INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DO RIO GRANDE DO NORTE
CAMPUS SANTA CRUZ

MARCOS GENILSON DA SILVA MEDEIROS

UM ESTUDO SOBRE A SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD

SANTA CRUZ/RN
2022

MARCOS GENILSON DA SILVA MEDEIROS

UM ESTUDO SOBRE A SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso Licenciatura em Física do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte, em cumprimento às exigências legais como requisito parcial à obtenção do título Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Me. Jardel Lucena da Silva

SANTA CRUZ/RN

2022

Medeiros, Marcos Genilson da Silva
M488 Um estudo sobre a solução de Schwarzschild / Marcos Genilson da Silva Medeiros - 2022.
97 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Física) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte.
Orientador: Prof. Me. Jardel Lucena da Silva.

1. Ensino de física moderna. 2. Teorias da relatividade. 3. Schwarzschild. 4. Buracos negros. I. Silva, Jardel Lucena da. II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnológica do Rio Grande do Norte. III. Título.

CDU 53

Catalogação da publicação na fonte elaborado pelo Bibliotecário Rubervanio da Silva Mateus - CRB-15/462
Biblioteca Mons. Raimundo Gomes Barbosa- IFRN/SC

MARCOS GENILSON DA SILVA MEDEIROS

UM ESTUDO SOBRE A SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso Licenciatura em Física do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte, em cumprimento às exigências legais como requisito parcial à obtenção do título Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Me. Jardel Lucena da Silva

Aprovado em: 12/12/2022

Banca Examinadora

Jardel Lucena da Silva, Me. – Orientador
IFRN / Campus Santa Cruz

Roney Roberto de Melo Sousa, Me. – 1º Examinador
IFRN / Campus Santa Cruz

Alyson José Alves Carvalho, Dr. – 2º Examinador
UFPE / Campus Recife

Dedico este trabalho a todos que desejam e se dedicam para atingir seus objetivos, não desistindo nas dificuldades. Dedico também, aos que me mostraram que era possível nas horas de angústia e dúvida.

AGRADECIMENTOS

Não tenho como começar diferente, agradeço a Deus pela oportunidade de poder concluir esse curso, assim como agradeço pelo principal, estar vivo e ter pessoas maravilhosas do meu lado que nunca me deixaram abalar. Deixo aqui registrado a felicidade de poder ter junto comigo aqueles que doaram suas vidas para a criação de sete filhos, meus pais, Geraldo e Etânia. Eles me ensinaram que mesmo na agricultura, ou como meu pai sempre fala, “trabalhando alugado” para dar sustento a uma família, mesmo enfrentando muitas dificuldades é possível incentivar os filhos a terem um futuro diferente por meio dos estudos. Lembro que faltavam recursos, mas sobrava amor, compreensão e felicidade, pois foi durante minha infância que percebi que a alegria está no simples fato de existir.

Registro aqui ainda que independente da realidade de cada um, todos somos capazes de alcançar nossos objetivos, pois contrariando muitos, consegui concluir este curso trabalhando do início ao fim, aliás agradeço a cada um que no ambiente de trabalho me incentivou nas poucas horas de sono e no corredor onde estudava durante as horas de almoço.

Agora, quero agradecer aos familiares, aqui cito meus irmãos, Genielson, Genimário, Jefferson e Etaniele, que me mostram a importância da família. Lembro ainda, Edson, e Genielisson que concluíram também esse mesmo curso, cada um com suas peculiaridades, mas que sempre foram meu refúgio nas horas de indecisão e medo. Não poderia deixar de agradecer aquela que sempre esteve do meu lado, minha esposa Claudya, ela presenciou as horas que passei tentando vencer o cansaço na madrugada e na rotina pesada do trabalho, nunca me deixando desistir a acreditando em mim nas vezes que nem mesmo eu acreditei. Por fim, mas não menos importante, agradeço de forma imensa os aos colegas e professores que contribuíram na minha formação, em especial, meu orientador, parceiro e amigo Jardel Lucena, que não mediu esforços para que esse trabalho, motivo orgulho, fosse possível. Sou grato pelas horas que passou corrigindo e preparando as aulas para subsidiar meu tema.

Encerro dizendo, que tudo é possível, se um filho de agricultor pôde se formar, com determinação e fé podemos alcançar o infinito.

“A gravidade explica os movimentos dos planetas, mas não pode explicar quem colocou os planetas em movimento. Deus governa todas as coisas e sabe tudo o que é ou que pode ser feito. ”

(*Isaac Newton)*

RESUMO

Neste trabalho desenvolvemos um estudo sobre a solução de Schwarzschild, apresentada em 1916, quase imediatamente após a publicação dos trabalhos que fundamentaram a Teoria da Relatividade Geral. Consideramos inicialmente uma contextualização que justifica o desenvolvimento do estudo deste tema no ensino de Física, e a seguir, abordamos o tema numa perspectiva histórica não rigorosa. Discutimos as principais ideias das Teorias da Relatividade Restrita e Geral, a fim de subsidiar o desenvolvimento da obtenção da solução de Schwarzschild e suas implicações físicas, como a previsão da existência de Buracos negros. Finalmente, discutimos dois testes clássicos que utilizaram a solução de Schwarzschild para fundamentar previsões da Teoria da Relatividade Geral, e mencionamos algumas informações recentes sobre a detecção dos Buracos Negros. A metodologia utilizada para elaboração deste trabalho foi uma pesquisa bibliográfica de caráter pura e exploratória. Neste contexto, concluímos que este trabalho pode desempenhar um papel importante no panorama do Ensino de Física Moderna se utilizado como um material didático norteador para apropriação do referido tema.

Palavras-chave: Ensino de Física Moderna; Teorias da Relatividade; Schwarzschild; Buracos Negros.

ABSTRACT

In this work we develop a study on the Schwarzschild solution, presented in 1916, almost immediately after the publication of the works that founded the Theory of General Relativity. Initially, we consider a contextualization that justifies the development of the study of this theme in Physics teaching, and then, we approach the theme from a non-rigorous historical perspective. We discuss the main ideas of the Theories of Special and General Relativity, in order to subsidize the development of obtaining the Schwarzschild solution and its physical meals, such as the prediction of the existence of black holes. Finally, we discuss two classic tests that used the Schwarzschild solution to support the prediction of the General Theory of Relativity, and we mention some recent information about the detection of Black Holes. The methodology used for the elaboration of this work was a pure and exploratory bibliographical research. In this context, we conclude that this work can play an important role in the panorama of Modern Physics Teaching if used as a guiding didactic material for the appropriation of the referred theme.

Keywords: Modern Physics Teaching; Theories of Relativity; Schwarzschild; Black Holes.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Dentro do contexto social em que nos encontramos, temos de lidar frequentemente com inúmeras situações nas quais estão envolvidos produtos e/ou conceitos que estão diretamente correlacionados à ciência. A efetiva inserção desta em nosso cotidiano se justifica de forma muito clara pelas enormes vantagens e comodidades que têm sido permitidas graças a sua consolidação enquanto corpo de conhecimento profícuo.

Neste sentido, o papel da alfabetização científica das pessoas como condição essencial para um pleno exercício da cidadania se constitui em um tema de fundamental importância (CARVALHO e SASSERON, 2011; GIL-PÉREZ e VILCHES-PEÑA, 2001). E neste contexto, dentre as várias ciências com suas respectivas relevâncias, destacamos a importância da Física, por ser uma ciência utilizada para fundamentar várias outras.

Estudos tem mostrado que apesar de esforços relevantes da comunidade acadêmica, muitos problemas ainda persistem no que diz respeito a sua apropriação por parte da maioria das pessoas nos ambientes educacionais (MARTINS, 2012, NARDI, 2015). E dentre estes vários problemas ainda persistentes, gostaríamos de destacar o da inserção da Física Moderna e Contemporânea (FMC) em tais ambientes de formação. É notório na literatura acadêmica sobre ensino de Física, que este consiste em um dos temas com menores êxitos no que concerne à possíveis soluções para sua adequada inserção no processo de alfabetização científica das pessoas. (MONTEIRO, NARDI e BASTOS FILHO, 2012; OLIVEIRA, VIANNA e GERBASSI, 2007).

A relevância de se abordar a referida temática se justifica tanto pelo fato de diversas aplicações oriundas da FMC estarem presentes no cotidiano das pessoas, como também de vários de seus conceitos característicos. Isto, graças a uma profícua divulgação científica aliada a um mecanismo de comunicação difundida principalmente a partir de conteúdos veiculados pela internet.

De um ponto de vista formal, entidades responsáveis pela curricularização dos temas a serem abordados na formação geral da população, tem manifestado preocupação desde longa data, como pode ser constatado através dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), desde há 20 anos:

> A física deve apresentar-se, portanto, como um conjunto de competências específicas que permitam perceber e lidar com os fenômenos naturais e tecnológicos presentes tanto no cotidiano mais imediato quanto na compreensão do universo distante, a partir de princípios, leis e modelos por ela construídos. (BRASIL, 2002, p.2)

Particularmente, no que diz respeito à Física Moderna, o documento afirma:

> Alguns aspectos da chamada Física Moderna serão indispensáveis para permitir aos jovens adquirir uma compreensão mais abrangente sobre como se constitui a matéria, de forma a que tenham contato com diferentes e novos materiais, cristais líquidos e lasers presentes nos utensílios tecnológicos, ou com o desenvolvimento da eletrônica, dos circuitos integrados e dos microprocessadores. (BRASIL, 2002, p.19)

O documento norteador dos parâmetros curriculares mais recente, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), também aponta a importância de se inserir temas que fazem parte do cotidiano das pessoas de forma consistente em sua formação:

> Por fim, cabe aos sistemas e redes de ensino, assim como às escolas, em suas respectivas esferas de autonomia e competência, incorporar aos currículos e às propostas pedagógicas a abordagem de temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma transversal e integradora. Entre esses temas, destacam-se: [...], ciência e tecnologia, [...]. (BRASIL, 2017, p. 19-20).

Neste contexto, cabe destacarmos a relevância do papel desempenhado pelo professor enquanto mediador do processo de ensino-aprendizagem. É essencial que, para que esta mediação seja bem-sucedida, todo um conjunto de circunstâncias estejam asseguradas para possibilitar a realização desta tarefa. E, dentre as várias destas circunstâncias, uma que tem comprometido bons resultados se trata justamente de problemas de formação destes profissionais associados a apropriação de temas da FMC.

Na literatura acadêmica encontramos relatos de professores que tem afirmado que temas de FMC não têm sido discutidos de forma satisfatória em seus

cursos de formação (SANTOS, NASCIMENTO e SOUZA, 2016; MONTEIRO, NARDI e BASTOS FILHO, 2012; OLIVEIRA, VIANNA e GERBASSI, 2007). Alguns destacam o pouco tempo destinado à apropriação destes temas, mencionam a complexidade dos conceitos, entre outros motivos.

Diante destas circunstâncias, e levando em conta o importante papel desempenhado pela FMC em nosso cotidiano, julgamos relevante considerar uma forma de contribuir para melhoria deste quadro através da elaboração do presente trabalho, na perspectiva de apresentarmos o desenvolvimento de um tema que esteja inserido no contexto da FMC e que possa vir a esclarecer possíveis leitores pertencentes a um público de professores em formação de Física. Alia-se, ainda, à tal justificativa, o ensejo de também se inteirar de um tema interessante ao qual não teríamos acesso dentro do panorama formativo tradicional.

Deste modo, escolhemos como tema a ser abordado neste trabalho o desenvolvimento da solução de Schwarzschild para as equações de Einstein, a qual possibilitou a interpretação da existência de um objeto astronômico que hoje denominamos de buraco negro (D'INVERNO, 1992; CARROLL, 2003). Nosso objetivo se constitui em estabelecer uma pesquisa bibliográfica correlacionada a este tema, e com isto, compilar um conjunto de ideias de maneira a facilitar futuras transposições didáticas a serem realizadas por professores de Física.

Para alcançarmos tal objetivo, desenvolveremos este trabalho com a seguinte estrutura: O primeiro capítulo abordará uma breve contextualização sobre buracos negros; no segundo capítulo serão abordados conceitos relacionados às teorias da relatividade especial e geral, a partir das quais foi possível a obtenção da solução de Schwarzschild. No terceiro capítulo trataremos da dedução desta solução e de interpretações que estejam a ela correlacionadas. Finalmente, no quarto capítulo, discutiremos sobre consequências observacionais associadas a tal solução, assim como sobre fatos recentes que corroboram a existência de buracos negros. Com o fim de proporcionar um melhor subsídio para compreensão das ideias desenvolvidas neste trabalho, também disponibilizaremos três breves apêndices sobre o formalismo tensorial, que se trata do formalismo matemático utilizado para descrever os fenômenos físicos no contexto da Teoria da Relatividade Geral e suas aplicações.

1. UMA BREVE CONTEXTUALIZAÇÃO SOBRE BURACOS NEGROS

Nos anos iniciais do século XX, o físico alemão Albert Einstein desenvolveu as duas Teorias da Relatividade, a restrita no ano de 1905 e a Geral no ano de 1916. Em seu artigo denominado a eletrodinâmica dos corpos em movimento (PIATTELLA, Apud EINSTEIN, 2020), que ficou mais conhecido por Teoria da Relatividade Restrita (TRR), Einstein postulou que a velocidade da luz é constante para todo referencial inercial e que as leis físicas devem ser as mesmas em quaisquer referenciais inerciais. Com esses dois postulados, sua Teoria da Relatividade Restrita possibilitou que alguns problemas enfrentados por físicos do século XIX fossem explicados, e ainda possibilitou o desenvolvimento de um novo paradigma na Física: o de se descrever fenômenos físicos dentro da estrutura de um espaço-tempo, um espaço quadridimensional em que uma de suas dimensões está correlacionada ao tempo (SCHUTZ, 2009).

Aproximadamente dez anos depois, Albert Einstein publicou uma extensão de sua Teoria da Relatividade Restrita, a Teoria da Relatividade Geral (TRG), que apresenta a possibilidade de existir uma deformação do espaço-tempo devido a presença de uma distribuição de matéria e/ou energia (SCHUTZ, 2009). Tal teoria implica que objetos que se desloquem livres de influências que não sejam a gravitacional, devem percorrer uma trajetória curvilínea, parametrizada pela curvatura do espaço-tempo, inclusive a própria luz. As relações que descrevem a curvatura do espaço-tempo com respeito à distribuição de matéria/energia que a causa são as equações de campo de Einstein.

Quase imediatamente após a referida publicação das ideias da TRG, Karl Schwarzschild, um físico e astrônomo alemão, desenvolveu uma solução interessante para as equações de campo de Einstein, nas quais um corpo extremamente denso seria capaz de criar uma região no espaço-tempo detentora de um campo gravitacional tão intenso, que nada, nem mesmo a luz, poderia escapar.

Schwarzschild se voluntariou para lutar junto ao exército alemão na frente de batalha Russa durante a primeira guerra mundial, nesse momento se dedicou também aos trabalhos voltados para as armas bélicas, mas, ele detinha um grande conhecimento matemático que nas trincheiras da guerra, ele desenvolveu tal solução (SAA, 2016). Nem mesmo as condições adversas o impediram de concluir

esse que seria um dos seus mais brilhantes trabalhos, e que surpreenderam até mesmo Einstein, sendo citado em sua conclusão da Teoria da Relatividade Geral. Lamentavelmente, em maio de 1916, Schwarzschild morreu em decorrência de uma doença autoimune. Sua solução é tida como a primeira e mais importante solução não trivial das equações de campo de Einstein (LAMBOURNE, 2010).

No ano de 1939, Einstein inferiu que esse ente físico previsto por sua teoria jamais existiria no universo, por ser tão monstruoso e extravagante para os conceitos da época (MATSUURA, 2020), e, portanto, foi reconhecido apenas como uma solução matemática.

Arthur Eddington, um astrônomo britânico que orientava Chandra, um brilhante matemático indiano que interpretou a solução desprezada por Schwarzschild, Einstein e pelo próprio Eddington acerca da singularidade formada pela grande quantidade de matéria presente em um único ponto, essa interpretação foi de grande valia. Vale ressaltar que no ano de 1919, Arthur Eddington foi responsável por uma das mais importantes expedições experimentais da relatividade geral, nesta oportunidade ele conseguiu descrever o ângulo de desvio de um raio de luz que passa próximo ao sol durante um eclipse solar.

Depois desse embate por parte dos primeiros responsáveis pelos estudos acerca da singularidade[1] em $r = 0$, o físico Openheimer pôde descrever pela primeira vez, o que ele chamou de estrelas frias, ou seja, quando $r = R_s$ ($r = Coordenada\ Radial\ e\ R_s = Raio\ de\ Schwarzschild$) não seria possível a emissão de nenhuma radiação eletromagnética. Durante o século XX, Wheeler, um físico teórico estadunidense se apropriou de uma frase: ‘buracos negros no espaço’, dita no ano de 1964, pela jornalista Ann E. Ewing em um evento científico no qual o físico supracitado participara. Os estudos de Wheeler e seus alunos tiveram grande impacto na descrição física dos buracos negros, mas para que fosse possível sua detecção, os cientistas propuseram inúmeras formas de alcançar tal feito. Uma delas proposta pelo próprio Einstein por meio das ondas gravitacionais, em seu trabalho publicado em 1918, trabalho este que muitos interessados utilizaram para estudar a presença desses objetos gigantescos.

Cem anos depois, no ano de 2015, por meio de um violento encontro de dois buracos negros, pudemos detectar a presença das ondas gravitacionais que se

[1] Região na qual uma massa e energia se concentra tornando a gravidade e o encurvamento do espaço-tempo infinitos.

propagam com a velocidade da luz, sendo a primeira distinção direta dos buracos negros, além das possíveis observações de estrelas binárias, que é entendido como duas estrelas que se orbitam entre si, no qual uma delas ficaria visível e a outra não poderia ser observada.

Dada esta contextualização, para apreciarmos melhor o desenvolvimento da solução de Schwarzschild, teremos que nos apropriar do formalismo matemático necessário, além de conhecermos as teorias da relatividade de Albert Einstein.

2. ALGUNS FUNDAMENTOS DAS TEORIAS DA RELATIVIDADE RESTRITA E GERAL

Como já mencionado no capítulo anterior, tendo sido a solução de Schwarzschild desenvolvida no contexto da TRG, vamos neste capítulo apresentar as principais ideias desta teoria, com o intuito de proporcionar uma compreensão mais significativa acerca do tema principal deste trabalho. No entanto, como a implicação mais contundente da TRG é a possibilidade de uma distribuição de matéria/energia induzir uma curvatura na estrutura do espaço-tempo no qual ela se encontra, e essa estrutura do espaço-tempo foi derivada do contexto da TRR, entendemos que é também importante desenvolvermos inicialmente alguns aspectos desta última teoria, a fim de fundamentar melhor a própria ideia de espaço-tempo.

2.1. ALGUNS ASPECTOS DA TEORIA DA RELATIVIDADE RESTRITA

A Teoria da Relatividade Restrita (TRR) surgiu de um contexto em que existia um conflito entre a teoria eletromagnética e a mecânica Newtoniana, acerca da descrição de fenômenos quando avaliados a partir de diferentes referenciais inerciais com movimento relativo entre si. No ano de 1905, Einstein propôs a teoria da relatividade restrita, baseada em dois postulados fundamentais (HALLIDAY,2016):

1° Postulado da Relatividade – As leis da física são as mesmas em quaisquer referenciais inerciais.

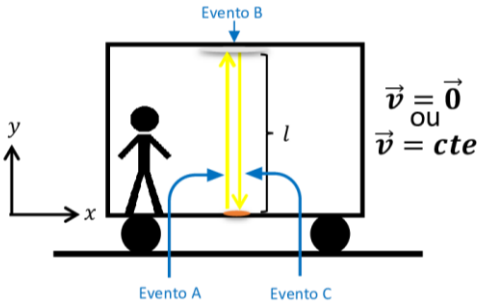
2° Postulado da Relatividade – A velocidade da Luz é invariante em todos os referenciais inerciais.

Dentre as consequências derivadas destes postulados, destaca-se a de que várias grandezas físicas, quando avaliadas a partir de referenciais inerciais distintos, não mais apresentam as mesmas medidas. Isto é, as grandezas físicas passaram a ser consideradas relativas.

Para evidenciarmos isto, consideremos a seguinte situação: a análise da duração temporal em que um feixe de luz é disparado até o teto de um vagão fechado (evento A), e é refletido por um espelho (evento B) para atingir novamente

a sua fonte (evento C), quando avaliada por observadores em referenciais inerciais distintos (ver figura 2.1).

Figura 2.1: Vagão com observador dentro vendo os eventos A, B e C.



Fonte: Medeiros (2022)

Para um observador acoplado ao referencial vinculado às paredes do vagão (Referencial *S*), temos que o referido intervalo de tempo é dado por:

$$\Delta t = \frac{d}{c} \rightarrow \Delta t = \frac{2l}{c}, \tag{2.1}$$

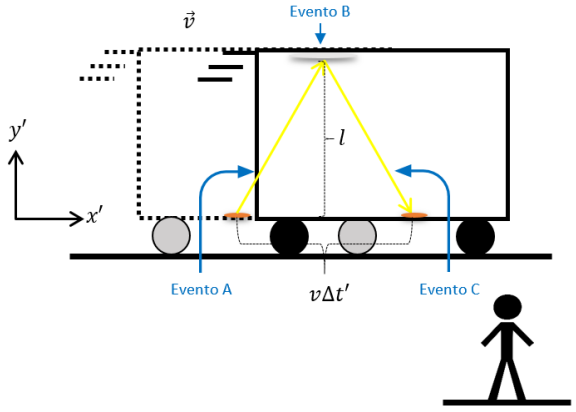
em que c é a velocidade da luz e l é a distância da fonte até o topo do vagão.

Já para um observador em um referencial acoplado ao solo (Referencial *S'*) e que vê o vagão se deslocar com velocidade constante v, na figura 2.2 o intervalo de tempo é dado por:

$$\Delta t' = \frac{d'}{c} = \frac{2\sqrt{\left(\frac{1}{2}v\Delta t'\right)^2 + l^2}}{c}, \tag{2.2}$$

em que d' ≡ distância percorrida pelo feixe de luz segundo o observador em *S'*, v ≡ velocidade com que o vagão se desloca em relação a *S'*.

Figura 2.2: Observador acoplado ao referencial S', fora do vagão



Fonte: Medeiros (2022)

Resolvendo a eq. (2.2) para $\Delta t'$, obtemos:

$$\Delta t' = \frac{\frac{2l}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{2.3}$$

E com a eq. (2.1), podemos escrever:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{2.4}$$

ou

$$\Delta t' = \gamma \Delta t, \tag{2.5}$$

em que $\gamma \equiv 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ é conhecido como fator de Lorentz e aparece frequentemente nas equações que relacionam grandezas físicas avaliadas em referenciais inerciais distintos. Outro exemplo bem conhecido, se trata da contração de Lorentz, em que a relação entre comprimentos medidos na direção do movimento é dada por $\Delta l' = \Delta l/\gamma$.

A equação (2.5) nos mostra que para uma velocidade $v < c$, o intervalo de tempo medido pelo observador fora do vagão é maior do que o intervalo de tempo medido pelo observador dentro do vagão. Assim, vemos que medidas de intervalos de tempos se mostram dependentes dos referenciais nos quais são avaliadas. A exemplo desta, inúmeras outras grandezas físicas assumem tal característica (SCHUTZ, 2009).

Apesar disto, pode-se mostrar que é possível construir grandezas físicas que preservam seus valores em quaisquer referenciais inerciais. Para aproveitarmos o exemplo mencionado acima, podemos evidenciar que a altura l do vagão pode ser considerada a mesma quando avaliada por ambos os observadores em S e S'. Da eq. (2.1), podemos escrever:

$$-(c\Delta t')^2 + (v\Delta t')^2 = -4l^2. \tag{2.6}$$

Considerando que $\Delta x' = v\Delta t'$ é o deslocamento da fonte de luz ao longo do eixo x', podemos reescrever a eq. (2.6) como:

$$-(c\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 = -4l^2\ . \tag{2.7}$$

Por outro lado, da eq. (2.1), podemos afirmar que:

$$-(c\Delta t)^2 = -4l^2, \tag{2.8}$$

e com isto:

$$-(c\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 = -(c\Delta t)^2\ . \tag{2.9}$$

Perceba que esta equação denota a soma de quadrados de diferenças das coordenadas espaciais e temporais medidas a partir de referenciais distintos em diferentes membros da equação.

Considerando ainda que para a dada sequência dos eventos, as diferenças das coordenadas em ambos os referenciais são:

$$\begin{aligned} x'_A \neq x'_C \quad &\rightarrow \quad v\Delta t' = \Delta x' & \qquad x_A = x_C \quad &\rightarrow \quad \Delta x = 0 \\ y'_A = y'_C \quad &\rightarrow \quad \Delta y' = 0 & \qquad y_A = y_C \quad &\rightarrow \quad \Delta y = 0 \\ z'_A = z'_C \quad &\rightarrow \quad \Delta z' = 0. & \qquad z_A = z_C \quad &\rightarrow \quad \Delta z = 0, \end{aligned} \tag{2.10}$$

podemos reescrever a eq. (2.9) de uma forma mais generalizada:

$$-(c\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 = -(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta \mathrm{z})^2. \tag{2.11}$$

Se definirmos $-(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta \mathrm{z})^2 \equiv (\Delta S)^2$, chamado quadrado do intervalo espaçotemporal, podemos afirmar que tal grandeza é um invariante relativístico, uma vez que possui o mesmo valor quando avaliada em ambos os sistemas de referência: $(\Delta S')^2 = (\Delta S)^2$, como é visto na eq. (2.11).

