da métrica para levantar e trocar os índices de $h_{\mu\sigma}$:

$$k^{\rho\nu} = -h^{\rho\nu} . \quad (4.16)$$

Podemos agora reescrever a métrica inversa apresentada na eq. (4.13) substituindo nela a eq. (4.16). Portanto, teremos que a métrica inversa do espaço-tempo será definida por:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} , \quad (4.17)$$

em que, $h^{\mu\nu}$ na eq. (4.17) é definido por

$$h^{\mu\nu} = h_{\rho\sigma}\eta^{\rho\mu}\eta^{\sigma\nu} , \quad (4.18)$$

Mas ainda explica Chris (2022, ep. 109b) e D'Inverno (2022, p. 401), que para manter a relação entre a métrica covariante e contravariante, precisamos definir a perturbação da métrica com índices covariante e contravariantes. Então, para levantar os índices de $h_{\rho\sigma}$, presente na eq. (4.18), precisamos utilizar uma métrica inversa $g^{\mu\nu}$, que será a mesma definida na eq. (4.17)

$$h_{\nu}^{\mu} = h_{\sigma\nu}g^{\mu\sigma} \rightarrow h_{\nu}^{\mu} = h_{\sigma\nu}(\eta^{\mu\sigma} - h^{\mu\sigma}) \rightarrow h_{\nu}^{\mu} = h_{\sigma\nu}\eta^{\mu\sigma} - h_{\sigma\nu}h^{\mu\sigma} .$$

Sabemos que o produto entre dois tensores de perturbação da métrica é o mesmo que ele ao quadrado, e pela definição na eq. (4.10) isso gera uma quantidade que pode ser considerada desprezível. Portanto, sob a condição de gravidade linearizada, levantar ou baixar

índices em um tensor significa colocar a métrica de Minkowski em soma de Einstein com os índices do tensor:

$$h_{\nu}^{\mu} = h_{\sigma\nu}\eta^{\mu\sigma}. \quad (4.19)$$

4.2.2 Símbolo de Christoffel linearizado

Relembre a equação que define o símbolo de Christoffel em termos da métrica

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\alpha}(\partial_{\nu}g_{\alpha\mu} + \partial_{\mu}g_{\alpha\nu} - \partial_{\alpha}g_{\mu\nu}). \quad (3.14)$$

Na eq. (3.14) há derivadas parciais envolvendo a métrica. Vejamos o que acontece se substituir nelas a métrica definida na eq. (4.9)

$$\partial_{\rho}g_{\mu\nu} = \partial_{\rho}(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}).$$

Só que a métrica de Minkowski é constante, logo sua derivada será nula. Assim, teremos

$$\partial_{\rho}g_{\mu\nu} = \partial_{\rho}h_{\mu\nu}. \quad (4.20)$$

Isso significa que a métrica nas derivadas parciais na eq. (3.14) serão todas substituídas por $h_{\mu\nu}$ com os índices adequados. Logo, podemos reescrever a eq. (3.14) como

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\alpha}(\partial_{\nu}h_{\alpha\mu} + \partial_{\mu}h_{\alpha\nu} - \partial_{\alpha}h_{\mu\nu}).$$

Observe que nessa última equação temos a métrica inversa. Podemos substituir ela pela métrica inversa definida na eq. (4.17)

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}(\eta^{\sigma\alpha} - h^{\sigma\alpha})(\partial_{\nu}h_{\alpha\mu} + \partial_{\mu}h_{\alpha\nu} - \partial_{\alpha}h_{\mu\nu}),$$

e fazendo a distributiva, teremos

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}\eta^{\sigma\alpha}(\partial_{\nu}h_{\alpha\mu} + \partial_{\mu}h_{\alpha\nu} - \partial_{\alpha}h_{\mu\nu}) - \frac{1}{2}h^{\sigma\alpha}(\partial_{\nu}h_{\alpha\mu} + \partial_{\mu}h_{\alpha\nu} - \partial_{\alpha}h_{\mu\nu}).$$

Mas pela definição na eq. (4.13) temos que o produto de $h_{\mu\nu}$ com a derivada de $h_{\mu\nu}$ gera uma quantidade que pode ser considerada desprezível. Então, como define Collier (2019, c. 12.2) e Grøn (2004, p. 192), sob a condição de gravidade linearizada a equação que define o símbolo de Christoffel é:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}\eta^{\sigma\alpha}(\partial_{\nu}h_{\alpha\mu} + \partial_{\mu}h_{\alpha\nu} - \partial_{\alpha}h_{\mu\nu}). \quad (4.21)$$

4.2.3 Tensor de Riemann linearizado

Relembre a equação que define esse tensor de Riemann

$$R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \partial_{\mu}(\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}) - \partial_{\nu}(\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho}) + \Gamma_{\nu\sigma}^{\gamma}\Gamma_{\mu\gamma}^{\rho} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\delta}\Gamma_{\nu\delta}^{\rho}. \quad (3.55)$$

Observe que na eq. (3.55) há derivadas parciais envolvendo símbolos de Christoffel e há também o produto entre eles. Como explica Chris (2022, ep. 109b), precisamos calcular esse produto entre os símbolos de Christoffel e as derivadas que os envolve. Partindo desta última opção, vamos substituir nas derivadas o símbolo de Christoffel que foi definido na eq. (4.21)

$$\begin{aligned} & \partial_{\mu}(\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}) - \partial_{\nu}(\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho}) \\ &= \partial_{\mu} \left[\frac{1}{2}\eta^{\rho\alpha}(\partial_{\sigma}h_{\alpha\nu} + \partial_{\nu}h_{\alpha\sigma} - \partial_{\alpha}h_{\nu\sigma}) \right] - \partial_{\nu} \left[\frac{1}{2}\eta^{\rho\alpha}(\partial_{\sigma}h_{\alpha\mu} + \partial_{\mu}h_{\alpha\sigma} - \partial_{\alpha}h_{\mu\sigma}) \right]; \end{aligned}$$

e fazendo a distributiva

$$\begin{aligned} & \partial_{\mu}(\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}) - \partial_{\nu}(\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho}) \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\rho\alpha}(\partial_{\mu}\partial_{\sigma}h_{\alpha\nu} + \partial_{\mu}\partial_{\nu}h_{\alpha\sigma} - \partial_{\mu}\partial_{\alpha}h_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\partial_{\sigma}h_{\alpha\mu} - \partial_{\nu}\partial_{\mu}h_{\alpha\sigma} + \partial_{\nu}\partial_{\alpha}h_{\mu\sigma}). \end{aligned}$$

Mas, por definição matemática, a ordem de derivadas parciais não importa. Assim, nessa última equação, temos dois termos que se eliminam, restando apenas

$$\partial_{\mu}(\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}) - \partial_{\nu}(\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho}) = \frac{1}{2}\eta^{\rho\alpha}(\partial_{\mu}\partial_{\sigma}h_{\alpha\nu} - \partial_{\mu}\partial_{\alpha}h_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\partial_{\sigma}h_{\alpha\mu} - \partial_{\nu}\partial_{\alpha}h_{\mu\sigma}). \quad (4.22)$$

Vamos agora calcular os dois produtos entre os símbolos de Christoffel, substituindo neles o que definimos na eq. (4.21). Primeiramente faremos isso para $\Gamma_{\nu\sigma}^{\gamma}\Gamma_{\mu\gamma}^{\rho}$, que será

$$\Gamma_{\nu\sigma}^{\gamma}\Gamma_{\mu\gamma}^{\rho} = \frac{1}{2}\eta^{\gamma\alpha}(\partial_{\sigma}h_{\alpha\nu} + \partial_{\nu}h_{\alpha\sigma} - \partial_{\alpha}h_{\nu\sigma}) \frac{1}{2}\eta^{\rho\alpha}(\partial_{\gamma}h_{\alpha\mu} + \partial_{\mu}h_{\alpha\gamma} - \partial_{\alpha}h_{\mu\gamma});$$

e fazendo a distributiva

$$\Gamma_{\nu\sigma}^{\gamma}\Gamma_{\mu\gamma}^{\rho} = \frac{1}{4}\eta^{\gamma\alpha}\eta^{\rho\alpha}(\partial_{\sigma}h_{\alpha\nu}\partial_{\gamma}h_{\alpha\mu} + \partial_{\sigma}h_{\alpha\nu}\partial_{\mu}h_{\alpha\gamma} - \partial_{\sigma}h_{\alpha\nu}\partial_{\alpha}h_{\mu\gamma} + \partial_{\nu}h_{\alpha\sigma}\partial_{\gamma}h_{\alpha\mu} +$$

$$+\partial_\nu h_{\alpha\sigma}\partial_\mu h_{\alpha\gamma} - \partial_\nu h_{\alpha\sigma}\partial_\alpha h_{\mu\gamma} - \partial_\alpha h_{\nu\sigma}\partial_\gamma h_{\alpha\mu} - \partial_\alpha h_{\nu\sigma}\partial_\mu h_{\alpha\gamma} + \partial_\alpha h_{\nu\sigma}\partial_\alpha h_{\mu\gamma}.$$

Note que temos muitos termos na parte entre parênteses que estão em produto com as derivadas do tensor de perturbação da métrica. De acordo com a definição na eq. (4.13), isso gera quantidades que podem ser consideradas desprezíveis. Daí, teremos que

$$\Gamma_{\nu\sigma}^\gamma \Gamma_{\mu\gamma}^\rho = \frac{1}{2} \eta^{\gamma\alpha} (\partial_\sigma h_{\alpha\nu} + \partial_\nu h_{\alpha\sigma} - \partial_\alpha h_{\nu\sigma}) \frac{1}{2} \eta^{\rho\alpha} (\partial_\gamma h_{\alpha\mu} + \partial_\mu h_{\alpha\gamma} - \partial_\alpha h_{\mu\gamma}) = 0,$$

que é

$$\Gamma_{\nu\sigma}^\gamma \Gamma_{\mu\gamma}^\rho = 0. \quad (4.23)$$

O mesmo acontece ao calcular $-\Gamma_{\mu\sigma}^\delta \Gamma_{\nu\delta}^\rho$:

$$-\Gamma_{\mu\sigma}^\delta \Gamma_{\nu\delta}^\rho = \frac{1}{2} \eta^{\delta\alpha} (-\partial_\sigma h_{\alpha\mu} - \partial_\mu h_{\alpha\sigma} + \partial_\alpha h_{\mu\sigma}) \frac{1}{2} \eta^{\rho\alpha} (-\partial_\delta h_{\alpha\nu} - \partial_\nu h_{\alpha\delta} + \partial_\alpha h_{\nu\delta}) = 0,$$

que é

$$-\Gamma_{\mu\sigma}^\delta \Gamma_{\nu\delta}^\rho = 0. \quad (4.24)$$

Podemos agora substituir na eq. (3.55) os resultados definidos na eq. (4.22), eq. (4.23) e eq. (4.24), que nos dará

$$R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} \eta^{\rho\alpha} (\partial_\mu \partial_\sigma h_{\alpha\nu} - \partial_\mu \partial_\alpha h_{\nu\sigma} - \partial_\nu \partial_\sigma h_{\alpha\mu} + \partial_\nu \partial_\alpha h_{\mu\sigma}) + 0 + 0.$$

Portanto, como explica Chris (2022, ep. 109b), Cheng (2010, p. 339) e Grøn (2004, p. 192), sob a condição de gravidade linearizada, o tensor de Riemann é definido por:

$$R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} \eta^{\rho\alpha} (\partial_\mu \partial_\sigma h_{\alpha\nu} - \partial_\mu \partial_\alpha h_{\nu\sigma} - \partial_\nu \partial_\sigma h_{\alpha\mu} + \partial_\nu \partial_\alpha h_{\mu\sigma}). \quad (4.25)$$

4.2.4 Tensor de Ricci linearizado

Vamos agora tomar mão do tensor de Riemann definido na eq. (4.25) e realizar a contração deste, de modo a obtermos o tensor de Ricci. O procedimento será multiplicar os dois termos da equação por um delta de Kronecker, para que possamos trocar alguns índices

$$\delta_{\rho}^{\mu} R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2} \delta_{\rho}^{\mu} \eta^{\rho\alpha} (\partial_{\mu} \partial_{\sigma} h_{\alpha\nu} - \partial_{\mu} \partial_{\alpha} h_{\nu\sigma} - \partial_{\nu} \partial_{\sigma} h_{\alpha\mu} + \partial_{\nu} \partial_{\alpha} h_{\mu\sigma}),$$

em que surgirá

$$R_{\sigma\mu\nu}^{\mu} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\alpha} (\partial_{\mu} \partial_{\sigma} h_{\alpha\nu} - \partial_{\mu} \partial_{\alpha} h_{\nu\sigma} - \partial_{\nu} \partial_{\sigma} h_{\alpha\mu} + \partial_{\nu} \partial_{\alpha} h_{\mu\sigma}).$$

Podemos também utilizar a métrica para levantar e trocar os índices α e μ nos termos entre parênteses, e como índices repetidos representam uma soma de Einstein, como em Collier (2019, c. 12.2), teremos que o tensor de Ricci será denotado por

$$R_{\sigma\nu} = \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \partial_{\sigma} h_{\nu}^{\mu} - \partial_{\mu} \partial^{\mu} h_{\nu\sigma} - \partial_{\nu} \partial_{\sigma} h_{\mu}^{\mu} + \partial_{\nu} \partial_{\alpha} h_{\sigma}^{\alpha}). \quad (4.26)$$

De acordo com Chris (2022, ep. 109b), a partir do tensor de perturbação $h_{\mu\alpha}$ multiplicado pela métrica $\eta^{\mu\alpha}$ é possível definir uma nova quantidade chamada escalar- h :

$$\eta^{\mu\alpha} h_{\mu\alpha} = h_{\mu}^{\mu} = h, \quad (4.27)$$

que usaremos para representar o traço³¹ h_{μ}^{μ} da matriz.

Retornando à eq. (4.26). Perceba que podemos juntar a primeira com a última parcela dessa equação, porque as derivadas parciais estão em soma com o traço da matriz; a segunda parcela podemos substituir $\partial_{\mu} \partial^{\mu}$ pelo d'Alembertiano definido na eq. (4.4); e a terceira parcela podemos substituir h_{σ}^{α} pelo escalar h definido na eq. (4.27):

$$R_{\sigma\nu} = \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \partial_{\sigma} h_{\nu}^{\mu} + \partial_{\nu} \partial_{\alpha} h_{\sigma}^{\alpha} - \square h_{\nu\sigma} - \partial_{\nu} \partial_{\sigma} h), \quad (4.28)$$

que é a definição do tensor de Ricci sob a condição de gravidade linearizada, explica Cheng (2010, p. 339) e Grøn (2004, p. 192).

4.2.5 Escalar de Ricci linearizado

A partir do tensor de Ricci definido na eq. (4.28) vamos calcular o escalar de Ricci. Para isso, multiplicaremos os dois termos dessa equação pela métrica inversa de Minkowski, para

³¹ Na Álgebra Linear, o traço de uma matriz é a função matricial que associa a matriz quadrada à soma dos elementos da sua diagonal principal.

levantar e troca alguns índices

$$\begin{aligned}\eta^{\sigma\nu}R_{\sigma\nu} &= \frac{1}{2}\eta^{\sigma\nu}(\partial_\mu\partial_\sigma h_\nu^\mu + \partial_\nu\partial_\alpha h_\sigma^\alpha - \square h_{\nu\sigma} - \partial_\nu\partial_\sigma h) \\ &\rightarrow R_\nu^\nu = \frac{1}{2}(\partial_\mu\partial_\sigma h^{\mu\sigma} + \partial_\nu\partial_\alpha h^{\alpha\nu} - \square h_\sigma^\sigma - \partial^\sigma\partial_\sigma h).\end{aligned}$$

Perceba que podemos substituir o traço da matriz h_σ^σ pelo escalar h , substituir $\partial^\sigma\partial_\sigma$ pelo d'Alembertiano e convenientemente renomear o índice ν por μ e α por σ , obtendo

$$R = \frac{1}{2}(\partial_\mu\partial_\sigma h^{\mu\sigma} + \partial_\mu\partial_\sigma h^{\mu\sigma} - \square h - \square h).$$

Ficamos com duas metades de $\partial_\mu\partial_\sigma h^{\mu\sigma}$ e duas metades de $-\square h$, e podemos simplificar tudo por 1/2, definindo assim o escalar de Ricci sob a condição de gravidade linearizada, explica Collier (2019, c. 12.2), Cheng (2010, p. 339) e Grøn (2004, p. 192):

$$R = \partial_\mu\partial_\sigma h^{\mu\sigma} - \square h. \quad (4.29)$$

4.2.6 Tensor de Einstein linearizado

Agora que conhecemos a forma linearizada do tensor de Riemann, tensor métrico e do escalar de curvatura de Ricci, podemos então utilizar essas quantidades para calcular o tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (3.67)$$

também sob a condição de gravidade linearizada. Basta substituir a eq. (4.28), eq. (4.9) e eq. (4.29) no tensor de Einstein definido na eq. (3.67)

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\alpha\partial_\mu h_\nu^\alpha + \partial_\nu\partial_\alpha h_\mu^\alpha - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu h) - \frac{1}{2}(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})(\partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta} - \square h),$$

e fazendo a distributividade, teremos

$$\begin{aligned}G_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(\partial_\alpha\partial_\mu h_\nu^\alpha + \partial_\nu\partial_\alpha h_\mu^\alpha - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu h) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(\partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta} - \square h) - \\ &\quad - \frac{1}{2}h_{\mu\nu}(\partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta} - \square h).\end{aligned}$$

Observe que nessa última equação temos o produto entre tensores de perturbação da

métrica e o produto destes com sua derivada. Pela definição na eq. (4.13), isso vai gerar quantidades que podem ser consideradas desprezíveis. Então, teremos que

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\alpha \partial_\mu h_\nu^\alpha + \partial_\nu \partial_\alpha h_\mu^\alpha - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(\partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} - \square h).$$

Agora fazendo a distributividade e colocando 1/2 em evidência, obtemos

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\alpha \partial_\mu h_\nu^\alpha + \partial_\nu \partial_\alpha h_\mu^\alpha - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h - \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} + \eta_{\mu\nu} \square h). \quad (4.30)$$

Observe nessa última equação que h possui termos com índices covariante, contravariante e índices misto. No entanto, é mais conveniente se obtivermos uma equação em que os índices de h sejam covariantes. Como explica Chris (2022, ep. 109b), faremos isso empregando uma nova definição que envolve a métrica de Minkowski somada a um conjunto de derivadas parciais, que diz respeito à propriedade de compensação de índice quando levantado ou baixado a partir dessa métrica.

Sabemos por definição que

$$\partial_\mu h^{\mu\nu} = \partial_\mu \eta^{\mu\alpha} h_\alpha^\nu. \quad (4.31)$$

Isso significa que podemos pensar no índice covariante de h_α^ν como se ele ainda estivesse elevado e a métrica inversa de Minkowski ainda estivesse exposta. Então, utilizando essa métrica, podemos levantar e trocar o índice da derivada parcial de $h^{\mu\nu}$, como uma forma de compensar o índice μ que foi reduzido em h_α^ν , explica Chris (2022, ep. 109b). Portanto, a partir da eq. (4.31), temos que

$$\partial_\mu h^{\mu\nu} = \partial_\mu \eta^{\mu\alpha} h_\alpha^\nu \equiv \partial^\alpha h_\alpha^\nu. \quad (4.32)$$

Podemos aplicar na eq. (4.30) a definição apresentada na eq. (4.32). Com isso, teremos

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial^\alpha \partial_\mu h_{\alpha\nu} + \partial^\alpha \partial_\nu h_{\mu\alpha} - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h - \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta h_{\alpha\beta} + \eta_{\mu\nu} \square h). \quad (4.33)$$

Neste ponto Chris (2022, ep. 109b), Das (2012, p. 627), Lambourne (2010, p. 226-228) e Grøn (2004, p. 193), chamam atenção ao fato de que vale a pena notar que se introduzirmos um certo tensor de perturbação de traço reverso, definido por

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h, \quad (4.34)$$

as equações de campo de Einstein, como a eq. (4.33), serão simplificadas.

Como em Chris (2022, ep. 109b), vamos aplicar na eq. (4.33) a definição dada na eq. (4.34) e vamos evidenciar os h que estão denotados com índices covariantes, e reorganizando toda a equação, obteremos

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[\partial^\alpha \partial_\mu \left(\bar{h}_{\alpha\nu} + \frac{1}{2} \eta_{\alpha\nu} h \right) + \partial^\alpha \partial_\nu \left(\bar{h}_{\mu\alpha} + \frac{1}{2} \eta_{\mu\alpha} h \right) - \partial^\alpha \partial_\alpha \left(\bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \right) - \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \left(\bar{h}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} h \right) - \partial_\mu \partial_\nu h + \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial_\alpha h \right]; \quad (4.35)$$

e podemos utilizar essas métricas de Minkowski para baixar o índice na segunda derivada parcial relacionada a cada \bar{h} . Fazendo cada termo separadamente, teremos

$$\begin{aligned} \partial^\alpha \partial_\mu \frac{1}{2} \eta_{\alpha\nu} h &= \partial_\nu \partial_\mu \frac{1}{2} h, \\ \partial^\alpha \partial_\nu \frac{1}{2} \eta_{\mu\alpha} h &= \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{2} h, \\ -\partial^\alpha \partial_\nu \frac{1}{2} \eta_{\mu\alpha} h &, \\ -\eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} h &= -\partial^\alpha \partial_\alpha \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h. \end{aligned}$$

Relacionando essas quatro quantidades com a eq. (4.35) alguns termos serão cancelados, e o resultado é o tensor de Einstein definido sob a condição de gravidade linearizada, como define Chris (2022, ep. 109b), Das (2012, p. 627) e Grøn (2004, p. 193):

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\partial^\alpha \partial_\mu \bar{h}_{\alpha\nu} + \partial^\alpha \partial_\nu \bar{h}_{\mu\alpha} - \partial^\alpha \partial_\alpha \bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \bar{h}_{\alpha\beta} \right). \quad (4.36)$$

4.2.7 Equação de Einstein linearizada

Relembre a equação de campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (3.88)$$

Substituindo a eq. (4.36) na eq. (3.88), como em Chris (2022, ep. 109b) e Grøn (2004, p. 193), teremos que a equação de campo Einstein definida sob a condição de gravidade linearizada é:

$$\frac{1}{2}(\partial^\alpha \partial_\mu \bar{h}_{\alpha\nu} + \partial^\alpha \partial_\nu \bar{h}_{\mu\alpha} - \partial^\alpha \partial_\alpha \bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \bar{h}_{\alpha\beta}) = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (4.37)$$

Se considerar unidades geometrizadas $c = 1$ e $G = 1$, explicada em Schultz (2009, p. 186-187), a eq. (4.37) será reescrita como

$$\frac{1}{2}(\partial^\alpha \partial_\mu \bar{h}_{\alpha\nu} + \partial^\alpha \partial_\nu \bar{h}_{\mu\alpha} - \partial^\alpha \partial_\alpha \bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \bar{h}_{\alpha\beta}) = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (4.38)$$

4.3 GAUGE DE LORENZ

Dada a versão linearizada da equação de Einstein eq. (4.38), podemos ainda pensar em realizar uma mudança de coordenadas que permitirá simplificar toda ela e tornar óbvia a existência de Ondas Gravitacionais. Como explica Chris (2022, ep. 109c), Collier (2019, c. 12.2) e Cheng (2010, p. 339), o resultado será uma equação que mostra que a métrica ($g_{\mu\nu}$) do espaço-tempo obedece a uma equação de onda no vácuo, em que todos os componentes do Tensor EMT são nulos. Dessa forma, todas as equações de campo de Einstein linearizadas se tornam uma equação de onda para a perturbação \bar{h} na métrica. O sistema de coordenadas em que isso ocorre é chamado Gauge de Lorenz³². Portanto, em outras palavras, o objetivo é obter uma métrica que satisfaça a condição do Gauge de Lorenz, porque isso permitirá explicar as Ondas Gravitacionais.