Segundo Martins (2015), quem introduziu este e outros invariantes relativísticos foi o físico Henri Poincaré, que por sua vez, interpretou que o tempo poderia ser manipulado como uma quarta dimensão, possibilitando assim o surgimento da ideia de um espaço quadri-dimensional no qual os fenômenos físicos poderiam ser descritos. Este espaço é chamado de espaço-tempo, que apesar de ter sido sugerido por Poincaré, ficou conhecido como espaço-tempo de Minkowski. E nesta perspectiva, ΔS^2 pode ser entendido como o quadrado de um vetor que denota as coordenadas de dois eventos definidos no referido espaço-tempo.

De forma diferencial, pode-se reescrever o quadrado do intervalo de espaço-tempo como:

$$ds^2 = -(c\,dt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{2.12}$$

Com uma leve mudança de notação:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \sum_{i=1}^{3} \left(dx^i\right)^2, \tag{2.13}$$

em que: $dx_1 = dx, dx_2 = dy$ e $dx_3 = dz$, podemos reescrevê-lo como:

$$ds^2 = -(c\,dt)^2 + \sum_{i=1}^{3}\left(dx^i\right)^2, \tag{2.14}$$

ou ainda, desenvolvendo o termo da somatória com o delta de Kronecker[2] δ_{ij}, temos:

$$ds^2 = -(c\,dt)^2 + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(dx^i dx^j\right)\delta_{ij}. \tag{2.15}$$

Desta última expressão, podemos ainda denotar $(c\,dt) = dx^0$, e com isto, escrevemos:

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(dx^i dx^j\right)\delta_{ij}. \tag{2.16}$$

Condensamos ainda a eq. (2.16) por meio de somatória[3]:

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3}(dx^\mu dx^\nu)\,\eta_{\mu\nu}, \tag{2.17}$$

em que o termo:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{cases} 0, se\ \mu \neq \nu \\ -1, se\ \mu = \nu = 0 \\ +1, se\ \mu = \nu \neq 0. \end{cases} \tag{2.18}$$

Este termo acima explicitado é denominado métrica[4] do espaço-tempo de Minkowski, e pode ser representada da seguinte forma matricial:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

Por meio da notação[5] de Einstein, podemos rescrever a eq. (2.17), como

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \tag{2.20}$$

Essa expressão que denota o quadrado do intervalo de espaço-tempo é, as vezes, referida como elemento de linha e escrevê-lo nesta notação pode facilitar a manipulação algébrica da descrição de diversos fenômenos físicos neste contexto.

---

[2] Por definição o Delta de Kronecker é dado por $\delta_{ij} = \begin{cases} 1\ se\ i = j \\ 0\ se\ i \neq j \end{cases}$

[3] Os índices apresentados a partir dessa equação estão previstos na convenção cuja orientação é de que índices de 1 a 3, usamos letras romanas e de 0 a 3 usamos letras gregas.

[4] A métrica é uma função que define a distância entre dois pontos em um determinado espaço. (COLLIER, 2017)

[5] Uma notação muito utilizada por diversos autores, a convenção de soma de Einstein, ou notação indicial, é utilizada apenas na presença de índices repetidos simbolizando uma soma.

Outro artifício útil para a descrição de fenômenos no espaço-tempo consiste em um esboço de descrição geométrica através do chamado diagrama de Minkowski, que se trata de uma representação do sistema de coordenadas tomando-se um dos eixos para denotar valores da coordenada $x^0 = ct$ em detrimento de outros que denotam valores de coordenadas espaciais. Para exemplificarmos, consideremos tal diagrama com apenas um eixo espacial (figura 2.3).

De acordo com a eq. (2.14), o dS^2 pode assumir três valores:

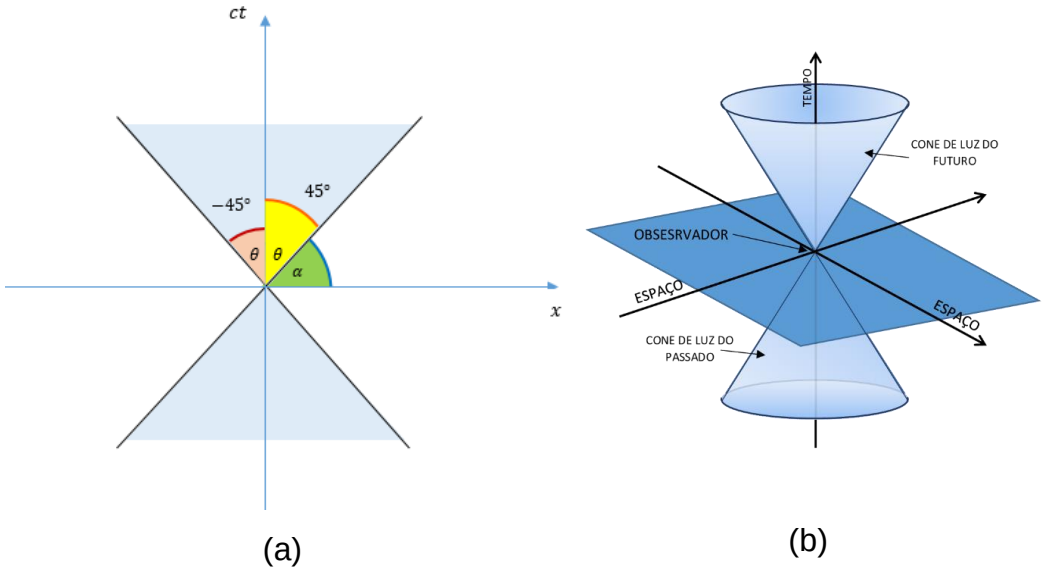
$$ds^2 > 0 \quad \text{se} \quad \sum_i dx_i^2 > (c\,dt)^2 \tag{2.21a}$$

$$ds^2 = 0 \quad \text{se} \quad \sum_i dx_i^2 = (c\,dt)^2 \tag{2.21b}$$

$$ds^2 < 0 \quad \text{se} \quad \sum_i dx_i^2 < (c\,dt)^2. \tag{2.21c}$$

Segundo a TRR, a situação descrita por (2.21a) é tida como fisicamente impossível, pois violaria o princípio da causalidade, uma vez que permitiria a propagação de informação no espaço com uma velocidade maior do que a velocidade da luz, o que não é permitido na natureza segundo os princípios da referida teoria.

Figura 2.3: Diagrama do espaço tempo de Minkowski



Fonte: Medeiros (2022)

Para a situação descrita por (2.21b) a velocidade de propagação de informação no espaço ocorre com a própria velocidade da luz, e por isto, ocorreria apenas para corpos sem massa.

Na situação descrita por (2.21c), temos o caso em que podemos afirmar que o intervalo de tempo necessário para percorrer a distância espacial entre dois pontos, é sempre maior do que o intervalo de tempo necessário para luz realizar o

mesmo percurso; isso ocorre para corpos massivos, e não viola os princípios da TRR.

Na eq. (2.21b), podemos verificar que o coeficiente angular $\tan\theta = dx/dx^0 = dx/cdt = v/c = 1$ implica que o ângulo da linha de mundo, representada no diagrama de Minkowski, de uma partícula que se move no espaço-tempo com a velocidade da luz é de $45°$ com relação ao eixo ct (figura 2.3a). Por outro lado, para uma partícula que se move com $v < c$, deve-se ter $0 \leq \theta < 45°$, enquanto trajetórias em que $\theta > 45°$ não são permitidas por serem inconsistentes com a TRR (caso em que v seria maior do que c). Para valores de dx no semieixo negativo de x, temos conclusões semelhantes em que θ agora possui valor limite de $-45°$ com relação ao semieixo ct, como pode ser visto na figura 2.3a. Vale ressaltar ainda, que o ângulo α que denota a abertura entre o eixo de referência x (eixo horizontal) e a linha de mundo descrita pela partícula, também será levado em consideração e será de extrema importância para as discussões no capítulo 3.

Se tal situação for representada em um diagrama com dois eixos espaciais, conforme figura 2.3b, podemos vislumbrar que os eventos com conexões causais estão delimitados pela superfície de um cone, que denominamos cone de luz. Os eventos que ocorrem no cone superior, ou seja, acima do plano que representa o hiperespaço presente ($ct = 0\,m$), são denominados eventos futuros. Já os eventos que estão no cone abaixo do plano citado, são chamados de eventos passados. Para o espaço-tempo de Minkowski, os cones de luz podem ser definidos em quaisquer pontos de seu respectivo diagrama e são iguais.

Ainda neste novo paradigma de descrição de fenômenos no espaço-tempo de Minkowski, torna-se necessário que haja toda uma redefinição de grandezas físicas adaptadas à descrição das propriedades dos sistemas físicos neste contexto. Inspirados na definição de ΔS^2, podemos inferir um novo ente matemático que está atrelado não apenas às coordenadas espaciais, mas também ao tempo, denominado quadrivetor posição, cujas coordenadas podem ser descritas da seguinte forma:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3). \tag{2.22}$$

De forma análoga ao desenvolvimento de descrições físicas em um espaço tridimensional, podemos definir a chamada quadrivelocidade:

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \tag{2.23}$$

$$U^{\mu} = \left(\frac{dx^0}{d\tau}, \frac{dx^1}{d\tau}, \frac{dx^2}{d\tau}, \frac{dx^3}{d\tau}\right), \tag{2.24}$$

em que $\tau \equiv$ tempo próprio.

Por meio da regra da cadeia e lembrando que $dt = \gamma dt_0$,[6] podemos reescrever:

$$U^{\mu} = \gamma\left(\frac{dx^0}{dt}, \frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \frac{dx^3}{dt}\right), \tag{2.25}$$

e considerando que $x^0 = ct$, temos:

$$U^{\mu} = \gamma(c, v^1, v^2, v^3). \tag{2.26}$$

A seguir, usando uma linha de raciocínio semelhante, e nos apoiando na invariância do intervalo de espaço-tempo, podemos definir o quadrimomento:

$$p^{\mu} = mU^{\mu} \tag{2.27}$$

$$p^{\mu} = m\frac{dx^{\mu}}{dt}. \tag{2.28}$$

Na TRR, é possível mostrar que a relação entre energia e momento linear se dá pela equação (COLLIER, 2017):

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2, \tag{2.29}$$

em que $m \equiv$ massa de repouso, isto é, a massa medida no referencial em que o corpo se encontra em repouso, e $E \equiv$ energia.

Perceba que, sendo c constante, o último termo da eq. (2.29) também o é. Deste modo, dividindo ambos os membros por c^2, ficamos com a seguinte expressão:

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 = (p)^2 + m^2c^2. \tag{2.30}$$

Desta, podemos então determinar um novo invariante, reorganizando os termos na seguinte forma:

$$-m^2c^2 = -\left(\frac{E}{c}\right)^2 + (p)^2. \tag{2.31}$$

Seja qual for o sistema de referência adotado, devemos obter o mesmo valor para essa grandeza. Reescrevendo-a em termos de suas componentes:

$$-m^2c^2 = -\left(\frac{E}{c}\right)^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2, \tag{2.32}$$

[6] Afim de facilitar a descrição das equações, vamos utilizar uma mudança de notação, o tempo próprio descrito no referencial s, será denotado por τ, e o tempo apresentado no referencial s' será descrito por dt.

podemos notar, por analogia com a equação (2.12), que o primeiro membro da soma pode ser interpretado como diretamente ligado à componente temporal de um quadrivetor, e dessa forma, reconhecemos a componente temporal do quadrimomento:

$$p^{\mu} = (p^0, p^1, p^2, p^3), \tag{2.33a}$$

$$p^{\mu} = \left(\frac{E}{c}, p^1, p^2, p^3\right). \tag{2.33b}$$

É possível notar que o processo de definição de quadrivetores consiste em aglutinar grandezas físicas já conhecidas do contexto de descrição de fenômenos físicos em três dimensões, que aparentemente não possuíam relações entre si, e tomá-los como parte de uma grandeza mais fundamental. Diversos outros quadrivetores definidos neste contexto, incorporam essa característica.

No entanto, certas grandezas físicas demandam a utilização de *entes matemáticos mais sofisticados do que quadrivetores* para serem coerentemente representadas no contexto da TRR. Para ilustrar tal situação, consideremos a descrição do comportamento de um sistema físico mais complexo quando imerso no espaço-tempo.

Consideremos então, em particular, um fluido ideal, que pode ser definido no contexto quadridimensional como uma coleção de partículas tão numerosas que sua dinâmica só pode ser descrita com base em valores médios especificados por grandezas como densidade, pressão, entre outros. Para as análises no âmbito da TRR, denominaremos este como um fluido relativístico.

Em essência, na TRR, geralmente se analisa o comportamento de sistemas físicos avaliando-os em referenciais inerciais distintos e comparando as grandezas físicas que os descrevem. Por uma questão de simplicidade, consideremos então que o fluido a ser analisado se encontra parado no referencial S. É importante notar que, mesmo que suas coordenadas espaciais não sofram mudanças, em relação a coordenada ct, o fluido não estará em repouso, diz-se que ele está em movimento com relação ao tempo.

Para tal descrição, faz-se necessário introduzir a definição de densidade de número de partículas:

$$n \equiv \frac{N}{V}, \tag{2.34a}$$

$$n \equiv \frac{N}{\Delta x \Delta y \Delta z}. \tag{2.34b}$$

em que $N \equiv$ número de partículas e $V = \Delta x \Delta y \Delta z \equiv$ volume.

Imaginemos agora que esse fluido está sendo observado em outro referencial inercial S' que está com velocidade constante em relação à S. Neste referencial, o observador vê o fluido em movimento, que devido à contração de Lorentz, terá seu aspecto deformado horizontalmente, de modo que podemos descrever a densidade de número como:

$$n' \equiv \frac{N}{\Delta x' \Delta y' \Delta z'} = \frac{N}{\left(\frac{\Delta x}{\gamma}\right) \Delta y \Delta z}. \tag{2.35}$$

Por se tratar de um referencial em movimento, a densidade de número será corrigida pelo fator de Lorentz:

$$n' \equiv \gamma n, \tag{2.36}$$

ou ainda:

$$n' \equiv \frac{n}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \tag{2.37}$$

Outra grandeza importante para a descrição do comportamento do fluido relativístico, é o fluxo de partículas (ϕ):

$$\phi \equiv \frac{N}{\Delta t \Delta A}, \tag{2.38}$$

em que $\Delta A \equiv$ é a área através da qual o fluido deve escoar.

No referencial S, em que o fluido está em repouso, podemos inferir que não teremos um fluxo, pois as partículas estarão em repouso. Por este motivo, na eq. (2.38), o fluxo é definido em termos de coordenadas de S'.

Pelas equações (2.36) e (2.37), o número de partículas escrito em termos de coordenadas de S' é dado por:

$$N = n'(\Delta x' \Delta y' \Delta z') \tag{2.39a}$$

$$N \equiv \frac{n}{\sqrt{1-(v/c)^2}} v \Delta t (\Delta y' \Delta z'), \tag{2.39b}$$

sendo v a velocidade entre S e S'. E deste modo, podemos denotar o fluxo do fluido como:

$$(\phi)_{x'} \equiv \frac{\left[\frac{n}{\sqrt{1-(v/c)^2}} v \Delta t (\Delta y' \Delta z')\right]}{\Delta t \Delta A} \tag{2.40}$$

em que o subscrito x' indica que o fluxo se dá na direção x', que por sua vez, indica que $\Delta A = \Delta y' \Delta z'$. Com isto, podemos escrever:

$$(\phi)_{x'} \equiv \frac{nv^{x'}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \tag{2.41}$$

o qual denotamos $v = v^{x'}$ para explicitar a direção em que as partículas se movem. De forma análoga, podemos definir o fluxo (ϕ) em eventuais outras direções, como:

$$\phi^{y'} \equiv \frac{nv^{y'}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \tag{2.42a}$$

$$\phi^{z'} \equiv \frac{nv^{z'}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \tag{2.42b}$$

Deste modo, para uma situação em que exista fluxo não nulo no referencial S, podemos escrever:

$$(\phi)_{x^i} \equiv \frac{nv^{x^i}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \tag{2.43}$$

Assim, definimos duas das grandezas importantes para descrever o comportamento de um fluido relativístico: a densidade de número de partículas e o fluxo! Analisando a eq. (2.26) que define a quadrivelocidade e comparando-a com a eq. (2.40), percebemos que as componentes do fluxo são dadas pelo produto da densidade de número de partículas pelas componentes espaciais da quadrivelocidade. Podemos então utilizar esta percepção para generalizar e definir o quadrifluxo: $N^\mu = nU^\mu$.

De maneira explícita, temos:

$$N^\mu = \left(\frac{nc}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \frac{nv^x}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \frac{nv^y}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \frac{nv^z}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right). \tag{2.44}$$

Notemos que a primeira componente nos dá informação sobre um fluxo que é medido através de uma hipersuperfície espacial definida para um determinado instante.

Lembremos ainda que, apesar do quadrifluxo desempenhar um papel importante na descrição do comportamento de um fluido ideal, o propósito de abordarmos a descrição deste sistema físico imerso no espaço-tempo, era evidenciar a necessidade de definir grandezas físicas pertinentes à sua descrição a partir de *entes matemáticos mais complexos do que os quadrivetores*! Estes

referidos entes são chamados de *Tensores*[7]. Para retomar este propósito, consideremos a seguinte situação: a descrição da propriedade densidade de energia do fluido relativístico.

Consideremos que o fluido relativístico é determinado a partir de uma grande quantidade de partículas de mesma massa de repouso m. Lembrando que no contexto da TRR, a energia é dada por $E = mc^2$ em um referencial S (e em um referencial S' é corrigida para $E' = m'c^2 = \gamma mc^2$), podemos definir a densidade de energia (ρ) como:

$$\rho \equiv \frac{E}{V}. \tag{2.45}$$

Em termos do número de partículas, temos:

$$\rho = \frac{Nmc^2}{V}, \tag{2.46}$$

ou, em termos da densidade de número n:

$$\rho = nmc^2, \tag{2.47}$$

que por sua vez, pode ser rearranjada na forma:

$$\rho = (nc)(mc). \tag{2.48}$$

Aqui temos um aspecto relevante a destacar! Consideremos a densidade de energia definida em um referencial S':

$$\rho' \equiv (n'c)(m'c). \tag{2.49}$$

Reescrevendo esta expressão em termos das grandezas definidas em S, obtemos:

$$\rho' = \frac{n}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\frac{m}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \tag{2.50a}$$

$$\rho' = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\,\rho. \tag{2.50b}$$

Verificamos, deste modo, que a lei de transformação da grandeza densidade de energia de um sistema de coordenadas S para outro sistema de coordenadas S' codifica dois fatores de transformação. E isto é uma característica de componentes de tensores de segunda ordem.

Por outro lado, da eq. (2.44) podemos ainda notar que a densidade de energia é dada pelo produto da componente zero do quadrifluxo pela componente zero do quadrimomento. Deste modo, é possível assumirmos que o tensor $\boldsymbol{T}$ cuja

[7] Ao leitor não familiarizado com a ideia de tensores, recomendamos a leitura do apêndice A, o qual trata acerca deste ente matemático.

componente T^{00} se apresenta como a densidade de energia é dado pelo *produto tensorial* entre essas duas grandezas (quadrimomento e quadrifluxo), logo:

$$\boldsymbol{T} = \vec{p} \otimes \vec{N}, \tag{2.51a}$$

$$\boldsymbol{T} = nm\vec{U} \otimes \vec{U}. \tag{2.51b}$$

em que $\vec{p} = m\vec{U}$ e $\vec{N} = n\vec{U}$, ambos quadrivetores. E com isto, temos o chamado de tensor Energia-momento-tensão. Em notação matricial podemos expressá-lo como:

$$T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix}. \tag{2.52}$$

O nome deste tensor se deve à interpretação física de suas componentes.

Diz-se que $T^{\alpha\beta}$ equivale ao fluxo da componente α do quadrimomento através da hipersuperfície de constante x^{β}. Deste modo, as componentes dadas pelo produto entre p^0 e N^{β}, representam o fluxo de energia total através de uma superfície x^{β} constante, (com exceção $T^{00} = p^0 N^0$ que representa a densidade de energia).

Note ainda que para as componentes[8] T^{i0} nós temos representado a densidade de momento, ou seja, temos um fluxo de momento em uma direção cuja componente temporal é perpendicular a ele, isto é, o fluxo através de uma hipersuperfície na qual o tempo é constante.

Para as componentes T^{ij} do tensor, que se dão pelo produto entre o quadrimomento e o quadrifluxo ($p^i N^j = p^i n U^j$), estes, por sua vez, representam o fluxo de momento através de uma superfície x^j constante. Para uma melhor assimilação, tomemos dois elementos desse fluido, sendo um adjacente ao outro, como pode ser visto na figura 2.4 (na próxima página).

Note que na figura 2.4, temos a presença de uma força $\vec{F}$ sobre B, através da superfície de área S, a qual, podemos decompor em duas componentes: uma paralela e outra perpendicular à superfície S (figura 2.5). Podemos escrever tais componentes perpendiculares e paralelas dessa força, como:

$$F_{A\perp} = \frac{dp_{\perp}}{dt}, \tag{2.53a}$$

$$F_{A\parallel} = \frac{dp_{\parallel}}{dt}, \tag{2.53b}$$

[8] Lembrando que se tratando de letras gregas (α, β, γ ...) estamos lidando com um espaço quadrimensional, já se tratando do alfabeto romano (i, j, k ...) estamos no espaço Euclidiano tridimensional.

em que $p_\perp \equiv$ componente perpendicular do momento e $p_\parallel \equiv$ componente paralela do momento.

Figura 2.4: Representação da força $\vec{F}_A$ atuando em B

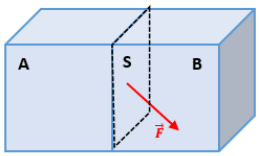
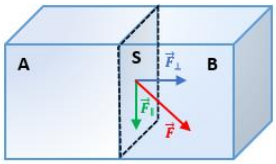


Figura 2.5: Representação das componentes da força $\vec{F}_A$ em $F_{A\perp}$ e $F_{A\parallel}$.



Fonte: Medeiros (2022)

Destas equações, podemos escrever:

$$dp_\perp = F_{A\perp} dt\,, \tag{2.54a}$$

$$dp_\parallel = F_{A\parallel} dt\,. \tag{2.54b}$$

De acordo com a definição de fluxo de alguma grandeza física, sabemos que se trata da análise desta grandeza quando perpassa uma determinada área por unidade de tempo, e com isto, podemos dizer que o fluxo de momento pode ser representado por:

$$\frac{dp_\perp}{Adt}\ e\ \frac{dp_\parallel}{Adt}\,. \tag{2.55}$$

Utilizando as eq. 2.54a e 2.55, temos:

$$\frac{dp_\perp}{Adt} = \frac{F_{A\perp} dt}{Adt} \qquad \frac{dp_{||}}{Adt} = \frac{F_{A||} dt}{Adt} \tag{2.56a}$$

$$\frac{dp_\perp}{Adt} = \frac{F_{A\perp}}{A} \qquad \frac{dp_{||}}{Adt} = \frac{F_{A||}}{A} \tag{2.56b}$$

$$\frac{dp_\perp}{Adt} = p \qquad \frac{dp_{||}}{Adt} = T = 0 \tag{2.56c}$$

em que $p \equiv$ pressão; $T \equiv$ tensão de cisalhamento. Na segunda linha utilizamos o fato de que, por se tratar de um fluido ideal e, portanto, não-viscoso, a componente $F_{A||} = 0\ N$.

Agora, podemos interpretar a pressão como sendo um fluxo de momento linear através de uma superfície, isto, quando a força em questão é perpendicular à superfície analisada. Deste modo, na eq. (2.52), todas as componentes do tensor T^{ij}, com $i = j$, representam a pressão. Nos casos em que $i \neq j$, temos: $T^{ij} = 0$.

Em se tratando do fluido ideal relativístico, e levando em consideração que todas as suas partículas estão em repouso no referencial S, podemos reescrever a eq. (2.52), como:

$$T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \tag{2.57}$$

Podemos ainda reescrever o tensor Energia-Momentum-Tensão de uma forma mais compacta:

$$T^{\alpha\beta} = \left(\frac{\rho + p}{c^2}\right) U^{\alpha} U^{\beta} + p\eta^{\alpha\beta}. \tag{2.58}$$

em que $\eta^{\alpha\beta}$ se refere à métrica do espaço tempo de Minkowski. Essa expressão só é válida para um fluido ideal em repouso.

Vemos assim, que no contexto de descrição de propriedades de sistemas físicos complexos na TRR, de fato, necessita-se de um formalismo matemático que forneça entes mais sofisticados, e para sua devida manipulação, uma estrutura algébrica que a torne coerente; tal estrutura é chamada de álgebra tensorial.

O tensor Energia-momento-tensão desempenha um papel fundamental na descrição de fenômenos envolvendo a dinâmica de meios contínuos no espaço-tempo. Além dele aglutinar em si, através de suas componentes, várias grandezas físicas importantes, ainda é possível mostrar que ele satisfaz a uma lei de conservação (COLLIER, 2017):

$$\frac{\partial\left(T^{\alpha\beta}\right)}{\partial x^{\alpha}} = T^{\alpha\beta}{}_{,\alpha} = 0\,, \tag{2.59}$$

o que faz dele uma grandeza física muito importante.