Ainda de acordo com os autores, a definição matemática da física que permite haver uma transformação de coordenadas que leva ao Gauge de Lorenz, é a condição de Lorenz:

$$\partial_\beta \bar{h}^{\alpha\beta} = 0. \quad (4.39)$$

Acompanhando o raciocínio de Chris (2022, ep. 109c) e Lambourne (2010, p. 226-228), o procedimento que faremos nesse momento será verificar se cada parcela entre parênteses na eq. (4.37)

$$\frac{1}{2}(\partial^\alpha \partial_\mu \bar{h}_{\alpha\nu} + \partial^\alpha \partial_\nu \bar{h}_{\mu\alpha} - \partial^\alpha \partial_\alpha \bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \bar{h}_{\alpha\beta}) = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu},$$

obedece a condição de Lorenz definida na eq. (4.39). Iremos proceder calculando cada parcela

³² Ludvig Valentin Lorenz (1829 – 1891) – Físico e Matemático dinamarquês.

separadamente, e após resolver todas iremos substituir os resultados de volta na eq. (4.37).

- Primeira parcela da eq. (4.37)

$$\partial^\alpha \partial_\mu \bar{h}_{\alpha\nu}.$$

Considerando a propriedade de compensar índices, definida na eq. (4.38), temos que

$$\partial^\alpha \partial_\mu \bar{h}_{\alpha\nu} = \partial_\alpha \partial_\mu \bar{h}_\nu^\alpha;$$

e com a definição da eq. (4.31), podemos levantar o índice ν levando de volta a β

$$\partial_\alpha \partial_\mu \eta_{\beta\nu} \bar{h}^{\alpha\beta}.$$

Como a ordem das derivadas parciais não importa e a métrica de Minkowski é constante, Chris (2022, ep. 109c) explica que podemos mover ∂_α para junto de \bar{h} , depois podemos renomear os índices e, considerando a simetria nos índices de \bar{h} , reorganizar todos

$$\eta_{\beta\nu} \partial_\mu (\partial_\alpha \bar{h}^{\alpha\beta}) \rightarrow \eta_{\alpha\nu} \partial_\mu (\partial_\beta \bar{h}^{\beta\alpha}) \rightarrow \eta_{\alpha\nu} \partial_\mu \underbrace{(\partial_\beta \bar{h}^{\alpha\beta})}_0.$$

Observe agora que a quantidade entre parênteses nessa equação à direita é o Gauge de Lorenz, definido na eq. (4.39). Então, o resultado da primeira parcela da eq. (4.37) é:

$$\partial^\alpha \partial_\mu \bar{h}_{\alpha\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta_{\alpha\nu} \partial_\mu (\partial_\beta \bar{h}^{\alpha\beta}) = 0. \quad (4.40)$$

- Segunda parcela da eq. (4.37)

$$\partial^\alpha \partial_\nu \bar{h}_{\mu\alpha}$$

Considerando a definição na eq. (4.32), temos que

$$\partial^\alpha \partial_\nu \bar{h}_{\mu\alpha} = \partial_\alpha \partial_\nu \bar{h}_\mu^\alpha;$$

e com a definição da eq. (4.31), podemos levantar o índice μ levando de volta a β

$$\partial_\alpha \partial_\nu \eta_{\beta\mu} \bar{h}^{\alpha\beta}.$$

Já sabemos que a ordem das derivadas parciais não importa e que a métrica de Minkowski é constante. Outra vez, como define Chris (2022, ep. 109c), podemos mover ∂_α para junto de \bar{h} , depois podemos renomear os índices e, considerando a simetria nos índices de \bar{h} , reorganizar

todos

$$\eta_{\beta\mu}\partial_\nu\left(\partial_\alpha\bar{h}^{\alpha\beta}\right) \rightarrow \eta_{\alpha\mu}\partial_\nu\left(\partial_\alpha\bar{h}^{\beta\alpha}\right) \rightarrow \eta_{\alpha\mu}\partial_\nu\underbrace{\left(\partial_\beta\bar{h}^{\alpha\beta}\right)}_0.$$

A quantidade entre parênteses na equação à direita mais uma vez é o Gauge de Lorenz, definido na eq. (4.39). Logo, temos que a segunda parcela da eq. (4.37) é:

$$\partial^\alpha\partial_\nu\bar{h}_{\mu\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta_{\alpha\mu}\partial_\nu\left(\partial_\beta\bar{h}^{\alpha\beta}\right) = 0. \quad (4.41)$$

- Terceira parcela da eq. (4.37)

$$\partial^\alpha\partial_\alpha\bar{h}_{\mu\nu}.$$

Uma vez que, por definição, a ordem das derivadas parciais não importa, o conjunto de operadores derivativos $\partial^\alpha\partial_\alpha$ é o d'Alembertiano definido na eq. (4.3). Portanto, para Chris (2022, ep. 109c), temos que a terceira parcela da eq. (4.37) é:

$$\square\bar{h}_{\mu\nu}. \quad (4.43)$$

- Quarta parcela da eq. (4.37)

$$\partial^\alpha\partial^\beta\bar{h}_{\alpha\beta}.$$

Considerando a parte sem a métrica de Minkowski, segundo Chris (2022, ep. 109c), podemos aplicar a definição da eq. (4.32) em ambos os índices de \bar{h} sem que a métrica η apareça

$$\partial^\alpha\partial^\beta\bar{h}_{\alpha\beta} = \partial_\alpha\partial_\beta\bar{h}^{\alpha\beta}.$$

Já que a ordem das derivadas parciais não importa, podemos deixar ∂_β junto de \bar{h}

$$\partial_\alpha\underbrace{\left(\partial_\beta\bar{h}^{\alpha\beta}\right)}_0.$$

O termo entre parênteses nessa última equação é o Gauge de Lorenz. Então, de acordo com o autor, temos que a terceira parcela da eq. (4.37) é:

$$\partial_\beta\bar{h}^{\alpha\beta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\alpha\left(\partial_\beta\bar{h}^{\alpha\beta}\right) = 0. \quad (4.42)$$

Agora que temos os resultados de cada parcela da eq. (4.37) definidos na eq. (4.40), eq. (4.41), eq. (4.42) e eq. (4.43), iremos substituir todos na primeira equação

$$\frac{1}{2} \left(\underbrace{\partial^\alpha \partial_\mu \bar{h}_{\alpha\nu}}_0 + \underbrace{\partial^\alpha \partial_\nu \bar{h}_{\mu\alpha}}_0 - \square \bar{h}_{\mu\nu} - \underbrace{\eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \bar{h}_{\alpha\beta}}_0 \right) = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} ,$$

que resulta em

$$-\frac{1}{2} \square \bar{h}_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} . \quad (4.44)$$

No entanto, para um caso em que tal perturbação se propaga no vácuo, temos que o Tensor EMT ($T_{\mu\nu}$) é dado por:

$$T_{\mu\nu} = 0 , \quad (4.45)$$

e, por consequência, teremos que o tensor de Einstein também será:

$$G_{\mu\nu} = 0 . \quad (4.46)$$

Dessa forma, as equações de campo de Einstein linearizadas se resumem a:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -2kT_{\mu\nu} , \quad (4.47)$$

e se lembrarmos da equação de campo de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R , \quad (3.67)$$

mais a condição apresentada na eq. (4.45), teremos que a eq. (4.44) se resume a:

$$-\frac{1}{2} \square \bar{h}_{\mu\nu} = 0 , \quad (4.48)$$

em que, no caso dependente do tempo, as ondulações no espaço-tempo vazias causadas por Ondas Gravitacionais viajando na velocidade da luz são descritas pela equação de onda

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0 . \quad (4.49)$$

explica Chris (2022, ep. 109c), Collier (2022, c. 12.2), Lambourne (2010, p. 226-228) e Grøn (2004, p. 193).

Dessa forma, de acordo com Schultz (2009, p. 194), a equação de campo de Einstein linearizada definida sob a condição do Gauge de Lorenz é:

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \square \bar{h}_{\mu\nu} . \quad (4.50)$$

Essa equação basicamente informa que o tensor métrico, anteriormente explícito na eq. (4.44), obedece a equação de onda, o que sugere a possibilidade de existência de Ondas Gravitacionais que se propagam.

4.3.1 Coordenadas do Gauge de Lorenz

Após simplificar a equação de campo de Einstein linearizada impondo a condição do Gauge de Lorenz, nosso próximo passo é encontrar um sistema de coordenadas que permita a eq. (4.50), e esse será o sistema de coordenadas do Gauge de Lorenz. Vejamos então como se dá a mudança das coordenadas originais para as coordenadas do Gauge de Lorenz.

Vamos iniciar renomeando as coordenadas originais para as novas coordenadas:

$$(ct, x, y, z) \therefore x^\alpha \quad \rightarrow \quad (ct', x', y', z') \therefore x'^\alpha . \quad (4.51)$$

Segundo Chris D'Inverno (2022, p. 401) e Cheng (2010, p. 339), o modelo mais usual para transformação de coordenadas entre sistemas de coordenadas é o campo de deslocamento, em que se considera que as novas coordenadas (x'^α) são dadas a partir das coordenadas originais (x^α) mais um pequeno deslocamento ξ^α do vetor posição

$$x'^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha . \quad (4.52)$$

No entanto, de acordo com Chris (2022, ep. 109c) e Cheng (2010, p. 340), algumas condições também precisam ser consideradas para que a mudança de coordenadas ocorra sem nenhum problema. A primeira condição é que ξ^α sejam deslocamentos muito pequenos em torno de cada coordenada original

$$\|\xi^\alpha\| \ll 1 ; \quad (4.53)$$

e a segunda condição, explicada pelos autores, é que o resultado da derivada de ξ^α é um valor que pode ser considerado desprezível

$$\left\| \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} \right\| \approx 0 \quad \text{e} \quad \left\| \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x'^\beta} \right\| \approx 0 . \quad (4.54)$$

As condições definidas na eq. (4.53) e eq. (4.54) garantem que as coordenadas do sistema de coordenadas do Gauge de Lorenz não sejam determinadas tão distante do sistema de coordenadas original, e que as diferenças entre os dois não sejam discrepantes, explica Chris

(2022, ep. 109c).

Retornando agora à definição na eq. (4.52) e seguindo também o raciocínio de Cheng (2010, p. 339-340), vamos diferenciar os dois lados da igualdade em relação a x^β

$$\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta}.$$

Observe que a primeira derivada do segundo termo é em função de x^β , que são direções de coordenadas independentes. Ainda de acordo com o raciocínio de Chris (2022, ep. 109c), derivadas desse tipo, que tem índices diferentes, sempre terão resultado nulo; caso os índices sejam iguais o resultado sempre será 1. Só que esta é a definição do delta de Kronecker. Então, reescrevendo a última equação, teremos que:

$$\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} = \delta_\beta^\alpha + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta}. \quad (4.55)$$

Para Chris (2022, ep. 109c), a eq. (4.55) define como acontece a transformação das coordenadas originais para as coordenadas do Gauge de Lorenz.

O autor ainda explica que a mudança inversa de coordenadas também pode ser considerada. Basta evidenciar x^α na eq. (4.52)

$$x^\alpha = x'^\alpha - \xi^\alpha; \quad (4.56)$$

e derivando os dois termos dessa equação por x'^β , o resultado é

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x'^\beta} - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x'^\beta};$$

em que a derivada de x'^α também pode ser reescrita como um delta de Kronecker

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} = \delta_\beta^\alpha - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x'^\beta}. \quad (4.57)$$

Como em Chris (2022, ep. 109c), podemos ainda desenvolver a regra da cadeia na última derivada da eq. (4.57)

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} = \delta_\beta^\alpha - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\beta}; \quad (4.58)$$

e rescrevendo a regra da cadeia de forma compacta e convenientemente trocando α por σ

$$\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\beta} = \delta_\beta^\sigma - \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x'^\beta},$$

explica Chris (2022, ep. 109c) que poderemos substituir essa equação na última derivada do segundo termo na eq. (4.58) e desenvolver a distributiva

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} = \delta_\beta^\alpha - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\sigma} \left(\delta_\beta^\sigma - \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x'^\beta} \right) \rightarrow \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} = \delta_\beta^\alpha - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\sigma} \delta_\beta^\sigma + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\sigma} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x'^\beta}. \quad (4.59)$$

Mas, pela definição na eq. (4.54), temos que

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\sigma} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x'^\beta} = 0;$$

então, da eq. (4.59) da direita restará

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} = \delta_\beta^\alpha - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\sigma} \delta_\beta^\sigma,$$

em que, com o delta de Kronecker (δ_β^σ), explica o autor que podemos trocar o índice σ por um β , o que resultará:

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} = \delta_\beta^\alpha - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta}. \quad (4.60)$$

Como mostra Chris (2022, ep. 109c), a eq. (4.60) define como acontece a transformação das coordenadas do Gauge de Lorenz para as coordenadas originais.

4.3.2 mudança de coordenadas de $g_{\mu\nu}$

Já sabemos a fórmula que leva das coordenadas originais às coordenadas do Gauge de Lorenz. Então, é necessário agora conhecer como acontece a transformação da métrica original no Gauge de Lorenz. Isso não só permitirá entender como a métrica se comporta nesse novo sistema de coordenadas, mas também irá informar como ela obedece a equação de onda.

Seguindo o raciocínio de Chris (2022, ep. 109c), considere a definição da métrica para o Gauge de Lorenz

$$g'_{\alpha\beta} = \tilde{e}'_\alpha \cdot \tilde{e}'_\beta = \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial x'^\beta}.$$

Avalie também desenvolver nessa definição a regra da cadeia, dada em termos de componentes do sistema de coordenadas original

$$g'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \cdot \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \frac{\partial}{\partial x^\nu}.$$

Segundo o autor, isso nos dá o produto escalar entre os vetores de base que definem a métrica $g_{\mu\nu}$ no sistema de coordenada original

$$g'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right),$$

e o resultado disso é uma equação que oferece os componentes da métrica no Gauge de Lorenz:

$$g'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} g_{\mu\nu}. \quad (4.61)$$

Observe as derivadas na eq. (4.61). Para Chris (2022, ep. 109c), podemos substituir elas pela definição dada na eq. (4.61) para mudança de coordenadas; e podemos também substituir a métrica na equação pela métrica linearizada definida na eq. (4.9)

$$g'_{\alpha\beta} = \left(\delta_\alpha^\mu - \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha} \right) \left(\delta_\beta^\nu - \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\beta} \right) (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}).$$

Resolvendo a distributividade entre as quantidades nos dois primeiros parênteses, teremos

$$g'_{\alpha\beta} = \left(\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\alpha^\mu \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\beta} - \delta_\beta^\nu \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\beta} \right) (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}).$$

Relembre que as derivadas de ξ são quantidades pequenas. Então, pela definição na eq. (4.54) temos que o produto entre elas será tão pequeno que pode ser considerado desprezível.

$$g'_{\alpha\beta} = \left(\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\alpha^\mu \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\beta} - \delta_\beta^\nu \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha} \right) (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}).$$

Por conveniência, como faz Chris (2022, ep. 109c), podemos reescrever as derivadas dessa última equação de forma compacta

$$g'_{\alpha\beta} = \left(\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\alpha^\mu \xi_{,\beta}^\nu - \delta_\beta^\nu \xi_{,\alpha}^\mu \right) (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}),$$

e em seguida resolver a distributividade

$$g'_{\alpha\beta} = \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu \eta_{\mu\nu} + \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu h_{\mu\nu} - \delta_\alpha^\mu \eta_{\mu\nu} \xi_{,\beta}^\nu - \delta_\alpha^\mu h_{\mu\nu} \xi_{,\beta}^\nu - \delta_\beta^\nu \eta_{\mu\nu} \xi_{,\alpha}^\mu - \delta_\beta^\nu h_{\mu\nu} \xi_{,\alpha}^\mu.$$

Relembre que h representa uma quantidade pequena, definida na eq. (4.9) como uma

perturbação na métrica de Minkowski. Mas ξ também é uma quantidade pequena. Então, pela definição na eq. (4.10) e pela definição na eq. (4.53), o produto entre h e ξ resultará uma quantidade que pode ser considerada desprezível, explica Chris (2022, ep. 109c). Assim, dessa última equação restará

$$g'_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\nu}\xi_{,\beta}^{\nu} - \eta_{\mu\beta}\xi_{,\alpha}^{\mu} + h_{\alpha\beta} .$$

Ainda de acordo com o autor, nessa última equação podemos pensar em juntar $\eta_{\alpha\beta}$ com $h_{\alpha\beta}$, que é a definição da métrica ($g_{\alpha\beta}$) na eq. (4.9); e com a métrica de Minkowski podemos baixar e trocar alguns índices na equação:

$$g'_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} . \quad (4.62)$$

A eq. (4.62) define a forma como acontece a mudança de coordenadas originais para as coordenadas do Gauge de Lorenz envolvendo um campo de deslocamento ξ , explica Chris (2022, ep. 109c).

4.3.3 mudança de coordenadas de $h_{\mu\nu}$

A partir da eq. (4.62), como em Chris (2022, ep. 109c), vamos substituir ambas as métricas dessa equação pela definição da métrica em gravidade linearizada eq. (4.9)

$$g'_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} \quad \rightarrow \quad \eta_{\alpha\beta} + h'_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} ,$$

e simplificando os termos repetidos ($\eta_{\alpha\beta}$), teremos:

$$h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} . \quad (4.63)$$

A eq. (4.63) mostra que a perturbação $h_{\alpha\beta}$ se transforma entre os sistemas de coordenadas (original e do Gauge de Lorenz) da mesma forma que a métrica $g'_{\alpha\beta}$ se transforma na eq. (4.62).

4.3.4 mudança de coordenadas de $R_{\sigma\mu\nu}^{\rho}$

Precisamos agora descobrir como os componentes do tensor de curvatura de Riemann se transformam entre os sistemas de coordenadas em gravidade linearizada. Para isso,

partiremos da eq. (4.62) fazendo alguns ajustes nela.

Relembre o tensor de curvatura de Riemann definido para gravidade linearizada

$$R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}\eta^{\rho\alpha}(\partial_{\mu}\partial_{\sigma}h_{\alpha\nu} - \partial_{\mu}\partial_{\alpha}h_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\partial_{\sigma}h_{\alpha\mu} + \partial_{\nu}\partial_{\alpha}h_{\mu\sigma}). \quad (4.25)$$

Seguindo o raciocínio de Chris (2022, ep. 109c), como o tensor de Riemann eq. (4.25) foi definido sob a condição de gravidade linearizada, podemos considerar trocar a perturbação h , que consideramos na eq. (4.9), por sua versão em gravidade linearizada que definimos na eq. (4.63); e o tensor de Riemann será

$$R'_{\sigma\mu\nu}{}^{\rho} = \frac{1}{2}\eta^{\rho\alpha}(\partial_{\mu}\partial_{\sigma}h'_{\alpha\nu} - \partial_{\mu}\partial_{\alpha}h'_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\partial_{\sigma}h'_{\alpha\mu} + \partial_{\nu}\partial_{\alpha}h'_{\mu\sigma}). \quad (4.64)$$

Lembre-se que consideramos a métrica do espaço-tempo como sendo a métrica do espaço-tempo de Minkowski mais uma leve curvatura, e as transformações de coordenadas entre o referencial original e o Gauge Lorenz são dadas considerando um campo deslocamento. Então, nesse caso, será que podemos no tensor de curvatura de Riemann como sendo mesmo em ambos os sistemas de coordenadas? Vejamos se isso é possível.

Primeiramente vamos substituir a eq. (4.63) no tensor de Riemann definido na eq. (4.64)

$$R'_{\sigma\mu\nu}{}^{\rho} = \frac{1}{2}\eta^{\rho\alpha}[\partial_{\mu}\partial_{\sigma}(h_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha}) - \partial_{\mu}\partial_{\alpha}(h_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha}) - - \\ - \partial_{\nu}\partial_{\sigma}(h_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha}) + \partial_{\nu}\partial_{\alpha}(h_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha})].$$

Como sugere Chris (2022, ep. 109c), é conveniente distribuir as derivadas mantendo a notação utilizada na eq. (4.63)

$$R'_{\sigma\mu\nu}{}^{\rho} = \frac{1}{2}\eta^{\rho\alpha}[(\partial_{\mu}\partial_{\sigma}h_{\alpha\nu} - \xi_{\alpha,\nu\mu\sigma} - \xi_{\nu,\alpha\mu\sigma}) - (\partial_{\mu}\partial_{\alpha}h_{\nu\sigma} - \xi_{\nu,\sigma\mu\alpha} - \xi_{\sigma,\nu\mu\alpha}) - - \\ - (\partial_{\nu}\partial_{\sigma}h_{\alpha\mu} - \xi_{\alpha,\mu\nu\sigma} - \xi_{\mu,\alpha\nu\sigma}) + (\partial_{\nu}\partial_{\alpha}h_{\mu\sigma} - \xi_{\mu,\sigma\nu\alpha} - \xi_{\sigma,\mu\nu\alpha})]. \quad (4.65)$$

Agora vamos resolver a primeira derivada dessa eq. (4.65), que é ξ_{α} em relação a x'^{μ} . Antes disso, perceba que há uma métrica $\eta^{\rho\alpha}$ que se distribui por todos os termos entre parênteses. Então, essa derivada ficará $\partial\xi^{\alpha}/\partial x'^{\mu}$; e podemos desenvolver a regrada da cadeia

$$\frac{\partial\xi^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial\xi^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}},$$

em que a derivada de x^{ν} em relação a x'^{μ} foi definida na eq. (4.60); e substituindo na eq. (4.65)

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\nu} \left(\delta_\mu^\nu - \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\mu} \right),$$

depois resolvendo a distributiva, teremos que

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\nu} \delta_\mu^\nu - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\nu} \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\mu}.$$

Mas como ξ é uma quantidade pequena, pela definição na eq. (4.54) o produto das derivadas de ξ gera uma quantidade tão pequena que pode ser considerada desprezível. Então, dessa última equação restará

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\nu} \delta_\mu^\nu.$$

Podemos ainda utilizar o delta de Kronecker para trocar o índice ν no denominador do segundo termo dessa última equação; e como ξ é uma quantidade pequena, teremos que:

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}. \quad (4.66)$$

Dessa forma, tanto as derivadas de ξ quanto as derivadas de h na eq. (4.65) são desenvolvidas de forma análoga ao que fizemos para chegar a eq. (4.66). Portanto, como explica Chris (2022, ep. 109c), desde que ξ e h sejam quantidades pequenas, o resultado de todas as derivadas dessas quantidades terá o mesmo significado que expressa a eq. (4.66). Com isso, temos que todas as derivadas de ξ na eq. (4.64) se anulam aos pares. Assim, da eq. (4.64) restará

$$R'^\rho_{\sigma\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\rho\alpha} [(\partial_\mu \partial_\sigma h_{\alpha\nu}) - (\partial_\mu \partial_\alpha h_{\nu\sigma}) - (\partial_\nu \partial_\sigma h_{\alpha\mu}) + (\partial_\nu \partial_\alpha h_{\mu\sigma})],$$

que são apenas componentes do tensor de Riemann definido na eq. (4.25). Portanto, ainda de acordo com o autor, temos que

$$R'^\rho_{\sigma\mu\nu} = R^\rho_{\sigma\mu\nu}. \quad (4.67)$$

4.3.5 mudança de coordenadas de \bar{h}

Nosso próximo passo agora é descobrir como o tensor \bar{h} se transforma do sistema de coordenadas originais para as coordenadas do Gauge de Lorenz sob um campo de deslocamento, de forma que satisfaça a condição de Lorenz

$$\partial_\beta \bar{h}'^{\alpha\beta} = 0. \quad (4.39)$$

Relembre a definição de \bar{h} :

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h. \quad (4.34)$$

De acordo com Chris (2022, ep. 109c), essa forma de \bar{h} na eq. (4.34) também é aplicável às coordenadas de \bar{h}' :

$$\bar{h}'_{\mu\nu} = h'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h'. \quad (4.68)$$

Considerando agora multiplicar a métrica inversa com o tensor h' , presente na eq. (4.68), definimos algo chamado traço de h' :

$$h' = \eta^{\alpha\beta}h'_{\alpha\beta}. \quad (4.69)$$

Seguindo o raciocínio de Chris (2022, ep. 109c), a ideia é substituir a eq. (4.63) na eq. (4.69)

$$h' = \eta^{\alpha\beta}(h_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha}) \quad (4.70)$$

e substituir a eq. (4.63) e a eq. (4.70) na eq. (4.68)

$$\bar{h}'_{\mu\nu} = (h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu}) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}[\eta^{\alpha\beta}(h_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha})].$$

Fazendo a distributividade

$$\bar{h}'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(\eta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\xi_{\alpha,\beta} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\xi_{\beta,\alpha},$$

temos que a quantidade entre parênteses fornece o traço de h , e essa última equação ficará

$$\bar{h}'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\xi_{\alpha,\beta} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\xi_{\beta,\alpha},$$

que reorganizando e utilizando a métrica inversa de Minkowski para levantar e trocar alguns índices dessa equação, chegaremos a

$$\bar{h}'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\xi_{,\beta}^\beta + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\xi_{,\alpha}^\alpha.$$

Assim, podemos somar as metades de ξ ; também escrever o escalar h e seu produto com a

métrica de Minkowski como sendo o \bar{h} , definido na eq. (4.34)

$$\bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu}\xi_{,\sigma}^{\sigma}. \quad (4.71)$$

A eq. (4.71) informa como os componentes de \bar{h} se transformam em uma mudança de coordenadas que usa o deslocamento de campo, explica Chris (2022, ep. 109c).