2.2. SOBRE A GENERALIZAÇÃO DA TEORIA DA RELATIVIDADE RESTRITA

Segundo Crawford (2005), por bastante tempo Einstein ficou insatisfeito com a TRR, e manifestava a necessidade de generalizá-la de modo a incluir a descrição de movimentos arbitrários, isto é, que envolvessem referenciais não-inerciais. Uma das ideias chaves que possibilitaram este desenvolvimento, levando ao que chamamos de TRG, foi o chamado princípio da equivalência (PE).

Antes de abordá-lo, vamos relembrar o que são referenciais inerciais e não-inerciais. Dizemos que um referencial é inercial, quando temos nele uma partícula livre, e que ela se encontra em Movimento Retilíneo Uniforme (MRU) ou em repouso. Se em um referencial, a partícula livre possuir uma aceleração, dizemos que se trata de um referencial não-inercial.

Dado este esclarecimento, consideremos uma situação em que um elevador fechado se encontra abandonado no espaço, de modo que ele não se encontra perto de alguma estrela ou planeta que possa lhe imprimir a ação de algum campo gravitacional $\vec{g}$. Imagine que nesse momento, foram ligados propulsores no elevador (digamos ser possível isso no espaço) e que ela adquira uma aceleração, como mostrado na figura 2.6, ou seja, este se torna um referencial não-inercial. O observador dentro da cabine terá a sensação de que o piso está a lhe empurrar para cima. Porém, este efeito é análogo à presença de um campo gravitacional $\vec{g}$ que lhe puxa para baixo, caso este estivesse nas proximidades da Terra, como é visto na figura 2.7.

Figura 2.6: Cabine acelerada para cima

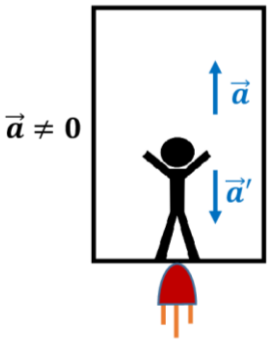
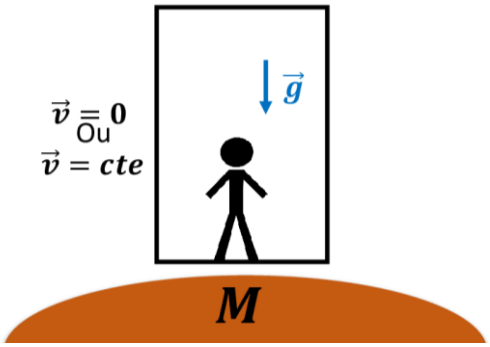


Figura 2.7: Cabine na presença de um campo gravitacional $\vec{g}$.

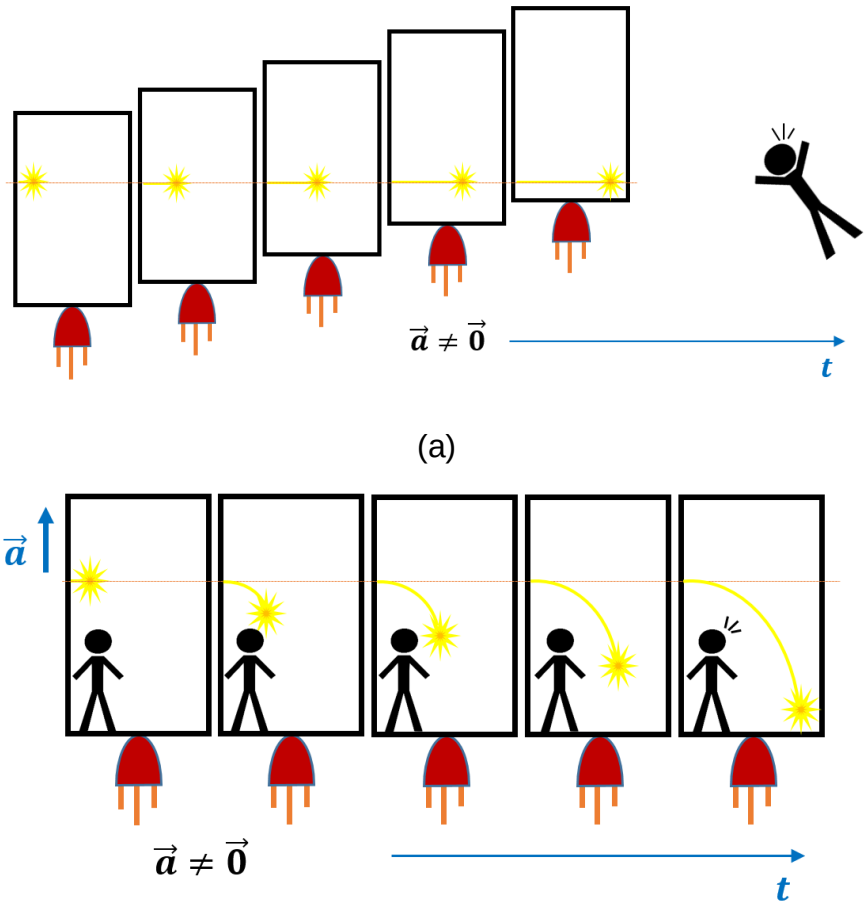


Fonte: Medeiros (2022)

De acordo com o princípio da equivalência de Einstein, se a cabine for suficientemente pequena (princípio da localidade), é impossível que o passageiro da cabine consiga fazer a distinção entre as duas possibilidades sem que existam informações de fora. Deste modo, podemos dizer que existe uma equivalência entre um referencial não-inercial nas condições mencionadas e um referencial inercial na presença de um campo gravitacional, conforme é visto nas figuras 2.6 e 2.7.

Consideremos agora a análise de uma situação semelhante, porém, agora com o disparo de um raio de luz dentro da cabine acelerada. Nesta situação, para um observador que se encontra flutuando no espaço, a luz irá descrever a situação vista na figura 2.8a, em que a luz percorre uma trajetória reta.

Figura 2.8: (a) Observador flutuando no espaço; (b) Observador dentro do elevador acelerado



Fonte: Medeiros (2022)

No entanto, para um observador dentro da cabine, a trajetória executada pela luz parecerá curva (ver figura 2.8b).

Uma vez que este referencial não-inercial é equivalente a um referencial inercial na presença de um campo gravitacional, e que a luz não possui massa para justificar algum tipo de interação gravitacional como na perspectiva newtoniana, presumiu-se que a trajetória curva da luz se devia a uma curvatura intrínseca do próprio espaço-tempo. E como a fonte do campo gravitacional seria a própria Terra, inferiu-se que essa distribuição de matéria (que no contexto relativístico também engloba energia) é a responsável por induzir tal curvatura.

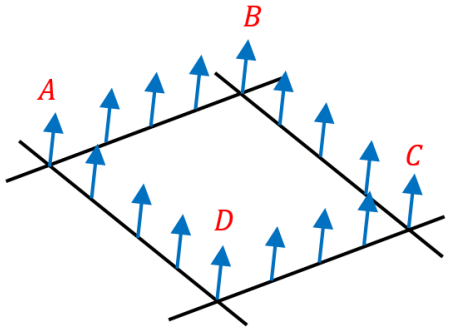
Desta forma, a partir destes (mas também outros) argumentos, foi possível se elaborar não apenas uma teoria que generalizasse a TRR para referenciais não-inerciais, mas também uma nova teoria da gravitação.

2.3. SOBRE A DESCRIÇÃO DE ESPAÇOS COM CURVATURA

Para se descrever a relação de como uma distribuição de matéria/energia pode induzir uma curvatura no espaço, torna-se necessário compreendermos quais os aspectos mais importantes a respeito da descrição de um espaço dotado de curvatura, que muitas vezes é chamado de Variedade.

Para identificarmos se uma variedade possui curvatura, podemos utilizar a análise do transporte paralelo de um vetor em uma trajetória fechada. Considere a situação representada pela figura 2.10, em que um vetor parte do ponto A e é deslocado em *loop* de maneira sempre localmente perpendicular[9] até o ponto do qual partiu.

Figura 2.9: Transporte paralelo em um plano.



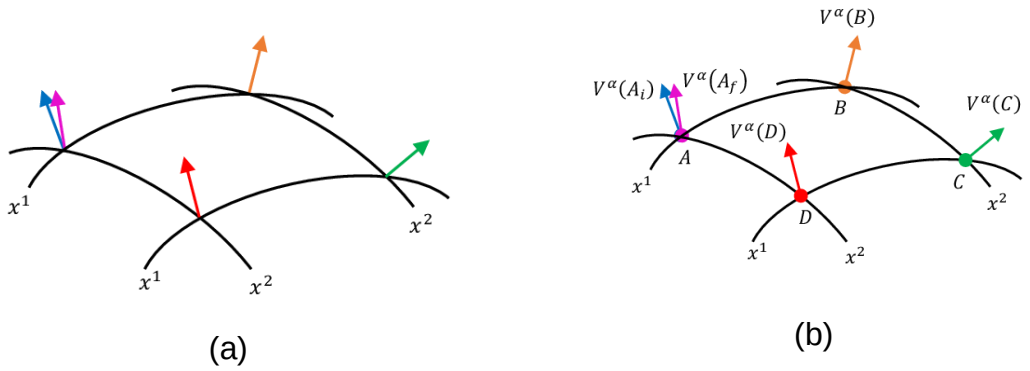
Fonte: Medeiros (2022)

Note que o vetor permaneceu o mesmo durante todo o trajeto, ou seja, não mudou seu módulo, direção e sentido. Isto indica que o espaço no qual o vetor foi deslocado é plano. Por outro lado, se analisarmos um vetor que se desloca por meio de um transporte paralelo em *loop* em um espaço com curvatura não-nula, notamos um resultado diferente (Ver figura 2.10 na próxima página).

Veja que na figura 2.10a, após o deslocamento mantendo o vetor sempre localmente perpendicular às curvas sobre as quais é transportado para formar o *loop*, o vetor na chegada não coincide com o da saída. Esta diferença evidencia o fato de o vetor estar em um espaço curvo e, portanto, podemos tomá-la como um lastro para se descrever a curvatura do espaço. Vamos então determinar essa diferença nos vetores.

[9] A escolha da perpendicularidade se deve a um efeito de visualização, mas que na verdade esse vetor tem de ser paralelo e pertencente ao espaço tangente ao ponto em que é definido.

Figura 2.10: (a) Análise do transporte paralelo em loop do vetor $\vec{V}$; (b)Transporte paralelo em loop.



Fonte: Medeiros (2022)

Para isto, consideremos a figura 2.10b em que os pontos *A, B, C* e *D* demarcam as intersecções entre as curvas x^1 e x^2 através das quais o vetor $\vec{V}$ sofrerá o transporte paralelo. Consideremos também que por se tratar de um espaço curvo, os vetores de base em termos dos quais se representa o vetor $\vec{V}$ não são constantes, e por isso, não se pode tomar a diferença entre os vetores diretamente. Deste modo, para avaliarmos a situação de interesse de forma coerente, vamos nos utilizar da condição de que a derivada covariante do vetor $\vec{V}$ deve ser localmente nula, de forma a garantir o transporte paralelo, e a partir disto, vamos calcular o vetor $\vec{V}$ após completar o *loop*.

Da definição de derivadas covariante e tomando a regra da cadeia para que seja avaliada ao longo de uma curva genericamente parametrizada por λ, temos:

$$\frac{dx^j}{d\lambda}\left(\frac{\partial V^k}{\partial x^j} + V^i\Gamma^{\mathrm{k}}_{ij}\right) = 0\,, \tag{2.60a}$$

$$\frac{dV^k}{d\lambda} + \frac{dx^j}{d\lambda}V^i\Gamma^{\mathrm{k}}_{ij} = 0\,. \tag{2.60b}$$

Em que $\Gamma^k_{ij} \equiv$ Símbolos de Christoffel[10], e tomando a eq. (2.60a), vamos analisar o transporte paralelo de $\vec{V}$ na trajetória de A para B, através da curva $\lambda = x^1$. Readequando os índices para este caso, temos:

$$\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^1} + V^\mu\Gamma^\alpha_{\mu 1} = 0\,, \tag{2.61}$$

ou ainda:

$$\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^1} = -V^\mu\Gamma^\alpha_{\mu 1}\,. \tag{2.62}$$

[10] Nomeadas assim por Elwin Bruno Christoffel, trata-se de um ente matemático que representa expressões em coordenadas espaciais para a conexão de Levi-Civita derivada do tensor métrico, para mais detalhes, consultar o apêndice.

Por sua vez, integrando a eq. (2.62), no trecho de $A \to B$, teremos:

$$\int_A^B \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^1} dx^1 = -\int_A^B V^\mu \Gamma^\alpha_{\mu 1}\, dx^1 \,. \tag{2.63}$$

Resolvendo o primeiro membro da igualdade e tomando o teorema fundamental do cálculo, temos:

$$\mathrm{V}^\alpha(B) - V^\alpha(A) = -\int_A^B V^\mu \Gamma^\alpha_{\mu 1}\, dx^1 \,, \tag{2.64}$$

ou ainda:

$$\mathrm{V}^\alpha(B) = V^\alpha(A_i) - \int_A^B V^\mu \Gamma^\alpha_{\mu 1}\, dx^1 \,. \tag{2.65}$$

Agora, tomando o mesmo procedimento para os transportes paralelos de $B \to C, C \to D$ e $D \to A$, teremos:

$$\mathrm{V}^\alpha(C) = V^\alpha(B) - \int_C^D V^\mu \Gamma^\alpha_{\mu 2}\, dx^2 \,. \tag{2.66}$$

$$\mathrm{V}^\alpha(D) = V^\alpha(C) - \int_D^A V^\mu \Gamma^\alpha_{\mu 1}\, dx^1 \,. \tag{2.67}$$

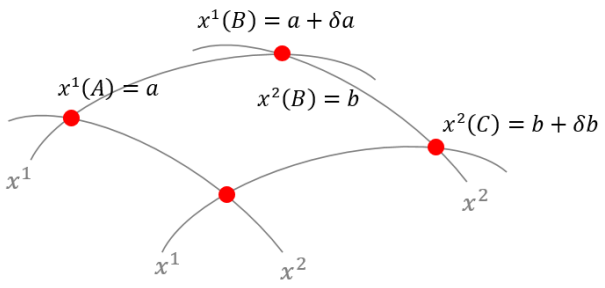
$$\mathrm{V}^\alpha(A_f) = V^\alpha(D) - \int_B^C V^\mu \Gamma^\alpha_{\mu 2}\, dx^2 \,. \tag{2.68}$$

Uma vez que obtivemos o vetor em sua posição final $\mathrm{V}^\alpha(A_f)$, precisamos tomar a diferença: $V^\alpha(A_f) - V^\alpha(A_i)$. Tomando as expressões anteriores e reorganizando os termos, podemos ter o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} V^\alpha(A_f) - V^\alpha(A_i) = \\ &= -\int_A^B V^\mu \Gamma^\alpha_{\mu 1}\, dx^1 - \int_B^C V^\mu \Gamma^\alpha_{\mu 2}\, dx^2 - \int_C^D V^\mu \Gamma^\alpha_{\mu 1}\, dx^1 \\ &- \int_D^A V^\mu \Gamma^\alpha_{\mu 2}\, dx^2 \,. \end{aligned} \tag{2.69}$$

Para determinar essa diferença, precisamos resolver essas integrais para todos os percursos com os seus símbolos de Christoffel. Antes, vamos fazer um ajuste nos limites de integração, de modo que tenhamos um deslocamento infinitesimal entre os pontos.

Figura 2.11: Deslocamento infinitesimal entre os pontos para mudarmos os limites de integração



Fonte: Medeiros (2022)

Na figura 2.11, definimos que o vetor transportado na curva x^1 saindo de A até *B,* terá um deslocamento δa, saindo de a para $a + \delta a$. E na curva x^2, saindo de *B* até *C*, terá um deslocamento de δb, saindo de b até $b + \delta b$. Com isto, podemos reescrever os limites de integração na eq. (2.69), como:

$$\delta V^\alpha = -\int_a^{a+\delta a} V^\mu \Gamma^\alpha_{\mu 1}\, dx^1 - \int_b^{b+\delta b} V^\mu \Gamma^\alpha_{\mu 2}\, dx^2 - \int_{a+\delta a}^{a} V^\mu \Gamma^\alpha_{\mu 1}\, dx^1 - \int_{b+\delta b}^{b} V^\mu \Gamma^\alpha_{\mu 2}\, dx^2 \,. \tag{2.70}$$

Pela propriedade de integrais: $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$, temos:

$$\delta V^\alpha = -\int_a^{a+\delta a} V^\mu \Gamma^\alpha_{\mu 1}\, dx^1 - \int_b^{b+\delta b} V^\mu \Gamma^\alpha_{\mu 2}\, dx^2 + \int_a^{a+\delta a} V^\mu \Gamma^\alpha_{\mu 1}\, dx^1 + \int_b^{b+\delta b} V^\mu \Gamma^\alpha_{\mu 2}\, dx^2 \,. \tag{2.71}$$

Veja que se estivéssemos realizando uma integral simples, δV^α seria nulo, mas para este caso, os integrandos são diferentes, uma vez que são avaliados em curvas distintas. A partir disso, vamos dizer, respectivamente, que: $V^\mu \Gamma^\alpha_{\mu 1}$ é avaliado em b; $V^\mu \Gamma^\alpha_{\mu 2}$ é avaliado em $a + \delta a$; $V^\mu \Gamma^\alpha_{\mu 1}$ é avaliado em $b + \delta b$; e $V^\mu \Gamma^\alpha_{\mu 2}$ é avaliado em a.

Com isso, iremos escrever de forma explícita na eq. (2.71):

$$\delta V^\alpha = -\int_a^{a+\delta a} V^\mu(b) \Gamma^\alpha_{\mu 1}(b)\, dx^1 - \int_b^{b+\delta b} V^\mu(a+\delta a) \Gamma^\alpha_{\mu 2}(a+\delta a)\, dx^2 + \int_a^{a+\delta a} V^\mu(b+\delta b) \Gamma^\alpha_{\mu 1}(b+\delta b)\, dx^1 + \int_b^{b+\delta b} V^\mu(a) \Gamma^\alpha_{\mu 2}(a)\, dx^2 \,. \tag{2.72}$$

Nós podemos reescrever essa integral levando em consideração as variáveis de integração, de modo que:

$$\delta V^{\alpha} = \int_{a}^{a+\delta a} \left[-V^{\mu}(b)\Gamma^{\alpha}_{\mu 1}(b) + V^{\mu}(b+\delta b)\Gamma^{\alpha}_{\mu 1}(b+\delta b)\right] dx^{1} + \int_{b}^{b+\delta b} \left[V^{\mu}(a)\Gamma^{\alpha}_{\mu 2}(a) - V^{\mu}(a+\delta a)\Gamma^{\alpha}_{\mu 2}(a+\delta a)\right] dx^{2} \,. \tag{2.73}$$

Vamos agora tomar a expansão em série de Taylor para os termos que apresentam o acréscimo de deslocamento e desprezando as expansões de ordem superior, temos:

$$V^{\mu}(b+\delta b) \approx V^{\mu}(b) + \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{2}}\delta b \,, \tag{2.74a}$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu 1}(b+\delta b) \approx \Gamma^{\alpha}_{\mu 1}(b) + \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu 1}}{\partial x^{2}}\delta b, \tag{2.74b}$$

$$V^{\mu}(a+\delta a) \approx V^{\mu}(a) + \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{1}}\delta a \,, \tag{2.74c}$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu 2}(a+\delta a) \approx \Gamma^{\alpha}_{\mu 2}(a) + \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu 2}}{\partial x^{1}}\delta a. \tag{2.74d}$$

Substituindo as eq. (2.74b) e (2.74d) na eq. (2.73), temos, após algumas manipulações algébricas:

$$\delta V^{\alpha} = \int_{a}^{a+\delta a} \left\{\left[V^{\mu}(b)\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu 1}}{\partial x^{2}} + \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{2}}\Gamma^{\alpha}_{\mu 1}(b)\right]\delta b + \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{2}}\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu 1}}{\partial x^{2}}\delta b^{2}\right\} dx^{1} - \int_{b}^{b+\delta b} \left\{\left[V^{\mu}(a)\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu 2}}{\partial x^{1}} + \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{1}}\Gamma^{\alpha}_{\mu 2}(a)\right]\delta a + \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{1}}\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu 2}}{\partial x^{1}}\delta a^{2}\right\} dx^{2} \,. \tag{2.75}$$

Note que temos dois termos quadráticos em nossa expressão, e lembrando que cada um desses termos representam uma distância infinitesimal que podemos desprezar, pelo mesmo argumento de quando tomamos os termos de ordens superiores a unidade como sendo desprezíveis na série de Taylor. Logo:

$$\delta V^{\alpha} \approx \int_{a}^{a+\delta a} \left\{\left[V^{\mu}(b)\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu 1}}{\partial x^{2}} + \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{2}}\Gamma^{\alpha}_{\mu 1}(b)\right]\delta b\right\} dx^{1} - \int_{b}^{b+\delta b} \left\{\left[V^{\mu}(a)\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu 2}}{\partial x^{1}} + \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{1}}\Gamma^{\alpha}_{\mu 2}(a)\right]\delta a\right\} dx^{2} \,. \tag{2.76}$$

A partir da eq. (2.76), podemos ver os termos do integrando como a regra do produto da derivada e retirando as letras que indicam as curvas onde estavam os vetores, vamos reescrevê-lo como:

$$\delta V^{\alpha} \approx \int_{a}^{a+\delta a}\left[\frac{\partial}{\partial x^{2}}\left(\Gamma^{\alpha}_{\mu 1}V^{\mu}\right)\delta b\right]dx^{1} - \int_{b}^{b+\delta b}\left[\frac{\partial}{\partial x^{1}}\left(\Gamma^{\alpha}_{\mu 2}V^{\mu}\right)\delta a\right]dx^{2}\,. \tag{2.77}$$

Note que na eq. (2.77), o integrando das duas integrais, são constantes em relação à variável de integração, assim:

$$\delta V^{\alpha} \approx \left[\frac{\partial}{\partial x^{2}}\left(\Gamma^{\alpha}_{\mu 1}V^{\mu}\right)\delta b\right]\int_{a}^{a+\delta a}dx^{1} - \left[\frac{\partial}{\partial x^{1}}\left(\Gamma^{\alpha}_{\mu 2}V^{\mu}\right)\delta a\right]\int_{b}^{b+\delta b}dx^{2}\,. \tag{2.78}$$

Resolvendo as integrais e colocando os termos iguais em evidência:

$$\delta V^{\alpha} \approx \left[\frac{\partial}{\partial x^{2}}\left(\Gamma^{\alpha}_{\mu 1}V^{\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial x^{1}}\left(\Gamma^{\alpha}_{\mu 2}V^{\mu}\right)\right]\delta a\delta b\,, \tag{2.79a}$$

$$\delta V^{\alpha} \approx \left[\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu 1}}{\partial x^{2}}V^{\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu 1}\frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{2}} - \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu 2}}{\partial x^{1}}V^{\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu 2}\frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{1}}\right]\delta a\delta b\,. \tag{2.79b}$$

Da eq. (2.62), que descreve o transporte paralelo, podemos reescrever a equação acima como:

$$\delta V^{\alpha} \approx \left[\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu 1}}{\partial x^{2}}V^{\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu 1}\Gamma^{\mu}_{\nu 2}V^{\nu} - \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu 2}}{\partial x^{1}}V^{\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu 2}\Gamma^{\mu}_{\nu 1}V^{\nu}\right]\delta a\delta b\,. \tag{2.80}$$

Note que os índices dos vetores que acompanham os símbolos de Christoffel são índices mudos, ou seja, denotam uma soma, de modo que podemos realizar uma permuta de índices (trocaremos ν por μ) em seguida, reorganizando os termos:

$$\delta V^{\alpha} \approx \left[\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu 1}}{\partial x^{2}}V^{\mu} - \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu 2}}{\partial x^{1}}V^{\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu 1}\Gamma^{\nu}_{\mu 2}V^{\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\nu 2}\Gamma^{\nu}_{\mu 1}V^{\mu}\right]\delta a\delta b\,. \tag{2.81}$$

Com essa mudança, podemos colocar o termo V^{μ} em evidência, e reescrever as variações em a e b como função de $\delta a = \delta x^{1}$ e $\delta b = \delta x^{2}$, logo:

$$\delta V^{\alpha} = \left[\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu 1}}{\partial x^{2}} - \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu 2}}{\partial x^{1}} - \Gamma^{\alpha}_{\nu 1}\Gamma^{\nu}_{\mu 2} + \Gamma^{\alpha}_{\nu 2}\Gamma^{\nu}_{\mu 1}\right]V^{\mu}\delta x^{1}\delta x^{2}\,. \tag{2.82}$$

Todo esse termo dentro dos colchetes, na eq. (2.82) deve ser interpretado como um tensor de ordem 4, para que seja satisfeita a igualdade acima. Com isto, escrevemos:

$$\delta V^{\alpha} = \left[R^{\alpha}{}_{\mu 21}\right]V^{\mu}\delta x^{1}\delta x^{2}\,, \tag{2.83}$$

em que:

$$R^{\alpha}{}_{\mu 21} \equiv \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu 1}}{\partial x^{2}} - \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu 2}}{\partial x^{1}} - \Gamma^{\alpha}_{\nu 1}\Gamma^{\nu}_{\mu 2} + \Gamma^{\alpha}_{\nu 2}\Gamma^{\nu}_{\mu 1}\,. \tag{2.84}$$

Na eq. (2.84) faremos uma substituição dos índices livres para que possamos reescrever o tensor em notação indicial. Deste modo:

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} \equiv \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\nu} \,. \tag{2.85}$$

Com isso temos exposto o tensor de Riemann, que será de extrema importância para estudarmos a relatividade geral. Vamos rescrever a eq. (2.85) com as alterações:

$$\delta V^{\alpha} = R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} V^{\beta} \delta x^{\mu} \delta x^{\nu}. \tag{2.86}$$

Se estivermos analisando uma variedade cujo resultado avaliado a partir do tensor de Riemann for nulo, isto é, em todas as suas componentes, teremos um espaço plano. Assim sua importância se torna explícita, pois este será responsável por codificar as informações acerca da curvatura do espaço. Vamos ressaltar algumas propriedades que serão úteis quando estivermos analisando esse tensor em sistemas de coordenadas de N-dimensões.