Ainda multiplicarmos os dois termos da eq. (4.71) por um par de métrica de Minkowski inversas

$$\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\bar{h}'_{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}(\bar{h}_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu}\xi_{,\sigma}^{\sigma}),$$

o resultado será \bar{h}' com índices contravariantes:

$$\bar{h}'^{\alpha\beta} = \bar{h}^{\alpha\beta} - \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\xi_{\mu,\nu} - \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\xi_{\nu,\mu} + \eta^{\alpha\beta}\xi_{,\sigma}^{\sigma}. \quad (4.72)$$

Ainda de acordo com Chris (2022, ep. 109c), podemos utilizar a métrica inversa de Minkowski na eq. (4.72) para levantar e trocar alguns índices dessa equação

$$\bar{h}'^{\alpha\beta} = \bar{h}^{\alpha\beta} - \eta^{\nu\beta}\xi_{,\nu}^{\alpha} - \eta^{\mu\alpha}\xi_{,\mu}^{\beta} + \eta^{\alpha\beta}\xi_{,\sigma}^{\sigma},$$

e tomar a derivada dos termos em relação a β

$$\bar{h}'^{\alpha\beta}_{,\beta} = \bar{h}^{\alpha\beta}_{,\beta} - \eta^{\nu\beta}\xi_{,\nu\beta}^{\alpha} - \eta^{\mu\alpha}\xi_{,\mu\beta}^{\beta} + \eta^{\alpha\beta}\xi_{,\sigma\beta}^{\sigma}.$$

Como a ordem das derivadas parciais não importa e nessa última equação a métrica apresenta uma simetria, podemos renomear adequadamente os índices nos dois últimos termos

$$\bar{h}'^{\alpha\beta}_{,\beta} = \bar{h}^{\alpha\beta}_{,\beta} - \eta^{\nu\beta}\xi_{,\nu\beta}^{\alpha} - \underbrace{\eta^{\mu\alpha}\xi_{,\mu\beta}^{\beta} + \eta^{\alpha\mu}\xi_{,\beta\mu}^{\beta}}_0,$$

o que faz com que eles se cancelem

$$\bar{h}'^{\alpha\beta}_{,\beta} = \bar{h}^{\alpha\beta}_{,\beta} - \eta^{\nu\beta}\xi_{,\nu\beta}^{\alpha}.$$

Podemos ainda pensar em rescrever essa última equação como

$$\partial_{\beta}\bar{h}'^{\alpha\beta} = \partial_{\beta}\bar{h}^{\alpha\beta} - \eta^{\nu\beta}\partial_{\nu}\partial_{\beta}\xi^{\alpha},$$

e assim a métrica inversa de Minkowski ($\eta^{\nu\beta}$) e os operadores derivativos ($\partial_{\nu}\partial_{\beta}$) podem ser substituídos pelo d'Alembertiano, definido na eq. (4.4)

$$\partial_\beta \bar{h}'^{\alpha\beta} = \partial_\beta \bar{h}^{\alpha\beta} - \square \xi^\alpha. \quad (4.73)$$

A eq. (4.73) mostra que se estivermos em um sistema de coordenadas com um certo \bar{h} e utilizarmos um campo de deslocamento ξ^α tal que obedeça a propriedade

$$\partial_\beta \bar{h}^{\alpha\beta} = \square \xi^\alpha, \quad (4.74)$$

e na equação tenhamos $-\square \xi^\alpha$, significa que essa eq. (4.73) será

$$\partial_\beta \bar{h}'^{\alpha\beta} = \partial_\beta \bar{h}^{\alpha\beta} - \square \xi^\alpha = 0. \quad (4.75)$$

Mas para que a eq. (4.74) satisfaça a condição de Lorenz na eq. (4.39), devemos ter

$$\square \xi^\alpha = 0, \quad (4.76)$$

uma propriedade que satisfaz a equação de onda. Então, a eq. (4.75) ficará

$$\partial_\beta \bar{h}'^{\alpha\beta} = \partial_\beta \bar{h}^{\alpha\beta} = 0, \quad (4.77)$$

daí teremos que

$$\partial_\beta \bar{h}'^{\alpha\beta} = 0, \quad (4.78)$$

o que significa que o novo sistema de coordenadas (\bar{h}') satisfaz a condição para o sistema de coordenadas do Gauge de Lorenz

Observe que a eq. (4.78) é semelhante a condição de Lorenz, definida na eq. (4.39). Isso significa que o novo sistema de coordenadas satisfaz a condição de Lorenz e fornece informações de como o sistema de coordenadas original mudará e como o sistema de coordenadas do Gauge de Lorenz obedece a condição de Lorenz, ainda explica Chris (2022, ep. 109c).

Para o autor, algo importante a ser destacado é a forma não única de se obter o Gauge de Lorenz. Por exemplo, considere um segundo campo de deslocamento ζ^α que esteja somado ao primeiro ξ^α

$$\partial_\beta \bar{h}^{\alpha\beta} = \square (\xi^\alpha + \zeta^\alpha). \quad (4.79)$$

Desde que $\square \zeta^\alpha = 0$, como na eq. (4.76), teremos que

$$\partial_\beta \bar{h}^{\alpha\beta} = \square \xi^\alpha. \quad (4.80)$$

É notável que a quantidade $\partial_\beta \bar{h}^{\alpha\beta}$ na eq. (4.80) ainda satisfaz o resultado da eq. (4.71)

na eq. (4.73). Ou seja, os campos de deslocamento ξ^α e ζ^α satisfazem perfeitamente o Gauge de Lorenz. Portanto, o Gauge de Lorenz não é um único sistema de coordenadas, mas sim uma classe de sistemas de coordenadas distintos que satisfazem a condição de Lorenz definida na eq. (4.39), explica Chris (2022, ep. 109c). Por isso, em qualquer sistema de coordenadas do Gauge de Lorenz, o tensor de Einstein será

$$G'_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \square \bar{h}'_{\mu\nu}; \quad (4.81)$$

e como já sabemos que a condição do Tensor EMT no vácuo satisfaz a eq. (4.54), analogamente também satisfaz (4.81)

$$T'_{\mu\nu} = 0 \quad \therefore \quad \square \bar{h}'_{\mu\nu} = 0. \quad (4.82)$$

As eq. (4.81) e (4.82) nos mostram que, nas coordenadas do Gauge de Lorenz no vácuo, os componentes de \bar{h}' satisfazem a equação de onda, explica Chris (2022, ep. 109c):

$$\square \bar{h}'_{\mu\nu} = 0, \quad (4.83)$$

é uma solução para a perturbação da métrica

$$g'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu} \quad (4.84)$$

nas coordenadas do Gauge de Lorenz.

Depois de todo esse esforço, como desenvolve Chris (2022, ep. 109c), enfim podemos reescrever a eq. (4.1) para as coordenadas do Gauge de Lorenz e substituir nela a eq. (4.83)

$$\frac{\partial^2 \bar{h}'_{\mu\nu}}{\partial (x'^0)^2} - \frac{\partial^2 \bar{h}'_{\mu\nu}}{\partial (x'^1)^2} - \frac{\partial^2 \bar{h}'_{\mu\nu}}{\partial (x'^2)^2} - \frac{\partial^2 \bar{h}'_{\mu\nu}}{\partial (x'^3)^2} = 0,$$

que em coordenadas do Gauge de Lorenz (ct', x', y', z') , é

$$\frac{\partial^2 \bar{h}'_{\mu\nu}}{\partial (ct')^2} - \frac{\partial^2 \bar{h}'_{\mu\nu}}{\partial (x')^2} - \frac{\partial^2 \bar{h}'_{\mu\nu}}{\partial (y')^2} - \frac{\partial^2 \bar{h}'_{\mu\nu}}{\partial (z')^2} = 0; \quad (4.85)$$

e reescrevendo todas as derivadas parciais na eq. (4.85) como o laplaciano, temos como resultado uma equação muito semelhante à equação de onda para a Física não relativística

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{h}'_{\mu\nu}}{\partial t'^2} = \nabla^2 \bar{h}'_{\mu\nu}. \quad (4.86)$$

A eq. (4.86) é a demonstração matemática mais simples de uma teoria consagrada que

explica como as equações de campo de Einstein são capazes de prever Ondas Gravitacionais: pequenas perturbações que fogem da métrica de Minkowski e que podem viajar na velocidade da luz através espaço-tempo, explica Chris (2022, ep. 109c) e Grøn (2004, p. 193). Isso implica que, de acordo com a TRG de Einstein, se acontecer um fenômeno gravitacional aqui e agora, os efeitos gravitacionais não serão percebidos instantaneamente em qualquer lugar do universo, como pressupõe a Teoria da Gravitação newtoniana.

5. CONSEQUÊNCIAS OBSERVACIONAIS

Na Física, a resolução de várias equações utilizadas para descrever os fenômenos podem ser facilitadas por meio da escolha de um sistema de coordenadas apropriado. Isso será necessário para explicar como as Ondas Gravitacionais interagem com um conjunto de partículas livres e para podermos interpretar fisicamente possíveis soluções que descrevam essas ondas. Uma vez discutido este tema, finalizaremos incluindo os resultados obtidos pelos detectores de Ondas Gravitacionais do LIGO.

5.1 INTRODUÇÃO À POLARIZAÇÃO DA ONDA GRAVITACIONAL

Em ondulatória o termo polarização basicamente se refere à orientação geométrica de propagação de ondas. Em outras palavras, polarização basicamente significa a direção dos vetores de campo que dão origem às ondas. Como as Ondas Gravitacionais são oscilações em uma perturbação da métrica do espaço-tempo, a polarização dessas ondas se refere a maneiras diferentes de como os diferentes pontos localizados por partículas livres podem oscilar em diferentes direções à medida que uma Onda Gravitacional passa por elas. No caso particular de Ondas Gravitacionais, elas têm duas formas de polarização: horizontal/vertical, chamada polarização *plus* (mais), convencionalmente representada pelo símbolo +; e diagonal, chamada polarização *cross* (cruzada), convencionalmente representada pelo símbolo ×, explica Chris (2022, ep. 109d).

Continua explicando Chris, que em gravidade linearizada as Ondas Gravitacionais são combinações entre as polarizações *plus* + e *cross* ×, combinadas em diferentes amplitude e fase de onda. Algo Semelhante ao que acontece no eletromagnetismo, que descreve as ondas eletromagnéticas sendo originadas por combinações de diferentes quantidades de ondas de campo elétrico e campo magnético em diferentes fases de onda.

Em gravidade linearizada vimos que a métrica pode ser descrita como

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \text{com} \quad \|h_{\mu\nu}\| \ll 1. \quad (4.9)$$

Como esse tensor métrico é de segunda ordem e o espaço-tempo é formado por 4 dimensões, isso nos dá 16 componentes, todos com uma perturbação $h_{\mu\nu}$, como mostra a eq. (4.9). Em breve faremos algumas escolhas que servirão para reduzir a quantidade desses componentes.

Em outras palavras, vamos trabalhar para encontrar os componentes que são redundantes e considerar utilizar apenas os componentes independentes que correspondem às polarizações *plus* + e *cross* × da Onda Gravitacional.

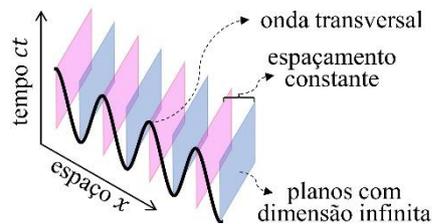
5.2 BREVE REVISÃO SOBRE ONDAS PLANAS

Vimos no cap. 3 que, no sistema de coordenadas do Gauge de Lorenz no vácuo, as equações de campo de Einstein se reduzem a

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0, \quad (4.49)$$

cujas soluções mais diretas, segundo D’Inverno (2022, p. 405), são as equações de ondas planas³³: uma quantidade física cujo valor é constante no tempo e através de qualquer plano perpendicular a uma direção fixa no espaço. Esses planos são alinhados com as frentes de onda, que no espaço-tempo são de dimensão infinita, como representado na Fig. 5.1.

Figura 5.1: Diagrama de onda plana do espaço-tempo.



Fonte: Produção própria.

Acompanhando o raciocínio de Chris (2022, ep. 109d), Schutz (2009, p. 203-204), Grøn (2004, p. 199-200) e Carroll (1997, p. 148), uma onda é uma perturbação oscilante de alguma grandeza física no espaço e periódica no tempo. Geralmente, as propostas de descrição de soluções de ondas planas se dão em termos da utilização de funções harmônicas, isto é, do tipo seno ou cosseno, e para facilitar a manipulação algébrica de tais soluções, frequentemente, estas

³³ A solução de ondas planas para eq. (4.49) é possível porque qualquer onda genérica pode ser descrita como uma combinação linear de ondas planas de diferentes frequências.

são expressas em termos da equação de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta), \quad (5.1)$$

de modo que a solução que descreve a perturbação corresponde apenas à parte real dessa equação:

$$\cdot \operatorname{Re}[e^{i\theta}] = [\cos(\theta)], \quad (5.2)$$

que combinada com uma amplitude A , nos dá uma onda, escrita como:

$$\cdot \operatorname{Re}[Ae^{i(\theta)}]. \quad (5.3)$$

em que θ representa a fase da onda.

Neste contexto, podemos também expressar tal solução como

$$A \cos\left(\frac{\omega}{c}ct - k^x x - k^y y - k^z z\right), \quad (5.4)$$

onde o componente de tempo k^t é a frequência angular ω/c e os componentes k^x , k^y e k^z são o número angular de onda.

Como sugere o autor ultimamente citado, podemos ainda reescrever os coeficientes da eq. (5.3) como uma soma com a métrica de Minkowski

$$A \cos(\eta_{tt}k^t ct + \eta_{xx}k^x x + \eta_{yy}k^y y + \eta_{zz}k^z z), \quad (5.5)$$

que organizando em soma de Einstein

$$A \cos(\eta_{\mu\sigma}k^\mu x^\sigma) \quad (5.6)$$

e usando a métrica para baixar o índice de k , resultará

$$A \cos(k_\sigma x^\sigma). \quad (5.7)$$

Ainda sobre a eq. (5.6), podemos fazer

$$Ae^{i(\eta_{\mu\sigma}k^\mu x^\sigma)} = Ae^{i(k_\sigma x^\sigma)}, \quad (5.8)$$

onde k^μ são os componentes do vetor de onda ($\vec{k} = k^\mu e_\mu$) e k_σ são os componentes do vetor dual ($k = k_\sigma \epsilon^\sigma$), de modo que eles se relacionam através da métrica $\eta_{\mu\nu}$:

$$k_t = +k^t, \quad k_x = -k^x, \quad k_y = -k^y, \quad k_z = -k^z. \quad (5.9)$$

Se a eq. (5.3) e a eq. (5.4) definem uma onda plana, como explica Chris (2022, ep. 109d), Schutz (2009, p. 203-204), Grøn (2004, p. 199-200) e Carroll (1997, p. 148), podemos então considerar escrever elas para uma Onda Gravitacional ($\bar{h}_{\mu\nu}$), que, respectivamente, será

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \text{Re} [A_{\mu\nu} e^{i(k_\sigma x^\sigma)}] \quad (5.10)$$

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \cos\left(\frac{\omega}{c} ct - k^x x - k^y y - k^z z\right), \quad (5.11)$$

onde a amplitude $A_{\mu\nu}$, igualmente as métricas $g_{\mu\nu}$ e $\eta_{\mu\nu}$, podem ser representadas por uma matriz 4×4 simétrica:

$$A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}. \quad (5.12)$$

5.2.1 Derivada da onda plana

Para finalizar nossa breve revisão sobre onda planas, vejamos qual será o resultado de derivar a onda plana gravitacional numa certa direção (∂_α). Para isso, vamos utilizar eq. (5.10)

$$\partial_\alpha(\bar{h}_{\mu\nu}) = \partial_\alpha(A_{\mu\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma}).$$

Seguindo o raciocínio de Chris (2022, ep. 109d) e Carroll (1997, p. 149), nessa derivada temos que as amplitudes são constantes, logo podem ser retiradas do argumento

$$\partial_\alpha(\bar{h}_{\mu\nu}) = A_{\mu\nu} \partial_\alpha(e^{ik_\sigma x^\sigma}).$$

Por definição temos que a derivada de uma exponencial é ela mesma. Temos também que o número complexo i é constante e o vetor dual de onda k_σ para uma onda plana também é constante, logo podem ser retirados do argumento

$$\partial_\alpha(\bar{h}_{\mu\nu}) = A_{\mu\nu} (e^{ik_\sigma x^\sigma}) \partial_\alpha(ik_\sigma x^\sigma) \quad \rightarrow \quad \partial_\alpha(\bar{h}_{\mu\nu}) = A_{\mu\nu} (e^{ik_\sigma x^\sigma}) ik_\sigma \partial_\alpha(x^\sigma)$$

para desenvolvermos a regra da cadeia

$$\partial_\alpha(\bar{h}_{\mu\nu}) = A_{\mu\nu} (e^{ik_\sigma x^\sigma}) ik_\sigma \left(\frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\alpha}\right).$$

Perceba que o quociente das derivadas entre parênteses nessa última equação define um delta de Kronecker

$$\partial_\alpha(\bar{h}_{\mu\nu}) = A_{\mu\nu}(e^{ik_\sigma x^\sigma})ik_\sigma\delta_\alpha^\sigma,$$

que em k_σ transforma o índice σ em α , ficando

$$\partial_\alpha(\bar{h}_{\mu\nu}) = A_{\mu\nu}(e^{ik_\sigma x^\sigma})ik_\alpha. \quad (5.13)$$

Portanto, como explica Chris (2022, ep. 109d) e Carroll (1997, p. 149), a eq. (5.13) mostra que tomar a derivada de uma onda plana resulta apenas na onda original em produto com um número complexo (i) e o componente do vetor dual de onda (k_α) na direção da derivada.

5.2.2 Vetor de onda nulo

Relembre a equação de onda definida como

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (4.49)$$

Ainda seguindo o raciocínio de Chris (2022, ep. 109d), Schutz (2009, p. 203-204), Grøn (2004, p. 200) e Carroll (1997, p. 149), vamos agora expandir o d'Alembertiano (\square), para mostrar a definição apresentada na eq. (4.4)

$$\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta\bar{h}_{\mu\nu} = 0.$$

Observando essa última equação temos que $\partial_\alpha\partial_\beta$ são derivadas parciais de uma onda plana, uma vez que no tópico 5.2 escrevemos $\bar{h}_{\mu\nu}$ como tal. Assim, pela definição que nos levou à eq. (5.13), essas derivadas nos levam à

$$g^{\alpha\beta}ik_\alpha ik_\beta\bar{h}_{\mu\nu} = 0,$$

onde, por definição, o produto entre dois números imaginários i resulta em um negativo (-1), e essa última equação ficará

$$-g^{\alpha\beta}k_\alpha k_\beta\bar{h}_{\mu\nu} = 0;$$

e a métrica nessa equação pode ser usada para levantar e trocar um dos índices β por α , ficando

$$-k_\alpha k^\alpha\bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (5.14)$$

Assim, de acordo com Chris (2022, ep. 109d), Schutz (2009, p. 203-204), Grøn (2004, p. 200)

e Carroll (1997, p. 149), a eq. (5.14) nos leva a entender

$$k_\alpha k^\alpha = \|k\|^2 = 0. \quad (5.15)$$

Isso nos leva a considerar que o quadrado da magnitude do vetor dual de onda ($k = k_\sigma \epsilon^\sigma$) e o quadrado da magnitude do vetor de onda ($\vec{k} = k^\mu e_\mu$) devem ser nulos.

5.3 COMPONENTES DA AMPLITUDE $A_{\mu\nu}$ DE ONDA

Vimos no cap. 3 que as equações de Ondas Gravitacionais dependem da métrica do espaço-tempo, e que as Ondas Gravitacionais são perturbações nessa métrica. Como a métrica do espaço-tempo é dada por uma matriz simétrica, então a matriz amplitude $A_{\mu\nu}$ de Ondas Gravitacionais também é dada por uma matriz simétrica

$$A_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} A_{tt} & A_{tx} & A_{ty} & A_{tz} \\ A_{xt} & A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yt} & A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zt} & A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

que, igualmente a métrica, também é composta por 16 componentes tensoriais.

Nosso objetivo agora será tentar reduzir o número de componentes nessa equação até chegarmos a uma quantidade mínima de termos que sejam independentes. Primeiramente, sabemos que a matriz na eq. (5.16) é simétrica, uma vez que $A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}$, conforme a eq. (5.12). Então, por simetria entre os componentes dessa matriz, inicialmente podemos dizer que reduzimos de 16 para 10 o número de componentes independentes.

Agora, acompanhando o raciocínio de Chris (2022, ep. 109e), Schutz (2009, p. 204), Grøn (2004, p. 200) e Carroll (1997, p. 149), vamos considerar abordar a onda plana ($\bar{h}_{\mu\nu}$) a partir de um sistema de coordenadas do Gauge de Lorenz, onde já sabemos que é verdadeira a condição

$$\partial_\beta \bar{h}^{\alpha\beta} = 0. \quad (4.39)$$

A derivada de onda plana nessa última equação já foi definida na eq. (5.13). Substituindo na eq. (4.39), teremos

$$ik_{\beta}A^{\alpha\beta}e^{ik_{\sigma}x^{\sigma}} = 0, \quad (5.17)$$

o que nos leva a fazer uma soma de Einstein entre as quantidades k_{β} e $A^{\alpha\beta}$, cujo resultado é

$$k_{\beta}A^{\alpha\beta} = 0 \quad (5.18)$$

Basicamente a eq. (5.18) mostra que temos um produto interno nulo entre os componentes do vetor dual de onda e os componentes de amplitude da onda. Como explica Chris (2022, ep. 109e), para que esse produto seja nulo significa que os componentes são perpendiculares entre si

$$[k_t \quad k_x \quad k_y \quad k_z] \begin{bmatrix} A^{tt} & A^{tx} & A^{ty} & A^{tz} \\ A^{xt} & A^{xx} & A^{xy} & A^{xz} \\ A^{yt} & A^{yx} & A^{yy} & A^{yz} \\ A^{zt} & A^{zx} & A^{zy} & A^{zz} \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]. \quad (5.19)$$

A partir da eq. (5.18), segundo Chris (2022, ep. 109e), Schutz (2009, p. 204), Grøn (2004, p. 200) e Carroll (1997, p. 149), podemos obter uma equação equivalente ao vetor de onda. Basta considerar a compensação de índice:

$$\partial_{\mu}h^{\mu\nu} = \partial_{\mu}\eta^{\mu\alpha}h_{\alpha}^{\nu}, \quad (4.31)$$

para fazer a métrica aparecer ao tornar contravariante os componentes de k

$$k_{\beta}A^{\alpha\beta} = 0 \quad \rightarrow \quad k^{\nu}g_{\nu\beta}A^{\alpha\beta} = 0,$$

e essa métrica pode ser usada para baixar e trocar um dos índices de k , resultando

$$k^{\nu}A_{\nu}^{\alpha} = 0.$$

Usando a métrica para baixar e levantar índices, podemos ainda baixar o índice α em A_{ν}^{α}

$$k^{\nu}A_{\nu}^{\alpha}g_{\alpha\mu} = 0 \quad \rightarrow \quad k^{\nu}A_{\mu\nu} = 0$$

e convenientemente renomeando os índices nessa última equação da direita, chegaremos a

$$k^{\beta}A_{\alpha\beta} = 0. \quad (5.20)$$

que contém o vetor de onda plana gravitacional.

Como explica Chris (2022, ep. 109e), a eq. (5.20), igualmente a eq. (5.19), mostra que temos um produto interno entre os componentes perpendiculares de amplitude da onda e do vetor de onda

$$\begin{bmatrix} A_{tt} & A_{tx} & A_{ty} & A_{tz} \\ A_{xt} & A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yt} & A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zt} & A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k^t \\ k^x \\ k^y \\ k^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.21)$$

Como mostra a eq. (5.18) e eq. (5.20), há 4 equações de restrição nos componentes da amplitude de onda $A_{\mu\nu}$ (dadas pelo produto destas matrizes). Explicitamente, temos:

$$\begin{aligned} A_{tt}k^t + A_{tx}k^x + A_{ty}k^y + A_{tz}k^z &= 0 \\ A_{xt}k^t + A_{xx}k^x + A_{xy}k^y + A_{xz}k^z &= 0 \\ A_{yt}k^t + A_{yx}k^x + A_{yy}k^y + A_{yz}k^z &= 0 \\ A_{zt}k^t + A_{zx}k^x + A_{zy}k^y + A_{zz}k^z &= 0 \end{aligned}$$

ou ainda, para exemplificar, poderíamos escrever:

$$\begin{aligned} A_{tz} &= -(A_{tt}k^t + A_{tx}k^x + A_{ty}k^y)/k^z \\ A_{xz} &= -(A_{xt}k^t + A_{xx}k^x + A_{xy}k^y)/k^z \\ A_{yz} &= -(A_{yt}k^t + A_{yx}k^x + A_{yy}k^y)/k^z \\ A_{zz} &= -(A_{zt}k^t + A_{zx}k^x + A_{zy}k^y)/k^z \end{aligned}$$

que nos mostra que 4 das componentes $A_{\mu\nu}$ podem ser dadas por combinações lineares de outras componentes, e, portanto, não são independentes. Com isso, podemos dizer que de 10 componentes supostamente independentes, restaram apenas 6.

Se você lembrar do Gauge de Lorenz no cap. 3, deve lembrar que este é uma classe de sistemas de coordenadas distintos. Deve lembrar também que um campo de deslocamento (χ^α) aplicado ao sistema de coordenadas do Gauge de Lorenz, onde esse campo de deslocamento satisfaz a propriedade

$$\square \chi^\alpha = 0,$$

como na eq. (4.76), e obedece a equação de onda

$$\partial_\beta \bar{h}'^{\alpha\beta} = 0, \quad (4.77)$$

resultará um sistema de coordenadas que ainda fará parte do Gauge de Lorenz, como mostra as eq. (4.79) e (4.80). Dessa forma, podemos escolher um sistema de coordenadas específico do Gauge de Lorenz, o Transverse-Traceless Gauge³⁴ (T.T. Gauge), como explica Chris (2022, ep.

³⁴ O Transverse-Traceless Gauge é um termo de tradução confusa, por isso, vamos continuar usando esse nome, porém, de forma simplificada: T.T. Gauge.

109e), Cheng (2010, p. 342), que possibilite a utilização de outras condições de restrição afim de simplificar ainda mais o número de componentes $A_{\mu\nu}$ independentes.

Como um campo de deslocamento no espaço-tempo tem 4 graus de liberdade

$$\chi^\alpha = \begin{bmatrix} \chi^t \\ \chi^x \\ \chi^y \\ \chi^z \end{bmatrix}, \quad (5.22)$$

ao mudarmos para este novo sistema de coordenadas, temos que:

$$\bar{h}_{\alpha\beta} \rightarrow \bar{h}_{\alpha\beta} - \chi_{\alpha,\beta} - \chi_{\alpha,\beta} + \eta_{\alpha\beta}\chi_{,\beta}^\alpha, \quad (5.23)$$

e com isto, transferem-se as restrições destes 4 graus de liberdade para o próprio $\bar{h}_{\alpha\beta}$, e consequentemente, para a própria amplitude $A_{\mu\nu}$.

Como desenvolve Chris (2022, ep. 109e), das 4 equações de restrição obtidas com no T.T. Gauge: 3 delas se referem restrições ‘Transverse’ (transversais); 1 se refere a restrição ‘Traceless’ (sem traço).

Quanto as restrições ‘Transverse’, acompanhando o raciocínio de Chris (2022, ep. 109e), Cheng (2010, p. 342), Schutz (2009, p. 205) e Carroll (1997, p. 150), considere adotar um observador em um referencial em repouso no espaço, mas em movimento no tempo. Considere também a quadri-velocidade $\vec{U} = U^\mu e_\mu$, que descreve a linha de mundo³⁵ do observador pelo qual passa a Onda Gravitacional. Teoricamente as Ondas Gravitacionais poderiam passar pelo observador em qualquer ângulo. Mas como temos 4 graus de liberdade, como definidos na eq. (5.22), podemos escolher coordenadas onde a quadri-velocidade seja ortogonal (‘Transverse’) as oscilações da Onda Gravitacional que passa pelo observador, como ilustra a Fig. 5.2. De acordo com os autores, podemos expressar isso matematicamente como

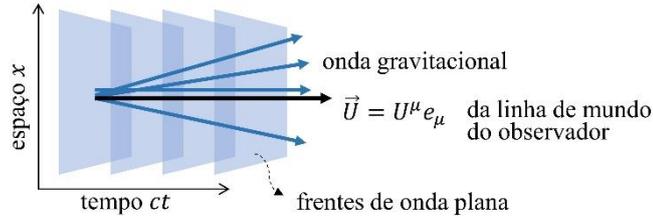
$$A_{\mu\nu}U^\mu = 0, \quad (5.24)$$

que em uma matriz será

³⁵ Linha de mundo é o caminho de um objeto no espaço-tempo, descrevendo a história de sua localização no espaço em cada instante no tempo. Esse é um conceito importante na Física Teórica Moderna.

$$\begin{bmatrix} A_{tt} & A_{tx} & A_{ty} & A_{tz} \\ A_{xt} & A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yt} & A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zt} & A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^t \\ U^x \\ U^y \\ U^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.25)$$

Figura 5.2: Vetor quadri-velocidade da linha de mundo da Onda Gravitacional plana.



Fonte: Adaptado de Chris.

Observando a matriz da eq. (5.24) vemos 4 equações de restrições para os componentes de $A_{\mu\nu}$, mesma quantidade que na matriz da eq. (5.20). Considerando um referencial em que o observador está parado espacialmente, temos que $U^\mu = (U^t, 0, 0, 0)$, e com isto, podemos descrever matematicamente essa situação em uma matriz:

$$\begin{bmatrix} A_{tt} & A_{tx} & A_{ty} & A_{tz} \\ A_{xt} & A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yt} & A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zt} & A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A_{tt}U^t + 0 + 0 + 0 \\ A_{xt}U^t + 0 + 0 + 0 \\ A_{yt}U^t + 0 + 0 + 0 \\ A_{zt}U^t + 0 + 0 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.26)$$

Portanto, considerando também a simetria de $A_{\mu\nu}$, como descrito na eq. (5.12), teremos que na matriz da eq. (5.24), todo componente de $A_{\mu\nu}$ com índice t será nulo. Deste modo, ao considerarmos este dado conjugado com a eq. (5.21), temos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ 0 & A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ 0 & A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k^t \\ k^x \\ k^y \\ k^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.27)$$

Neste caso, a matriz na eq. (5.27) mostra que a matriz da eq. (5.24) não tem 4 equações de restrição, mas sim, 3 equações de restrição para os componentes de $A_{\mu\nu}$. Fisicamente isso significa que entre os 16 componentes de $A_{\mu\nu}$, há 1 componente da eq. (5.20) e 1 componente da eq. (5.24) que apontam na mesma direção e sentido. Isso confere para ambas as equações

uma equação de restrição em comum. Por isso, ao invés de considerar 4 equações de restrição, na eq. (5.21) temos apenas 3 equações de restrição para os componentes do tensor amplitude de onda ($A_{\mu\nu}$). Com isso, reduzimos de 6 para 3 o número de componentes independentes em $A_{\mu\nu}$.

5.3.1 Transverse-Traceless Gauge

Quanto a restrição “Traceless”, ainda seguindo o raciocínio de Chris (2022, ep. 109e), Schutz (2009, p. 205), Hendry (2007, p. 60) e Carroll (1997, p. 150), vamos considerar a matriz amplitude de onda ($A_{\mu\nu}$) como sem traço, que significa fazer o traço ser igual zero. Como mostra a eq. (4.69), tomar o traço da amplitude de onda $A_{\mu\nu}$ significa multiplicar a ela uma métrica inversa ($\eta^{\mu\nu}$)

$$A_{\mu}^{\mu} = \eta^{\mu\nu} A_{\mu\nu} = 0 . \quad (5.28)$$

Como a Onda Gravitacional

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} e^{i(k_{\sigma} x^{\sigma})} \quad (5.10)$$

é dada em função da mesma amplitude de onda ($A_{\mu\nu}$) que define a restrição do T.T. Gauge

$$A_{\mu\nu} U^{\mu} = 0 , \quad (5.24)$$

podemos então, como sugere Chris (2022, ep. 109e) e Hendry (2007, p. 60), reescrever essa eq. (5.24), de uma Onda Gravitacional $\bar{h}_{\mu\nu}$ que oscila perpendicularmente a uma quadri-velocidade, como

$$\bar{h}_{\mu\nu} U^{\mu} = 0 . \quad (5.29)$$

Ainda de acordo com os autores, como a restrição “Traceless” significa “sem traço”, podemos reescrever a eq. (5.28) como:

$$\bar{h}_{\mu}^{\mu} = 0 . \quad (5.30)$$

Dessa forma, a eq. (5.29) e eq. (5.30) permanecem de acordo com a definição de um T.T. Gauge, explicam os autores.

Relembre agora da equação que define os componentes de $\bar{h}_{\mu\nu}$ envolvendo o traço de h

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h. \quad (4.34)$$

Como em Chris (2022, ep. 109e), também acompanhando o raciocínio desenvolvido em Schutz (2009, p. 205) e Carroll (1997, p. 150), podemos multiplicar em todos os termos dessa equação com uma métrica inversa ($\eta^{\mu\nu}$)

$$\bar{h}_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu} = h_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu}h,$$

que pode ser usada para levantar e trocar índices, e $\eta_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu}$ denota um delta de Kronecker

$$\bar{h}^{\mu}_{\mu} = h^{\mu}_{\mu} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\mu}h;$$

onde os índices repetidos, pela propriedade do delta de Kronecker, vai para 1. Dessa forma, temos que, o traço de \bar{h} , o traço do primeiro h no segundo termo da equação e o traço do Kronecker no espaço-tempo de Minkowski é o traço da sua própria métrica, que tem valor 4

$$\bar{h} = h - \frac{1}{2}4h \quad \rightarrow \quad \bar{h} = h - 2h.$$

E agora resolvendo a diferença no segundo termo dessa última equação da direita, chegamos ao mesmo resultado em Schutz (2009, p. 205)

$$\bar{h} = -h. \quad (5.31)$$

A partir da eq. (5.30) com a eq. (5.31), como em Chris (2022, ep. 109e) e Grøn (2004, p. 200), temos que, no T.T. Gauge sem traço

$$\bar{h}^{\mu}_{\mu} = \bar{h} = 0; \quad (5.32)$$

o que também nos leva a

$$h^{\mu}_{\mu} = h = 0. \quad (5.33)$$

Essa eq. (5.33) desempenhará o papel de mais uma das restrições utilizadas para reduzir o número de componentes independentes de $A_{\mu\nu}$. Além disso, considerando agora substituir h na eq. (5.32) por seu traço definido na eq. (5.33), como desenvolve Chris (2022, ep. 109e),

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\underset{0}{h}$$

teremos que

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} . \quad (4.35)$$

Portanto, de acordo com Chris (2022, ep. 109e), Schutz (2009, p. 205), Hendry (2007, p. 60) e Carroll (1997, p. 150), no T.T. Gauge, a eq. (4.49) pode ser reescrita como

$$\square h_{\mu\nu} = 0 , \quad (5.35)$$

e podemos também considerar reescrever a eq. (5.10) como

$$h_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} e^{i(k_\sigma x^\sigma)} , \quad (5.36)$$

onde $h_{\mu\nu}$ é apenas perturbação métrica definida na eq. (4.9).

5.3.2 Determinado os componentes da amplitude $A_{\mu\nu}$ de onda

Das restrições que já definimos para o T.T. Gauge, seguindo o raciocínio de Chris (2022, ep. 109e), Cheng (2010, p. 342), Schultz (2009, p. 205), Hendry (2007, p. 60-61) e Carroll (1997, p. 151), vamos considerar agora tomar o vetor quadri-velocidade, definido na eq. (5.24), como o vetor para a base do tempo (t) na coordenada temporal (ct) do espaço-tempo

$$\vec{U} = c\vec{e}_t . \quad (5.37)$$

Dessa forma, na quadri-velocidade definida na eq. (5.24) apenas o componente do tempo será diferente de zero (pois ele será a velocidade da luz c)

$$A_{tv}U^t = A_{tv}c = 0 . \quad (5.38)$$

Em uma matriz, a eq. (5.37) fica

$$\begin{bmatrix} A_{tt} & A_{tx} & A_{ty} & A_{tz} \\ A_{xt} & A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yt} & A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zt} & A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A_{tt}U^t + 0 + 0 + 0 \\ A_{xt}U^t + 0 + 0 + 0 \\ A_{yt}U^t + 0 + 0 + 0 \\ A_{zt}U^t + 0 + 0 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \quad (5.39)$$

A partir dessa matriz, definida na eq. (5.39), vemos que a eq. (5.38) faz com que todo componente que tenha t no primeiro índice seja zero, e por simetria

$$A_{tv} = A_{vt} = 0 , \quad (5.40)$$

todo componente com t no segundo índice também será zero

$$A_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ 0 & A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ 0 & A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{bmatrix}. \quad (5.41)$$

A outra restrição do T.T. Gauge que vamos ajustar, Segundo Chris (2022, ep. 109e), diz respeito ao vetor de onda

$$k^\beta A_{\alpha\beta} = 0. \quad (5.21)$$

Como explica Cheng (2010, p. 342), Schultz (2009, p. 205), Hendry (2007, p. 60-61) e Carroll (1997, p. 151), vamos considerar agora que a Onda Gravitacional está se propagando apenas na direção z . Assim, devido a esta condição de perpendicularidade, teremos:

$$k^\mu \rightarrow \left(\frac{\omega}{c}, 0, 0, \frac{\omega}{c} \right), \quad (5.42)$$

uma vez que $k^2 = (k^t)^2 - (k^z)^2 = 0$. Com isso, a soma dos componentes do vetor de onda é

$$\begin{bmatrix} A_{tt} & A_{tx} & A_{ty} & A_{tz} \\ A_{xt} & A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yt} & A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zt} & A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k^t \\ 0 \\ 0 \\ k^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A_{tt}k^t + 0 + 0 + A_{tz}k^z \\ A_{xt}k^t + 0 + 0 + A_{xz}k^z \\ A_{yt}k^t + 0 + 0 + A_{yz}k^z \\ A_{zt}k^t + 0 + 0 + A_{zz}k^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.43)$$

que escrevendo como uma equação ficará

$$A_{tv}k^t + A_{zv}k^z = 0. \quad (5.44)$$

Substituindo agora a eq. (5.42) nessa eq. (5.44), como desenvolve Chris (2022, ep. 109e), teremos

$$0 \cdot \left(\frac{\omega}{c} \right) + A_{zv} \left(\frac{\omega}{c} \right) = 0. \quad (5.45)$$

Dessa forma, de acordo com Chris (2022, ep. 109e), a eq. (5.45) faz com que todo componente que tenha z no primeiro índice seja zero, e por simetria

$$A_{zv} = A_{vz} = 0, \quad (5.46)$$

e temos também que, todo componente com índice t vai para zero

$$A_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ 0 & A_{yx} & A_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.47)$$

Como definido na eq. (5.28), a matriz da amplitude de onda ($A_{\mu\nu}$) definida na eq. (5.47) tem o traço igual a zero, como definido em Cheng (2010, p. 342-343), Schultz (2009, p. 205), Hendry (2007, p. 61-62) e Carroll (1997, p. 151).

Da condição “traceless”: $A^\mu{}_\mu = 0$, dada pela eq. (5.28), temos que a diagonal principal deve satisfazer a equação $A_{xx} + A_{yy} = 0$, e com isto, vemos que existe uma relação de dependência de mais uma componente: $A_{yy} = -A_{xx}$. Para a diagonal secundária, essa dependência se justifica pela simetria $A_{xy} = -A_{yx}$. Com isto, podemos afirmar que restam apenas duas componentes $A_{\mu\nu}$ independentes.

5.3.3 Os componentes de polarização da Onda Gravitacional

Com a matriz definida na eq. (5.47), foi possível perceber que os componentes xx e yy na diagonal principal não são independentes, assim com os componentes xy e yx . Portanto, também de acordo com Schultz (2009, p. 205-206), Grøn (2004, p. 200) e Carroll (1997, p. 151), depois de identificar todas as simetrias disponíveis em nossa escolha de sistema de coordenadas, a matriz amplitude de onda $A_{\mu\nu}$ tem dois componentes independentes

$$A_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ 0 & A_{yx} & -A_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.48)$$

que vamos reescrever como $+$ e \times e substituir na eq. (5.36)

$$h_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_+ & A_\times & 0 \\ 0 & A_\times & -A_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e^{i(k_\sigma x^\sigma)}. \quad (5.49)$$

Observando a matriz na eq. (5.49), percebe-se que os dois componentes na diagonal principal e os dois componentes na diagonal secundária correspondem, respectivamente, às polarizações *plus* $+$ e *cross* \times presentes em uma determinada Onda Gravitacional, explicam Cheng (2010, p. 342-343) e Hendry (2007, p. 61-62).

5.4 ONDAS GRAVITACIONAIS VS COORDENADAS ONDULADAS

A partir daqui trabalharemos para entender como as Ondas Gravitacionais de polarização *plus* + e *cross* ×, que causam a curvatura do espaço-tempo, fazendo com que o próprio espaço se alongue numa direção e se contraia em outra, afetam um anel de partículas livres fazendo com que a distância espacial entre elas aumente e diminua, aproximando e afastando as partículas umas das outras, à medida que a onda passa por elas.

No entanto, para que possamos prosseguir, há algo sutil que requer um pouco mais de nossa atenção. Em gravidade linearizada

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \text{com} \quad \|h_{\mu\nu}\| \ll 1, \quad (4.9)$$

os componentes de \bar{h} satisfazem a equação de onda no vácuo

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0; \quad (4.49)$$

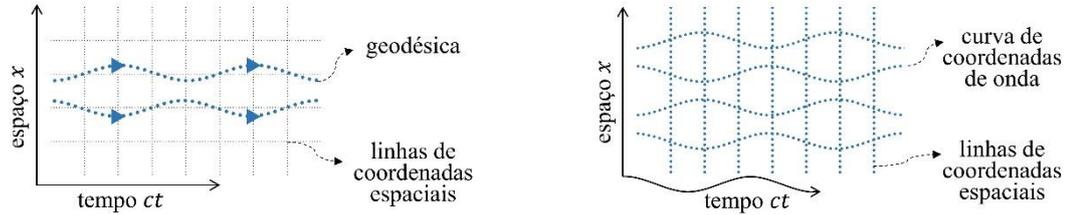
e no T.T. Gauge, \bar{h} se reduz aos componentes de h , que também satisfaz a equação de onda

$$\square h_{\mu\nu} = 0. \quad (5.36)$$

Mas como sabemos que os sistemas de coordenadas são coisas arbitrárias e que não afetam em nada a Física de um fenômeno, o que requer nossa atenção é, e se essa eq. (5.35) não for sobre Ondas Gravitacionais e sim o resultado de linhas onduladas no sistema de coordenadas?

Como explica Chris (2022, ep. 109e) seguindo o raciocínio de Hendry (2007, p. 63-64) e Carroll (1997, p. 152), se considerarmos geodésicas, esperaríamos que as linhas de mundo de duas partículas livres, por exemplo, ondulassem para frente e para trás, conforme o espaço se alonga e se contrai devido a passagem da Onda Gravitacional, como ilustra a Fig. 5.3 da esquerda. Mas, ainda de acordo com o autor, também é possível que a eq. (5.35) descreva apenas linhas onduladas no sistema de coordenadas, o que seria uma característica intrínseca decorrente da escolha do próprio sistema de coordenadas, e não necessariamente uma situação física real, como ilustra a Fig. 5.3 da direita. No entanto, como a Onda Gravitacional pode curvar as linhas de mundo da mesma forma como as linhas onduladas do sistema de coordenadas, uma forma de resolver o problema, e ao mesmo tempo responder à pergunta feita no parágrafo anterior, consiste em avaliar a distância própria entre as linhas de mundo geodésicas.

Figura 5.3: Linha de mundo de partículas livres vs coordenadas onduladas.



Fonte: Adaptado de Chris.

Como explica Chris (2022, ep. 109e), Schultz (2009, p. 206-207), Hendry (2007, p. 64-65) e Carroll (1997, p. 152), podemos avaliar a distância entre linhas de mundo geodésicas como um comprimento próprio entre dois pontos porque o comprimento próprio independe do sistema de coordenadas. Para isso, vamos considerar o comprimento próprio L_0 (distância) entre duas linhas de mundo geodésicas vizinhas com uma curva com parâmetro λ :

$$L_0 = \int \left\| \frac{d}{d\lambda} \right\| d\lambda \quad (5.50)$$

e integrar os vetores tangentes dessa curva entre os dois pontos

$$L_0 = \int \sqrt{-\frac{d}{d\lambda} \cdot \frac{d}{d\lambda}} d\lambda.$$

Desenvolvendo agora a regra da cadeia

$$L_0 = \int \sqrt{-\left(\frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial}{dx^\mu}\right) \cdot \left(\frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{\partial}{dx^\nu}\right)} d\lambda$$

e evidenciando os termos que definem os vetores tangentes da curva λ

$$L_0 = \int \sqrt{-\frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \left(\frac{\partial}{dx^\mu} \cdot \frac{\partial}{dx^\nu}\right)} d\lambda$$

chegaremos a uma equação que demonstra que o comprimento próprio, de fato, independe do sistema de coordenadas

$$L_0 = \int \sqrt{-\frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} g_{\mu\nu}} d\lambda. \quad (5.51)$$

Portanto, de acordo com Chris (2022, ep. 109e), Schultz (2009, p. 206-207), Hendry (2007, p. 64-65) e Carroll (1997, p. 152), usando geodésicas, que são os caminhos de partículas livres através do espaço-tempo e na ausência de forças externas atuando sobre ela, de forma a serem afetadas unicamente pela gravidade, que é a curvatura do próprio espaço-tempo em si, e usando também a distância própria, que é uma forma de medir o comprimento do espaço-tempo constante entre dois pontos, podemos medir quão gravitacional as ondas alongam e contraem o espaço de forma independentemente do sistema de coordenadas.