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = -R^{\alpha}{}_{\beta\nu\mu} \tag{2.87a}$$

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = g^{\alpha\lambda} R_{\lambda\beta\nu\mu} \tag{2.87b}$$

$$R_{\lambda\beta\nu\mu} = -R_{\beta\lambda\nu\mu} \tag{2.87c}$$

$$R_{\lambda\beta\nu\mu} = R_{\nu\mu\lambda\beta} \tag{2.87d}$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0 \tag{2.87e}$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} = 0 \tag{2.87f}$$

A eq. (2.87e) se dá quando multiplicamos cada uma das componentes do tensor de Riemann da soma pela métrica covariante ($g_{\alpha\lambda}$), baixando o índice alfa. Já a eq. (2.87f), é denominada Identidade de Bianchi, para tal devemos considerar que o tensor de Riemann se encontra em um espaço localmente inercial de modo que os símbolos da conexão de Christoffel são nulos ($\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = 0$) (SCHUTZ, 2009).

2.4. A RELAÇÃO DA CURVATURA DO ESPAÇO COM A DISTRIBUIÇÃO DE MATÉRIA/ENERGIA.

Conforme já mencionado, a ideia fundamental da TRG se trata de que uma distribuição de matéria/energia pode imprimir uma curvatura ao espaço no qual ela está situada. Como quem descreve a curvatura do espaço é o tensor de Riemann, e quem descreve o conteúdo da distribuição de matéria/energia é o tensor energia-

momentum-tensão, torna-se necessário que se estabeleça uma conexão entre tais grandezas, a fim de se descrever a referida relação.

Para isto, temos de considerar a diferença da natureza de ambas as grandezas. O tensor de Riemann se trata de um tensor de ordem 4, enquanto o tensor energia-momentum-tensão se trata de um tensor de ordem 2. Neste caso, para estabelecermos a relação desejada, vamos manipular o tensor de Riemann de modo a correlacioná-lo a algum tensor de ordem 2, e que de alguma forma possua alguma propriedade que possa vinculá-lo ao tensor Energia-momentum.

A propriedade deste último que pode servir de lastro para designação do primeiro, pode ser estimada a partir da generalização da eq. (2.86), que descreve a conservação do tensor energia-momentum em um espaço plano, para que tal propriedade seja também válida em um espaço com curvatura, e com isto, possamos escrever:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0 \,. \tag{2.88}$$

Deste modo, o tensor correlacionado ao tensor de Riemann, que contém informações sobre a geometria do espaço, deve ser um tensor de ordem 2 e cuja derivada covariante deva ser nula. Para determiná-lo, é útil definirmos previamente dois outros tensores: o tensor de Ricci e o escalar de Ricci.

O tensor de Ricci é obtido a partir da contração do tensor de Riemann, obtido quando multiplicamos sua forma covariante pela métrica contravariante: $g^{\alpha\mu}R_{\alpha\beta\mu\nu}$, de modo que obtemos:

$$R^{\mu}{}_{\beta\mu\nu} = R_{\beta\nu} \,. \tag{2.89a}$$

Esta operação é capaz de diminuir em dois a ordem do tensor. Lembrando que essa contração só pode ser feita entre o primeiro e o terceiro índice, outras contrações acabam reduzindo a zero ou à $\pm R_{\beta\nu}$, pois existe uma relação antissimétrica de $R_{\alpha\beta\mu\nu}$. Se considerarmos a contração do tensor de Ricci, teremos o chamado de escalar de Ricci:

$$g^{\beta\nu}R_{\beta\nu} = R^{\beta}{}_{\beta} = R \,. \tag{2.89b}$$

Definidos estes dois tensores, retomemos nosso propósito inicial, para isso, vamos realizar duas operações de contração na eq. (2.87f), a identidade de Bianchi:

$$g^{\alpha\mu}\left(R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu}\right) = 0 \,, \tag{2.90a}$$

$$R_{\beta\nu;\lambda} + R^{\mu}{}_{\beta\lambda\mu;\nu} + R^{\mu}{}_{\beta\nu\lambda;\mu} = 0 \,. \tag{2.90b}$$

Com isto, usando a propriedade antissimétrica dos últimos índices no tensor de Riemann na eq. (2.89a), podemos garantir outra contração, uma vez que ajustamos a igualdade entre o primeiro e o terceiro índices:

$$R^{\mu}{}_{\beta\mu\nu;\lambda} - R^{\mu}{}_{\beta\mu\lambda;\nu} + R^{\mu}{}_{\beta\nu\lambda;\mu} = 0\,, \tag{2.91a}$$

$$R_{\beta\nu;\lambda} - R_{\beta\lambda;\nu} + R^{\mu}{}_{\beta\nu\lambda;\mu} = 0\,. \tag{2.91b}$$

Agora, vamos realizar a segunda operação de contração com o resultado apresentado na eq. (2.93b), lembrando que essas operações de contração só são permitidas uma vez que o tensor métrico entra da derivada covariante presente na identidade de Bianchi:

$$g^{\beta\nu}\left(R_{\beta\nu;\lambda} - R_{\beta\lambda;\nu} + R^{\mu}{}_{\beta\nu\lambda;\mu}\right) = 0\,, \tag{2.92a}$$

$$R_{;\lambda} - R^{\nu}{}_{\lambda;\nu} + R^{\mu\nu}{}_{\nu\lambda;\mu} = 0\,. \tag{2.92b}$$

Na eq. (2.94b), podemos usar mais uma vez a propriedade antissimétrica no terceiro termo da soma, logo:

$$R_{;\lambda} - R^{\nu}{}_{\lambda;\nu} - R^{\nu\mu}{}_{\nu\lambda;\mu} = 0\,, \tag{2.93a}$$

$$R_{;\lambda} - R^{\mu}{}_{\lambda;\mu} - R^{\nu}{}_{\lambda;\nu} = 0\,. \tag{2.93b}$$

Note que na equação 2.95b temos o ν como índice mudo, logo, iremos trocá-lo por μ:

$$R_{;\lambda} - R^{\mu}{}_{\lambda;\mu} - R^{\mu}{}_{\lambda;\mu} = 0 \tag{2.94a}$$

$$R_{;\lambda} - 2R^{\mu}{}_{\lambda;\mu} = 0 \tag{2.94b}$$

Na expressão acima, iremos agora dividir todos os membros da equação por (-2), logo:

$$R^{\mu}{}_{\lambda;\mu} - \frac{1}{2}R_{;\lambda} = 0\,. \tag{2.95}$$

Com a eq. (2.95), iremos realizar algumas manipulações algébricas. Relembrando a definição do delta de Kronecker a partir da métrica apresentado no apêndice A, podemos reescrever o termo negativo da expressão como:

$$R^{\mu}{}_{\lambda;\mu} - \frac{1}{2}g^{\mu}{}_{\lambda}R_{;\mu} = 0\,. \tag{2.96}$$

Para que seja possível trabalharmos com uma métrica com índices superiores, vamos levantar esse índice λ multiplicando tudo pela métrica $g^{\nu\lambda}$:

$$g^{\nu\lambda}\left(R^{\mu}{}_{\lambda;\mu} - \frac{1}{2}g^{\mu}{}_{\lambda}R_{;\mu}\right) = 0\,, \tag{2.97a}$$

$$R^{\mu\nu}{}_{;\mu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R_{;\mu} = 0\,. \tag{2.97b}$$

Colocando a derivada covariante em evidência, podemos reescrever a expressão acima como:

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R\right)_{;\mu} = 0 \,. \tag{2.98}$$

Note que encontramos uma correlação entre os dois tensores, uma vez que a derivada covariante do tensor de *Energia-Momentum-Tensão* também é nula, de acordo com a propriedade explorada anteriormente. Mas antes, vamos reescrever o termo derivado como:

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \,. \tag{2.99}$$

Essa expressão é conhecida por tensor de Einstein. Este tensor de segunda ordem carrega em si informações acerca da curvatura do espaço, pois, sua composição parte do tensor de Ricci e de seu escalar, além de depender da métrica. Retornando ao nosso ponto acerca da derivada covariante ser nula:

$$G^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0 \,. \tag{2.100}$$

Então, é razoável postular que existe uma proporção entre ambos, ou seja, da eq. (2.59), temos:

$$G^{\mu\nu} \propto T^{\mu\nu} \,. \tag{2.101a}$$

$$G^{\mu\nu} = kT^{\mu\nu} \,. \tag{2.101b}$$

Em que $k \equiv$ constante de proporcionalidade. Deste modo, podemos reescrever de maneira explícita:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = kT^{\mu\nu} \,, \tag{2.102a}$$

que é conhecida como a equação de Einstein, e por sua vez, é a equação que designa a relação entre a curvatura do espaço e a distribuição de matéria/energia, mencionada desde o início deste capítulo. Ela também pode ser vista com suas componentes covariantes:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = kT_{\mu\nu} \,. \tag{2.102b}$$

2.5. UMA VERIFICAÇÃO DA VALIDADE DA EQUAÇÃO DE EINSTEIN.

Para que uma determinada nova Lei, ou Teoria física, seja aceita pela comunidade científica, ela deve no mínimo atender a dois requisitos: ser compatível com resultados já verificados e explicados por outras teorias, e deve ser capaz de

descrever fenômenos inéditos ainda não explicados ou previstos, também por outras teorias.

Deste modo, a TRG, enquanto uma nova teoria da gravitação, deve ser compatível com resultados fornecidos pela teoria newtoniana para determinados casos. Para verificarmos isto, consideremos a análise do movimento de um corpo que está imerso em um campo gravitacional, na perspectiva newtoniana. De acordo com esta teoria, a força que governa a dinâmica do referido corpo, neste contexto, é dada por:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{g} = -Gm\frac{M}{r^2}\hat{r}\ . \tag{2.103}$$

em que $m \equiv$ massa do corpo; $M \equiv$ massa do outro corpo; $r \equiv$ distância que separa os corpos; $G \equiv$ Constante da gravitação universal e $\vec{a} = \vec{g} \equiv$ vetor campo gravitacional $= -GM\hat{r}/(r^2)$.

Sendo $\vec{g}$ um campo conservativo, podemos reescrevê-lo como o gradiente de uma função escalar:

$$\vec{g} = -\nabla\Phi\ , \tag{2.104}$$

uma vez que o rotacional desse campo é nulo. Φ é chamado de potencial gravitacional. Devido a igualdade: $\vec{a} = \vec{g}$, podemos escrever:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\nabla\Phi\ . \tag{2.105}$$

Esta equação nos diz que uma vez conhecido o potencial gravitacional, podemos resolver tal equação diferencial de modo a determinar funções que descrevam a trajetória do movimento do corpo quando imerso no campo gravitacional.

Por outro lado, numa perspectiva da TRG, a equação que possibilita a descrição da trajetória de um corpo livre de influências no espaço-tempo é conhecida por equação da geodésica[11]:

$$\frac{d^2x^\rho}{d\lambda^2} + \Gamma^\rho_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0\ . \tag{2.106}$$

Uma geodésica, no contexto de espaços curvos, pode ser entendida como a curva de menor distância entre dois pontos, ou seja, a curva mais reta possível. Deste modo, temos que $\lambda \equiv$ parâmetro afim da curva.

Intuitivamente, devemos esperar que o resultado da equação acima, com algumas considerações, deve ser compatível com a eq. (2.105). Consideremos

[11] Caso seja necessário, ver dedução no apêndice C.

então uma situação em que as partículas se movem lentamente, ou seja, estão com velocidade muito abaixo da velocidade da luz:

$$\frac{dx^i}{dt} \ll c\,. \tag{2.107}$$

Por meio da regra da cadeia, podemos reescrever a expressão acima como:

$$\frac{dx^i}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} \ll c\,, \tag{2.108a}$$

$$\frac{dx^i}{d\tau} \ll c\frac{dt}{d\tau}\,. \tag{2.108b}$$

Note que na expressão acima, podemos incorporar a constante na derivada para termos a coordenada x^0, de modo que

$$\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{d(ct)}{d\tau}\,, \tag{2.109a}$$

$$\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dx^0}{d\tau}\,. \tag{2.109b}$$

Consideremos também que o campo gravitacional ao redor dessa partícula é fraco e estático, que no contexto da TRG, significa que a curvatura do espaço é pequena e pode ser descrita como uma aproximação da métrica de Minkowski:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\,. \tag{2.110}$$

A expressão acima é conhecida como o limite de Newton, onde $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. A condição de campo estacionário nos permite dizer que:

$$\frac{dg_{\mu\nu}}{dx^0} = 0\,. \tag{2.111}$$

Dizemos que são nestas condições que a gravitação Newtoniana consegue descrever satisfatoriamente os fenômenos. Vamos então, considerar a equação da geodésica (tomando como parâmetro afim o tempo próprio), explicitando a soma condensada na notação de Einstein, entretanto, separando inicialmente as componentes temporais das espaciais, estas últimas, denotadas com letras do nosso alfabeto:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{0\beta}\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} + \Gamma^\mu_{i\beta}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0\,. \tag{2.112}$$

Abrindo a expressão acima em β, seguindo a mesma ideia, temos:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{00}\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx^0}{d\tau} + \Gamma^\mu_{0i}\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx^i}{d\tau} + \Gamma^\mu_{i0}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^0}{d\tau} + \\ +\Gamma^\mu_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau} = 0\,.\end{aligned} \tag{2.113}$$

Levando em consideração a eq. (2.111b), podemos inferir que os termos que se encontram a partir da segunda soma são desprezíveis. Logo:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{00}\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx^0}{d\tau} = 0\,, \tag{2.114a}$$

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{00}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 = 0\,. \tag{2.114b}$$

Agora precisamos determinar o coeficiente de Christoffel. Para isso, devemos utilizar a expressão que determina os coeficientes a partir da métrica:

$$\Gamma^\mu_{\nu\beta} = \frac{1}{2}g^{\alpha\mu}\left[\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha}\right]. \tag{2.115}$$

Para determinarmos Γ^μ_{00}, escrevemos:

$$\Gamma^\mu_{00} = \frac{1}{2}g^{\alpha\mu}\left[\frac{\partial g_{\alpha 0}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\alpha}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha}\right]. \tag{2.116}$$

Lembrando da condição (2.113), podemos afirmar que:

$$\Gamma^\mu_{00} = \frac{1}{2}g^{\alpha\mu}\left[-\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha}\right]. \tag{2.117}$$

Explicitando a soma condensada na notação de Einstein entre componente temporal e espaciais, temos:

$$\Gamma^\mu_{00} = \frac{1}{2}g^{0\mu}\left[-\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0}\right] + \frac{1}{2}g^{i\mu}\left[-\frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}\right], \tag{2.118}$$

na qual o primeiro termo da soma também será nulo, devido a condição supracitada. Com isto:

$$\Gamma^\mu_{00} = -\frac{1}{2}g^{i\mu}\left[\frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}\right]. \tag{2.119}$$

É possível mostrar com um pouco de álgebra [SCHUTZ, 2009], que a eq. (2.112), quando escrita na forma contravariante, passa a ser dada por:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}\,. \tag{2.120}$$

Substituindo então a eq. (2.120) em (2.119), juntamente com a eq. (2.110), temos:

$$\Gamma^\mu_{00} = -\frac{1}{2}\left(\eta^{i\mu} - h^{i\mu}\right)\left[\frac{\partial(\eta_{00} + h_{00})}{\partial x^i}\right], \tag{2.121}$$

e uma vez que o termo η_{00} é constante, podemos escrever:

$$\Gamma^\mu_{00} = -\frac{1}{2}\left(\eta^{i\mu} - h^{i\mu}\right)\left[\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i}\right]. \tag{2.122}$$

Lembrando que o termo $h^{\mu\nu} \ll 1$, podemos tomá-lo como sendo desprezível em relação à $\eta^{\mu\nu}$, e com isto, reescrevemos:

$$\Gamma^{\mu}_{00} \approx -\frac{1}{2}\left(\eta^{i\mu}\right)\left[\frac{\partial h_{00}}{\partial x^{i}}\right]. \tag{2.123}$$

Substituindo na eq. (2.114b), temos:

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2} - \frac{1}{2}\left(\eta^{i\mu}\right)\left[\frac{\partial h_{00}}{\partial x^{i}}\right]\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 = 0\,. \tag{2.124}$$

Reorganizando a expressão, vamos ter:

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\left(\eta^{i\mu}\right)\left[\frac{\partial h_{00}}{\partial x^{i}}\right]\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2. \tag{2.125}$$

Para o caso em que $\mu = 0$, escrevemos:

$$\frac{d^2x^{0}}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\left(\eta^{i0}\right)\left[\frac{\partial h_{00}}{\partial x^{i}}\right]\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2. \tag{2.126}$$

Entretanto, para todos os valores de i em η^{i0} (lembrando que i varia de 1 a 3), teremos um valor nulo, de acordo com a métrica na eq. (2.19). Logo:

$$\frac{d^2x^{0}}{d\tau^2} = 0 \rightarrow \frac{dx^0}{d\tau} = cte\,. \tag{2.127}$$

Por outro lado, considerando $\mu = j$, que varia de 1 a 3:

$$\frac{d^2x^{j}}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\left(\eta^{ij}\right)\left[\frac{\partial h_{00}}{\partial x^{i}}\right]\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2, \tag{2.128}$$

temos que, sempre que $i \neq j$, $\eta^{ij} = 0$; se $i = j$, $\eta^{ij} = 1$. Podemos então denotar η^{ij} como o delta de Kronecker δ^{ij}. Logo:

$$\frac{d^2x^{j}}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\left(\delta^{ij}\right)\left[\frac{\partial h_{00}}{\partial x^{i}}\right]\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2, \tag{2.129}$$

e com isto, podemos escrever:

$$\frac{d^2x^{j}}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial h_{00}}{\partial x^{j}}\right]\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2. \tag{2.130}$$

Utilizando a regra da cadeia para reescrevermos o termo do primeiro membro da equação, temos:

$$\frac{dx^{j}}{d\tau} = \frac{dx^{j}}{dt}\frac{dt}{d\tau}.$$

Agora, multiplicando no lado direito por c/c:

$$\frac{dx^{j}}{d\tau} = \frac{dx^{j}}{dt}\frac{c}{c}\frac{dt}{d\tau},$$

$$\frac{dx^{j}}{d\tau} = \frac{dx^{j}}{dt}\frac{1}{c}\frac{d(ct)}{d\tau}, \tag{2.131}$$

$$\frac{dx^j}{d\tau} = \frac{dx^j}{dt}\frac{1}{c}\frac{dx^0}{d\tau}.$$

Para a derivada segunda:

$$\frac{d^2x^j}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau}.$$

Como já temos o resultado da primeira derivada, vamos reescrever este e a derivada segunda em termos da regra da cadeia:

$$\frac{d^2x^j}{d\tau^2} = \frac{dt}{d\tau}\frac{d}{dt}\left(\frac{dx^j}{dt}\frac{1}{c}\frac{dx^0}{d\tau}\right). \tag{2.132}$$

Usando a mesmo artifício de antes, vamos inserir dois termos c/c:

$$\frac{d^2x^j}{d\tau^2} = \frac{1}{c}\frac{dx^0}{d\tau}\frac{d}{dt}\left(\frac{dx^j}{dt}\frac{1}{c}\frac{dx^0}{d\tau}\right). \tag{2.133}$$

Reorganizando os termos e derivando pela regra do produto:

$$\frac{d^2x^j}{d\tau^2} = \frac{1}{c^2}\frac{dx^0}{d\tau}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\frac{d^2x^j}{dt^2} + \frac{dx^j}{dt}\frac{d}{dt}\frac{dx^0}{d\tau}\right). \tag{2.134}$$

Abrindo o segundo termo entre os parênteses como a regra da cadeia, temos:

$$\frac{d^2x^j}{d\tau^2} = \frac{1}{c^2}\frac{dx^0}{d\tau}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\frac{d^2x^j}{dt^2} + \frac{dx^j}{dt}\frac{d\tau}{dt}\frac{d}{d\tau}\frac{dx^0}{dt}\right). \tag{2.135}$$

Com isso, de acordo com a eq. (2.132), esse termo expandido na regra da cadeia é nulo, pois $\frac{d}{d\tau}\frac{dx^0}{dt} = 0$. Deste modo, temos:

$$\frac{d^2x^j}{d\tau^2} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2\frac{d^2x^j}{dt^2}. \tag{2.136}$$

Comparando as eq. (2.130) e (2.136), podemos escrever:

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2\frac{d^2x^j}{dt^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial h_{00}}{\partial x^j}\right]\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2, \tag{2.137}$$

de modo que é válido afirmar:

$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2x^j}{dt^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial h_{00}}{\partial x^j}\right]. \tag{2.138}$$

Reorganizando os termos, temos:

$$\frac{d^2x^j}{dt^2} = \frac{c^2}{2}\left[\frac{\partial h_{00}}{\partial x^j}\right]. \tag{2.139}$$

Note, na expressão acima, que temos a derivada segunda da posição em relação ao tempo, ou seja, a aceleração. Explicitando-a em termos de suas componentes e vetores de base:

$$\frac{d\vec{r}}{dt^2} = \frac{c^2}{2}\left[\left(\frac{\partial h_{00}}{\partial x}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial h_{00}}{\partial y}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial h_{00}}{\partial z}\right)\hat{k}\right]. \tag{2.140}$$

Podemos ainda reescrever esta última equação de forma mais compacta:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{c^2}{2}\nabla h_{00} \tag{2.141}$$

Essa expressão nos remete a equação de movimento Newtoniana: $\vec{a} = -\nabla\Phi$. Isto nos permite concluir que em condições especiais, a equação da geodésica recai na equação de movimento newtoniana se:

$$\nabla\Phi = -\frac{c^2}{2}\nabla h_{00}\,. \tag{2.142}$$

Este fato nos mostra que existe uma compatibilidade entre a TRG e a gravitação newtoniana em determinado regime! O que, por sua vez, nos permite constatar que pelo menos em parte, a TRG conduz a resultados coerentes com o que verificamos na natureza.

Lembrando que:

$$g_{00} = \eta_{00} + h_{00}\,, \tag{2.143}$$

podemos escrever:

$$g_{00} = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right). \tag{2.141}$$

Ou seja, o potencial gravitacional pode ser interpretado como uma perturbação em uma das componentes da métrica de Minkowski.

3. A SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD E OS BURACOS NEGROS

Conforme discutido no capítulo anterior, toda nova Teoria física que se proponha a descrever determinados fenômenos deve fornecer resultados compatíveis com outras teorias já bem-sucedidas no mesmo aspecto, e ainda deve ser capaz de descrever fenômenos inéditos para os quais não existem explicações e/ou prever a existência de fenômenos ainda não observados, que por sua vez, possam ser utilizados para corroborar ou refutar a nova teoria em questão.

Foi neste último quesito que o astrofísico alemão Karl Schwarzschild deu uma contribuição que culminou em uma das mais incríveis consequências da TRG: a predição da existência de um objeto astronômico cuja gravidade em seu entorno seria tão grande que nada conseguiria escapar desta região, nem mesmo a luz. Tal conclusão se deu a partir da análise de uma solução obtida por Schwarzschild para a equação de Einstein.

Vamos neste capítulo expor uma dedução desta solução, e a partir disto, estabelecer uma análise que nos possibilite compreender de que maneira esta solução possibilitou tal interpretação.

3.1. A SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD

Para que Schwarzschild chegasse a sua solução, ele teve que tomar alguns métodos de aproximação. Isto não interfere em sua validade, e é plenamente justificável, uma vez que as equações de campo de Einstein são um conjunto de equações diferenciais parciais com alto grau de dificuldade de resolução.

Quando nos referimos a uma solução da equação de Einstein, estamos tratando da determinação da métrica do espaço-tempo deformado por alguma distribuição de matéria/energia que nele se encontra. Neste contexto, Schwarzschild se propôs a determinar uma métrica que descrevesse a geometria de um espaço-tempo vazio em torno de um corpo esfericamente simétrico. Segundo o teorema de Birkhoff, qualquer solução esfericamente simétrica produzida por um objeto massivo, gera um campo gravitacional de mesma natureza (LAMBOURNE, 2010).

Além disto, ele considerou ainda que o campo gravitacional era estático, de modo que tal métrica não dependesse do tempo; tembém, considerou que a métrica

fosse assintoticamente plana, o que implica que para lugares distantes da distribuição de massa, a solução deve recair na métrica de Minkowski.

A fim de subsidiar o leitor para uma melhor compreensão, antecipamos que a referida solução de Schwarzschild pode ser expressa por:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2 \,. \tag{3.1}$$

Nesta expressão, temos M como a massa do corpo esférico causador da deformação do espaço-tempo, G é a constante gravitacional, já t, r, θ e ϕ representam as coordenadas que codificam a simetria esférica.