5.4.1 Geodésica³⁶ para uma partícula perturbada por uma Onda Gravitacional

Sejam as geodésicas de partículas livres descritas pela equação

$$\frac{d^2 x^\sigma}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0. \quad (5.52)$$

Acompanhando o raciocínio de Chris (2022, ep. 109e), Das (2012, p. 629), Cheng (2010, p. 343), Hendry (2007, p. 65-66) e Carroll (1997, p. 152), iniciaremos calculando as geodésicas de duas partículas massivas livres experimentando Ondas Gravitacionais. Dessa forma, na eq. (5.52) poderemos usar o tempo próprio τ das partículas na parametrização da curva geodésica λ , ou seja, $\tau = \lambda$

$$\frac{d^2 x^\sigma}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0; \quad (5.53)$$

e para simplificar essa equação, podemos reescrever o vetor quadri-velocidade \vec{U} das partículas como um vetor tangente $d/d\tau$ (relacione as duas equações a seguir)

$$\vec{U} = U^\mu \vec{e}_\mu$$

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

³⁶ Uma leitura mais detalhada sobre a Equação da Geodésica pode ser encontrada, se assim o leitor desejar, no livro *A First Course in General Relativity*. 2nd. Bernard Schutz (2009, p. 156-157); e no livro *Relativity, Gravitation and Cosmology: A Basic Introduction*. 2nd. Ta-Pei Cheng (2010, p. 86-88).

onde, a quantidade $d/d\tau$ será $\vec{U} \rightarrow U^\sigma$ e a quantidade $dx^\mu/d\tau$ será U^μ ; então, a eq. (5.53) pode ser reescrita como

$$\frac{dU^\sigma}{d\tau} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma U^\mu U^\nu = 0, \quad (5.54)$$

onde o símbolo de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ é o mesmo da eq. (4.21), definido para gravidade linearizada

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} \eta^{\sigma\alpha} (\partial_\nu h_{\alpha\mu} + \partial_\mu h_{\alpha\nu} - \partial_\alpha h_{\mu\nu}). \quad (4.21)$$

Sabemos que as linhas de mundo geodésicas surgem das soluções para a equação da geodésica, e a eq. (5.54) é uma equação da geodésica. Então, dada a eq. (4.21) e a eq. (5.49), e sabendo que h são ondas planas nas polarizações *plus* + e *cross* ×, será necessário calcularmos muitos $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$, o que torna a eq. (5.54) muito complexa, explica Chris (2022, ep. 109e), Das (2012, p. 629), Cheng (2010, p. 343), Hendry (2007, p. 65-66) e Carroll (1997, p. 152). Ainda de acordo com os autores, uma saída viável é tomar a eq. (5.37) e considerarmos olhar para as linhas de mundo cuja quadri-velocidade das partículas é paralela as coordenadas do tempo e as coordenadas do espaço são constantes, que nos permite escrever:

$$\vec{U}_{(\tau)} = c \vec{e}_t \quad \Rightarrow \quad U_{(\tau)}^\mu \rightarrow (c, 0, 0, 0). \quad (5.55)$$

Portanto, temos que

$$U_{(\tau)}^t = c \quad \text{e} \quad U_{(\tau)}^i = 0 \quad (5.56)$$

representa basicamente uma linha de mundo que está em movimento apenas na coordenada do tempo. Então, a eq. (5.54) pode ser reescrita substituindo nela a eq. (5.56)

$$\frac{dU^\sigma}{d\tau} + \Gamma_{tt}^\sigma c^2 = 0. \quad (5.57)$$

Como desenvolvido em Chris (2022, ep. 109e), Das (2012, p. 629), Cheng (2010, p. 343), Hendry (2007, p. 65-66) e Carroll (1997, p. 152), podemos ainda dividir essa eq. (5.56) por c^2 e manipular para que Γ_{tt}^σ possa ficar sozinho em um dos termos da equação

$$\frac{1}{c^2} \frac{dU^\sigma}{d\tau} + \frac{1}{c^2} \Gamma_{tt}^\sigma c^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{c^2} \frac{dU^\sigma}{d\tau} = -\Gamma_{tt}^\sigma, \quad (5.58)$$

para possamos substituir a eq. (4.21) nessa eq. (5.58) da direita

$$\frac{1}{c^2} \frac{dU^\sigma}{d\tau} = -\frac{1}{2} \eta^{\sigma\alpha} (\partial_t h_\alpha + \partial_t h_{\alpha t} - \partial_\alpha h_{tt}). \quad (5.59)$$

Agora observando a matriz na eq. (5.49) temos que todos os componentes de $h_{\mu\nu}$ com índice t vão para zero. Então, na eq. (5.59) cada parcela com índice t será zero

$$\frac{1}{c^2} \frac{dU^\sigma}{d\tau} = 0; \quad (5.60)$$

e pela eq. (5.55), também temos que a derivada dos componentes espaciais de U^σ também será zero, porque todos eles são zero. Dessa forma, toda a eq. (5.60) vai para zero, o que significa que nossa ideia de uma linha de mundo com as coordenadas espaciais constantes, definida na eq. (5.55), é, de fato, uma geodésica válida, como explica Chris (2022, ep. 109e), Das (2012, p. 629), Cheng (2010, p. 343), Hendry (2007, p. 65-66) e Carroll (1997, p. 152).

Como os componentes de U^μ na eq. (5.55) são apenas as derivadas dos componentes do espaço-tempo $dx^\mu/d\tau$, podemos obter a antiderivada para chegarmos à equação completa da linha de mundo da partícula, na qual os componentes do espaço-tempo estão parametrizados como uma função do tempo próprio

$$x_{(\tau)}^\mu \rightarrow (c\tau + b^t, b^x, b^y, b^z). \quad (5.61)$$

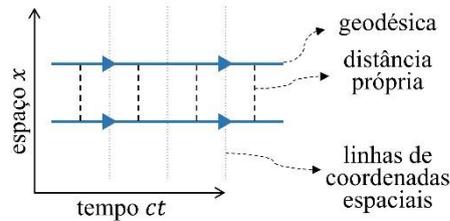
Segundo Chris (2022, ep. 109e), essa é a geodésica de uma partícula que parte de um ponto (b^μ), que permanece em repouso nas coordenadas espaciais e se move apenas na direção do tempo, viajando na velocidade da luz c . É interessante perceber que este não é um resultado que está de acordo com o esperado, uma vez que ele não expõe nenhuma oscilação característica de elementos de um meio perturbado por uma onda.

5.4.2 Comprimento próprio entre geodésicas

A partir da análise da geodésica na eq. (5.61), é conveniente questionar se realmente ela implica alguma onda no espaço-tempo. Isso porque essa equação descreve geodésicas que aparentam ser como uma reta, como ilustrado na Fig. 5.5. Mas isso pode ser uma característica intrínseca do sistema de coordenadas T.T. Gauge. Ou seja, acompanhando o raciocínio de Hendry (2007, p. 63-65) e Carroll (1997, p. 152), o sistema de coordenadas pode estar oscilando juntamente com as partículas, dessa forma tudo o que veremos são geodésicas retas, pelo fato de as partículas estarem em movimento apenas no tempo. Entretanto, devemos nos lembrar que

no espaço-tempo as coisas são mais complexas de serem observadas/transcritas em um diagrama quadri-dimensional, então a distância entre essas geodésicas pode estar mudando com o tempo, explica Chris (2022, ep. 109d).

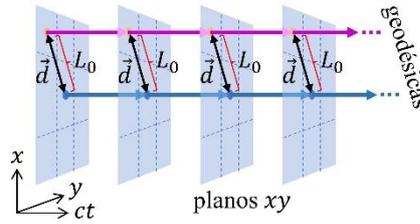
Figura 5.4: Geodésicas de duas partículas livres no T.T. Gauge.



Fonte: Adaptado de Chris.

Acompanhando o raciocínio desenvolvido em Chris (2022, ep. 109e) e Hendry (2007, p. 63-66), podemos verificar a mudança de distância entre duas geodésicas vizinhas, como ilustrado na Fig. 5.4, calculando a distância própria L_0 entre elas. Lembre-se que no tópico 5.2.1, derivamos ondas planas gravitacionais que escolhemos estar viajando completamente na direção z . Como resultado, obtivemos a eq. (5.49), cujas amplitudes de onda resultante (em $+$ e \times) afetam a métrica apenas nas direções x e y . Para entender essas Ondas Gravitacionais precisamos observar como o plano xy muda ao longo do tempo.

Considere vários planos xy empilhados e na origem deles a geodésica de uma partícula livre que, como determinamos na eq. (5.55), tem coordenadas espaciais constantes para a posição dessa geodésica, conforme explicado em Chris (2022, ep. 109e), Hendry (2007, p. 65-66) e Carroll (1997, p. 152-153). Dessa forma, ela permanecerá na curva de coordenadas do tempo que pertence a origem do plano. Considere também tomar um ponto próximo a origem do plano xy , localizado por um vetor deslocamento \vec{d} , com coordenadas parametrizadas por λ , de modo que $x(\lambda) = v^x \lambda$ e $y(\lambda) = v^y \lambda$, (5.62) na extremidade do qual podemos observar uma segunda geodésica que também é definida com coordenadas constantes, como ilustra a Fig. 5.5.

Figura 5.5: Geodésica no plano xy do espaço-tempo.

Fonte: Adaptado de Chris.

Dessa forma, para saber como o comprimento próprio L_0 do vetor deslocamento \vec{d} muda com o tempo, precisamos tratar \vec{d} como uma curva parametrizada em λ , como explica Chris (2022, ep. 109e) e Hendry (2007, p. 64-65). Logo, o comprimento dessa curva parametrizada será dado integrando sobre λ os vetores tangentes à curva

$$L_0 = \int \left\| \frac{d}{d\lambda} \right\| d\lambda, \quad (5.63)$$

cujos módulos de $d/d\lambda$ é dado por

$$L_0 = \int_0^1 \sqrt{-\frac{d}{d\lambda} \cdot \frac{d}{d\lambda}} d\lambda, \quad (5.64)$$

onde as coordenadas (x, y) são proporcionais aos componentes de \vec{d} , definido na eq. (5.62),

$$x_{(\lambda)} = v^x \lambda \quad \text{e} \quad y_{(\lambda)} = v^y \lambda, \quad (5.65)$$

e o limite de integração vai $\lambda = 0$ a $\lambda = 1$. Sobre o sinal negativo no radicando da eq. (5.64), Chris (2022, ep. 109e), baseado em Schultz (2009, p. 206-207), Hendry (2007) e Carroll (1997), explica que surge ali porque a integral é realizada sobre uma curva tipo espaço, e estamos utilizando uma métrica com assinatura $(+ - - -)$.

Voltando a eq. (5.64), como em Chris (2022, ep. 109e), podemos ainda desenvolver a regra da cadeia

$$L_0 = \int_0^1 \sqrt{-\left(\frac{dx}{d\lambda} \frac{d}{dx} + \frac{dy}{d\lambda} \cdot \frac{d}{dy}\right) \cdot \left(\frac{dx}{d\lambda} \frac{d}{dx} + \frac{dy}{d\lambda} \cdot \frac{d}{dy}\right)} d\lambda,$$

o que resulta num polinômio

$$L_0 = \int_0^1 \sqrt{-\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 g_{xx} + \left(\frac{dx}{d\lambda}\right)\left(\frac{dy}{d\lambda}\right) g_{xy} + \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2 g_{yy}} d\lambda.$$

Nesse polinômio podemos substituir as quantidades entre parênteses pelos componentes de \vec{d} , que foram definidos na eq. (5.65)

$$L_0 = \int_0^1 \sqrt{-(d^x)^2 g_{xx} + (d^x)(d^y) g_{xy} + (d^y)^2 g_{yy}} d\lambda.$$

Por definição, como desenvolve Chris (2022, ep. 109e), baseado em Schultz (2009, p. 206-207), Hendry (2007) e Carroll (1997), podemos ainda substituir esse polinômio quadrado perfeito por \vec{d}

$$L_0 = \int_0^1 \sqrt{-\vec{d} \cdot \vec{d}} d\lambda,$$

e como essa quantidade no integrando é tratada como uma constante, temos que

$$L_0 = \sqrt{-\vec{d} \cdot \vec{d}} \int_0^1 d\lambda,$$

cujos resultados são o próprio módulo de \vec{d} , que é igual ao comprimento próprio L_0

$$L_0 = \|\vec{d}\|. \quad (5.66)$$

Portanto, para calcular o comprimento próprio L_0 entre as duas geodésicas ilustradas na Fig. 5.5, tudo o que precisamos fazer é tomar o produto escalar de \vec{d} com ele mesmo

$$L_0 \Rightarrow \vec{d} \cdot \vec{d} = (d^\mu \vec{e}_\mu) \cdot (d^\mu \vec{e}_\mu). \quad (5.67)$$

Nessa eq. (5.67), de acordo com Chris (2022, ep. 109e) e Schultz (2009, p. 206-207), podemos expandir \vec{d} como uma combinação linear de vetores de base, cujo produto escalar entre eles, por definição, resulta na métrica $g_{\mu\nu}$

$$\vec{d} \cdot \vec{d} = d^\mu d^\nu (\vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu) \rightarrow \vec{d} \cdot \vec{d} = d^\mu d^\nu g_{\mu\nu}.$$

No entanto, como o vetor deslocamento \vec{d} foi definido no plano xy do espaço-tempo, a soma dos componentes tensoriais será feita apenas sobre x e y

$$\vec{d} \cdot \vec{d} = d^x d^x g_{xx} + d^x d^y g_{xy} + d^y d^x g_{yx} + d^y d^y g_{yy} ;$$

e lembrando que o tensor métrico é simétrico, podemos reescrever essa última equação como

$$\vec{d} \cdot \vec{d} = (d^x)^2 g_{xx} + 2d^x d^y g_{xy} + (d^y)^2 g_{yy} . \quad (5.68)$$

Agora, relembre que, no cap. 3, definimos a métrica $g_{\mu\nu}$ como sendo a métrica de Minkowski para o espaço-tempo plano

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

mais uma perturbação $h_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \text{com} \quad \|h_{\mu\nu}\| \ll 1 . \quad (4.9)$$

O que faremos agora, como desenvolve Chris (2022, ep. 109e), é substituir a eq. (4.9) na eq. (5.68)

$$\vec{d} \cdot \vec{d} = (d^x)^2(\eta_{xx} + h_{xx}) + 2d^x d^y(\eta_{xy} + h_{xy}) + (d^y)^2(\eta_{yy} + h_{yy}) . \quad (5.69)$$

Observe que os componentes xx , xy e yy , na eq. (5.69), também estão na matriz definida na eq. (5.48). Segundo Chris (2022, ep. 109e), baseado em Schultz (2009, p. 206-207), Hendry (2007) e Carroll (1997), relacionando a posição dos componentes nesta matriz com os componentes da métrica definidos na eq. (2.22), podemos identificar o respectivo valor de cada um deles; e vamos substituir na eq. (5.69)

$$\vec{d} \cdot \vec{d} = (d^x)^2(-1 + h_{xx}) + 2d^x d^y(0 + h_{xy}) + (d^y)^2(-1 + h_{yy}) . \quad (5.70)$$

Vamos também relacionar a posição dos componentes xx , xy e yy da matriz definida na eq. (5.48) com os componentes da matriz definida na eq. (5.49), onde eles são A_+ , A_\times e $-A_+$, respectivamente. Substituiremos esses componentes de polarização de Onda Gravitacional na eq. (5.70) e multiplicaremos todos pela mesma equação de onda plana que na eq. (5.49)

$$\vec{d} \cdot \vec{d} = (d^x)^2(-1 + A_+ e^{ik_\sigma x^\sigma}) + 2d^x d^y(0 + A_\times e^{ik_\sigma x^\sigma}) + (d^y)^2(-1 - A_+ e^{ik_\sigma x^\sigma}) .$$

Agora, podemos aplicar a distributividade nessa última equação

$$\vec{d} \cdot \vec{d} = -(d^x)^2 + (d^x)^2(A_+ e^{ik_\sigma x^\sigma}) + 0 + (2d^x d^y)(A_\times e^{ik_\sigma x^\sigma}) - (d^y)^2 - (d^y)^2(A_+ e^{ik_\sigma x^\sigma}),$$

e reorganizando tudo

$$\vec{d} \cdot \vec{d} = -[(d^x)^2 + (d^y)^2] + [A_+(d^x)^2 + A_\times 2d^x d^y - A_+(d^y)^2]e^{ik_\sigma x^\sigma},$$

podemos agrupar os termos A_+ , chegando a

$$\vec{d} \cdot \vec{d} = \underbrace{-[(d^x)^2 + (d^y)^2]}_{\eta_{\mu\nu}} + \underbrace{\{A_+[(d^x)^2 - (d^y)^2] + A_\times 2d^x d^y\}}_{h_{\mu\nu}} e^{ik_\sigma x^\sigma}, \quad (5.71)$$

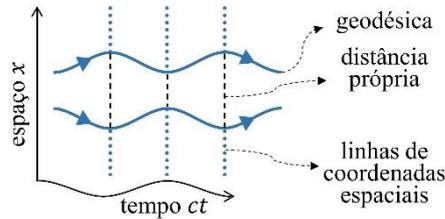
que, de acordo com Chris (2022, ep. 109e) e os autores Hendry (2007, p. 65-66) e Carroll (1997, p. 152-153), é uma solução que nos permite evidenciar o comportamento esperado devido à influência das ondas planas gravitacionais.

5.4.3 Interpretando a polarização *plus* + e *cross* × da Onda Gravitacional

A primeira parcela no segundo termo da eq. (5.71) é o resultado padrão da métrica plana de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$, onde o sinal negativo surge porque o vetor deslocamento \vec{d} é um vetor espacial; e a segunda parcela são as mudanças $h_{\mu\nu}$ na métrica devido a Ondas Gravitacionais. Então, embora as geodésicas tenham coordenadas de espaço constantes no T.T. Gauge, a distância entre geodésicas vizinhas está mudando devido a vibrações na parte $h_{\mu\nu}$ da métrica $\eta_{\mu\nu}$, algo semelhante ao que ilustra a Fig. 5.6. Para entender o efeito das Ondas Gravitacionais, acompanhando o raciocínio de Chris (2022, ep. 109e), Hendry (2007, p. 67), Grøn (2004, p. 201-202) e Carroll (1997, p. 153), vamos observar as mudanças na geometria do espaço-tempo devido a parte $h_{\mu\nu}$ da eq. (5.72). Para abreviar nossa escrita, vamos considerar

$$\Delta = \underbrace{+ \{A_+[(d^x)^2 - (d^y)^2] + A_\times 2d^x d^y\}}_{h_{\mu\nu}} e^{ik_\sigma x^\sigma}. \quad (5.72)$$

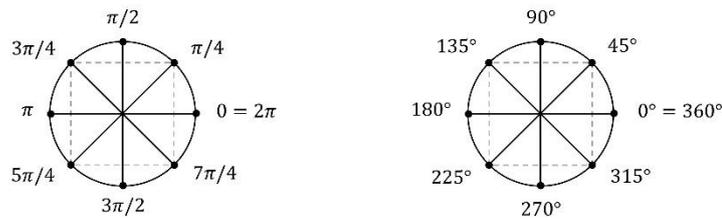
Figura 5.6: Geodésicas de duas partículas livres no T.T. Gauge.



Fonte: Adaptado de Chris.

Considere também o círculo trigonométrico na Fig. 5.7 a seguir. Será referência nos tópicos 5.6.1 e 5.6.2, para nos referirmos a direções x , y e diagonal nesse plano cartesiano.

Figura 5.7: Círculo trigonométrico cartesiano.



Fonte: Adaptado de Chris.

Ainda acompanhando o raciocínio de Chris (2022, ep. 109e), Hendry (2007, p. 67), Grøn (2004, p. 201-202) e Carroll (1997, p. 153), vejamos agora como a métrica do espaço-tempo muda quando as geodésicas de duas partículas massivas livres, por exemplo, são separadas por um vetor de deslocamento \vec{d} na direção $\pi \leftrightarrow 2\pi$ radiano, como mostra a Fig. 5.8 da esquerda. Isso significa que os componentes d^y na eq. (4,72) vão para zero, restando apenas uma onda plana com a amplitude de polarização *plus* A_+

$$\Delta = A_+(d^x)^2 e^{ik_\sigma x^\sigma} . \tag{5.73}$$

Se considerarmos agora que as duas geodésicas são separadas por um vetor de deslocamento \vec{d} na direção $3\pi/2 \leftrightarrow \pi/2$ radiano, como mostra a Fig. 5.8 da direita, significa que os componentes d^x na eq. (4,72) vão para zero, e o resultado é a eq. (5.73) com o segundo termo negativo

$$\Delta = -A_+(d^y)^2 e^{ik_\sigma x^\sigma}. \quad (5.74)$$

Podemos ainda reescrever essa eq. (5.74) como

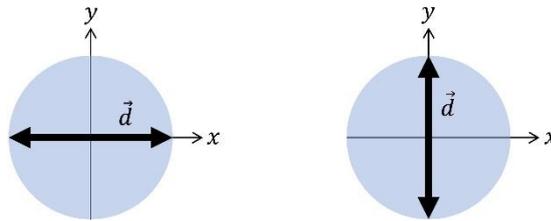
$$\Delta = e^{i\pi} A_+(d^y)^2 e^{ik_\sigma x^\sigma}$$

e multiplicar as exponenciais para obter

$$\Delta = A_+(d^y)^2 e^{i(k_\sigma x^\sigma + \pi)}, \quad (5.75)$$

onde π descreve meio ciclo de onda. No estudo de ondulatória, isso significa que as vibrações nas direções $\pi \leftrightarrow 2\pi$ radiano e $3\pi/2 \leftrightarrow \pi/2$ radiano acontecem juntas. Porém, estão fora de fase em meio ciclo de onda, o equivalente a π radiano, explica Chris (2022, ep. 109e), baseado em Hendry (2007), Grøn (2004) e Carroll (1997).

Figura 5.8: Geodésicas separadas na direção $\pi \leftrightarrow 2\pi$ radiano e $3\pi/2 \leftrightarrow \pi/2$ radiano.



Fonte: Adaptado de Chris.

Ainda de acordo com o raciocínio dos autores Chris (2022, ep. 109e), Hendry (2007, p. 67), Grøn (2004, p. 201-202) e Carroll (1997, p. 153), vamos considerar agora que o vetor de deslocamento \vec{d} separa as duas geodésicas na direção diagonal $5\pi/4 \leftrightarrow \pi/4$ radiano, onde os componentes d^x e d^y são positivos ou negativos, como mostra a Fig. 5.9 da esquerda. Nessa direção, a magnitude dos componentes d^x e d^y são exatamente a mesma, o que significa que d^x e d^y na eq. (5.72) vai para zero, restando apenas uma onda plana com a amplitude de polarização *cross* A_\times

$$\Delta = A_\times 2 \|d^x d^y\| e^{ik_\sigma x^\sigma}. \quad (5.76)$$

Considerando agora que o vetor de deslocamento \vec{d} separa as duas geodésicas na direção $7\pi/4 \leftrightarrow 3\pi/4$ radiano, onde os componentes d^x e d^y têm sinais opostos, como mostra a Fig. 5.9 da esquerda. Teremos também que a magnitude dos componentes d^x e d^y são exatamente

a mesma, o que significa que d^x e d^y na eq. (5.72) vai para zero, e o resultado é a eq. (5.76) com o segundo termo negativo

$$\Delta = -A_{\times} 2 \|d^x d^y\| e^{ik_{\sigma} x^{\sigma}}. \quad (5.77)$$

Podemos também reescrever a eq. (5.77) como

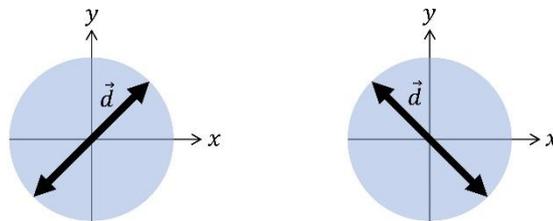
$$\Delta = e^{i\pi} A_{\times} 2 \|d^x d^y\| e^{ik_{\sigma} x^{\sigma}}.$$

e somar as exponenciais para obter

$$\Delta = A_{\times} 2 \|d^x d^y\| e^{i(k_{\sigma} x^{\sigma} + \pi)}. \quad (5.78)$$

onde π descreve meio ciclo de onda. Como já sabemos, do estudo de ondulatória, isso significa que as vibrações nas direções diagonais, onde os componentes d^x e d^y têm sinais positivos ou negativos e onde d^x e d^y têm sinais opostos, acontecem juntas. Porém, estão fora de fase em meio ciclo de onda, o equivalente a π radiano, explica Chris (2022, ep. 109e), baseado em Hendry (2007), Grøn (2004) e Carroll (1997).

Figura 5.9: Geodésicas separadas na direção $5\pi/4 \leftrightarrow \pi/4$ radiano e $7\pi/4 \leftrightarrow 3\pi/4$ radiano.



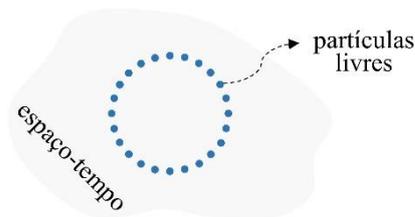
Fonte: Adaptado de Chris.