Denominamos $2GM/c^2 = 2m \equiv R_s$ como raio de Schwarzschild. Este é conhecido por determinar o raio de uma superfície de não retorno, chamada de horizonte de eventos. Com essa informação, podemos reescrever a eq. (3.1) como:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2 \,. \tag{3.2}$$

Podemos ainda representar a métrica de Schwarzschild na forma matricial:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Percebamos que tal solução satisfaz os três pressupostos mencionados: 1) podemos notar que se considerarmos r e t constantes, recairemos em um elemento de linha esfericamente simétrico:

$$ds^2 = r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2) \,, \tag{3.4}$$

2) Verificamos também que nenhum dos elementos é dependente do tempo. 3) E por último, quando $R_s \ll r$, obtemos a métrica de Minkowski.

Consideremos agora a dedução desta solução.

3.2. DEDUÇÃO DA MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

Para que os pressupostos mencionados na seção anterior sejam satisfeitos, podemos supor uma solução geral da métrica da seguinte forma:

$$ds^2 = -Uc^2 dt^2 + V dr'^2 + W r'^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2) \,, \tag{3.5}$$

em que as funções U, V e W devem depender unicamente de r'. A fim de facilitar a determinação destes coeficientes, podemos propor uma mudança na coordenada r' de modo que $Wr'^2 = r^2$; isto implica que $dr'^2 = dr^2/W$. Com isto, podemos reescrever a métrica como:

$$ds^2 = -Ac^2dt^2 + Bdr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\,, \tag{3.6}$$

isto é, com apenas dois coeficientes a determinar: $A(r)$ e $B(r)$. Como efeito colateral, não se pode mais interpretar r como se fosse a distância radial de forma direta.

Para satisfazer a condição da obtenção da métrica de Minkowski quando r for muito grande, vamos reescrever A e B como funções exponenciais: $e^{2\nu(r)}$ e $e^{2\lambda(r)}$. Isto nos garante que tais valores serão sempre positivos, e com isto, garantimos que a assinatura do elemento de linha será sempre: $-+++$. Na forma matricial, temos então:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -e^{2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Dada a forma dessa matriz diagonal, podemos inferir também as componentes contravariantes da métrica inversa $g^{\alpha\beta}$: $g^{00} = -1/\,e^{2\nu}$, $g^{11} = 1/e^{2\lambda}$, $g^{22} = 1/r^2$ e $g^{33} = 1/(r^2\sin^2\theta)$.

Com a prévia desta métrica, resta-nos agora determinar explicitamente $e^{2\nu(r)}$ e $e^{2\lambda(r)}$. Para isto, vamos nos utilizar do aparato desenvolvido no Capítulo 2, no qual obtivemos uma solução válida para o chamado limite de campo fraco, e utilizá-la como lastro para confrontar a métrica proposta, e assim, determinar os coeficientes desconhecidos.

3.2.1. ENCONTRANDO OS COEFICIENTES DE CHRISTOFFEL

A partir da expressão B.10, podemos determinar os símbolos de Christoffel a partir da métrica[12], conforme a expressão:

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}\left[\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^{\rho}}\right]. \tag{3.8}$$

[12] Ver o anexo B, em que temos a dedução dessa expressão para determinar os Símbolos de Christoffel a partir da Métrica.

Como exemplo, vejamos a componente Γ^2_{12} a partir da eq. (3.8). Neste caso, temos que considerar $\rho = 2$, pois caso contrário, teremos o coeficiente nulo. Com isto, escrevemos:

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2} g^{2\rho} \left[\frac{\partial g_{\rho 2}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{1\rho}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{21}}{\partial x^\rho} \right], \tag{3.9a}$$

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2} g^{22} \left[\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} \right]. \tag{3.9b}$$

Tendo em mente as métricas, covariante e contravariante apresentadas no apêndice B e lembrando das coordenadas dos sistemas: $x^0 = ct$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$ e $x^3 = \phi$, temos:

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^2} \right) \left[\frac{\partial (r^2)}{\partial r} + \frac{\partial (0)}{\partial \theta} - \frac{\partial (0)}{\partial \theta} \right]. \tag{3.10}$$

Realizando as operações necessárias, obtemos:

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{r}. \tag{3.11}$$

Existem vários desses coeficientes, precisamente quarenta. No entanto, apenas nove deles não apresentam valores nulos, que são os seguintes:

$$\begin{gathered}
\Gamma^0_{01} = \nu' = \Gamma^0_{10} \\
\Gamma^1_{00} = \nu' e^{2(\nu - \lambda)} \\
\Gamma^1_{11} = \lambda' \\
\Gamma^1_{22} = -r e^{-2\lambda} \\
\Gamma^1_{33} = -e^{-2\lambda} r \sin^2 \theta \\
\Gamma^2_{12} = \frac{1}{r} = \Gamma^2_{21} \\
\Gamma^3_{23} = \cot \theta = \Gamma^3_{32} \\
\Gamma^2_{33} = -\sin \theta \cos \theta \\
\Gamma^3_{13} = \frac{1}{r} = \Gamma^3_{31}
\end{gathered} \tag{3.12}$$

3.2.2. As componentes do Tensor de Ricci e a determinação de A e B.

Se contrairmos o Tensor de Curvatura de Riemann:

$$R^\alpha{}_{\mu\beta\nu} \equiv \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\beta}}{\partial x^\nu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma_{\mu\beta} + \Gamma^\alpha_{\sigma\beta} \Gamma^\sigma_{\mu\nu}, \tag{3.13}$$

podemos obter o tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\alpha}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} \,. \tag{3.14}$$

Utilizando os valores dados por 3.12, obtemos apenas quatro componentes não nulas:

$$R_{00} = -e^{2(\nu-\lambda)}\left[\nu'' + (\nu')^2 - \nu'\lambda' + \frac{2\nu'}{r}\right], \tag{3.15a}$$

$$R_{11} = \nu'' + (\nu')^2 - \nu'\lambda' - \frac{2\lambda'}{r}, \tag{3.15b}$$

$$R_{22} = e^{-2\lambda}[1 + r(\nu' - \lambda')] - 1, \tag{3.15c}$$

$$R_{33} = \sin^2\theta\left\{e^{2\lambda}[1 + r(\nu' - \lambda')] - 1\right\}, \tag{3.15d}$$

em que: $\lambda' = \frac{\partial y}{\partial r}$, $\nu' = \frac{\partial \nu}{\partial r}$ e $\nu'' = \frac{\partial^2 \nu}{\partial r^2}$.

Por outro lado, para uma região vazia, podemos tomar $T_{\mu\nu} = 0$, de modo que na equação de campo de Einstein, temos:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0 \,. \tag{3.16}$$

Tomando o produto em ambos os membros por $g^{\mu\nu}$:

$$g^{\mu\nu}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}\right) = 0 \,, \tag{3.17}$$

obtemos:

$$R^{\nu}{}_{\nu} - \frac{1}{2}\delta^{\nu}{}_{\nu} R = 0 \,. \tag{3.18}$$

E, somando todos os valores de ν em $R^{\nu}{}_{\nu}$, escrevemos:

$$R - \frac{1}{2} 4R = 0 \,. \tag{3.19}$$

Logo, podemos afirmar que $R = 0$. Deste resultado e da eq. (3.12), obtemos também que as componentes do tensor de Ricci devem ser nulas: $R_{\mu\nu} = 0$. Com isto, da eq. (3.15b) podemos escrever:

$$\nu'' + (\nu')^2 - \nu'\lambda' = \frac{2\lambda'}{r} \,. \tag{3.20}$$

Agora, substituindo esse valor em R_{00}:

$$-e^{2(\nu-\lambda)}\left[\frac{2\lambda'}{r} + \frac{2\nu'}{r}\right] = 0 \,. \tag{3.21}$$

Sabemos que a função exponencial não pode assumir valores nulos, então, para que essa igualdade seja satisfeita, temos de ter:

$$\left[\frac{2\lambda'}{r} + \frac{2\nu'}{r}\right] = 0 \,, \tag{3.22}$$

que nos conduz à:

$$\lambda' + \nu' = 0\,, \tag{3.23a}$$

e com isto:

$$\lambda + \nu = Constante\,. \tag{3.23b}$$

Ao propor a métrica vista na eq. (3.6), tomamos a condição em que ela deveria recair na da métrica de Minkowski quando $r \to \infty$. Nesta circunstância, temos que: $e^{2\nu} \to 1$, $e^{2\lambda} \to 1$. Para que isso seja possível, 2ν e 2λ devem ser nulos, já que $e^0 = 1$. Enfatizamos que $\nu = 0$ e $\lambda = 0$ somente quando $r \to \infty$, podendo, estes, assumir outros valores em regimes diferentes. No entanto, da eq. (3.23b) , o resultado: $\lambda + \nu = cte$, deve ser válido sempre! E com isto, podemos afirmar que:

$$\lambda + \nu = 0\,. \tag{3.24}$$

Utilizando a expressão de R_{22} juntamente com a eq. (3.22), podemos escrever:

$$e^{-2\lambda}[1 + r(\nu' - \lambda')] - 1 = 0\,, \tag{3.25a}$$

$$e^{-2\lambda}[1 + r(-\lambda' - \lambda')] = 1\,. \tag{3.25b}$$

Após organizarmos, temos:

$$e^{-2\lambda} - e^{-2\lambda}2r\lambda' = 1\,. \tag{3.26}$$

Com um olhar mais atento, é possível ver que temos uma regra do produto[13] na eq. (3.26), de modo que podemos reescrevê-la como:

$$\frac{d\left(re^{-2\lambda}\right)}{dr} = 1\,. \tag{3.27}$$

Tomando a integral em dr em ambos os lados, temos como resultado:

$$re^{-2\lambda} = r + b\,, \tag{3.28}$$

em que b é uma constante de integração. A seguir, temos a expressão acima apresentada de forma diferente:

$$e^{-2\lambda} = 1 + \frac{b}{r}\,, \tag{3.29}$$

ou ainda:

$$e^{2\lambda} = \left(1 + \frac{b}{r}\right)^{-1}\,. \tag{3.30}$$

[13] Vale ressaltar que como consequência da regra do produto, temos no segundo termo da soma, uma regra da cadeia.

Lembrando da eq. (3.24), podemos ainda escrever:

$$e^{-2\nu} = \left(1 + \frac{b}{r}\right)^{-1} . \tag{3.31}$$

De modo que esta pode ser escrita como:

$$-e^{2\nu} = -\left(1 + \frac{b}{r}\right). \tag{3.32}$$

Precisamos agora determinar a expressão b/r. Para tal, vamos considerar que o caso especial do limite de campo fraco, no qual a equação de Einstein recai nas leis da gravitação de Newton. De acordo com a eq. (2.110) no Capítulo 2, tomamos $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, em que $h_{\mu\nu} \ll 1$ que representa uma pequena perturbação no espaço tempo, dada por:

$$h_{00} = -\frac{2\Phi}{c^2}, \tag{3.33}$$

sendo ainda:

$$g_{00} = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right). \tag{3.34}$$

em que Φ é o potencial gravitacional de Newton numa região na qual o campo gravitacional é dado por $\Phi = -\frac{\mathrm{GM}}{r}$. Deste modo, comparando a eq. (3.27) com a eq. (3.29), podemos afirmar que:

$$\frac{b}{r} = \frac{2\Phi}{c^2}. \tag{3.35}$$

Substituindo o valor de Φ, temos que:

$$\frac{b}{r} = -2\frac{\mathrm{GM}}{c^2 r}. \tag{3.36}$$

Tomando as funções exponenciais apresentadas nas eq. (3.29) e (3.30), temos:

$$e^{2\lambda} = \left(1 - 2\frac{\mathrm{GM}}{c^2 r}\right)^{-1}, \tag{3.37a}$$

$$e^{2\nu} = \left(1 - 2\frac{\mathrm{GM}}{c^2 r}\right) . \tag{3.37b}$$

Da eq. (3.6), podemos substituir os valores encontrados:

$$ds^2 = -\left(1 - 2\frac{\mathrm{GM}}{c^2 r}\right)c^2 dt^2 + \left(1 - 2\frac{\mathrm{GM}}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2. \tag{3.38}$$

Reorganizando, temos:

$$ds^2 = -\left(1 - 2\frac{\mathrm{GM}}{c^2 r}\right)c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - 2\frac{\mathrm{GM}}{c^2 r}\right)} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2 \,. \tag{3.39}$$

E com isso chegamos à solução de Schwarzschild. Após a publicação desta métrica, muito se discutiu sobre sua importância e consequências físicas. Alguns dos resultados mais importantes acerca destas análises serão abordados na próxima seção e no próximo capítulo.

3.2.3. Considerações acerca do raio de Schwarzschild

Escondido na eq. (3.39), nos termos $\left(1 - 2\frac{\mathrm{GM}}{c^2 r}\right)$ e $\left(1 - 2\frac{\mathrm{GM}}{c^2 r}\right)^{-1}$, temos a presença do raio de Schwarzschild R_s, dado por:

$$R_s = \frac{2\mathrm{GM}}{c^2} \,. \tag{3.40}$$

ou ainda:

$$R_s = \frac{2\mathrm{GM}}{c^2} = 2m \,. \tag{3.41}$$

Com este termo, escrevemos a métrica de Schwarzschild como:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2 \,. \tag{3.42}$$

Uma situação interessante se dá quando avaliamos estes coeficientes da métrica. Percebemos que quando temos $r = R_s$, ficamos diante do que é conhecido como a singularidade da métrica de Schwarzschild, que de acordo com Collier (2017), é “[...] é um ponto em que um objeto matemático é indefinido.” A consequência da existência de uma singularidade em uma região do espaço-tempo é que: pelo fato de nesta região a métrica não ser bem definida, não se pode realizar a descrição física de fenômeno algum em tal região. Por outro lado, sabe-se também que muitas vezes tais singularidades são apenas um problema matemático da escolha de um sistema de coordenadas inadequado.

Neste contexto, uma das formas de se avaliar a geometria de um espaço-tempo consiste em explorar sua estrutura causal através de cones de luz. Vamos então utilizar tal artifício para investigar o problema associado à superfície definida pelo raio de Schwarzschild. Assim, consideremos o comportamento de uma

partícula de luz ao longo de uma curva radial. Neste caso, temos: $ds^2 = 0$, $d\theta = 0$ e $d\phi = 0$.

De acordo com a eq. (3.42), temos:

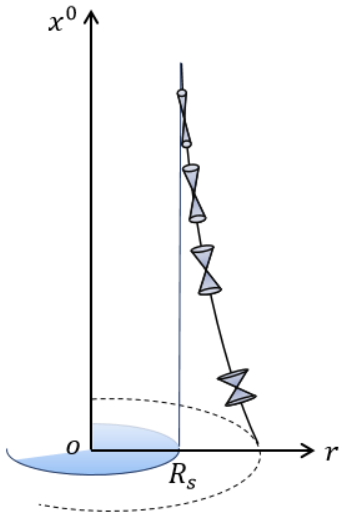
$$0 = -\left(1 - \frac{R_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)}, \tag{3.43}$$

e com isto:

$$\frac{dr}{dx^0} = \pm\left(1 - \frac{R_s}{r}\right). \tag{3.44}$$

Conforme já mencionado no capítulo anterior, o termo dr/dx^0 mede a inclinação dos cones de luz no diagrama de espaço-tempo (com relação ao eixo ct). Neste caso, vemos que quando $r \gg R_s$, tais cones de luz se assemelham aos cones do espaço-tempo de Minkowski; no entanto, à medida que $r \to R_s$, conforme a figura 3.1, $dr/dx^0 \to 0$, o que implica em um estreitamento do cone de luz:

Figura 3.1: Aproximação do cone de luz do raio de Schwarzschild



Fonte: Medeiros (2022)

Como os eventos futuros da partícula estão delimitados pela parte superior do cone, percebe-se que ela se aproxima da superfície definida pelo raio de Schwarzschild, mas não adentra esta região.

Ainda no contexto desta análise, considere que um observador distante de qualquer fonte gravitacional se encontra localizado em um ponto r_0 emitindo um raio de luz que se propaga em direção a esta região de superfície delimitada pelo raio de Schwarzschild, e que este raio esteja em sua direção radial, conforme a figura 3.2 (Na próxima página).

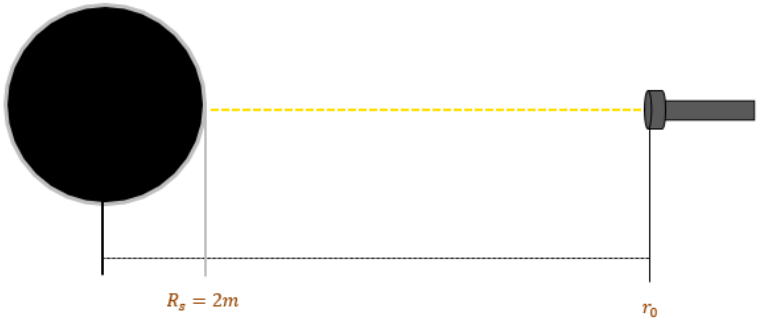
Adotando o sinal negativo na eq. (3.44), pelo fato de a partícula estar se aproximando da superfície delimitada por R_s:

$$\frac{dr}{dx^0} = -\left(1 - \frac{R_s}{r}\right), \tag{3.45}$$

e resolvendo essa equação diferencial pelo método de integração, temos:

$$\Delta x^0 = r_0 - r + 2m \ln\left(\frac{r_0 - R_s}{r - R_s}\right). \tag{3.46}$$

Figura 3.2: Observador com lanterna apontada para a região de interesse



Fonte: Medeiros (2022)

Para essa solução, estamos tomando o intervalo em que $R_s < r \leq r_0$. Caso tenhamos $r \to R_s$, notamos que $\Delta t \to \infty$. Esse resultado nos diz que seria impossível um observador ver esse feixe de luz atingindo o raio de Schwarzschild (R_s). Em outras palavras, levaria um tempo infinito para que o observador conseguisse ver esse fenômeno.

Destas análises, concluímos que “coisas estranhas” acontecem perto dessa região. Neste contexto, seria interessante que houvesse algum critério que nos permitisse saber se tal singularidade é legítima, ou se se trata de uma pseudo-singularidade, isto é, uma singularidade que pode ser resolvida a partir de uma mudança de sistemas de coordenadas. Segundo Carroll (2003), um critério simples que pode desempenhar essa função se trata de verificar valores de grandezas diretamente vinculadas à curvatura da variedade, e que sejam invariantes. É o caso do escalar de Ricci, por exemplo. Ainda segundo Carroll, para métrica de Schwarzschild, é possível mostrar que:

$$R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{12 R_s^2}{r^6}, \tag{3.47}$$

que por sua vez, indica que o espaço-tempo de Schwarzschild possui uma singularidade legítima apenas em $r = 0$.

Neste caso, podemos buscar uma mudança de coordenadas que permita avaliar melhor a estrutura causal do espaço-tempo de Schwarzschild na região em

torno de R_s. O problema no atual sistema de coordenadas se deu devido ao fato do cone de luz se estreitar à medida que se aproximava de R_s. Podemos então tentar resolver este problema propondo uma mudança para um sistema de coordenadas que preserve a estrutura do cone de luz ao longo de todo percurso radial.

Para isto, inspirados na eq. (3.44):

$$\frac{dr}{dx^0} = \pm\left(1 - \frac{R_s}{r}\right), \tag{3.48}$$

consideremos um sistema de coordenadas em que:

$$\frac{dr^*}{dx^0} = \pm 1\,. \tag{3.49}$$

Deste modo, temos que ter:

$$dr^* = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} dr\ . \tag{3.50}$$

Integrando esta relação, obtemos:

$$r^* = r + R_s\, ln\left(\frac{r}{R_s} - 1\right). \tag{3.51}$$

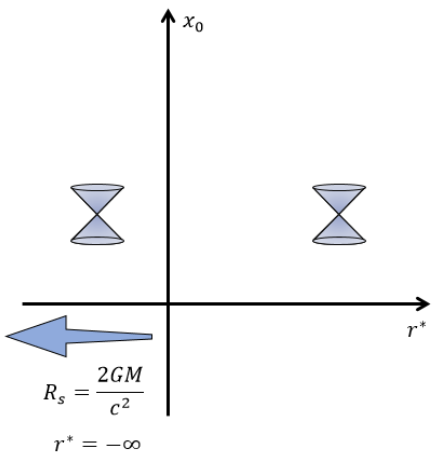
Com isto, a métrica de Schwarzschild passa a ser escrita como:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)c^2dt^2 + \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)dr^{*2} + r^2d\Omega^2\ , \tag{3.52}$$

em que $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2$.

Neste sistema de coordenadas, conhecido como coordenadas de Tortoise, temos a vantagem de resolver o problema do estreitamento do cone de luz, como podemos ver na figura 3.3, no entanto, pela eq. (3.51) verificamos que quando $r = R_s$, temos que $r^* = -\infty$. Ou seja, a superfície de interesse é deslocada para o infinito, de modo que a partícula não a alcança. Assim, resolve-se um problema, mas se cria outro.

Figura 3.3: Deslocamento da superfície de interesse para o infinito



Fonte: Medeiros (2022)

Uma vez que fixar a forma do cone de luz não foi suficiente para resolver o problema (figura 3.3), vamos tentar outra abordagem. Já que o problema estava associado ao fato de a partícula não atravessar a região delimitada pelo raio de Schwarzschild, vamos escolher um sistema de coordenadas em que obrigatoriamente ela o faça. Para isto, teremos de escolher uma nova coordenada temporal x^{0^*}, de modo que a inclinação do cone de luz para o caso em que a partícula se aproxima da superfície de interesse, seja nula.

Assim, temos:

$$\frac{dx^{0^*}}{dr} = 0 \tag{3.53}$$

Por outro lado, da relação entre x^0 e r, para a partícula se aproximando da região de interesse, podemos escrever:

$$\frac{dx^0}{dr} = -\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1}, \tag{3.54}$$

e deste modo:

$$\frac{dx^0}{dr} + \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} = 0\,. \tag{3.55}$$

Comparando tais equações, podemos utilizar tais condições para encontrarmos uma correspondência entre x^{0^*} e x^0, dizendo que:

$$\frac{dx^{0^*}}{dr} = \frac{dx^0}{dr} + \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1}. \tag{3.56}$$

A partir disto, temos:

$$dx^{0^*} = dx^0 + \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} dr\,, \tag{3.57}$$

lembrando da eq. (3.50), escrevemos:

$$dx^{0^*} = dx^0 + dr^*\,. \tag{3.58}$$

Integrando esta equação, obtemos:

$$x^{0^*} = x^0 + r + R_s\, ln\left(\frac{r}{R_s} - 1\right). \tag{3.59}$$

Reescrevendo a métrica de Schwarzschild através desta nova coordenada temporal:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)c^2dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)} + r^2d\Omega^2\,. \tag{3.60}$$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)(dx^0)^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)} + r^2 d\Omega^2 \,. \tag{5.61}$$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)\left(dx^{0^*} - dr^*\right)^2 + \frac{\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^2 dr^{*2}}{\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)} + r^2 d\Omega^2 \,. \tag{3.62}$$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)\left(\left(dx^{0^*}\right)^2 - 2dx^{0^*}dr^* + (dr^*)^2\right) + \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) dr^{*2} + r^2 d\Omega^2. \tag{3.63}$$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)\left(dx^{0^*}\right)^2 + 2dx^{0^*}\left[\left(1 - \frac{R_s}{r}\right) dr^*\right] + r^2 d\Omega^2 \,. \tag{3.64}$$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)\left(dx^{0^*}\right)^2 + 2dx^{0^*}[dr] + r^2 d\Omega^2 \,. \tag{3.65}$$

Percebe-se que neste sistema de coordenadas, a única singularidade que persiste ocorre quando $r = 0$. Deste modo, resolvido este problema, voltemos agora à análise da estrutura causal do espaço-tempo de Schwarzschild, mas desta vez com uma nova coordenada temporal. Tais coordenadas são conhecidas como coordenadas de Eddington-Finkelstein.

Da eq. (3.56), vimos que a relação entre as inclinações dos cones de luz expressos em ambos os sistemas de coordenadas, é dada por:

$$\frac{dx^{0^*}}{dr} = \frac{dx^0}{dr} + \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} . \tag{3.66}$$

Note que chegamos nesta relação a partir de um caso especial no qual a inclinação $dx^{0^*}/dr = 0$ e a partícula se aproximava da região de interesse delimitada por R_s. No entanto, uma vez que esta relação tenha conduzido a uma métrica coerente, vamos utilizá-la para avaliar o comportamento tanto se aproximando, como se afastando da região de interesse, descritas pela equação:

$$\frac{dx^0}{dr} = \pm\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} . \tag{3.67}$$

Ambas as situações podem ser resumidas por:

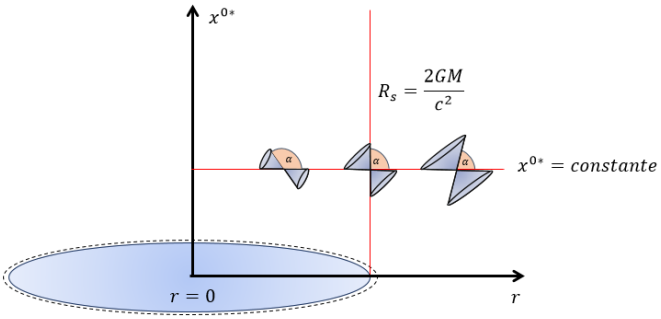
$$\frac{dx^{0^*}}{dr} = \begin{cases} 0, & para\ partícula\ se\ aproximando. \\ 2\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1}, & para\ a\ partícula\ se\ afastando. \end{cases} \tag{3.68}$$

A primeira situação já é conhecida, mas esta segunda, vejamos: sabendo que a inclinação desta reta é dada por $\tan\alpha$, como é possível analisar na Figura 3.4, (em que α é o ângulo da reta de inclinação em relação ao eixo r), temos que:

- Para $r > R_s$, devemos ter $\alpha < \pi/2\, rad$;
- Para $r = R_s$, $\tan\alpha = \infty$, que por sua vez, indica que $\alpha = \pi/2\, rad$;
- Para $r < R_s$, devemos ter $\alpha > \pi/2\, rad$.