5.4.4 Onda Gravitacional e a curvatura do espaço-tempo

Finalmente vamos entender como as Ondas Gravitacionais de polarização *plus* + e *cross* \times causam a curvatura do espaço-tempo, fazendo com que o próprio espaço se alongue numa direção e se contraia em outra. Para isso, como explica Chris (2022, ep. 109e), Schultz (2009, p. 210), Hendry (2007, p. 67-69), Grøn (2004, p. 201-202) e Carroll (1997, p. 153-154), vamos considerar um anel de partículas massivas livres no espaço-tempo, como ilustrado na Fig. 5.10. Vamos entender como a Onda Gravitacional faz com que a distância espacial entre elas aumente

e diminua, aproximando e afastando as partículas umas das outras, à medida que a onda passa por elas.

Figura 5.10: Partículas massivas livres, distribuídas geometricamente como um anel.

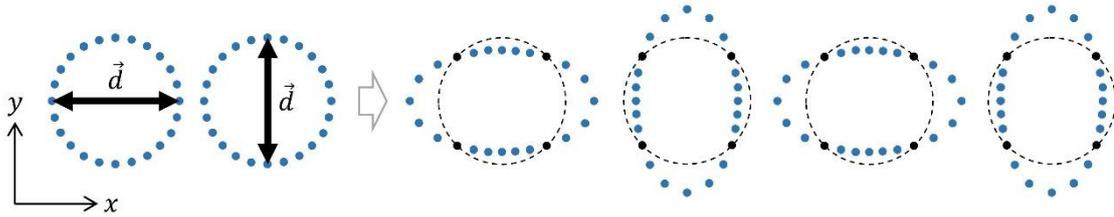


Fonte: Produção própria.

Como explica Schultz (2009, p. 210), Hendry (2007, p. 67-69), Grøn (2004, p. 201-202) e Carroll (1997, p. 153-154), a partir da eq. (5.73) e eq. (5.75) é possível observar que, se o deslocamento de duas geodésicas vizinhas acontecer numa direção $\pi \leftrightarrow 2\pi$ radiano ou $3\pi/2 \leftrightarrow \pi/2$ radiano, apenas a parte da eq. (5.71) que contém o componente de polarização *plus* A_+ afetará a distância própria entre as geodésicas; e o componente de polarização *cross* A_\times não desempenhará nenhuma mudança na distância espacial entre as geodésicas. E como as direções $\pi \leftrightarrow 2\pi$ radiano e $3\pi/2 \leftrightarrow \pi/2$ radiano têm amplitude de onda que está fora de fase em meio ciclo de onda (π radiano), significa que, quando a direção 2π radiano tem sua distância aumentada pela métrica $h_{\mu\nu}$, a direção $3\pi/2 \leftrightarrow \pi/2$ radiano tem sua distância diminuída pela métrica $h_{\mu\nu}$, como mostra a sequência na Fig. 5.11.

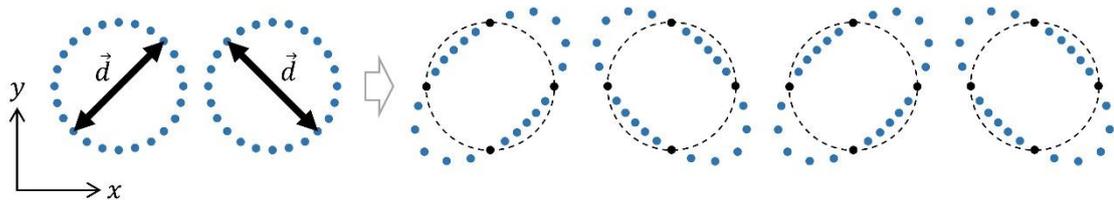
Como também explica D’Inverno (2022, p. 409-410), Das (2012, p. 629-630) e Cheng (2010, p. 343-344), com a eq. (5.76) e eq. (5.78) observamos que, se o deslocamento das mesmas duas geodésicas vizinhas acontecer numa direção diagonal $5\pi/4 \leftrightarrow \pi/4$ radiano ou $7\pi/4 \leftrightarrow 3\pi/4$ radiano, teremos que apenas a parte da eq. (5.71) contendo o componente de polarização *cross* A_\times irá afetar a distância própria entre as geodésicas; e o componente de polarização *plus* A_+ não desempenhará nenhuma mudança na distância espacial entre as geodésicas. As direções $0 \leftrightarrow 2\pi$ radiano e $3\pi/2 \leftrightarrow \pi/2$ radiano também têm uma amplitude de onda fora de fase em meio ciclo de onda (π radiano), o que significa que, quando a direção $5\pi/4 \leftrightarrow \pi/4$ radiano tem sua distância aumentada pela métrica $h_{\mu\nu}$, a direção $7\pi/4 \leftrightarrow 3\pi/4$ radiano tem sua distância diminuída pela métrica $h_{\mu\nu}$, como mostra a sequência na Fig. 5.12.

Figura 5.11: Polarização *plus* +: alonga e contrai o espaço nas direções $\pi \leftrightarrow 2\pi$ radiano e $3\pi/2 \leftrightarrow \pi/2$ radiano.



Fonte: Produção própria.

Figura 5.12: Polarização *cross* ×: alonga e contrai o espaço nas direções $5\pi/4 \leftrightarrow \pi/4$ radiano e $7\pi/4 \leftrightarrow 3\pi/4$ radiano.



Fonte: Adaptado de Chris.

Nas sequências da Fig. 5.11 e Fig. 5.12 há algumas partículas (pontos) na cor preta. Note que esses pontos estão localizados sobre um círculo pontilhado com mesma forma e tamanho que o anel de partículas massivas no início de cada sequência dessas figuras. E perceba, também, que esses pontos sobre o anel pontilhado não mudam de posição. Ou seja, de acordo com Chris (2022, ep. 109e), baseado em Hendry (2007) e Carroll (1997), eles estão em um espaço cuja posição permanece inalterada mesmo havendo alongamento e contração da distância entre as demais partículas. Portanto, essas são regiões do espaço-tempo que não sofrem mudanças espaciais com a passagem da Onda Gravitacional. Nessas circunstâncias, toda a parte de perturbação $h_{\mu\nu}$ da eq. (4,71) vai para zero

$$\vec{d} \cdot \vec{d} = \underbrace{-[(d^x)^2 + (d^y)^2]}_{\eta_{\mu\nu}} + \underbrace{\{A_+[(d^x)^2 - (d^y)^2] + A_\times 2d^x d^y\}}_{h_{\mu\nu}} e^{ik_\sigma x^\sigma}, \quad (5.71)$$

restando apenas a métrica plana de Minkowski

$$\vec{d} \cdot \vec{d} = \underbrace{-[(d^x)^2 + (d^y)^2]}_{\eta_{\mu\nu}}, \quad (5.79)$$

que comprova que nessas regiões o espaço-tempo não é curvado pela Onda Gravitacional. Além disso, como o tensor amplitude de onda $A_{\mu\nu}$ é de segunda ordem, e isso descreve um plano bidimensional no espaço-tempo, podemos então arriscar dizer que esses pontos sem cor são os nós do meio (espaço-tempo) em que a Onda Gravitacional que se propaga.

5.5 DETECÇÃO DAS ONDAS GRAVITACIONAIS

Como vimos neste capítulo, as Ondas Gravitacionais são distorções no espaço-tempo causadas por eventos astronômicos envolvendo fontes massivas de energia, como a colisão de buracos negros, fusão de estrelas de nêutrons, rotação assimétrica de corpos celestes supermassivos, uma supernova, entre outros. Eventos desse tipo são raros, mas extremamente energéticos, o que permite que as Ondas Gravitacionais viajem pelo Universo na velocidade da luz. Sua existência foi prevista pela TRG de Albert Einstein, em 1915.

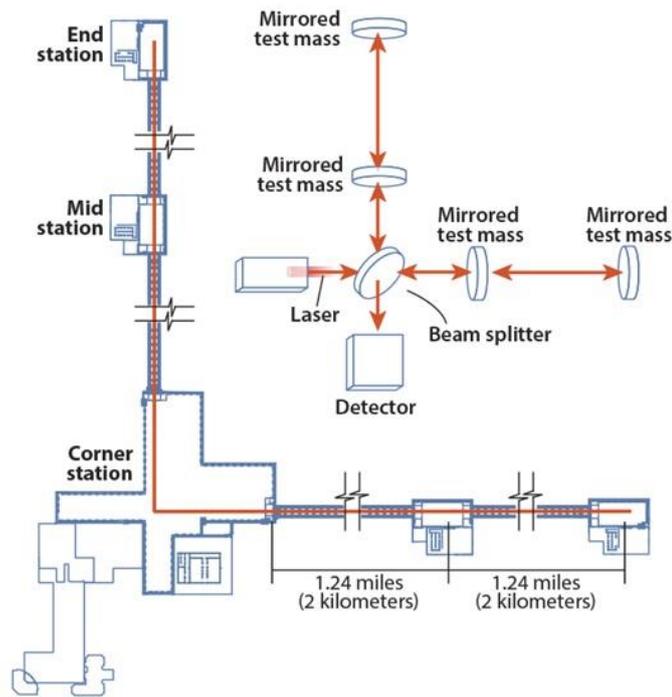
No entanto, a detecção de Ondas Gravitacionais é uma tarefa desafiadora, pois essas ondas, mesmo sendo geradas por eventos astronômicos altamente energéticos, se apresentam muito fracas quando chegam à Terra, fator esse que a mantinha indetectável e incomprovada. No entanto, o significativo avanço tecnológico nos últimos anos permitiu a detecção de várias Ondas Gravitacionais, sendo a primeira delas detectada no dia 14 de setembro de 2015 pelo grupo de colaboradores do LIGO. Desde então, outros observatórios, como o italiano Virgo e japonês KAGRA, se juntaram à busca por Ondas Gravitacionais.

Atualmente o LIGO é o maior observatório de Ondas Gravitacionais do mundo. Foi fundado em 1992 por Kip Thorne e Ronald Drever do Instituto de Tecnologia da Califórnia (Caltech) e Rainer Weiss da Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT), com início das atividades em 2002. A Fig. 5.13 mostra o layout do LIGO.

O LIGO consiste em dois braços de aproximadamente 4 km de comprimento e que formam um "L". Nesses braços ele opera dois detectores/sensores em sincronia, um em Livingston, Louisiana e outro na Reserva Nuclear Hanford, localizada perto de Richland, Washington. Em suma o LIGO é um grande interferômetro de Michelson isolado de interferências externas: seus espelhos e toda instrumentação de sensores são suspensos e seu

raio laser opera nos tubos de vácuo que “têm de 8 a 10 vezes menos átomos e moléculas do que o vácuo do espaço”. (LIGO, 2015).

Figura 5.13: Layout do observatório LIGO.

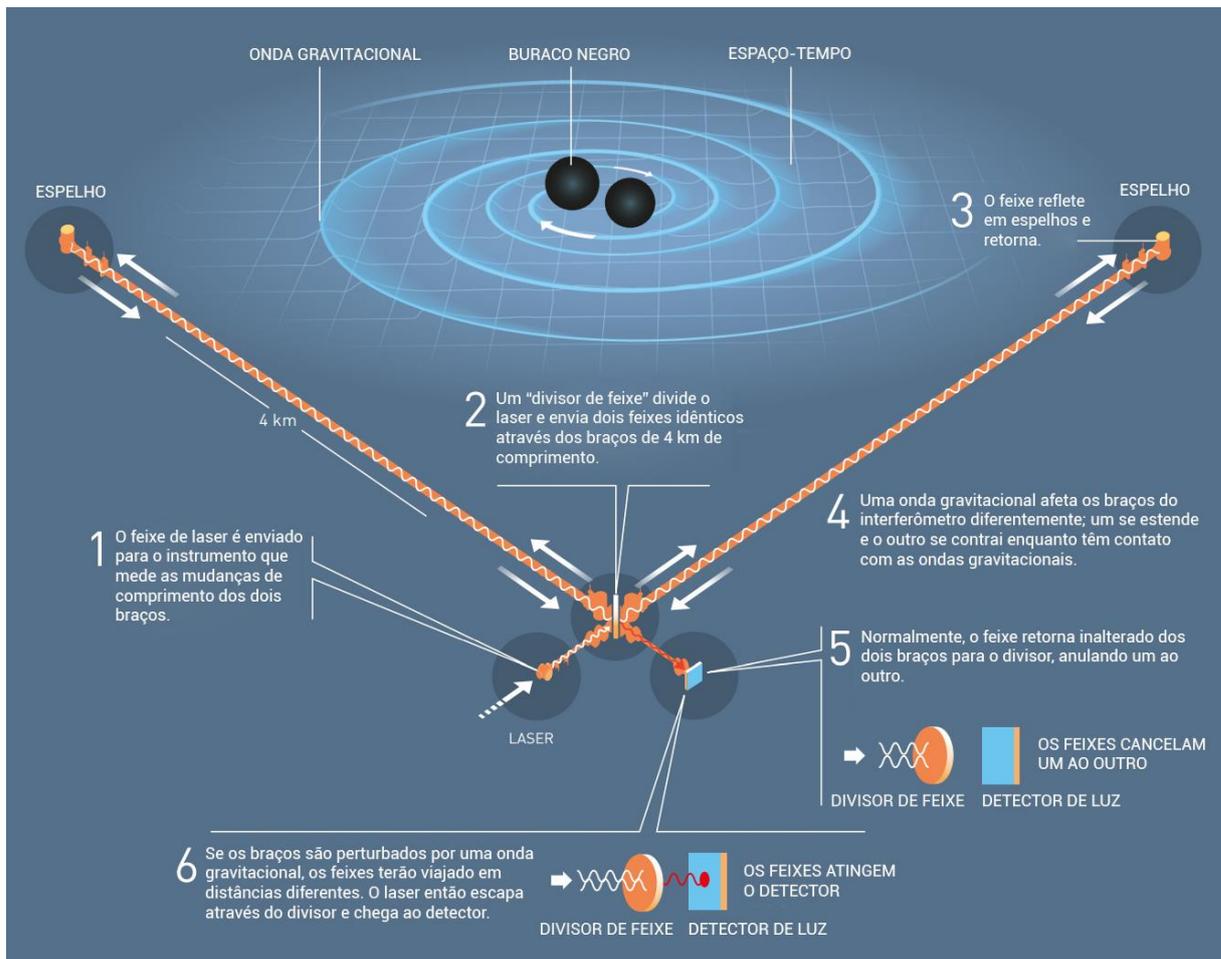


Fonte: Astronomy: Roen Kelly.

Como explica Sochi (2020, p. 373-374) e a equipe de colaboradores do LIGO, os sensores funcionam mediante o princípio de detectar variações na geometria do espaço-tempo em sua vizinhança causadas por Ondas Gravitacionais. Assim, quando estas ondas passam pela Terra, elas causam alterações na distância dos braços do interferômetro a laser, resultando em uma mudança mensurável no padrão de interferência. Essas alterações podem ser detectadas pelos sensores e armazenadas em um banco de dados. A Fig. 5.14 detalha o processo de funcionamento da interferometria laser do observatório LIGO.

Historicamente, os cientistas dependiam quase que exclusivamente da radiação eletromagnética (luz visível, raios-X, ondas de rádio, micro-ondas etc.) para estudar o universo. Alguns estão tentando usar também partículas subatômicas como os neutrinos. Cada um destes "mensageiros" de informação oferece uma visão diferente, mas complementar, do Universo.

Figura 5.13: Processos da interferometria laser do observatório LIGO.



Fonte: Johan Jarnestad / The Royal Swedish Academy of Sciences.

No entanto, as Ondas Gravitacionais não estão relacionadas com a radiação eletromagnética. São tão distintas da luz quanto a audição é da visão. Dessa forma, os detectores das Ondas Gravitacionais do LIGO abriram uma nova "janela" para um Universo inteiramente novo de observação ao qual não tínhamos acesso apenas estudando a radiação eletromagnética. Eventos como a colisão de buracos negros, por exemplo, são totalmente invisíveis para astrônomos da radiação eletromagnética. Mas, para o LIGO, eventos astronômicos altamente energéticos como esse são faróis no vasto mar cósmico, explica a equipe de colaboradores do LIGO em matéria publicada no site desse observatório.

Ainda mais importante, já que as Ondas Gravitacionais interagem fracamente com a matéria (contrariamente à radiação eletromagnética que pode ser absorvida, refletida, refratada ou curvada), elas transportam informações claras sobre suas origens, uma vez que estão livres

das distorções ou alterações sofridas pela radiação eletromagnética. Portanto, a detecção e análise dessas ondas permitem uma nova forma de "ver" o Universo e estudar objetos cósmicos extremamente massivos tão distantes que não podem ser vistos com telescópios convencionais. Além disso, a comprovação das Ondas Gravitacionais ajudará a testar e aperfeiçoar ainda mais a TRG de Einstein, o que permitirá obtermos mais informações sobre nosso Universo e sua história, bem como desencadear novas descobertas quanto a Ciência que conhecemos quanto também ao que ainda não conhecemos, abrindo novas áreas de pesquisa em Física, Astronomia e Astrofísica.

Em resumo, as Ondas Gravitacionais consistem em um fenômeno ondulatório previsto pela TRG, que a partir uma série de constructos da Física, considerando, também, alguns artifícios matemáticos, torna possível definir uma série de grandezas físicas, de forma coerente com os resultados de teorias físicas já consagradas, a partir das quais é possível explicar o comportamento gravitacional. Como todo fenômeno ondulatório, as Ondas Gravitacionais também são polarizadas, cujas são: polarização *plus* A_+ e polarização *cross* A_\times . Esses dois tipos de polarizações combinados em diferentes frequências e amplitude curvam o espaço-tempo, alongando e diminuindo ele em diferentes direções e intensidades à medida que a Onda Gravitacional passa. Vimos que essa curvatura pode ser explicada interpretando as soluções da métrica do espaço-tempo sobre um conjunto de partículas massivas livres. Portanto, prevista pela TRG de Einstein em 1915, as Ondas Gravitacionais, cuja comprovação ocorreu em 2015, é um fenômeno que surge de eventos astronômicos altamente energéticos, o que possibilita que viaje pelo universo na velocidade da luz. Por isso, essas ondas se constituem uma das maiores fontes de investigação científica na busca por novas descobertas que ajude a sociedade científica entender e realizar novas previsões acerca de outros eventos astronômicos bem como entender a própria história de surgimento do universo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Fazendo uma alusão ao propósito deste trabalho, que consistiu em conduzir uma pesquisa bibliográfica com a finalidade de compilar e evidenciar um conjunto de concepções que possam vir a propiciar a compreensão de um tema específico da FMC de forma mais detalhada, visando apoiar a formação de futuros professores de Física, julgamos que o resultado do presente trabalho de conclusão de curso pode ser considerado satisfatório.

Em virtude da complexidade do tema abordado, é possível afirmar que alguns aspectos foram tratados de forma superficial devido à grande quantidade de recursos necessários para uma compreensão mais profunda, em contraste com as limitações intrínsecas à estrutura deste tipo de trabalho. Entre as limitações encontradas, destacam-se a escassa disponibilidade de fontes com uma abordagem didática sobre o tema abordado, e a grande quantidade de tempo necessário à sua apropriação. Ainda assim, como o trabalho se destina a um público-alvo composto por professores e futuros professores de física, acreditamos que tal material possa ser de alguma valia, apesar de requerer algum empenho para sua devida compreensão.

É desejável que os leitores deste trabalho tenham a oportunidade de complementar as discussões realizadas aqui a partir de uma diversificação de fontes e/ou mediante o acompanhamento de profissionais que possam esclarecer eventuais lacunas de tópicos e/ou de explicações que tenham permanecido no texto. Neste sentido, podemos estabelecer como uma perspectiva futura deste trabalho a implementação de um minicurso sobre o referido tema.

Uma perspectiva adicional que se mostra de interesse e pode ser derivada deste estudo é a elaboração de uma sequência didática pelos docentes de física, com o objetivo de apresentar uma compreensão introdutória das Ondas Gravitacionais para os alunos. Neste âmbito, acreditamos que a assimilação do tema por meio deste trabalho pode contribuir para uma transposição didática na elaboração do referido material.

Finalmente, é importante destacar que a empreitada realizada na confecção deste estudo possibilitou uma aprendizagem extracurricular relevante acerca de um tema de suma importância no contexto da Física, além de ter conferido uma base essencial para uma posterior especialização em nível de mestrado nessa área da Física. Cumpre salientar que, por motivos alheios ao contexto em questão, tal vertente do conhecimento não se encontra devidamente integrada à formação habitual dos docentes dessa área da Ciência.

Para concluir, acrescentamos que o objeto de estudo das Ondas Gravitacionais é de recente descoberta, e, com o passar do tempo, sua relevância tende a se tornar mais relevante tanto para a comprovação de teorias e hipóteses no âmbito da Física, quanto para novas investigações acerca de temas conexos, cujos desdobramentos permitirão à Ciência ultrapassar o atual limiar de compreensão sobre a origem dos fenômenos cosmológicos de alta energia, a exemplo das Ondas Gravitacionais, bem como sobre o surgimento do próprio Universo.

REFERÊNCIAS

ANTON, Howard; Rorres, Chris. **Álgebra linear com aplicações**. Porto Alegre: Editora Bookman, 2012.

CARROLL, Sean. **Lecture Notes on General Relativity**. USA, Santa Barbara, CA: University of California, 1997.

CARROLL, Sean. **Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity**. USA, New York, NY: Pearson Education Limited, 2014.

CHENG, Ta-Pei. **Relativity, Gravitation and Cosmology: A Basic Introduction**. 2nd edition. USA, New York, NY: Oxford University Press, 2010.

COLLIER, Peter. **A Most Incomprehensible Thing**. Kindle edition, (v108). Published by Incomprehensible Books. Copyright Peter Collier 2012.

COLLIER, Peter. **A Most Incomprehensible Thing**. Kindle edition, (v127). Published by Incomprehensible Books. Copyright Peter Collier 2012, Revised edition 2019.

D'INVERNO, Ray; VICKERS, James. **Introducing Einstein's Relativity: A deeper understanding**. 2nd. ed. USA, New York, NY: Oxford University Press, 2022.

DAS, Anadijiban; DeBENEDICTIS, Andrew. **The General Theory of Relativity: A Mathematical Exposition**. USA, New York, NY: Springer, 2012.

DE OLIVEIRA, F. F.; VIANNA, D. M. e GERBASSI, R. S. **Física moderna no ensino médio: o que dizem os professores**. Revista Brasileira de Ensino de Física. 2007, v. 29, n. 3, pp. 447-454, 2007. Disponível em: ><https://doi.org/10.1590/S1806-11172007000300016>< Acesso em: out. 2022.

EIGENCHRIS. **Relativity: Gravitational Waves - How Gravitational Wave Affect Free Particles**. Ep. 109e. Intérprete: Igan Chris. Roteiro: Igan Chris. YouTube: Igan Chris, 2022. Disponível em: ><https://www.youtube.com/watch?v=ij73WfVUJ6c&t=924s><. Acesso em: jan. 2023.

EIGENCHRIS. **Relativity: Gravitational Waves - Linearized Gravity / Weak Gravity**. Ep. 109b. Intérprete: Igan Chris. Roteiro: Igan Chris. YouTube: Igan Chris, 2022. Disponível em: ><https://www.youtube.com/watch?v=CZoeBmrtJO0&t=517s><. Acesso em: jan. 2023.

EIGENCHRIS. **Relativity: Gravitational Waves - Transverse-Traceless Gauge (Plus and Cross Polarizations)**. Ep. 109d. Intérprete: Igan Chris. Roteiro: Igan Chris. YouTube: Igan Chris, 2022. Disponível em: ><https://www.youtube.com/watch?v=cmqAShpWDi8&t=697s><. Acesso em: jan. 2023.

EIGENCHRIS. **Relativity: Gravitational Waves - Wave Derivation (The Lorenz Gauge)**. Ep. 109c. Intérprete: Igan Chris. Roteiro: Igan Chris. YouTube: Igan Chris, 2022. Disponível em: ><https://www.youtube.com/watch?v=PDY7snRyjBg><. Acesso em: jan. 2023.