Representando graficamente esta situação, temos:

Figura 3.4: Análise da estrutura causal do espaço-tempo de Schwarzschild nas coordenadas de Eddington-Finkelstein



Fonte: Medeiros (2022)

Com isto, podemos perceber que neste sistema de coordenadas, a partícula atravessa a região de interesse sem problemas, no entanto, a partir de $r = R_s$, a abertura do cone de luz que denota eventos futuros, está completamente voltada para o interior da superfície de interesse (ver figura 3.4). Isto, por sua vez, indica que qualquer partícula, seja ela massiva ou não, uma vez que adentre essa região, não mais poderá sair.

Devido a esta característica, a superfície delimitada pelo raio de Schwarzschild é chamada de horizonte de eventos, e a região delimitada por este horizonte de eventos, é chamada de buraco negro, pelo fato de não poder ser vista, uma vez que a luz não escapa desta região.

Vale a pena revisitar à situação do problema associado ao tempo infinito que seria necessário para um observador distante do buraco negro receber um sinal de algo adentrando o horizonte de eventos. No sistema de coordenadas de Eddington-Finkelstein, vimos que:

$$x^{0^*} = x^0 + r + R_s\, ln\left(\frac{r}{R_s} - 1\right). \tag{3.69}$$

Neste caso, quando $r \to R_s$, temos que $x^{0^*} \to -\infty$. Ou seja, mesmo neste sistema de coordenadas, concluímos que o observador não consegue ver um objeto quando este ultrapassa o horizonte de eventos.

Ainda sobre as limitações da solução de Schwarzschild, cabe destacar que tal solução se aplica para regiões exteriores à distribuição de massa que causa a curvatura do espaço-tempo. Neste caso, devemos verificar o raio da distribuição em relação ao raio de Schwarzschild. Nosso Sol, por exemplo, possui um raio de aproximadamente $700.000\ km$. Por outro lado, dada sua massa de $2 \cdot 10^{30}\ kg$, pela definição de R_s, temos que:

$$R_s = \frac{2GM}{c^2} \approx 3\ Km. \tag{3.70}$$

Deste modo, não faz sentido utilizar a métrica de Schwarzschild para a região em que: $3\ Km < r < 700.000\ Km$, uma vez que será uma região ocupada pela estrela, e não vazia! Observamos que apesar da solução de Schwarzschild ser derivada a partir de uma distribuição de massa estática, pelo fato de a rotação do Sol ser pequena, ainda assim a solução pode ser tida como uma boa aproximação, como será verificado a posteriori a partir dos testes clássicos da TRG.

4. CONSEQUÊNCIAS OBSERVACIONAIS ASSOCIADAS À SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD

Conforme já mencionado nos capítulos anteriores, toda nova teoria física deve ser capaz de fornecer explicações condizentes com a de outras teorias físicas já consolidadas pela comunidade científica e, se possível, fornecer explicações de fenômenos ainda não devidamente descritos por outras teorias. Nesta perspectiva, uma vez deduzida a métrica de Schwarzschild, deve-se questionar se esta solução atende aos requisitos mencionados. A seguir, trataremos de aplicações da solução de Schwarzschild que desempenharam um papel muito relevante no sentido de validar a TRG. Além disto, no que diz respeito a previsões inéditas fornecidas pelas novas teorias, como vimos no capítulo anterior, a solução de Schwarzschild prevê a existência de um objeto astronômico que ficou conhecido como Buraco Negro. Também neste capítulo trataremos brevemente de descobertas recentes acerca da existência deste ente.

4.1. OS TESTES CLÁSSICOS DA RELATIVIDADE GERAL

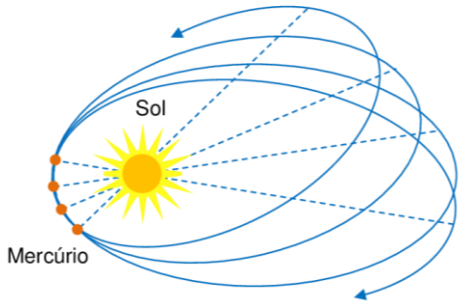
Desde sua formulação, no ano de 1915, a teoria da relatividade geral (TRG) vem passando por diversos testes, e deste modo, tem proporcionado ainda mais resultados significativos para a ciência. Em seus primórdios, três testes ganharam notoriedade, e destes, dois estão correlacionados à métrica de Schwarzschild. Vamos aqui fazer uma breve exposição de cada um deles, a fim de realçar a aplicabilidade da solução de Schwarzschild.

4.1.1. O avanço do Periélio de Mercúrio

Esse teste clássico da relatividade tem uma grande importância histórica, uma vez que foi a partir dele que a relatividade geral teve o olhar científico merecido na época. Como sabemos das leis de Kepler, os planetas giram em torno do Sol numa trajetória elíptica, com o Sol estando em um de seus focos. Porém, após algumas observações, notou-se que a trajetória de Mercúrio tinha uma

peculiaridade: o seu periélio[14] avança em direção ao Sol com o passar do tempo. Este fato ficou conhecido como o avanço do periélio de Mercúrio. (LENZI, 2020)

Figura 4.1: Precessão do periélio de Mercúrio



Fonte: Medeiros (2022)

Desde a Grécia antiga, esse movimento peculiar apresentado pelo planeta Mercúrio estava sob os olhares dos filósofos naturais da época, até que após exaustivas observações, Hiparco (190 a.C. – 120 d.C.) determinou que a precessão do periélio de mercúrio seria de 0,0127 graus por ano, aproximadamente. Um dado interessante, pois atualmente, o valor apresentado com relação aos equinócios é de 0,0136 graus por ano (TORT, 2010), resultado muito próximo do apresentado por Hiparco. Ainda de acordo com Tort, 2010, “Em relação a nossa linha do equinócio, a previsão é de que a precessão aparente fosse aproximadamente 5025 segundos de arco por século, assumindo que o eixo de órbita é estacionário”. Entretanto, essa previsão não condizia com os dados observacionais, que apresentavam um valor de 5600 segundos de arco por século. Parte dessa diferença é explicada pela interação gravitacional dos outros planetas, cerca de 532 segundos de arco por século, porém, ainda resta uma diferença de aproximadamente 43 segundos de arco por século que não pode ser explicadas pela teoria Newtoniana (TORT, 2010). A partir dessa problemática, iremos apresentar a solução à luz da relatividade de Einstein, por meio da métrica de Schwarzschild.

Para que possamos analisar esse movimento, é necessário que lembremos a equação presente no apêndice C, que nos dá a geodésica do espaço-tempo:

$$\frac{d^2u^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{du^\mu}{d\tau}\frac{du^\nu}{d\tau} = 0\,. \tag{4.1}$$

[14] Periélio, em astronomia, é quando um corpo celeste se encontra mais próximo do sol, na qual este corpo percorre uma órbita elíptica. É também quando este corpo atinge a velocidade máxima de sua trajetória.

Vamos utilizar o modelo em que o planeta Mercúrio pode ser considerado uma partícula livre no espaço-tempo curvado por um corpo de simetria esférica, como descrevemos para a métrica de Schwarzschild. Tomaremos a aproximação de que a rotação do Sol não causa efeitos apreciáveis na curvatura do espaço-tempo em seu entorno. Vamos calcular a geodésica para as coordenadas $x^0 = ct$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$ e $x^3 = \phi$. Para isso, é necessário encontrar todos os coeficientes da conexão de Christoffel. Tomando, por exemplo, para a coordenada θ, ou seja, $\alpha = 2$, e considerando a soma em μ e ν, pela notação de Einstein, teremos 20 símbolos de Christoffel. Entretanto, destes, apenas dois não são nulos:

$$\Gamma^2_{33} = \frac{1}{2} g^{22} \partial_2 g_{33} = -\sin\theta \cos\theta \,, \tag{4.2a}$$

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2} g^{22} \partial_1 g_{22} = \frac{1}{r} = \Gamma^2_{21} \,. \tag{4.2b}$$

Logo, após explicitarmos toda a soma, notamos que restam apenas os termos:

$$\frac{d^2x^2}{d\tau^2} + \Gamma^2_{33} \frac{dx^3}{d\tau}\frac{dx^3}{d\tau} + 2\Gamma^2_{12} \frac{dx^1}{d\tau}\frac{dx^2}{d\tau} = 0 \,. \tag{4.3}$$

Note que temos o terceiro membro da soma multiplicado por 2, decorrente da simetria dos símbolos de Christoffel em seus índices inferiores. Agora, substituindo os valores da eq. (4.2a) e eq. (4.2b), temos:

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{d\tau}\frac{d\theta}{d\tau} - \sin\theta\cos\theta \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = 0 \,. \tag{4.4}$$

A partir dessa afirmação, vamos considerar, de forma estritamente arbitrária, as condições em que $\theta_{t=0} = \pi/2$ e $\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)_{t=0} = 0$, teremos então:

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} = 0 \,. \tag{4.5}$$

Neste caso, teríamos esse movimento confinado no plano $\theta = \pi/2$ e que nos apresenta a conservação de momento angular. Vamos agora tomar a equação da geodésica com outros coeficientes da conexão de Christoffel, levando em consideração as mesmas regras tomadas para 4.2a e 4.2b. Para a coordenada r, ou seja $\alpha = 1$:

$$\frac{d^2r}{ds^2} + \frac{\lambda'}{2} e^{(\lambda-\nu)} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{\nu'}{2}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - re^{-\nu}\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 = 0 \,. \tag{4.6}$$

Tomemos agora a coordenada t, para $\alpha = 0$:

$$\frac{dt}{ds} = ke^{-\nu}\,, \tag{4.7}$$

em que $k \equiv$ constante. Agora, para a coordenada ϕ, com $\alpha = 3$:

$$r^2 = \frac{d\phi}{ds} = h. \tag{4.8}$$

No qual $h \equiv$ constante, esta expressão explicita o fato de estarmos lidando com um problema de força central, logo, está diretamente ligada com a conservação do momento angular. Como o nosso interesse é determinar a equação que descreve a trajetória de uma partícula sob a ação de uma fonte gravitacional que curva o espaço-tempo de acordo com a métrica de Schwarzschild, vamos determinar o elemento de linha visto na eq. (3.38), onde $R_s = 2m$:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \tag{4.9}$$

Note que o movimento está confinado em um plano, logo $\theta = \pi/2$ e vamos multiplicar ambos os lados da equação por $1/ds^2$, assim:

$$1 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)(ke^{-\nu})^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2. \tag{4.10}$$

Substituindo os valores das coordenadas descritas acima, e usando a regra da cadeia, temos:

$$1 = -k^2\left(1 - \frac{2m}{r}\right)e^{-2\nu} + \frac{h^2}{r^4}\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{h}{r}\right)^2, \tag{4.11}$$

em que $e^{-2\nu} = 1/\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2$. Assim, reorganizando os termos, teremos:

$$k^2 - h^2\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \left(\frac{h^2}{r^2} + 1\right)\left(1 - \frac{2m}{r}\right). \tag{4.12}$$

Substituindo o termo $\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\phi} = -\frac{d}{d\phi}\left(\frac{1}{r}\right)$, podemos então reescrever como:

$$k^2 - h^2\left[-\frac{d}{d\phi}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2 = \left(\frac{h^2}{r^2} + 1\right)\left(1 - \frac{2m}{r}\right). \tag{4.13}$$

A partir daqui, vamos utilizar a seguinte substituição de variável: $1/r = u$, em seguida, reorganizando os termos, podemos reescrever a eq. (4.13) como:

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \left(u^2 + \frac{1}{h^2}\right)(2mu - 1) + \frac{k^2}{h^2}. \tag{4.14}$$

Tomando agora a diferenciação em ϕ, e reorganizando, temos:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 3mu^2 + \frac{m}{h^2}. \tag{4.15}$$

Essa equação é extremamente semelhante à equação da gravitação Newtoniana, exceto pelo termo $3mu^2$. Porém, esse se trata de um termo corretivo

da relatividade geral, pois este se torna insignificante com relação ao termo m/h^2 por se tratar de um termo que só se apresenta à altas velocidades:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{m}{h^2}. \tag{4.16}$$

Agora vamos resolver a equação de trajetória 4.15, utilizando o método de aproximações sucessivas, que consiste em tomar uma solução geral como séries de potências. Para a solução de $u^{(1)}$ utiliza-se a de $u^{(0)}$ e de $u^{(2)}$ usa-se a de $u^{(1)}$ e assim sucessivamente.

Para o periélio de mercúrio, utilizaremos apenas as soluções em primeira ordem:

$$\frac{d^2u^{(0)}}{d\phi^2} + u^{(0)} = \frac{m}{h^2}. \tag{4.17}$$

Logo, para a solução de ordem 0, temos:

$$u^{(0)} = \frac{m}{h^2}[1 + \epsilon\cos(\phi - \phi_0)]. \tag{4.18}$$

em que ϵ é a excentricidade da trajetória. É ela que nos permite visualizar que estamos diante de um percurso seja elíptico, seja parabólica, hiperbólica, entre outras; no qual $\epsilon = \left(\frac{h^2}{r_0 m} - 1\right)$ e ϕ_0 é a posição do periélio, que normalmente é igual a 0, e h^2 provém da conservação do momento angular, visto na eq. (4.8).

Agora partindo para a solução de ordem 1 utilizando a solução anterior, teremos:

$$\frac{d^2u^{(1)}}{d\phi^2} + u^{(1)} = 3mu^{(0)2}. \tag{4.19}$$

Substituindo os valores de $u^{(0)}$, temos:

$$\frac{d^2u^{(1)}}{d\phi^2} + u^{(1)} = \frac{3m^3}{h^4}(1 + \epsilon\cos\phi)^2. \tag{4.20}$$

Desconsiderando nesta equação os termos de segunda ordem para ϵ, podemos escrever:

$$\frac{d^2u^{(1)}}{d\phi^2} + u^{(1)} = \frac{6m^3}{h^4}\epsilon\cos(\phi) + \frac{3m^3}{h^4}. \tag{4.21}$$

O segundo termo da soma na eq. (4.21), é constante e que por estarmos analisando movimentos em trajetórias curvadas no espaço-tempo, ou seja, trajetórias dinâmicas, não faz sentido termos constantes na expressão, de modo que:

$$\frac{d^2u^{(1)}}{d\phi^2} + u^{(1)} = \frac{6m^3}{h^4}\epsilon\cos(\phi)\,, \tag{4.22}$$

cuja solução de ordem 1 é dada por:

$$u^{(1)} = \frac{3m^3}{h^4}\phi\epsilon\sin\phi\,. \tag{4.23}$$

Para que tenhamos a solução total para o caso do periélio de mercúrio, devemos tomar a soma das soluções encontradas, assim:

$$u = u^{(0)} + u^{(1)} + \cdots \tag{4.24}$$

Que para expressão temos, lembrando que retiramos a constante por motivos citados anteriormente:

$$u = \frac{m}{h^2}\left(\frac{3m^2}{h^2}\phi\epsilon\sin\phi + 1 + \epsilon\cos\phi\right). \tag{4.25}$$

Para resolvermos a expressão acima, vamos dizer que $\frac{3m^2}{h^2}\phi = \Delta\phi$. Nessa expressão podemos afirmar que $\Delta\phi \ll 1$, pois m é muito grande, uma vez que $m = GM/c^2$ e ainda está elevado ao quadrado e que h depende de r que também é muito grande, logo:

$$\Delta\phi = \frac{3m^2}{h^2}\phi \ll 1 \rightarrow \begin{cases} \Delta\phi\sin\phi \approx \sin\Delta\phi\sin\phi\,. \\ \cos\phi \approx \cos\Delta\phi\cos\phi\,. \end{cases} \tag{4.26}$$

Com os dados acima em mente e utilizando as propriedades das funções senoidais, lembrando que a excentricidade dos planetas é muito pequena, podemos desconsiderá-lo, assim iremos reescrever a eq. (4.25) como:

$$u = \frac{m^3}{h^2}[\cos(\phi - \Delta\phi) + 1]\,. \tag{4.27}$$

A variação $\Delta\phi$ representa o avanço no periélio de mercúrio, e podemos determiná-la por meio de:

$$\Delta\phi = \frac{3m^2}{h^2}\phi\,. \tag{4.28}$$

Como vimos nas seções anteriores, todos esses valores são conhecidos, assim podemos dizer que o valor do avanço do periélio de mercúrio pode ser corrigido pela relatividade geral de modo a ser compatível com os dados observacionais, fornecendo um valor dado por:

$$\Delta\phi = 43''.$$

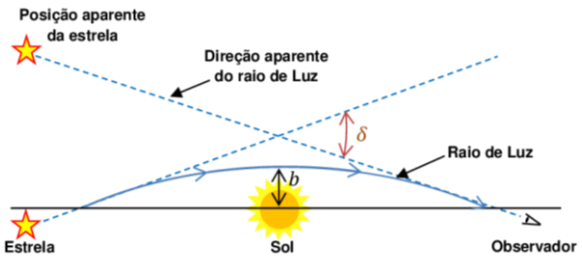
Sendo este o valor explicitado no início dessa seção, note que esse avanço é extremamente pequeno. Deste modo, percebemos que partindo do modelo em que o planeta Mercúrio é considerado uma partícula que percorre uma geodésica

no espaço-tempo de Schwarzschild, chega-se a uma solução que justifica o avanço de seu periélio. (TORT, 2010; LENZI, 2020)

4.1.2. Deflexão gravitacional da Luz

Quando recorremos a esse tema, estamos falando do teste que alçou a teoria da Relatividade Geral ao status de teoria de corpo científico. Previsto por Einstein em 1915, e observado pela primeira vez por Arthur Stanley Eddington[15] (1882–1944) e sua equipe em 8 de março de 1919, em meio a conflitos da grande guerra mundial (COLES, 2001). Parte da equipe veio à Sobral – CE e outra parte da equipe, junto com Eddington foram para Porto do Príncipe na costa da Guiné Equatorial, ambas as equipes foram observar um eclipse solar que ocorrera naquele dia (LENZI, 2020). Estas equipes foram para as expedições com o intuito de observar o desvio do raio de luz de uma estrela, este desvio se daria pela curvatura no espaço-tempo causada pelo Sol, como podemos ver na figura 4.2, teríamos a posição real da estrela e a posição aparente.

Figura 4.2: Posição real e posição aparente da estrela devido desvio gravitacional da luz



Fonte: Medeiros (2022)

Tomando o elemento de linha de Schwarzschild, que como estamos nos referindo a luz, podemos determiná-lo como:

$$\left(1-\frac{2m}{r}\right)dt^2-\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}dr^2-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\phi^2)=0\,.$$

Além do mais, vamos considerar novamente, que a luz se propaga no plano $\theta=\pi/2$. Vamos considerar todos os passos descritos anteriormente para o periélio de mercúrio. Logo, teremos a seguinte equação que descreve a trajetória da luz:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2}+u=3mu^2\,. \tag{4.29}$$

[15] Arthur Stanley Eddington (1882–1944) foi um astrofísico britânico do início do século XX. Eddington é famoso pelo seu trabalho sobre a Teoria da Relatividade acerca da deflexão da luz.

Para resolver essa equação, usaremos novamente o método das sucessivas aproximações, considerando apenas as soluções de ordens 0 e 1. Primeiro:

$$\frac{d^2u^{(0)}}{d\phi^2} + u^{(0)} = 0\,. \tag{4.30}$$

Vamos assumir um sistema de coordenadas em que:

$$\phi_{r_{min}} = 0 \rightarrow r_{min} = R\,,$$

em que $\phi_r = 0$ é a menor distância angular entre o raio de luz e a fonte gravitacional como sendo nulo e $r_{min} = R$ indica o raio sendo igual ao raio da fonte. Com essas considerações, podemos dizer que:

$$u^{(0)} = \frac{1}{R}\cos\phi \tag{4.31}$$

Essa expressão representa uma condição, na qual o feixe de luz passaria tangente à fonte em uma trajetória retilínea desconsiderando a presença da fonte. Determinado a solução de ordem 1:

$$\frac{d^2u^{(1)}}{d\phi^2} + u^{(1)} = 3mu^{(0)2}\,. \tag{4.32}$$

Substituindo a expressão de ordem 0, temos como resultado essa expressão:

$$u^{(1)} = \frac{m}{R^2}\left[\cos^2(\phi) + 2\sin^2(\phi)\right]. \tag{4.33}$$

Agora, vamos tomar a soma de $u^{(0)}$ e $u^{(1)}$ para determinarmos a solução total. Logo:

$$u = \frac{1}{R}\cos\phi + \frac{m}{R^2}\left[\cos^2(\phi) + 2\sin^2(\phi)\right]. \tag{4.34}$$

Lembrando que $u = 1/r$ podemos então substituir em 4.34:

$$R = r\cos\phi + \frac{m}{R}\left[r\cos^2(\phi) + 2r\sin^2(\phi)\right]. \tag{4.35}$$

Note que o sistema de coordenadas utilizado até o momento não é muito favorável para nossa visualização. Vamos então substituir pelo sistema de coordenadas cartesianas para facilitar a visualização da curvatura espacial do feixe de luz (LENZI, 2020). Devemos nos lembrar dos valores de x, y em coordenadas esféricas assim como de r em coordenadas cartesianas.

$$R = x + \frac{m}{R}\left[\frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right], \tag{4.36}$$

ou:

$$x = R - \frac{m}{R}\left[\frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right]. \tag{4.37}$$

Vamos considerar que $y \gg x$, ou seja, a fonte de luz está muito distante da fonte gravitacional, de modo que iremos assumir uma solução assintótica e poderemos dizer que:

$$x \approx R \pm \frac{m}{R} 2y\,, \tag{4.38}$$

em que, da eq. (3.41), podemos dizer que $m = \mathrm{GM}/\mathrm{c}^2$, e com isto, temos:

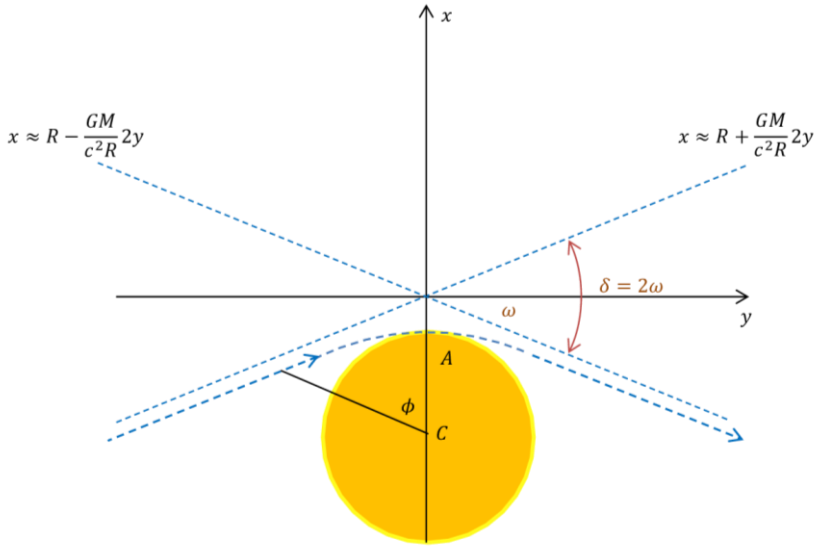
$$x \approx \frac{2\mathrm{GM}}{c^2 R} y \tag{4.39}$$

Repare que o termo que multiplica y representa o coeficiente angular da reta descrita pela expressão em questão, e que o sinal de $\pm$ representa a conjunção dentro dessa aproximação assintótica que estamos considerando. Assim, teremos duas equações que descrevem retas distintas que nos auxiliam a determinar o termo δ, veja na figura 4.3 (Na próxima página).

Note que o cruzamento dessas soluções nos permite analisar o desvio da luz, e que para podermos analisar o desvio total necessitamos tomar a soma das duas inclinações, onde o desvio total da luz é descrito pelo ângulo $\delta = 2\omega$. Repare que esse desvio é muito pequeno, de modo que podemos dizer que $\omega \approx \tan\omega$, que representa o coeficiente linear da reta. Logo, podemos dizer que:

$$\delta \approx \frac{4\mathrm{GM}}{c^2 R} \tag{4.40}$$

Figura 4.3: Cruzamento das aproximações assintóticas



Fonte: Medeiros (2022)

A expressão acima (eq. 4.40), nos apresenta o desvio da luz quando passa próximo a uma fonte gravitacional, na qual após as substituições, teremos $\delta = 1{,}75''$

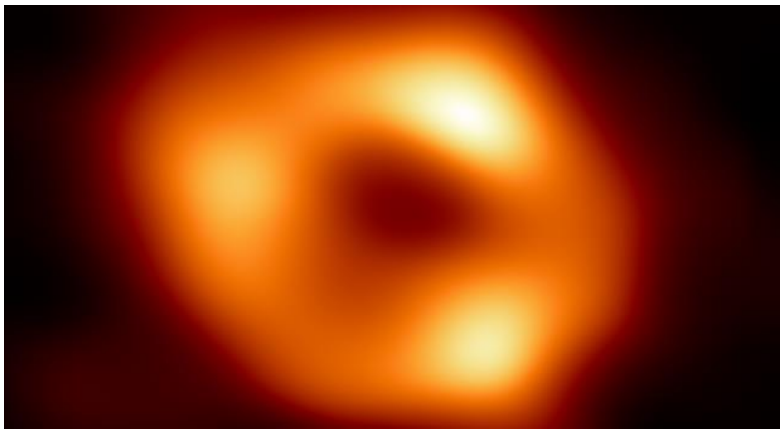
sendo muito próximo dos valores observados por Eddington e sua equipe, que em Sobral tiveram $\delta \approx 1{,}6''$ e em Porto do Príncipe de $\delta \approx 1{,}9''$. Estes resultados foram divulgados na época, porém, mesmo aceitos, seus dados foram inconclusivos devido à problemas geográficos e técnicos nos locais de expedição, tanto em Sobral por causa dos efeitos climáticos, quanto a problemas vinculados às imagens fornecidas na cidade de Porto de Príncipe. Mesmo com as falhas supracitadas, a expedição liderada por Eddington teve extrema importância na época (COLES, 2001; SOARES, 2005). Depois de alguns anos, esse teste foi refeito com melhores aparelhos e aceito de forma satisfatória.