EIGENCHRIS. **Relativity: Gravitational Waves: Introduction (LIGO, Wave Equation)**. Ep. 109a. Intérprete: Igan Chris. Roteiro: Igan Chris. YouTube: Igan Chris, 2022. Disponível em: ><https://www.youtube.com/watch?v=ofi9VIlCOxI><. Acesso em: jan. 2023.

EIGENCHRIS. **Tensor Calculus: Geodesics and Christoffel Symbols (extrinsic geometry)**. Ep. 15. Intérprete: Igan Chris. Roteiro: Igan Chris. YouTube: Igan Chris, 2018.

Disponível em: > <https://www.youtube.com/watch?v=1CuTNveXJRc><. Acesso em: jan. 2023.

FEYNMAN, Richard P. **Lições de Física**. vol.1 – São Paulo, SP: Edita Bookman, 2008.

FEYNMAN, Richard P. **Lições de Física**. vol.2 – São Paulo, SP: Edita Bookman, 2008.

FLEISCH, DANIEL A. **A Student's Guide to Vectors and Tensors**. United Kingdom, Cambridge, England: Cambridge University Press, 2014.

FLEISCH, Daniel; KINNAMAN, Laura. **A Student's Guide to Waves**. Cambridge University Press, 2015.

GAZZINELLI, Ramayana. **Teoria da Relatividade Especial**. 2ª ed. – São Paulo, SP: Editora Blucher, 2009.

GRAY, Norman. **A Student's Guide to General Relativity**. USA, New York, NY: Cambridge University Press, 2019.

GRØN, Øyvind; HERVIK, Sigbjørn. **Einstein's General Theory of Relativity: With Modern Applications in Cosmology**. Version 9th. USA, New York, NY: Springer, 2004.

GUIDRY, Mike. **Modern General Relativity: Black Holes, Gravitational Waves, and Cosmology**. USA, New York, NY: The McGraw-Hill Companies, Inc. 2019.

HENDRY, Dr. Martin. **An Introduction to General Relativity, Gravitational Waves and Detection Principles**. Ukraine, Glasgow, University of Glasgow, 2007.

LAMBOURNE, Robert J. A. **Relativity, Gravitation and Cosmology**. USA, New York, NY: Cambridge University Press, 2010.

LIGO: Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory. **LIGO's Dual Detectors**. Twin Detectors. Sítio Digital: LIGO Caltech. Disponível em: ><https://www.ligo.caltech.edu/page/ligo-detectors?highlight=photo%20ligo><. Acesso em: fev. 2023.

LIMA, Elon Lages. **Cálculo Tensorial**. Rio de Janeiro, RJ: Editora IMPA, 2012.

MARTINS, Roberto de Andrade. **A Origem Histórica da Relatividade Especial**. São Paulo, São Paulo: LF Editorial, 2015.

McMAHON, David. **Relativity Demystified**. USA, New York, NY: The McGraw-Hill Companies, Inc. 2006.

MONTEIRO, M. A.; NARDI, R.; FILHO, J. B. B. **Física Moderna e Contemporânea no ensino médio e a formação de professores: desencontros com a ação comunicativa e a ação dialógica emancipatórias**. Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, v. 8, n. 1, p. 1-13, 2013. Disponível em: ><http://hdl.handle.net/11449/135134>< Acesso em: out. 2022.

PENTEADO, Marianna Loureiro. **As estruturas necessárias à Teoria da Relatividade Restrita: um estudo a partir da epistemologia genética**. Marília, SP, 2018. Disponível em: >https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/183649/penteado_ml_me_mar.pdf?sequence=3<. Acesso em: jan. 2022.

PEREIRA, Fernando de Candido. **Uma breve História da Física Moderna e Contemporânea**. Sítio Digital: Professare Revista, vol.4, n.3, 2015. Disponível em:

><https://periodicos.uniarp.edu.br/index.php/professare/article/view/734><. Acesso em: jan. 2022.

PIETROCOLA, M. **A matemática como estruturante do conhecimento físico**. Caderno Brasileiro do Ensino de Física, v.17, n.1, p.93-114, 2002.

POLITO, A. M. M. **A construção da estrutura conceitual da Física Clássica**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016.

RAMOS, Matheus Pinheiro. **Um estudo sobre Ondas Gravitacionais e radiação emitida por um pulsar binário**. Fortaleza, CE, 2016. Disponível em: >https://repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/32868/1/2016_tcc_mpramos.pdf<. Acesso em: nov. 2021.

RENTELN, Paul. **Manifolds, Tensors, and Forms: An Introduction for Mathematicians and Physicists**. United Kingdom, Cambridge, England: Cambridge University Press, 2014.

RESNICK, Robert. **Introdução à Relatividade Especial**. São Paulo – SP, Editora Polígono, [1968?].

SCHUTZ, Bernard F. **A First Course in General Relativity**. 2nd. ed. USA, New York, NY: The McGraw-Hill Companies, Inc. 2009.

SOARES, Domingos. **Espaço e espaço-tempo nas teorias relativistas**. Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG, Sítio Digital: Física. UFMG, 2013. Disponível em: ><http://lilith.fisica.ufmg.br/~dsoares/esptmp/esptmp.htm><. Acesso em: fev. 2022.

SOCHI, Taha. **General Relativity Simplified & Assessed**. Inglaterra, Londo, University College London, 2020.

APÊNDICE A – UMA BREVE JUSTIFICATIVA PARA ESTE APÊNDICE

Desde os princípios do que hoje denominamos de Ciência Moderna, temos como elementos norteadores para descrição de fenômenos no contexto da Física, a utilização da matemática acompanhada com aspectos de mensuração. Como o ato de medir pode ser considerado intrinsecamente matemático, podemos afirmar que o sucesso do paradigma representado pela mecânica clássica se deve, em grande parte, a este aspecto de se utilizar a matemática como estruturante das ideias, e/ou conceitos físicos, esclarecem os autores Pietrocola (2002, p. 93-114) e Polito (2016).

Nesta perspectiva, vários formalismos matemáticos têm se mostrado importantes para o mecanismo de estruturação de teorias físicas. No entanto, pelo fato de ainda estarmos muito vinculados ao paradigma da mecânica clássica, quando nos inserimos no contexto do Ensino de Física, o formalismo matemático mais conhecido e utilizado pelos professores desta área se limita à Álgebra Vetorial.

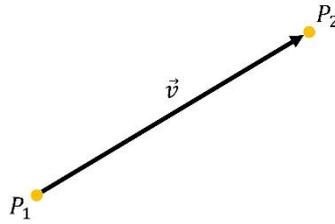
Deste modo, para lidarmos com outras teorias Físicas de âmbitos mais recentes, se torna necessário que nos apropriemos de outros formalismos matemáticos que possibilitem a estruturação de novas ideias. Neste contexto, apresentaremos aqui os aspectos introdutórios sobre o formalismo da Álgebra Tensorial, que se tornou fundamental para Física Moderna e Contemporânea.

TENSORES

Para assegurarmos uma compreensão significativa sobre tensores, vamos inicialmente abordar uma rápida revisão sobre vetores!

Os vetores são objetos matemáticos, geralmente apresentados no contexto da Geometria Analítica, que possuem magnitude (intensidade ou módulo), direção e sentido bem definidos. Geometricamente o vetor é representado por um segmento de reta orientado, uma reta que se prolonga do ponto P_1 (origem da seta) ao ponto P_2 (final da seta) num espaço arbitrário, e uma “seta” na sua extremidade final, como representa o vetor \vec{v} na Fig. T.1. O comprimento dessa “flecha” (vetor) representa a magnitude do vetor, a inclinação da reta suporte (“corpo” do vetor) indica a direção e a “seta” indica o sentido.

Figura T.1: Representação de um vetor (\vec{v}) no plano euclidiano cartesiano bidimensional.



Fonte: Produção própria.

Num contexto mais rigoroso, o vetor pode ser apresentado como um ente matemático pertencente a um conjunto chamado de Espaço Vetorial (V).

Acompanhando o raciocínio de Lima (2012, p. 1-6), seja o conjunto V não vazio sobre o conjunto dos reais (\mathbb{R}) equipado com as operações de soma e multiplicação por escalar. Dizemos que V se constitui um conjunto/espço vetorial real se, e somente se, V satisfazer os seguintes axiomas:

- (a) Fechamento da adição de vetores: existe uma operação de adição, entre dois elementos $\vec{u}, \vec{v} \in V$, cujo resultado é um elemento $\vec{u} + \vec{v} \in V$.

Para todos os elementos $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$, a adição satisfaz:

(a1) Comutatividade: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$.

(a2) Associatividade: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}), \forall \vec{u}, \vec{v}, w \in V$.

(a3) Elemento neutro: existe o vetor $\vec{0} \in V$ que satisfaz $\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}, \forall \vec{0}, \vec{v} \in V$.

(a4) Inverso aditivo: $\forall \vec{v} \in V$, existe um vetor inverso $\vec{v} = -\vec{v} \in V$, denominado elemento oposto de \vec{v} , tal que $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$.

- (m) Fechamento da multiplicação por escalar: existe uma operação de multiplicação, entre um elemento $\vec{v} \in V$ e $a \in \mathbb{R}$ escalar, cujo resultado é um elemento $a\vec{v} \in V$.

Para todos os elementos $\vec{u}, \vec{v} \in V$ e $a, b \in \mathbb{R}$, a multiplicação satisfaz:

(m1) Associatividade da multiplicação por escalar: $a(b\vec{v}) = (ab)\vec{v}, \forall \vec{v} \in V$ e $a, b \in \mathbb{R}$.

(m2) Distributiva da soma de escalares em relação a um vetor: $(a + b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}, \forall \vec{v} \in V$ e $a, b \in \mathbb{R}$.

(m3) Distributiva de um escalar em relação à soma de vetores: $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$,
 $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$ e $a \in \mathbb{R}$.

(m4) Vale que $1\vec{v} = \vec{v}$, ou seja, a unidade dos escalares não altera os vetores de V .

Portanto, os elementos de V são chamados de vetores.

Dentro do espaço vetorial podemos destacar um subconjunto de vetores que desempenham uma função muito importante, a base vetorial do espaço vetorial.

Seja $B = \{\vec{v}^1, \vec{v}^2, \vec{v}^3, \dots, \vec{v}^n\}$ um conjunto não vazio de vetores de V no espaço \mathbb{R}^n . Logo, B será uma base de V se, e somente se:

(i) $\{\vec{v}^1, \vec{v}^2, \vec{v}^3, \dots, \vec{v}^n\}$ é linearmente independente.

(ii) $[\vec{v}^1, \vec{v}^2, \vec{v}^3, \dots, \vec{v}^n]$ é gerador de V .

Obs.: por convenção, os colchetes em (ii) equivale a notação de conjunto gerador.

De acordo com Anton (2012, p. 190-192), dizemos que os elementos do conjunto $B = \{\vec{v}^1, \vec{v}^2, \vec{v}^3, \dots, \vec{v}^n\} \in \mathbb{R}^n$ são vetores e são Linearmente Independentes (L.I.) se, e somente se, nenhum deles puder ser escrito como combinação linear dos demais, então a equação vetorial

$$a_1\vec{v}^1 + a_2\vec{v}^2 + a_3\vec{v}^3 + \dots + a_n\vec{v}^n = \sum_{i=1}^n a_i\vec{v}^i = \vec{0} \quad (\text{T1})$$

terá uma única solução, pelo menos, onde $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n = 0$. Dizemos que essa é a solução trivial da eq. (T1). Se essa for a única solução, então os vetores de B são L.I. Se existem outras soluções, então os vetores de B são Linearmente Dependentes (L.D.).

Se $B = \{\vec{v}^1, \vec{v}^2, \vec{v}^3, \dots, \vec{v}^n\}$ é L.I. enquanto subconjunto de V , então B é gerador de V .

A base vetorial mais básica de V é o conjunto dos vetores unitários:

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n \quad (\text{T2})$$

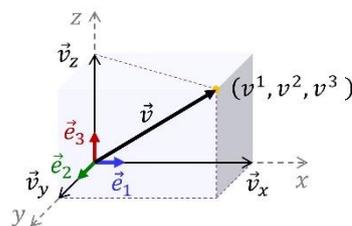
Um vetor unitário tem módulo 1, e não tem dimensão nem unidade de medida. Sua principal função é especificar uma orientação, ou seja, indicar o sentido positivo de cada eixo dos sistemas de coordenadas utilizados para descrição dos fenômenos físicos.

Segundo Anton (2012, p. 163-165), no sistema de coordenadas cartesianas tridimensional os vetores de base são usualmente representados pelas letras $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$, chamados

de versores.

No sistema de coordenada cartesianas, segundo Anton (2012, p. 122-123) e Fleisch (2012, p. 7-10), seja um vetor (\vec{v}) qualquer do espaço vetorial V em \mathbb{R}^3 posicionado de forma que seu ponto inicial coincida com a origem do sistema, então \vec{v} é determinado pelas coordenadas de seu ponto final, como mostra a figura a seguir.

Figura T.2: Vetor (\vec{v}) no sistema de coordenadas cartesianas tridimensional.



Fonte: Produção própria.

O produto escalar de uma coordenada (v^1, v^2, v^3) com seu respectivo vetor de base ($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) resulta num vetor chamado componente de \vec{v} . Nos sistema de coordenadas cartesianas tridimensional temos os vetores componentes:

$$(v^1, v^2, v^3)(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = (\vec{v}_x, \vec{v}_y, \vec{v}_z) \quad (\text{T3})$$

A soma dos n vetores componentes resulta no vetor \vec{v} de n dimensão:

$$\vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z = \vec{v} \quad (\text{T4})$$

De forma geral, dado um sistema de coordenadas em \mathbb{R}^n e seus vetores de base:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n \xi^i \vec{e}_i \quad (\text{T5})$$

onde ξ^i são as coordenadas de \vec{v} no sistema de coordenadas escolhido.

De acordo com Fleisch (2012, p. 122-124) e Lima (2012, p. 15-17), para facilitar os cálculos e/ou a visualização físico-matemática de um problema abordado a partir de um determinado referencial, às vezes é necessário realizar uma mudança de coordenadas vetorial pré-fixada. Para isso, se torna mais viável denotar os eixos do sistema de coordenadas por

$(x^1, x^2, x^3, \dots, x^n)$ ou $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ e os componentes do vetor (\vec{v}) por $(A^1, A^2, A^3, \dots, A^n)$ ou $(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n)$. Neste sentido, algumas quantidades se transformam como contravariante e outras quantidades se transformam como covariante, respectivamente definido:

$$A^i = \sum_{j=1}^n a_{ij} A^j \quad \text{e} \quad A_i = \sum_{j=1}^n a^{ij} A_j \quad (\text{T6})$$

onde A_i são os componentes do vetor \vec{v} nas coordenadas primárias, A^i são os componentes de \vec{v} nas coordenadas pré-fixada, a_{ij} são os elementos de uma matriz de passagem que envolve os vetores de base (que permanecem inalterados, igualmente \vec{v}).

Desta forma, temos uma notação de índice específica que é expressa nos vetores para indicar a forma como seus componentes vetoriais se transformam numa mudança de coordenadas. Como mostra a eq. (T6), os componentes dos vetores contravariantes são denotados por um índice sobrescrito (A^j), e os componentes dos vetores covariantes são denotados por um índice subscrito (A_j), de modo que, os componentes contravariantes se transformam de forma inversa aos componentes do tipo covariante³⁷.

Além do vetor há um outro ente matemático importante para necessário à nossa construção do conhecimento sobre tensores, as formas lineares. No entanto, para determinados problemas abordados pela Física é mais conveniente, ao invés de trabalhar com formas lineares, definir outro tipo de vetor a partir dos vetores do espaço vetorial V , os vetores duais. Eles fazem parte de um novo espaço vetorial denominado espaço vetorial dual, que surge da aplicação direta de uma função linear f sobre os elementos de V no espaço real \mathbb{R} .

Prosseguindo com Lima (2012, p. 17-23), seja $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ uma função linear, com quantidades escalares, definida no espaço vetorial V . Se, e somente se, $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz as propriedades matemáticas:

- (a) $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}), \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V.$
- (b) $f(a\vec{v}) = af(\vec{v}), \quad \forall \vec{v} \in V \text{ e } a \in \mathbb{R}.$

então $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ é denominado funcional linear ou forma linear sobre V . O conjunto desses funcionais lineares (sobre V) é denominado espaço dual, denotado por V^* .

³⁷ Uma leitura mais profunda sobre transformações de quantidades contravariantes e covariantes pode ser encontrada, se assim o leitor desejar, no livro *A Student's Guide to Vectors and Tensors*, capítulo 4, do autor Daniel Fleisch (2012).

Dados $f, g \in V^*$ e $a \in \mathbb{R}$, definimos:

$$(f + g): V \rightarrow \mathbb{R}; \quad \forall \vec{v} \rightarrow f(\vec{v}) + g(\vec{v}) \quad (\text{T7})$$

$$a(f + g): V \rightarrow \mathbb{R}; \quad \forall \vec{v} \rightarrow af(\vec{v}) + ag(\vec{v}) \quad (\text{T8})$$

Essas operações de soma e produto por escalar, eq. (T7) e eq. (T8), definem V^* como um espaço vetorial, ou seja, um espaço dual de V .

De acordo com Renteln (204, p. 8-14), por indução para n elementos numa combinação linear, podemos generalizar a eq. (T7) e eq. (T8):

$$f\left(\sum_{i=1}^n a^i \vec{v}_i\right) = \sum_{i=1}^n a^i f(\vec{v}_i) \quad (\text{T9})$$

assim definido $\forall \vec{v} \in V^*$ e $a \in \mathbb{R}$.

Sabemos também que o funcional linear é definido unicamente pelos valores sobre os elementos da base vetorial $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n\}$ de V . Assim, para cada elemento \vec{e}_i dessa base vetorial associamos um funcional linear f^i que é determinado pelo delta de Kronecker (δ_{ij}), quando conhecemos o índice i e fazemos variar o índice $j = 1, 2, 3, \dots, n$:

$$\delta_{ij} = f^i(\vec{e}_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (\text{T10})$$

Como a eq. (T9) representa uma combinação linear que obedece a equação vetorial

$$a^1 f(\vec{v}_1) + a^2 f(\vec{v}_2) + a^3 f(\vec{v}_3) + \dots + a^n f(\vec{v}_n) = \sum_{i=1}^n a^i f(\vec{v}_i) = \vec{0} \quad (\text{T11})$$

com uma única solução trivial, pelo menos, a saber $a^1 = a^2 = a^3 = \dots = a^n = 0$, então a base vetorial dual de V é um conjunto L.I. e, portanto, é gerador de V^* . A base vetorial dual é o conjunto dos funcionais lineares:

$$B^* = \{f^1, f^2, f^3, \dots, f^n\} \quad (\text{T12})$$

Deste modo, é perceptível que cada elemento do espaço dual V^* corresponde a um único elemento do espaço vetorial V , e a cada base vetorial $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n\}$ de V corresponde uma base dual $B^* = \{f^1, f^2, f^3, \dots, f^n\}$. Como os elementos desse novo espaço vetorial V^* surgem de uma transformação dada por uma função linear f que é bijetora, dizemos que o conjunto dos funcionais lineares ($B^* = \{f^1, f^2, f^3, \dots, f^n\}$) é um isomorfismo de V no corpo

dos \mathbb{R} . Ou seja, os elementos da base vetorial são formas lineares com propriedades isomorfas aos covetores. Em outras palavras, se dois espaços vetoriais (V e V^*) são isomorfos um do outro significa que eles possuem propriedades idênticas.

Renteln (2014, p. 30-33) descreve que a partir dos elementos de V e de V^* é possível construir um novo objeto matemático que é diferente dos vetores e que não faz parte desses espaços vetoriais. Mas para definir esse objeto é necessário começar definindo um novo tipo de produto, chamado produto tensorial, denotado pelo símbolo \otimes .

Em Lima (2012 p. 51-57), sejam V e V^* dois espaços vetoriais de dimensão m e n , respectivamente. Será chamado produto tensorial de V por V^* (espaço vetorial e espaço dual, respectivamente) a todo par (Z, ϕ) que satisfaça os seguintes axiomas:

- (1) Z é um espaço vetorial e $\phi: V \times V^* \rightarrow Z$ é uma aplicação bilinear de V, V^* em Z .
- (2) Dimensão de $Z = m \cdot n$ (dimensão desses dois espaços vetoriais).
- (3) $\phi(V \times V^*)$ gera Z , ou seja, todo de Z pode ser obtido como uma combinação linear dos elementos de $\phi(V \times V^*)$.

Segundo Fleisch (2012, p. 132-134) e Renteln (2014, p. 30), satisfeitas todas essas propriedades matemáticas, o produto tensorial (que é não comutativo) pode ser aplicado entre elementos da base vetorial de V e base vetorial dual V^* , cujo resultado é um tensor de ordem n (objeto matemático a que referimos anteriormente), por exemplo:

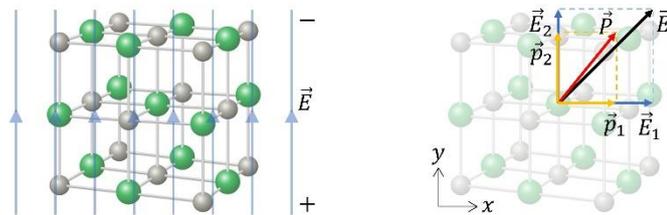
$$T_j^i \vec{e}_i \otimes \vec{e}^j \quad (\text{T13})$$

Na eq. (T13) T_j^i é forma de notação para tensor. Os elementos \vec{e}_i e \vec{e}^j são bases vetoriais covariante e contravariante, respectivamente. Os elementos i e j são índices contravariantes e covariantes do tensor, respectivamente, que se relacionam por lei de transformação inversa com os índices das bases vetoriais. O número de bases vetoriais no produto tensorial é também um indicativo da ordem (N) do tensor. Ou seja, os dois índices ($\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix}$) na eq. (T13) indicam um tensor de segunda ordem. O número de componentes do tensor, pode ser determinado pelo número de dimensões M elevado a quantidade de índices do tensor. Por exemplo, se o produto tensorial da eq. (T13) é desenvolvido com relação ao espaço quadri-dimensional, então $M^N = 4^2 = 16$ é o número de componentes desse tensor.

Para realçar/exemplificar a aplicabilidade de tensores na Física, a matemática de

tensores é particularmente útil para descrever propriedades de muitas substâncias em seus estados físicos da matéria. De acordo com Feynman (2008, c. 30-31), as propriedades das substâncias cristalinas, por exemplo, são distintas em diferentes direções, uma propriedade anisotrópica da matéria. Desta forma, a variação do momento de dipolo induzido na direção do campo elétrico aplicado a um sólido cristalino é apenas um exemplo, aquele que usaremos como exemplo de tensor para este momento. Na Fig. T.3 da esquerda, o conjunto de esferas em cores representa a estrutura atômica de um sólido cristalino e as linhas azuis na vertical o campo elétrico uniforme (\vec{E}).

Figura T.3: Dipolo elétrico induzido as partículas de um sólido por campo elétrico uniforme.



Fonte: Adaptada do Google Imagens.

Suponhamos que o sólido imerso no campo elétrico (Fig. T.3 da esquerda) seja um cristal em particular e vamos escolher uma única partícula, a esfera central da estrutura que representa o sólido, para descrever o comportamento orientado do momento de dipolo induzido, conforme ilustrado na Fig. T.3 da direita. Observe que um campo elétrico \vec{E}_1 , aplicado na direção de x , ou \vec{E}_2 (ambos de mesma intensidade), aplicado na direção de y , produz uma polarização \vec{P}_1 na direção x ou \vec{P}_2 na direção de y , respectivamente. Perceba que ambas as polarizações são diferentes. Mas um campo elétrico \vec{E} como superposição desses campos ao longo de x e y , de modo que a polarização resultante \vec{P} seja a soma de \vec{P}_1 e \vec{P}_2 , não terá mais a mesma direção do campo elétrico, como representado pelos vetores \vec{E} e \vec{P} na Fig. T.3 da direita. Quando o campo elétrico é aplicado com certa inclinação entre x e y , as cargas movem-se mais para cima do que para o lado. “Os deslocamentos não ocorrem na direção da força (elétrica) externa porque há forças internas elásticas assimétricas. [...], mas para qualquer campo \vec{E} a magnitude de \vec{P} é ainda proporcional à magnitude de \vec{E} ”. (FEYNMAN, 2008, c. 31).