Como os resultados acerca destes dois testes da TRG, a precessão do periélio de Mercúrio e a deflexão dos raios luminosos, foram corroborados pelas observações, e os dois se utilizaram da solução de Schwarzschild, podemos dizer que tal solução pode ser considerada válida para se descrever fenômenos na natureza em seu domínio de aplicação.

4.2. AS EVIDÊNCIAS RECENTES DA EXISTÊNCIA DE BURACOS NEGROS

No ano de 2019, mais precisamente no dia 19 de abril, foi divulgada a primeira imagem de um buraco negro, que se deu por meio de uma colaboração científica internacional com o (Event Horizon Telescope – EHT) ou Telescópio Horizonte de Eventos que teve suas primeiras análises no ano de 2009. 20 países, 60 instituições, mobilizaram 347 profissionais, desde físicos a engenheiros. Para realizar esse feito, foi necessário um telescópio do tamanho da terra constituído por 8 radio telescópios capazes de agrupar informações da imagem do *Messier 87*, um buraco negro supermassivo que se encontra no centro da galáxia M87, sua massa é de aproximadamente 6,5 bilhões de massas solares (NASA, 2019; NASA, 2022).

Figura 4.4: Imagem do Sagitário A*, Buraco Negro do centro Via Láctea



Fonte: Site da NASA (2022)

No centro de nossa galáxia temos um buraco negro supermassivo, a exemplo da galáxia M87, com massa de aproximadamente 4 milhões de massas solares. Este foi detectado pelo EHT no ano de 2022 e é denominado Sagitário A* (figura 4.4). Vale ressaltar, que como descrito acima, os buracos negros não permitem que nada que esteja em seu interior consiga sair, as imagens acima citadas são apenas do disco de acreção que envolvem os buracos negros, sendo possível a observação pois uma intensa emissão de raios X dada por matéria extremamente quente orbitando-os. (NASA, 2019)

A teoria de Einstein previa ainda, que com a perturbação no espaço-tempo surgiriam as ondas gravitacionais que se propagariam na velocidade da luz em todas as direções. Cerca de 100 anos depois de sua predição por Einstein, as ondas gravitacionais puderam ser detectadas em fevereiro de 2015, pelo LIGO (Laser Interferometer for Gravitational waves Observatory) publicada na revista científica Physical Review Letters. De acordo com o site do LIGO, os pesquisadores detectaram um sinal do que pode ser a fusão de buracos negros supermassivos já observada em ondas gravitacionais. O produto desta fusão foi tida como primeira detecção clara de um buraco negro de “massa intermediária”, com uma massa entre 100 e 1.000 vezes a do sol.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Fazendo uma alusão ao objetivo deste trabalho, que se tratava de estabelecer uma pesquisa bibliográfica com o intuito de compilar um conjunto de ideais que pudessem vir a favorecer a compreensão de um tema da Física Moderna e Contemporânea a fim possibilitar uma melhoria de seu ensino, julgamos que este trabalho de conclusão de curso foi satisfatório.

Dada a complexidade do tema abordado, que consistiu no desenvolvimento da solução de Schwarzschild, podemos afirmar que alguns aspectos ficaram a desejar devido a grande quantidade de recursos que são necessários para sua compreensão, em contraponto às limitações características da estrutura deste tipo de trabalho. Ainda assim, acreditamos que para uma iniciação ao tema, este trabalho pode ser de alguma valia, uma vez que se destina a um público-alvo de professores em formação que possivelmente possuem vários dos pré-requisitos necessários para acompanhar as ideias aqui expostas.

É evidente que para uma compreensão mais efetiva do tema, é desejável que os leitores deste trabalho tenham a oportunidade de complementar as discussões aqui realizadas a partir de uma diversificação de fontes, e/ou através de um acompanhamento de profissionais que possam esclarecer eventuais obscuridades que tenham permanecido no texto. Neste sentido, podemos estabelecer como uma perspectiva futura deste trabalho, a implementação de um minicurso acerca do referido tema.

Outra perspectiva interessante que pode ser desenvolvida a partir deste trabalho é a elaboração de uma sequência didática para uma compreensão introdutória de buracos negros voltadas para um público-alvo de alunos pertencentes ao ensino médio. Neste contexto, acreditamos que a apropriação do tema a partir deste trabalho, pode facilitar a devida transposição didática na elaboração do referido material.

Por último, mas não menos importante, podemos realçar que a jornada necessária para elaboração deste trabalho proporcionou muito aprendizado, e pelo menos para este que vos escreve, permitiu de maneira exitosa a compreensão de um tema atualmente relevante no contexto da Física, e que não está devidamente inserido na formação tradicional de professores desta ciência.

REFERÊNCIAS

A “BANG” in LIGO and Virgo detectors signals most massive gravitational-wave source yet. **Ligo Caltech**, 2020. Disponível em: < https://www.ligo.caltech.edu/news/ligo20200902>. Acesso em: 20, Jun. de 2022.

ASTRONOMERS Reveal First Image of the Black Hole at the Heart of Our Galaxy. **Event Horizon Telescope**, 2022. Disponível em: < https://eventhorizontelescope.org/blog/astronomers-reveal-first-image-black-hole-heart-our-galaxy>. Acesso em: 20, Jun. de 2022.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: Ensino Médio. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Ciências da Natureza e Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, 2000.

CARROLL, S. (2003). **Spacetime and Geometry**: An Introduction to General Relativity. Benjamin Cummings. ISBN: 0805387323, 2003.

COLES, P. Einstein, Eddington and the 1919 eclipse. In: **Historical development of modern cosmology**. 2001. p. 21.

CRAWFORD, Paulo. (2005). **A génese da teoria da relatividade geral ou a longa história do princípio da equivalência**. 10.14195/978-989-26-0353-7_7, 2005.

CHIRENTI, C. **Buracos negros, modos quasinormais e ondas gravitacionais**. Cadernos de Astronomia, Vitória, v. 2, n. 2, p. 71, 2021. DOI: 10.47456/Cad.Astro.v2n2.35941. Disponível em: <https://periodicos.ufes.br/astronomia/article/view/35941>. Acesso em: 20 out. 2022.

DE OLIVEIRA, F. F.; VIANNA, D. M. e GERBASSI, R. S. **Física moderna no ensino médio**: o que dizem os professores. Revista Brasileira de Ensino de Física. 2007, v. 29, n. 3, pp. 447-454, 2007. ISSN 1806-9126.https://doi.org/10.1590/S1806-11172007000300016. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/S1806-11172007000300016> Acesso em: 7 out. 2022.

D'INVERNO, R. (1992). Introducing Einstein's Relativity. Clarendon Press, 1992.
EINSTEIN, A. **Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento**. Annalen der Physik, número 17, p. 891, 1905

GIL-PÉREZ, D.; e VILCHES-PEÑA, A. (2001). **Una Alfabetización Científica para el Siglo XXI: Obstáculos y Propuestas de Actuación, Investigación en la Escuela**, v.43, n.1, 27-37, 2001.

LAMBOURNE, RRobert. **Relativity, Gravitation and Cosmology**. Cambridge, 2010.

LENZI, César Henrique. **Aula 1 - O buraco Negro de Schwarzschild**. [*S.l.:s.n*], 2020. 1 vídeo (28 min). Publicado pelo canal Cézar Lenzi. Disponível em: <https://youtu.be/PiXKJ_cRP4U?list=PLHlSrwEbx2oTg0QgETUEsZ04iryTyeNJo>. Acesso em: 23 ago 2022.

LENZI, César Henrique. **Aula 1 - Testes Clássico à Relatividade Geral – O avanço do periélio de Mercúrio.** [*S.l.:s.n*], 2020. (Aula 2) 1 vídeo (29 min). Publicado pelo canal Cézar Lenzi. Disponível em: <https://youtu.be/ml134kD6aUc?list=PLHlSrwEbx2oTg0QgETUEsZ04iryTyeNJo>. Acesso em: 12 set 2022.

LENZI, César Henrique. **Aula 2 - O buraco Negro de Schwarzschild.** [*S.l.:s.n*], 2020. 1 vídeo (11 min). Publicado pelo canal Cézar Lenzi. Disponível em: <https://youtu.be/zIph7bjVkDk?list=PLHlSrwEbx2oTg0QgETUEsZ04iryTyeNJo>. Acesso em: 24 ago 2022.

LENZI, César Henrique. **Aula 2 - Testes Clássico à Relatividade Geral – O avanço do periélio de Mercúrio (Parte 2).** [*S.l.:s.n*], 2020. 1 vídeo (19 min). Publicado pelo canal Cézar Lenzi. Disponível em: <https://youtu.be/Qgt96uj9Av8?list=PLHlSrwEbx2oTg0QgETUEsZ04iryTyeNJo>. Acesso em: 14 set 2022.

LENZI, César Henrique. **Aula 3 - O buraco Negro de Schwarzschild.** [*S.l.:s.n*], 2020. 1 vídeo (23 min). Publicado pelo canal Cézar Lenzi. Disponível em: <https://youtu.be/vKXLMSlLezg?list=PLHlSrwEbx2oTg0QgETUEsZ04iryTyeNJo>. Acesso em: 24 ago 2022.

LENZI, César Henrique. **Aula 3 - Testes Clássico à Relatividade Geral – A deflexão da luz.** [*S.l.:s.n*], 2020. 1 vídeo (29 min). Publicado pelo canal Cézar Lenzi. Disponível em: <https://youtu.be/ZGERA6B-TnU?list=PLHlSrwEbx2oTg0QgETUEsZ04iryTyeNJo>. Acesso em: 17 set 2022.

LIMA, E. L. **Álgebra Exterior**. IMPA, Rio de Janeiro, 2009.

LORENTZ, HA, EINSTEIN, A. E MINKOWSKI, H. **O princípio da relatividade.** Lisboa: Calouste Gulbekian, 1983.

MARTINS, EBC. **Educação e serviço social**: elo para a construção da cidadania. São Paulo: Editora UNESP. 2012. **A política de educação brasileira**: uma leitura sob a óptica do serviço social. pp. 75-113. ISBN 978-85-3930-243-7. Available from SciELO Books.

MATSUURA, Oscar T. A primeira imagem de um buraco negro. **Cadernos de Astronomia**, v. 1, n. 1, p. 52-82, 2020.

MONTEIRO, M. A.; NARDI, R.; FILHO, J. B. B. **Física Moderna e Contemporânea no ensino médio e a formação de professores**: desencontros com a ação comunicativa e a ação dialógica emancipatórias. Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, v. 8, n. 1, p. 1-13, 2013. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/135134> Acesso em: 7 out. 2022.

NARDI, R. **A pesquisa em ensino de Ciências e Matemática no Brasil**. Bauru.

Vol 21. N.2.I-V p. Jun. 2015.

NASA. **Suppermassive Black Hole Sagittarius A***. Disponível em: < https://www.nasa.gov/mission_pages/chandra/multimedia/black-hole-SagittariusA.html>. Acesso em: 17 Ago. 2022.

PIATTELLA, O. F. **O artigo fundador da teoria da relatividade restrita**: Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento. Cadernos de Astronomia, Vitória, v. 1, n. 1, p. 157–176, 2020. DOI: 10.47083/Cad.Astro.v1n1.31681. Disponível em: < https://periodicos.ufes.br/astronomia/article/view/31681>. Acesso em: 12 out. 2022.

SAA, Alberto. **Cem anos de buracos negros: o centenário da solução de Schwarzschild**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 38, 2016.

SANTOS, A. C.; NASCIMENTO, S. D.; SOUZA, D. do N. **Ensino de Física Moderna**: Perspectivas e desafios sob o olhar de alguns professores de Física do Ensino Médio. **Scientia Plena**, *[S. l.]*, v. 12, n. 11, 2016. DOI: 10.14808/sci.plena.2016.112710. Disponível em: <https://www.scientiaplena.org.br/sp/article/view/2970.>. Acesso em: 7 out. 2022.

SASSERON, L.úcia H.elena e; CARVALHO, A.nna M.Maria Pessoa de. **Alfabetização científica: uma revisão bibliográfica**. Investigações em Ensino de Ciências, v. 16(1), p. 59-77, 2011. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/ienci/artigos/Artigo_ID254/v16_n1_a2011.pdf>. Acesso em: 05 jun. 2019.

SCHUTZ, B. F., **A First Course in General Relativity,** Cambridge University Press, Cambridge; New York, 2009

SOARES, Domingos SL. A Real Importância de Sobral na Ciência Moderna. **Bulletin of the Astronomical Society of Brazil**, 2005. Disponível em: < http://xingu.fisica.ufmg.br:8087/oap/public/pas64.htm>

APÊNDICE A – **O formalismo tensorial**

Desde o século XVII que a matemática tem se consolidado como a linguagem estruturante das ideias da ciência Física, e com isto, tem contribuído para o sucesso desta no que diz respeito a descrição e previsibilidade dos fenômenos da natureza. No entanto, do ponto de visto do ensino de Física, ainda existem muitos problemas associados à apropriação dos diversos formalismos matemáticos utilizados nesta ciência. Neste contexto, devido a pouca familiaridade sobre de estudantes de física acerca da álgebra tensorial, vamos expor algumas das ideias básicas necessárias para se compreender os conteúdos abordados neste trabalho.

SOBRE VETORES E VETORES DUAIS

Antes de abordarmos o conceito de tensores, devemos enfatizar que para compreendê-lo, faz-se necessário assegurar a compreensão de outros entes matemáticos conhecidos como vetores.

Quando falamos em vetores estamos lidando com entes que são elementos de um conjunto denominado espaço vetorial V, que munidos de duas operações: soma e produto por escalar, respeitam um determinado conjunto de propriedades (LIMA, 2009).

Para todos os elementos $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in V$, a adição satisfaz:

(a1) Comutatividade: $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$, $\forall\, \vec{A}, \vec{B} \in V$.

(a2) Associatividade: $\left(\vec{A} + \vec{B}\right) + \vec{C} = \vec{A} + \left(\vec{B} + \vec{C}\right)$, $\forall\, \vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in V$.

(a3) Elemento neutro: existe o vetor $\vec{0} \in V$ que satisfaz $\vec{B} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{B} = \vec{B}$, $\forall\, \vec{0}, \vec{B} \in V$.

(a4) Inverso aditivo: $\forall\, \vec{B} \in V$, existe um vetor inverso $\vec{B} = -\vec{B} \in V$, denominado elemento oposto de $\vec{B}$, tal que $\vec{B} + \left(-\vec{B}\right) = \vec{0}$.

Para os elementos $\vec{A}, \vec{B} \in V$ e $a, b \in \mathbb{R}$, o produto por escalar satisfaz:

(m1) Associatividade da multiplicação por escalar: $a\left(b\vec{B}\right) = (ab)\vec{B}$, $\forall\, \vec{B} \in V$ e $a, b \in \mathbb{R}$.

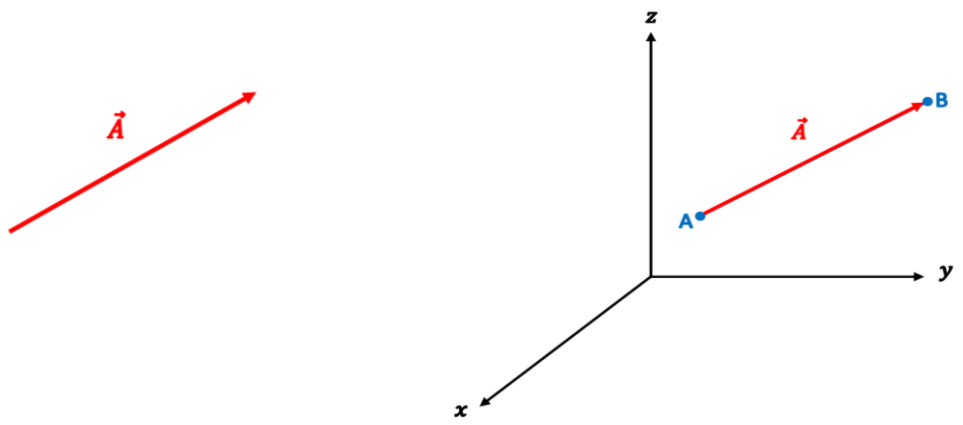
(m2) Distributividade da soma de escalares em relação a um vetor: $(a + b)\vec{B} = a\vec{B} + b\vec{B}$, $\forall\, \vec{B} \in V$ e $a, b \in \mathbb{R}$.

(m3) Distributiva de um escalar em relação à soma de vetores: $a(\vec{A}+\vec{B}) = a\vec{A} + a\vec{B}$, $\forall\, \vec{A}, \vec{B} \in V$ e $a \in \mathbb{R}$.

(m4) Vale que $1\vec{B} = \vec{B}$, ou seja, a unidade dos escalares não altera os vetores de V.

Qualquer ente matemático que sob estas aplicações, satisfaçam essas propriedades, pode ser considerado um vetor. De um ponto de vista geométrico, um vetor possui uma representação que permite uma aplicabilidade muito intuitiva, na qual ele é representado por um segmento de reta orientado, atribuindo-se a este, as características: Módulo, direção e sentido.

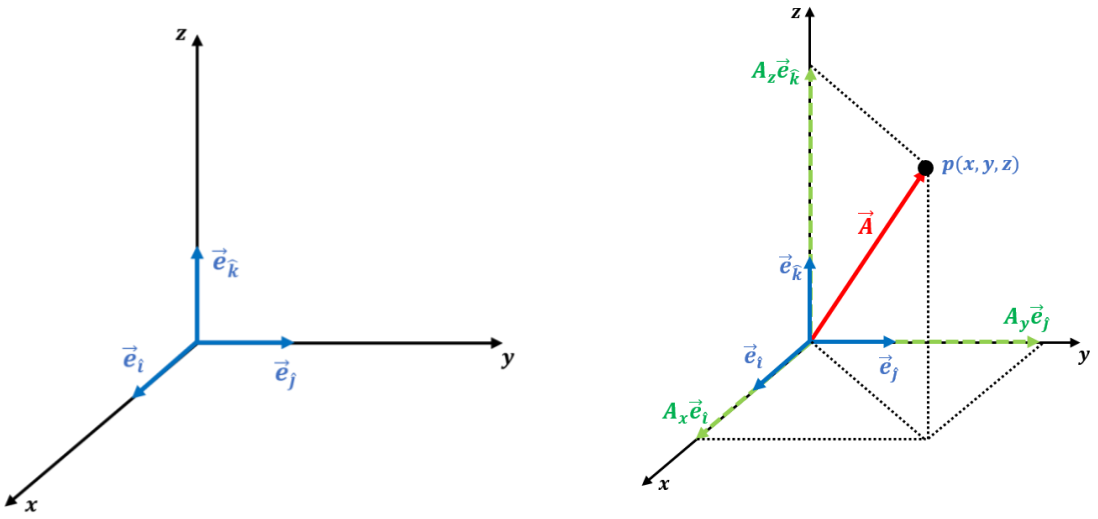
Figura A.1: Representação Geométrica de um vetor



Fonte: Medeiros (2022)

Frequentemente, a fim de facilitar a manipulação algébrica de vetores, costuma-se representá-lo associado a um sistema de coordenadas; e ainda, descrevê-lo como uma combinação linear de vetores de base: $\vec{e}_{\hat{\imath}}, \vec{e}_{\hat{\jmath}}$ e $\vec{e}_{\hat{k}}$. Uma base de um Espaço Vetorial consiste em um conjunto de vetores em termos dos quais se pode descrever qualquer outro vetor pertencente a este conjunto, e geralmente são definidos de maneira a informar o sentido de crescimento de valores associados aos eixos do sistema de coordenadas.

Figura A.2: Vetores unitários



Fonte: Medeiros (2022)

Neste contexto, expressamos um vetor $\vec{A}$, como:

$$\vec{A} = A^x\vec{e}_{\hat{\imath}} + A^y\vec{e}_{\hat{\jmath}} + A^z\vec{e}_{\hat{k}}\,, \tag{A.1}$$

em que A^x, A^y e A^z são ditas componentes deste vetor ao longo dos eixos ordenados. Geometricamente, representamos este vetor conforme a figura A.2. Apesar de termos definido o vetor $\vec{A}$ vinculado ao sistema de coordenadas cartesiano ortogonal, podemos descrevê-lo em termos de qualquer sistema de coordenadas desejado. Por isso o generalizaremos para a forma:

$$\vec{A} = A^1\vec{e}_1 + A^2\vec{e}_2 + A^3\vec{e}_3\,. \tag{A.2}$$

em que $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$, são os vetores de base associados ao sistema de coordenadas.

No contexto da Física, a álgebra vetorial desempenha um papel muito importante pelo fato de várias grandezas físicas possuírem características que podem ser devidamente descritas com as propriedades dos vetores. Inúmeros são os exemplos destas grandezas: força, deslocamento, velocidade, entre outras.

No entanto, é preciso ressaltar que há casos de grandezas físicas que exibem um comportamento inverso aos dos vetores que definimos aqui. Por tal motivo, é preciso também utilizarmos entes matemáticos que tenham um comportamento condizente com esta característica. Dentre os entes que podem desempenhar esta função, estão os chamados Vetores Duais. Estes vetores formam um outro Espaço Vetorial chamado de Espaço Vetorial Dual V^*.

É possível estabelecer uma relação entre os vetores e os chamados vetores duais através das bases dos respectivos espaços vetoriais. Isto porque os vetores de bases duais são definidos de modo a satisfazerem duas características: a

primeira diz que cada vetor de base dual deve ser perpendicular a quaisquer vetores da base original que possuam índices diferentes, ou seja, $\vec{e}^1$ é perpendicular ao $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$, $\vec{e}^2$ é perpendicular ao $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_3$, e assim por diante. Perceba que a notação utilizada para denotar o vetor de base do espaço dual é um vetor com índice sobrescrito, enquanto os vetores da base do espaço vetorial 'original' são denotados com índices subscritos. A segunda característica, esta afirma que o produto escalar entre cada vetor de base dual e o vetor da base original com mesmo índice, deve ser igual a um.

Deste modo, podemos dizer que:

$$\vec{e}^i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 0, & se\ i \neq j \\ 1, & se\ i = j \end{cases} , \tag{A.3}$$

em que i e j denotam o número de coordenadas do sistema de referência.

Com isto, podemos expressar o vetor $\vec{A}$ como:

$$\vec{A} = A_1\vec{e}^1 + A_2\vec{e}^2 + A_3\vec{e}^3 . \tag{A.4}$$

Note que as componentes do vetor quando escritos como uma combinação linear de vetores da base dual, são denotados com índices subscritos. Esta notação desempenha um papel importante neste contexto. As componentes de vetores denotadas com índices sobrescritos A^i, são chamadas de componentes contravariantes. Já componentes de vetores denotadas com índices subscritos A_i, são chamadas de componentes covariantes.

O contexto do qual deriva esta nomenclatura está associado ao estudo de mudança de sistemas de coordenadas. É muitas vezes preciso, no âmbito do estudo de fenômenos físicos, realizar operações que expressem as grandezas físicas em outro sistema de coordenadas, e consequentemente, utilizar leis de transformações tanto das componentes de vetores, como das bases do espaço vetorial utilizados para expressá-los. Neste sentido, dada uma certa lei de transformação dos vetores da base, quando as componentes dos vetores possuem uma lei de transformação inversa a esta primeira, diz-se que tais componentes são contravariantes. Para o contexto em que as componentes possuem uma lei de transformação igual a dos vetores de base, diz-se que tais componentes são covariantes.

Dados dois sistemas de coordenadas: S e S', temos:

$$A'^i = \sum_j \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} A^j = \sum_j a_{ij} A^j , \tag{A.5.a}$$

$$\mathrm{A}'_i = \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} A_j = \sum_j a^{ij} A_j \ , \tag{A.5.b}$$

em que x e x' são as coordenadas dos sistemas de referência.

Aproveitamos a oportunidade para inserir neste contexto uma nova notação: sempre que em uma somatória encontramos índices repetidos de modo que um deles esteja subscrito, e o outro, sobrescrito, passaremos a utilizar esta característica para denotar a soma sem explicitar o símbolo dado pela letra sigma. Nesta notação, escrevemos as equações anteriores na seguinte forma:

$$A'^i = a_{ij} A^j \ , \tag{A.6.a}$$

$$\mathrm{A}'_i = a^{ij} A_j \ . \tag{A.6.b}$$

Esta notação é conhecida como notação de Einstein.

TENSORES

Agora sim, indo direto ao ponto, o que é um tensor?

Existem várias formas de se definir um tensor na literatura acadêmica. No entanto, a fim de promover uma apropriação mais rápida, recorremos a uma definição pouco rigorosa, porém, válida.

Podemos afirmar que um tensor é um ente matemático que combina vetores e vetores duais através de um produto tensorial (LIMA, 2009). Neste caso, precisamos delimitar as características de um produto tensorial.