Podemos agora tratar a polarização da partícula para um caso mais geral, no qual um

campo elétrico (\vec{E}) numa direção arbitrária em x , y e z produzirá \vec{P} por componentes em x , y e z com \vec{E} na direção $x \propto \vec{E}_x$, \vec{E} na direção $y \propto \vec{E}_y$, \vec{E} na direção $z \propto \vec{E}_z$.

Podemos calcular as componentes de \vec{E} e \vec{P} a partir da expressão da polarização:

$$|\vec{P}| = \alpha \varepsilon_0 |\vec{E}| \quad (\text{T14})$$

(onde α é a constante de proporcionalidade que relaciona a direção do campo elétrico e o momento de dipolo induzido por unidade de volume, ε_0 é a constante de permissividade elétrica do sólido). Logo, se \vec{E} tem componentes ao longo de x , y e z teremos que as componentes resultantes de \vec{P} serão dadas pela soma das contribuições em x , y e z :

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad (\text{T15})$$

Sobre a eq. (T15), nas quantidades α_{xx} , α_{xy} , α_{xz} , \dots , α_{zz} a primeira letra subscrita informa a direção e o sentido das componentes de \vec{P} , a segunda letra informa a direção e o sentido das componentes de \vec{E} . Segundo Feynman, o comportamento dielétrico do cristal, tomado como exemplo, é completamente descrito por essas quantidades (α_{xx} , α_{xy} , α_{xz} , \dots , α_{zz}), que podemos denotar por α_{ij} , onde os índices i e j denotam cada x , y e z . O conjunto desses nove coeficientes α_{ij} é chamado tensor, neste caso o tensor de polarizabilidade³⁸.

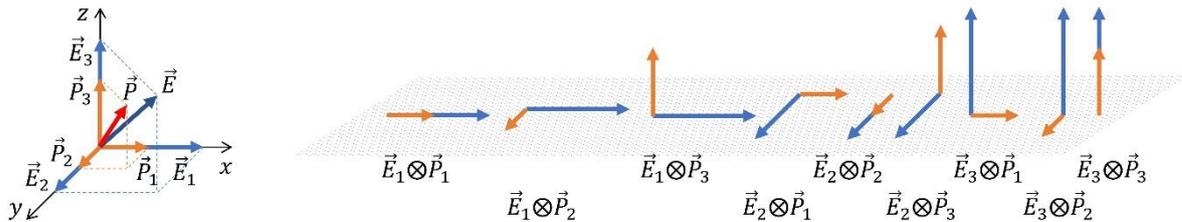
No entanto, essas componentes (α_{xx} , α_{xy} , α_{xz} , \dots , α_{zz}) formam um objeto geométrico que precisamos saber onde estão as bases tensoriais vinculadas a cada uma delas. Para isso, vamos supor \vec{E} como um vetor denotado por \vec{E}_1 , \vec{E}_2 e \vec{E}_3 dispostos em x , y e z , respectivamente, desempenhando o papel de uma base vetorial. Processo análogo será feito para \vec{P} , que será denotado por \vec{P}_1 , \vec{P}_2 e \vec{P}_3 também dispostos em x , y e z , respectivamente, desempenhando o papel de uma outra base vetorial, conforme ilustra a Fig. T.4 da esquerda, próxima página.

De acordo com Renteln (2014, p. 30-33), podemos aplicar o produto tensorial \otimes a esses vetores campo elétrico e momento linear. Logo, do produto tensorial de cada \vec{E}_1 , \vec{E}_2 , \vec{E}_3 com cada \vec{P}_1 , \vec{P}_2 , \vec{P}_3 obteremos os nove componentes geométricos descritos matematicamente na eq. (T15), conforme ilustrado na Fig. T.4 da direita, próxima página. Cada componente do tensor

³⁸ Uma leitura mais profunda sobre tensor de polarizabilidade pode ser encontrada, se assim o leitor desejar, no livro Lições de Física, volume II, capítulo 31, do autor Richard P. Feynman (2008).

possui informações em diferentes direções. Mas esses novos elementos geométricos não pertencem ao espaço vetorial V . Essa coleção de elementos formam um novo espaço constituído de objetos matemáticos que é ainda mais geral e mais complexo que o espaço vetorial V .

Figura T.4: Bases do tensor de polarizabilidade.



Fonte: Produção própria.

Para os autores, o tensor é um objeto matemático que combina vetores e vetores duais (também chamados covetores) através do produto tensorial, que respeita a invariância aos observadores nos diferentes sistemas de coordenadas e referenciais inerciais, e por possuir um número de componentes cada vez maior quanto mais elevada se torna a ordem do tensor há também mais possibilidades desse novo elemento geométrico reunir em si um maior número de informações, as quais permanecem matematicamente contidas nas componentes do tensor que, por sua vez, tais componentes recaem em diversas grandezas físicas que estão relacionadas ao fenômeno abordado naquele estudo.

Existem também outros tensores que, semelhante a este que acabamos de definir, descrevem o comportamento de outras grandezas físicas, como o tensor de tensão, tensor de inércia, tensor de permissividade elétrica, tensor de permeabilidade magnética, tensor de quadripolo elétrico etc.

Existe uma outra forma de tensor, um tensor fundamental, que é muito importante para descrição da geometria do espaço coordenado por qualquer tipo de sistema de coordenadas, este objeto matemático é o tensor métrico.

Seguindo raciocínio de Schutz (2009, p. 56), considere o quadrado de um elemento de deslocamento de comprimento infinitesimal $d\vec{s}$ dado num espaço arbitrário:

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} \quad (\text{T16})$$

Podemos escrever cada vetor $d\vec{r}$ na eq. (T16) como:

$$d\vec{r} = \vec{e}_i dx^i \quad (\text{T17})$$

Substituindo a eq. (T17) na eq. (T16) e usando índices diferentes para diferenciar o produto escalar entre as duas bases, teremos:

$$ds^2 = \vec{e}_i dx^i \cdot \vec{e}_j dx^j = (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) dx^i dx^j \quad (\text{T18})$$

Generalizando a eq. (T18), tomando $i = \mu$ e $j = \nu$, teremos:

$$dS^2 = \vec{g} = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu \quad (\text{T19})$$

onde \vec{g} é o tensor métrico e $g_{\mu\nu}$ é a componente métrica desse tensor.

O inverso da eq. (T19), segundo McMahon (2006, p. 37), é definido através da relação

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\kappa} = \delta_\mu^\kappa \quad (\text{T20})$$

onde δ_μ^κ é a função delta de Kronecker. Quando a métrica é diagonal, todos os componentes $g_{\mu\nu} = 0$ quando $\mu \neq \nu$. Então, pela eq. (T20), escrevemos o inverso da métrica.

O tensor métrico na eq. (T19) foi definido a partir de vetores de base contravariante. Poderíamos também definir a partir dos vetores de base covariante, que resultaria:

Ainda com relação à eq. (T19), os índices $\mu\nu$ estão repetidos e, por notação de Einstein, isso denota uma soma. Desenvolvendo essa soma obteremos todas as componentes do tensor métrico, que, por definição, se denota por uma matriz $g_{\mu\nu}$ com μ linhas e ν colunas:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \cdots & g_{mn} \end{bmatrix} \quad (\text{T21})$$

Os índices na eq. (T21) são uma representatividade dos vetores de base de um sistema de coordenadas em um espaço com n dimensão. Para essa equação em um sistema de coordenadas cartesiano quadri-dimensional, a métrica do $g_{\mu\nu}$ será:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \quad (\text{T22})$$

Do ponto de vista geométrico, a métrica do tensor é uma grandeza fundamental que

permite descrever todo ente matemático relacionado à geometria do espaço, como medir comprimentos, medir ângulos etc.

Considere o vetor $\vec{A} = \vec{e}_i A^i$. O comprimento desse vetor será calculado como:

$$|\vec{A}| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} = \sqrt{\vec{e}_i A^i \cdot \vec{e}_j A^j} \quad (\text{T23})$$

Podemos evidenciar as bases vetoriais na eq. (T23), e teremos:

$$|\vec{A}| = \sqrt{(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) A^i A^j} \quad (\text{T24})$$

Já conhecemos o termo $(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j)$ na eq. (T24). É o tensor métrico! Generalizando, teremos:

$$|\vec{A}| = \sqrt{g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu} \quad (\text{T25})$$

Considere agora os vetores $\vec{A} = \vec{e}_i A^i$ e $\vec{B} = \vec{e}_j B^j$. Podemos medir o ângulo entre eles fazendo:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(\theta) \quad (\text{T26})$$

Mas, como queremos encontrar o $\cos(\theta)$ na eq. (T26), teremos que:

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|} = \frac{\sqrt{(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) A^i B^j}}{\sqrt{(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) A^i A^j} \sqrt{(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) B^i B^j}} \quad (\text{T27})$$

Na eq. (T27) também surge o tensor métrico $(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j)$. Generalizando, teremos que:

$$\cos(\theta) = \frac{\sqrt{g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu}}{\sqrt{g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu} \sqrt{g_{\mu\nu} B^\mu B^\nu}} \quad (\text{T28})$$

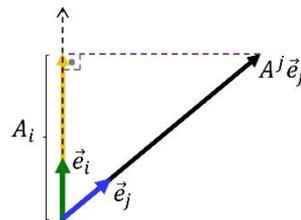
A eq. (T25) e a eq. (T28) comprovam matematicamente que os cálculos de comprimento e ângulo, num determinado espaço, envolve a métrica do espaço.

Uma outra operação matemática que também requer o conhecimento sobre o tensor métrico, é o levantamento e abaixamento de índice no tensor. Para isso, considere o tensor métrico $g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$, e que as origens dos vetores de base coincidem e eles formam um ângulo agudo entre si. Considere também o produto do tensor métrico com uma componente vetorial:

$$g_{ij}A^j = A_i \quad (\text{T29})$$

Por definição, o produto da eq. (T29) é geometricamente representado por uma projeção perpendicular de uma componente do tensor métrico sobre o eixo do outro vetor de base desse tensor, dando origem a uma componente covariante vinculada a ele. A Fig. T.5 ilustra geometricamente esse processo, em que a componente em amarelo, identificada por A_i , é o resultado do produto $A^j \vec{e}_j$ projetado sobre \vec{e}_i .

Figura T.5: Produto entre tensor métrico e componente vetorial.



Fonte: Produção própria.

Em essência, essa operação vai utilizar o tensor métrico para obter a componente de um tensor na direção de um dos vetores do elemento de tensor métrico, o qual aponta numa direção convenientemente específica.

Considere a componente tensorial T_l^{jk} . Na prática, a operação de levantamento ou abaixamento de índice será:

$$g^{il}T_l^{jk} \quad (\text{T30})$$

onde o índice covariante l em T_l^{jk} será levantado, à posição de contravariante, e então os dois índices l , um em T_l^{jk} e o outro em g^{il} , serão substituídos pelo índice i em g^{il} , e serão denotados apenas por um único índice i :

$$g^{il}T_l^{jk} = T^{ijk} \quad (\text{T31})$$

Não somente essas, também existem outras operações matemáticas relacionadas à geometria do espaço e que também requerem conhecer sua métrica para realizar aplicações do tensor métrico e chegar a resultados satisfatórios relacionados à descrição do fenômeno físico.

APÊNDICE B – UMA BREVE JUSTIFICATIVA PARA ESTE APÊNDICE

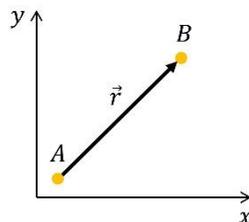
No contexto das Ondas Gravitacionais, que são ondulações no espaço-tempo causadas por uma certa distribuição de massas e energia em movimento no espaço-tempo, a equação da geodésica é essencial para a descrição de como essas ondas se propagam no universo.

Sendo assim, o objetivo deste apêndice é proporcionar ao leitor um conhecimento mais aprofundado acerca da Equação da Geodésica, uma importante aplicação matemática na TRG utilizada para descrever o movimento de partículas massivas e até mesmo da luz no espaço-tempo curvo. Por essa razão, a relevância deste apêndice reside na sua contribuição para a descoberta de soluções da Equação de Onda que possam ser solução às Ondas Gravitacionais.

EQUAÇÃO DA GEODÉSICA

Considerando dois pontos (A e B), podemos calcular a menor distância entre eles em um espaço plano simplesmente encontrando um vetor posição \vec{r} que conecte esses dois pontos, como mostra a Fig. G.1 a seguir. Porém, quando lidamos com espaços curvos, o processo é diferente. Precisamos usar a geodésica, que é basicamente o caminho mais "reto" possível entre dois pontos em um espaço curvo e que minimiza a distância entre eles.

Figura G.1: Menor distância entre dois pontos (A , B) no espaço plano.



Fonte: Produção própria.

Em um espaço plano, representado pelo sistema de coordenadas cartesiano tridimensional, por exemplo, podemos determinar se um caminho entre dois pontos é curvo ou não observando a aceleração de uma partícula massiva que se move ao longo desse caminho.

Se a velocidade da partícula for constante, a aceleração será nula e o espaço é plano. Caso contrário, se a aceleração não for nula, temos um caminho curvo.

No caso de um espaço curvo, a curva mais "reta" possível é aquela em que um objeto se desloca ao longo dela com aceleração tangencial nula. Dessa forma, acompanhando o raciocínio de Schutz (2009, p. 156-157), Cheng (2010, p. 86-88) e de acordo com Chris (2022, ep. 15), sendo λ o parâmetro da curva da superfície analisada, a equação da aceleração da partícula massiva, dada por

$$\frac{d^2\vec{r}}{d\lambda^2} = \underbrace{\left(\frac{d^2\vec{r}}{d\lambda^2}\right)}_{normal} + \underbrace{\left(\frac{d^2\vec{r}}{d\lambda^2}\right)}_{tangencial}, \quad (G.1)$$

deve ter a segunda parcela do segundo termo na eq. (G.1) sendo nula, pois representa a aceleração tangencial à curva λ . Podemos usar essa condição para determinar equações que descrevam curvas com essa característica, ou seja, equações da geodésica.

Podemos expandir a eq. (G.1) em termos de variáveis u e v , para denotar a aceleração:

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{d\vec{r}}{d\lambda} \right) = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{du}{d\lambda} \frac{\partial\vec{r}}{\partial u} + \frac{dv}{d\lambda} \frac{\partial\vec{r}}{\partial v} \right),$$

e após desenvolver a regra do produto, teremos:

$$\frac{d^2\vec{r}}{d\lambda^2} = \frac{d^2u}{d\lambda^2} \frac{\partial\vec{r}}{\partial u} + \frac{du}{d\lambda} \left(\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial\vec{r}}{\partial u} \right) + \frac{d^2v}{d\lambda^2} \frac{\partial\vec{r}}{\partial v} + \frac{dv}{d\lambda} \left(\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial\vec{r}}{\partial v} \right). \quad (G.2)$$

A eq. (G.2) apresenta alguns termos cujas soluções não são simples, já que dependem de derivadas de u e dos vetores de base em relação à curva parametrizada λ . Por essa razão, como explica Chris (2022, ep. 15), podemos simplificar o problema considerando o operador derivada em relação a λ como uma combinação linear dos operadores u e v :

$$\frac{d}{d\lambda} = \frac{du}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{dv}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial v}. \quad (G.3)$$

Substituindo a eq. (G.3) na eq. (G.2) e resolvendo as derivadas, obtemos:

$$\frac{d^2\vec{r}}{d\lambda^2} = \frac{d^2u}{d\lambda^2} \frac{\partial\vec{r}}{\partial u} + \frac{du}{d\lambda} \left(\frac{du}{d\lambda} \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial u^2} + \frac{dv}{d\lambda} \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial v\partial u} \right) + \frac{d^2v}{d\lambda^2} \frac{\partial\vec{r}}{\partial v} + \frac{dv}{d\lambda} \left(\frac{du}{d\lambda} \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial u\partial v} + \frac{dv}{d\lambda} \frac{\partial^2\vec{r}}{v^2} \right). \quad (G.4)$$

Agora dispomos de duas equações que envolvem derivadas de primeira e segunda ordem de \vec{r} . Podemos afirmar que o termo da derivada de primeira ordem é tangente à curva,

enquanto os termos com derivadas de segunda ordem podem ter componentes tanto tangenciais quanto normais à superfície que contém a curva parametrizada λ .

Reorganizando a eq. (G.4), ficará:

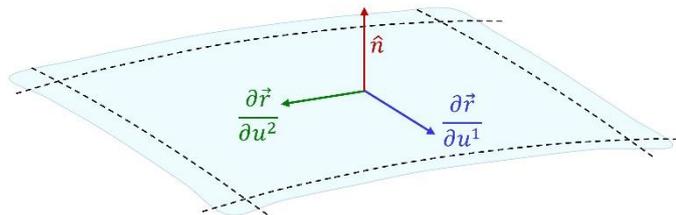
$$\frac{d^2\vec{r}}{d\lambda^2} = \frac{d^2u}{d\lambda^2} \frac{\partial\vec{r}}{\partial u} + \frac{d^2v}{d\lambda^2} \frac{\partial\vec{r}}{\partial v} + \left(\frac{du}{d\lambda}\right)^2 \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial u^2} + \frac{du}{d\lambda} \frac{dv}{d\lambda} \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial v \partial u} + \frac{dv}{d\lambda} \frac{du}{d\lambda} \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial u \partial v} + \left(\frac{dv}{d\lambda}\right)^2 \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial v^2}. \quad (\text{G.5})$$

Ainda acompanhando o raciocínio de Schutz (2009, p. 156-157), Cheng (2010, p. 86-88) e Chris (2022, ep. 15), agora vamos considerar uma mudança na notação: $u = u^1$ e $v = u^2$. Além disso, é válido aplicar a convenção de soma de Einstein na equação (G.5), que ficará:

$$\frac{d^2\vec{r}}{d\lambda^2} = \frac{d^2u^i}{d\lambda^2} \frac{\partial\vec{r}}{\partial u^i} + \frac{du^i}{d\lambda} \frac{du^j}{d\lambda} \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial u^i \partial u^j}. \quad (\text{G.6})$$

Ao analisar a equação (G.6), podemos observar duas situações distintas: a primeira parte da soma no segundo termo representa o vetor tangente à superfície, enquanto a segunda parte pode não ser tangente à superfície. Portanto, é necessário examinar essa segunda parte para determinar se ela é normal, tangente ou uma combinação dos vetores de base. Para isso, precisamos considerar o termo da derivada de segunda ordem em relação às bases u^i e u^j , que correspondem às bases de um plano tangente e a um vetor normal à superfície, como ilustrado na Fig. G.2.

Figura G.2: Plano tangente formado pelas derivadas de \vec{r} com o vetor normal \hat{n} .



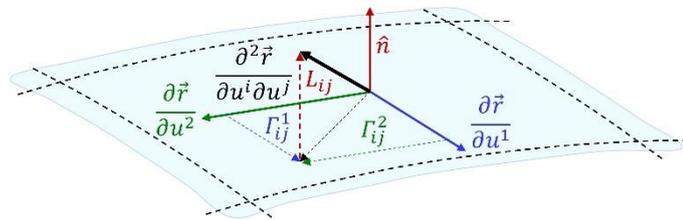
Fonte: Produção própria.

Para descrever o vetor da derivada de segunda ordem, uma vez que suas componentes não são conhecidas, é possível criar variáveis que representam uma combinação linear das componentes dos vetores de base

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^i \partial u^j} = \Gamma_{ij}^1 \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^1} + \Gamma_{ij}^2 \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^2} + L_{ij} \hat{n}, \quad (\text{G.7})$$

em que o termo L_{ij} , conhecido como segunda forma fundamental, indica as componentes normais dessa derivada de segunda ordem em relação a u^i e u^j . Por outro lado, os Símbolos de Christoffel fornecem as componentes tangenciais desse vetor de segunda ordem. O primeiro Símbolo de Christoffel descreve quanto do vetor de base é necessário ao longo de u^1 , enquanto o segundo termo da soma indica quanto é necessário ao longo de u^2 , como mostra a Fig. G.3.

Figura G.3: Vetores de base compoendo o vetor da derivada de segunda ordem.



Fonte: Produção própria.

Uma outra forma de reescrever a equação (G.7), é através da generalização dos índices contravariantes dos Símbolos de Christoffel por um índice k . Com isso, obtemos:

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^i \partial u^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^k} + L_{ij} \hat{n}. \quad (\text{G.8})$$

Ao observar a Fig. G.3, podemos notar que o vetor normal \hat{n} será perpendicular à superfície tangente à curva. Isso significa que o produto escalar entre ele e qualquer um dos vetores tangentes u^i e u^j será nulo, já que \hat{n} e os vetores tangentes são ortogonais entre si.

Portanto, de acordo com Chris (2022, ep. 15), para definir os Símbolos de Christoffel, é necessário obter o produto escalar da eq. (G.8) por um vetor tangente u^l :

$$\left(\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^i \partial u^j} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^l} = \left(\Gamma_{ij}^k \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^k} + L_{ij} \hat{n} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^l},$$

definido por:

$$\left(\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^i \partial u^j} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^l} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^k} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^l}. \quad (\text{G.9})$$

No entanto, o produto entre dois vetores de base representa o tensor métrico. Portanto, podemos escrever a eq. (G.9) como:

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^i \partial u^j} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^l} = \Gamma_{ij}^k g_{kl}. \quad (\text{G.10})$$

Nosso objetivo agora é evidenciar o Símbolo de Christoffel. Para isso, utilizaremos a definição do delta de Kronecker: o produto entre o tensor métrico covariante e o tensor métrico contravariante. Assim, podemos escrever:

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^i \partial u^j} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^l} g^{kl} = \Gamma_{ij}^k g_{kl} g^{lm} \rightarrow \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^i \partial u^j} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^l} g^{lm} = \Gamma_{ij}^k \delta_k^m,$$

que ficará:

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^i \partial u^j} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^l} g^{lm} = \Gamma_{ij}^m. \quad (\text{G.11})$$

Conforme Chris (2022, ep. 15), podemos definir a componente da segunda forma fundamental de maneira análoga, ao aplicarmos o produto escalar em ambos os lados. Dessa forma, obteremos a derivada dos símbolos de Christoffel nula, uma vez que eles são perpendiculares entre si. Com isso, encontraremos:

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^i \partial u^j} \cdot \hat{n} = L_{ij},$$

que resulta em:

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^i \partial u^j} \cdot \frac{\vec{e}_i \times \vec{e}_j}{\|\vec{e}_i \times \vec{e}_j\|} = L_{ij}. \quad (\text{G.12})$$

A equação (G.12), como explica de acordo com Chris (2022, ep. 15), oferece uma forma mais concreta de determinar o vetor normal \hat{n} , pois sabemos que:

$$\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i} \quad \text{e} \quad \vec{e}_j = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^j}.$$

Além disso, ao tomarmos o produto vetorial entre os dois vetores, presentes no plano tangente, obtemos um vetor perpendicular a esse plano. Para garantir que sua magnitude seja um, é necessário que esse produto seja dividido pelo seu módulo.

Retomando a equação (G.6), iremos substituir o resultado da segunda derivada conforme a equação (G.8). Ao desenvolver a distributividade e reagrupar os termos, chegaremos à seguinte equação:

$$\frac{d^2 \vec{R}}{d\lambda^2} = \left(\frac{d^2 u^k}{d\lambda^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{d\lambda} \frac{du^j}{d\lambda} \right) \frac{\partial \vec{R}}{\partial u^k} + L_{ij} \frac{du^i}{d\lambda} \frac{du^j}{d\lambda} \hat{n}. \quad (\text{G.13})$$

O objetivo desse desenvolvimento matemático é definir uma curva geodésica em que o vetor aceleração seja sempre normal à superfície, o que implica em uma parte tangencial nula, como apresentado na eq. (G.1). Essa condição é exatamente o que a eq. (G.13) representa, permitindo-nos determinar de forma eficaz se uma curva é geodésica ao considerarmos a primeira parte da soma, ou seja, a parte tangencial da aceleração, como nula. Assim, qualquer curva u^k parametrizada por λ que satisfaça a equação

$$\frac{d^2 u^k}{d\lambda^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{d\lambda} \frac{du^j}{d\lambda} = 0, \quad (\text{G.14})$$

será considerada uma geodésica, sendo essa equação conhecida como a Equação da Geodésica.