Consideremos então um produto tensorial entre dois vetores: $\vec{A} = A^1\vec{e}_1 + A^2\vec{e}_2$ e $\vec{B} = B^1\vec{e}_1 + B^2\vec{e}_2$, representado por $\vec{A}\otimes\vec{B}$. Temos então:

$$\vec{A}\otimes\vec{B} = (A^1\vec{e}_1 + A^2\vec{e}_2)\otimes(B^1\vec{e}_1 + B^2\vec{e}_2) \ . \tag{A.7}$$

Aplicando a distributividade, temos:

$$\vec{A}\otimes\vec{B} = A^1B^1\vec{e}_1\otimes\vec{e}_1 + A^1B^2\vec{e}_1\otimes\vec{e}_2 + A^2B^1\vec{e}_2\otimes\vec{e}_1 + A^2B^2\vec{e}_2\otimes\vec{e}_2 \ , \tag{A.8}$$

e usando a notação de Einstein, reescrevemos:

$$\vec{A}\otimes\vec{B} = A^iB^j\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j \ . \tag{A.9}$$

Vamos denotar uma nova notação para estes termos. Utilizaremos letras maiúsculas em itálico para representar o resultado deste produto tensorial, ou seja, o Tensor: $\vec{A}\otimes\vec{B} = C$. O produto das componentes representaremos por $A^iB^j = C^{ij}$, de modo que os índices associas à C evidenciem o número de vetores (ou vetores duais) e o tipo de componentes (contravariantes ou covariantes) envolvidos no

produto tensorial. Já o produto dos vetores de base $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ denotaremos apenas de maneira justaposta: $\vec{e}_i \vec{e}_j$. Deste modo, reescrevemos a expressão anterior como:

$$C = C^{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j \,. \tag{A.10}$$

Apesar de condensada, é preciso realçar que tal expressão possui várias componentes, cujo número é dado por M^n, em que $M \equiv$ número de dimensões no qual o vetor está definido e $n \equiv$ número de índices denotado na componente do tensor, utilizado também para classificar o tensor em termos ordem, neste exemplo, C^{ij} denota um tensor de ordem 2. Muito frequentemente, na álgebra tensorial, descrevem-se as operações entre tensores sem que se explicite o tensor de base: $\vec{e}_i \vec{e}_j$. Neste caso, por exemplo, o tensor $F = F^{jkl}_{im}\, \vec{e}^i \vec{e}_j \vec{e}_k \vec{e}_l \vec{e}^m$, de quinta ordem, será referido apenas a partir de seus componentes: F^{jkl}_{im}.

Deste modo, nos referimos a soma de tensores simplesmente verificando se as componentes são do mesmo tipo:

$$\begin{aligned} C_{ij} &= A_{ij} + B_{ij}, \\ C^{ij} &= A^{ij} + B^{ij}, \\ C^i_j &= A^i_j + B^i_j. \end{aligned} \tag{A.11}$$

Quanto a lei de transformação das componentes de um tensor para outro sistema de coordenadas, de modo geral, tem-se:

$$C'^{i\ldots j}_{k\ldots l} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} \cdots \frac{\partial x'^j}{\partial x^n} \frac{\partial x^p}{\partial x'^k} \cdots \frac{\partial x^q}{\partial x'^l} C^{m\ldots n}_{p\ldots q} \,. \tag{A.12}$$

Outra operação relevante no contexto da álgebra tensorial é a contração. Considere a transformação:

$$T^{ik}_{jlm} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^o} \frac{\partial x'^k}{\partial x^q} \frac{\partial x^p}{\partial x'^j} \frac{\partial x^r}{\partial x'^l} \frac{\partial x^s}{\partial x'^m} T^{oq}_{prs}. \tag{A.13}$$

Agora, tomando $i = l$ podemos reescrever a expressão reorganizando as derivadas:

$$T^{ik}_{jim} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^o} \frac{\partial x^r}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^k}{\partial x^q} \frac{\partial x^p}{\partial x'^j} \frac{\partial x^s}{\partial x'^m} T^{oq}_{prs}.. \tag{A.14}$$

De modo que as duas primeiras derivadas, de acordo com a regra da cadeia, podem ser escritas como:

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x^o} \frac{\partial x^r}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^r}{\partial x^o} = \delta^r_o \,. \tag{A.15}$$

Ou seja, reescrevendo a expressão A.14, tomando a definição do delta de Kronecker, temos:

$$T_{jm}^{k} = \frac{\partial x'^{k}}{\partial x^{q}} \frac{\partial x^{p}}{\partial x'^{j}} \frac{\partial x^{s}}{\partial x'^{m}} T_{ps}^{q} \,. \tag{A.16}$$

Com isto vemos que se um índice de cima é igualado a um índice de baixo, reduz-se a ordem do tensor em 2 unidades.

O TENSOR MAIS IMPORTANTE

A fim de exemplificar um tensor em seu contexto de aplicação, vamos utilizar como exemplo um tensor que é extremamente útil, pois com ele podemos determinar várias quantidades fundamentais como comprimentos e ângulos. Seja qual for o sistema de coordenadas, ele fornece uma métrica para tal, este é conhecido como tensor fundamental ou tensor métrico. (FLEISCH, 2012).

Vamos definir o tensor métrico ou a métrica do espaço, que pode ser visto com notações como g ou **g**, vamos considerar dois pontos em um espaço que estão separados por uma distância infinitesimal ds, vamos chamar de dr o vetor que liga os dois pontos, precisamos tomar o quadrado dessa distância, ou seja, ds^2 logo, podemos afirmar que:

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r}. \tag{A.17}$$

Relembrando o que vimos anteriormente, podemos rescrever o vetor dr como sendo uma combinação linear de componentes contravariantes e vetores de base

$$d\vec{r} = \vec{e}_i dx^i. \tag{A.18}$$

Ou ainda podemos escrevê-los em termos de vetores de base duais com as componentes covariantes

$$d\vec{r} = \vec{e}^i dx_i. \tag{A.19}$$

Dessa forma imaginando uma semelhança para o segundo dr, vamos reescrever a equação 3.51 como:

$$ds^2 = \left(\vec{e}^i dx_i\right) \cdot \left(\vec{e}^j dx_j\right), \tag{A.20.a}$$

$$ds^2 = \left(\vec{e}^i \cdot \vec{e}^j\right) dx_i dx_j. \tag{A.20.b}$$

O termo $\left(\vec{e}^i \cdot \vec{e}^j\right)$, representado acima, é chamado de componente do tensor métrico, ou seja $g^{ij} = \left(\vec{e}^i \cdot \vec{e}^j\right)$, que no caso em questão é a componente contravariante do tensor métrico. O tensor métrico é um tensor de ordem dois ou de segunda ordem, logo podemos reescrever a expressão 3.52b como

$$ds^2 = g^{ij} dx_i dx_j. \tag{A.21}$$

De maneira bem similar podemos realizar as mesmas etapas com as componentes contravariantes e encontramos a componente covariante do tensor métrico

$$ds^2 = \left(\vec{e}_i dx^i\right) \cdot \left(\vec{e}_j dx^j\right), \tag{A.22a}$$

$$ds^2 = \left(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j\right) dx^i dx^j, \tag{A.23b}$$

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j. \tag{A.24c}$$

onde g_{ij} representa essa componente covariante do tensor.

A partir de então, podemos afirmar que os elementos g_{ij} expõem as relações entre os eixos do sistema de coordenadas, pois este tensor é definido através de produtos escalares entre os vetores de base tangentes a esses eixos em questão. De acordo com Silva (2018) “Estas relações são determinadas pela forma do sistema de coordenadas, que por sua vez, é geralmente escolhido de modo a codificar a simetria do espaço de interesse.”

De modo que seja como for para ser representada seja com componentes covariantes ou componentes contravariantes, a distância entre dois pontos deve ser a mesma, independente do sistema de coordenadas adotado, ou seja, é função do tensor métrico g e de suas componentes g^{ij} e g_{ij} transformar o produto das derivadas infinitesimais expressas nas componentes contravariantes e covariantes na distância que liga os dois pontos, sendo esta invariante. (FLEISCH, 2012). Por isso o tensor métrico é responsável por definir a geometria do espaço.

De forma direta, vamos expor a forma que mais é encontrada de se determinar as componentes do tensor métrico, na forma matricial:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}. \tag{A.25}$$

De acordo com o que já foi estudado, podemos agora ter uma melhor ideia do que seja a métrica do espaço. Vamos exemplificar, sabemos que a distância liga dois pontos no sistema de coordenadas cartesiano é dado por

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{A.26}$$

Logo, para um espaço plano tridimensional, temos a métrica dada a partir de uma notação matricial, onde

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{A.27}$$

De forma similar, podemos chegar na expressão matricial que nos apresenta a métrica de um espaço tridimensional coordenatizado com coordenadas esféricas

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{A.28}$$

Já que o elemento infinitesimal de distância é dado por

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2 \, , \tag{A.29}$$

que de acordo com Silva (2018)

> A partir destes exemplos, torna-se evidente que as componentes do tensor métrico correspondem a elementos que podem ser utilizados para compor entes geométricos, neste caso distâncias, a partir de mudanças incrementais das coordenadas do sistema em questão.

Uma outra função que está ligada a métrica de um sistema, é quando podemos transformar as componentes covariantes em contravariantes (vice-versa) lembrando que $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = g_{ij}$, tomemos a expressão abaixo

$$g_{ij} A^i = A_j \, . \tag{A.30}$$

Desde tensores com ordens menores a tensores com ordens superiores essa expressão é válida, podemos dizer que ela é responsável por baixar ou levantar os índices das componentes de um tensor.

A DERIVADA COVARIANTE

Vamos agora partir para a derivada de tensores e o símbolo de Christoffel. Sabemos que um vetor pode ser escrito a partir da combinação linear das componentes contravariantes com vetores de base covariante, de modo que se tomarmos sua derivada com relação a primeira coordenada do sistema, por exemplo, temos:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^1} = \frac{\partial A^i}{\partial x^1} \vec{e}_i + A^i \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^1} \, . \tag{A.31}$$

É nítido que teremos problemas na derivada se estivermos levando em consideração um sistema de coordenadas cujos vetores de base variam de acordo com o tempo. Mas, vamos agora conhecer os símbolos de Christoffel (Γ), que de acordo com Fleisch (2012) “ [...] representa simplesmente o coeficiente de ponderação para um dos vetores de base.” Essa relação se dá por:

$$\Gamma^{\mathrm{k}}_{ij} \vec{e}_k = \frac{\partial \vec{\mathrm{e}}_i}{\partial x^j} \, . \tag{A.32}$$

em que o índice i representa o vetor de base para qual a derivada está sendo tomada, índice j denota a coordenada sendo variada para induzir esta mudança no vetor de base i e o índice k identifica a direção em que este componente da derivada aponta.

Um ponto importantíssimo é que, mesmo com os índices, não estamos lidando com um tensor, outro ponto é que os índices i e j são simétricos, ou seja $\Gamma_{ij}^{\mathrm{k}} = \Gamma_{ji}^{\mathrm{k}}$, de modo a não alterar o valor desejado.

Uma vez com os conhecimentos acerca do símbolo de Christoffel, podemos adentrar em um conteúdo que nos permite "diferenciar um vetor ou tensor de ordem superior que inclui o efeito das mudanças (se houver) na magnitude e direção dos vetores de base usados para expandir esse vetor ou tensor" (FLEISCH, 2012). Essa ferramenta é conhecida por derivada covariante, que pode ser utilizada desde o espaço Euclidiano até em um espaço com vetores de bases que variam.

Consideremos o vetor $\vec{A} = A^i \vec{e}_i$ e tomemos sua derivada:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(A^i \vec{e}_i\right). \tag{A.33}$$

Tomando a regra do produto na derivada, e lembrando que os vetores de base não são constantes, podemos ver que:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^j} = \frac{\partial A^i}{\partial x^j}\vec{e}_i + A^i \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j}. \tag{A.34}$$

No segundo membro da igualdade, o termo que representa a derivada do vetor de base:

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^{\mathrm{k}} \vec{e}_k . \tag{A.35}$$

Dessa forma podemos reescrever a expressão 4.73 como função do símbolo de Christoffel:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^j} = \frac{\partial A^i}{\partial x^j}\vec{e}_i + A^i \Gamma_{ij}^{\mathrm{k}} \vec{e}_k . \tag{A.36}$$

Como o índice i representa uma soma, vamos substituí-lo por k. Logo:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^j} = \frac{\partial A^k}{\partial x^j}\vec{e}_k + A^i \Gamma_{ij}^{\mathrm{k}} \vec{e}_k . \tag{A.37a}$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^j} = \left(\frac{\partial A^k}{\partial x^j} + A^i \Gamma_{ij}^{\mathrm{k}}\right)\vec{e}_k . \tag{A.37b}$$

Podemos reescrever a expressão 4.76b com uma nova notação:

$$\nabla_j \vec{A} = A^k{}_{;j} \vec{e}_k \tag{A.38}$$

É importante ressaltar que os símbolos de Christoffel podem ser descritos a partir da métrica do problema:

$$\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left[\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right]. \tag{A.39}$$

Para uma dedução desta última equação, verifique o apêndice B.

APÊNDICE B – Dedução dos símbolos de christoffel a partir dos elementos da métrica.

Nomeado pelo físico e matemático alemão Elwin Bruno Christoffel (1829 – 1900), os símbolos de Christoffel são expressões em coordenadas espaciais para a conexão de Levi-Civita. Vamos então apresentar a dedução dos elementos da métrica por meio desses símbolos.

$$\Gamma_{ij}^{\mathrm{k}}\vec{e}_k \cdot \vec{e}^{\,l} = \frac{\partial \vec{\mathrm{e}}_i}{\partial x^j} \cdot \vec{e}^{\,l}\,. \tag{B.1}$$

Devemos nos lembrar que o termo $\vec{e}_k \cdot \vec{e}^{\,l} = \delta_k^l$, logo:

$$\Gamma_{ij}^{\mathrm{k}}\delta_k^l = \frac{\partial \vec{\mathrm{e}}_i}{\partial x^j} \cdot \vec{e}^{\,l}. \tag{B.2}$$

Lembrando da definição do delta de Kronecker, podemos reescrever como

$$\Gamma_{ij}^{\mathrm{l}} = \frac{\partial \vec{\mathrm{e}}_i}{\partial x^j} \cdot \vec{e}^{\,l}. \tag{B.3}$$

Como estamos lidando com índices livres, podemos reescrever $\frac{\partial \vec{\mathrm{e}}_i}{\partial x^j} = \frac{\partial \vec{\mathrm{e}}_j}{\partial x^i}$, e vamos também dividir esse valor em duas metades, logo:

$$\Gamma_{ij}^{\mathrm{l}} = \frac{1}{2}\frac{\partial \vec{\mathrm{e}}_i}{\partial x^j} \cdot \vec{e}^{\,l} + \frac{1}{2}\frac{\partial \vec{\mathrm{e}}_j}{\partial x^i} \cdot \vec{e}^{\,l}\,. \tag{B.4}$$

Por meio da adição de termos que não irão ter influência no resultado da equação, vamos desenvolver um raciocínio acerca da métrica:

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^{\mathrm{l}} = \frac{1}{2}\frac{\partial \vec{\mathrm{e}}_i}{\partial x^j} \cdot \vec{e}^{\,l} + \left(\frac{1}{2}g^{kl}\frac{\partial \vec{e}_k}{\partial x^j} \cdot \vec{e}_i - \frac{1}{2}g^{kl}\frac{\partial \vec{e}_j}{\partial x^k} \cdot \vec{e}_i\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial \vec{\mathrm{e}}_j}{\partial x^i} \cdot \vec{e}^{\,l} \\ + \left(\frac{1}{2}g^{kl}\frac{\partial \vec{e}_k}{\partial x^i} \cdot \vec{e}_i - \frac{1}{2}g^{kl}\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^k} \cdot \vec{e}_i\right).\end{aligned} \tag{B.5}$$

Vamos agora lembrar da definição da métrica, onde $\vec{e}^{\,l} = g^{kl}\vec{e}_k$, substituindo na relação anterior:

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^{\mathrm{l}} = \frac{1}{2}\frac{\partial \vec{\mathrm{e}}_i}{\partial x^j} \cdot g^{kl}\vec{e}_k + \left(\frac{1}{2}g^{kl}\frac{\partial \vec{e}_k}{\partial x^j} \cdot \vec{e}_i - \frac{1}{2}g^{kl}\frac{\partial \vec{e}_j}{\partial x^k} \cdot \vec{e}_i\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial \vec{\mathrm{e}}_j}{\partial x^i} \cdot g^{kl}\vec{e}_k \\ + \left(\frac{1}{2}g^{kl}\frac{\partial \vec{e}_k}{\partial x^i} \cdot \vec{e}_j - \frac{1}{2}g^{kl}\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^k} \cdot \vec{e}_j\right).\end{aligned} \tag{B.6}$$

Reorganizando os termos, e colocando em evidência, temos:

$$\Gamma_{ij}^{\mathrm{l}} = \frac{1}{2}g^{kl}\left[\left(\frac{\partial \vec{\mathrm{e}}_j}{\partial x^i} \cdot \vec{e}_k + \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial x^i} \cdot \vec{e}_j + \frac{\partial \vec{\mathrm{e}}_i}{\partial x^j} \cdot \vec{e}_k + \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial x^j} \cdot \vec{e}_i - \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial x^k} \cdot \vec{e}_i - \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^k} \cdot \vec{e}_j\right)\right]. \tag{B.7}$$

Podemos ainda simplificar o resultado anterior e reescrevê-lo como:

$$\Gamma^{l}_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left[\left(\frac{\partial \vec{e}_j}{\partial x^i} \cdot \vec{e}_k + \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial x^i} \cdot \vec{e}_j \right) + \left(\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j} \cdot \vec{e}_k + \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial x^j} \cdot \vec{e}_i \right) - \left(\frac{\partial \vec{e}_j}{\partial x^k} \cdot \vec{e}_i + \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^k} \cdot \vec{e}_j \right) \right]. \tag{B.8}$$

É possível perceber que o que temos entre parênteses é o resultado da derivada de um produto entre os termos $(\vec{e}_k \cdot \vec{e}_j)$, $(\vec{e}_k \cdot \vec{e}_i)$ e $(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j)$, respectivamente, dessa forma:

$$\Gamma^{l}_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left[\frac{\partial(\vec{e}_k \cdot \vec{e}_j)}{\partial x^i} + \frac{\partial(\vec{e}_k \cdot \vec{e}_i)}{\partial x^j} - \frac{\partial(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j)}{\partial x^k} \right]. \tag{B.9}$$

Lembrando da definição vista na seção 3.5.2, onde todos os termos citados anteriormente $(\vec{e}_k \cdot \vec{e}_j)$, $(\vec{e}_k \cdot \vec{e}_i)$ e $(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j)$ representam a métrica de um determinado sistema, como visto anteriormente, de modo que podemos reescrever a equação acima em termos da métrica, como:

$$\Gamma^{l}_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left[\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right]. \tag{B.10}$$

Desde que conheçamos a métrica que descreva o sistema de coordenadas, essa expressão nos permite determinar os símbolos de Christoffel para qualquer um destes, portanto, podemos denotar a derivada do vetor de forma geral. Assim:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^j} = \frac{\partial A^i}{\partial x^j} \vec{e}_i + \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j} A^i. \tag{B.11a}$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^j} = \frac{\partial A^i}{\partial x^j} \vec{e}_i + \left(\Gamma^{k}_{ij} \vec{e}_k \right) A^i. \tag{B.11b}$$

Por se tratar de índices mudos, podemos trocar i e k, em seguida, colocando os termos em comum em evidência, temos:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^j} = \frac{\partial A^i}{\partial x^j} \vec{e}_i + \left(\Gamma^{i}_{kj} \vec{e}_i \right) A^k. \tag{B.12a}$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^j} = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^j} + A^k \Gamma^{i}_{kj} \right) \vec{e}_i. \tag{B.12b}$$

Assim, chegamos na expressão da diferenciação covariante, podemos reescrever ela na seguinte notação para os termos em parênteses:

$$A^{i}_{;j} \equiv \frac{\partial A^i}{\partial x^j} + A^k \Gamma^{i}_{kj}. \tag{B.13}$$

Através de uma análise semelhante a feita acima, podemos mostrar que a derivada covariante de um vetor expandido em termos de componentes se pela seguinte relação:

$$\mathrm{A}_{\mathrm{i};\mathrm{j}} \equiv \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - A_k \Gamma^i_{kj}. \tag{B.14}$$

A título de exemplos, vamos deixar aqui alguns tensores de ordem superior, onde também é possível aplicar a diferenciação covariante, onde podemos ver que cada índice contravariante ou covariante adiciona ou subtrai um termo com o símbolo de Christoffel, veja:

$$\mathrm{A}^{\mathrm{ij}}_{;k} \equiv \frac{\partial A^{ij}}{\partial x^k} + A^{lj}\Gamma^i_{lk} + A^{ll}\Gamma^j_{lk} \tag{B.15a}$$

$$\mathrm{B}_{\mathrm{ij}_{;k}} \equiv \frac{\partial \mathrm{B}_{\mathrm{ij}}}{\partial x^k} - \mathrm{B}_{\mathrm{lj}}\Gamma^l_{ik} + \mathrm{B}_{\mathrm{il}}\Gamma^l_{jk} \tag{B.15b}$$

$$\mathrm{C}^{\mathrm{i}}_{j;k} = \frac{\partial C^i_j}{\partial x^k} + C^i_j\Gamma^i_{lk} + C^i_j\Gamma^l_{jk} \tag{B.15c}$$

APÊNDICE C – A equação da geodésica

Para representarmos a distância mais curta entre dois pontos num espaço plano, precisamos apenas determinar um vetor que interligue esses dois pontos no espaço. No entanto, quando estamos falando em espaços com curvaturas, o processo para obter essas distâncias é diferente, pois precisamos recorrer à geodésica, que é basicamente o caminho mais reto possível entre dois pontos em um espaço curvo, e que por tal característica, minimiza a distância entre eles.

Em um espaço plano, uma forma de dizermos se um caminho é curvo ou não, é tomarmos conhecimento da aceleração de um corpo que percorre tal caminho. Se sua velocidade for constante, sua aceleração será nula, caso contrário, se a aceleração não nula, então teremos um percurso curvo.

Por outro lado, em um espaço curvo, podemos afirmar que a referida curva será a mais reta possível se um corpo que se desloca ao longo desta possuir uma aceleração com componente tangencial nula. Deste modo, para uma equação da aceleração do corpo dada por:

$$\frac{d^2\vec{R}}{d\lambda^2} = \left(\frac{d^2\vec{R}}{d\lambda^2}\right)_{Normal} + \left(\frac{d^2\vec{R}}{d\lambda^2}\right)_{Tangencial}, \tag{C.1}$$

em que λ parametriza a curva da superfície analisada; o segundo termo do segundo membro da igualdade deve ser nulo, pois representa a aceleração tangente a curva λ. Podemos utilizar esta condição como lastro para determinarmos equações que descrevam curvas com essa característica, ou seja, para determinarmos equações de geodésicas.

A expressão acima, pode ser expandida em termos das variáveis u e v por meio da regra da cadeia:

$$\frac{d\vec{R}}{d\lambda} = \frac{du}{d\lambda}\frac{\partial\vec{R}}{\partial u} + \frac{dv}{d\lambda}\frac{\partial\vec{R}}{\partial v}. \tag{C.2}$$

Dessa expressão, temos a derivada segunda com relação a λ para denotar a aceleração:

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d\vec{R}}{d\lambda}\right) = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{du}{d\lambda}\frac{\partial\vec{R}}{\partial u} + \frac{dv}{d\lambda}\frac{\partial\vec{R}}{\partial v}\right). \tag{C.3}$$

Após a regra do produto:

$$\frac{d^2\vec{R}}{d\lambda^2} = \frac{d^2u}{d\lambda^2}\frac{\partial\vec{R}}{\partial u} + \frac{du}{d\lambda}\left(\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial\vec{R}}{\partial u}\right) + \frac{d^2v}{d\lambda^2}\frac{\partial\vec{R}}{\partial v} + \frac{dv}{d\lambda}\left(\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial\vec{R}}{\partial v}\right). \tag{C.4}$$

Na expressão acima temos alguns termos que são de difícil resolução, pois são derivadas de u e dos vetores de base com relação a λ. De modo que vamos imaginar o operador derivado do lambda como uma combinação linear dos operadores u e v:

$$\frac{d}{d\lambda} = \frac{du}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{dv}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial v}. \tag{C.5}$$

Substituindo na eq. (C.4) e resolvendo as derivadas, temos:

$$\frac{d^2\vec{R}}{d\lambda^2} = \frac{d^2u}{d\lambda^2}\frac{\partial\vec{R}}{\partial u} + \frac{du}{d\lambda}\left(\frac{du}{d\lambda}\frac{\partial^2\vec{R}}{\partial u^2} + \frac{dv}{d\lambda}\frac{\partial^2\vec{R}}{\partial v\partial u}\right) + \frac{d^2v}{d\lambda^2}\frac{\partial\vec{R}}{\partial v}$$
$$+ \frac{dv}{d\lambda}\left(\frac{du}{d\lambda}\frac{\partial^2\vec{R}}{\partial u\partial v} + \frac{dv}{d\lambda}\frac{\partial^2\vec{R}}{v^2}\right).$$

Agora temos duas expressões que envolvem as derivadas de primeira e segunda ordem de $\vec{R}$, das quais podemos afirmar que o termo de derivada de primeira ordem é tangente a curva, enquanto os termos com derivadas de segunda ordem podem tanto possuir componentes tangentes, como normais à superfície que contém a curva.

Reorganizando os termos, temos:

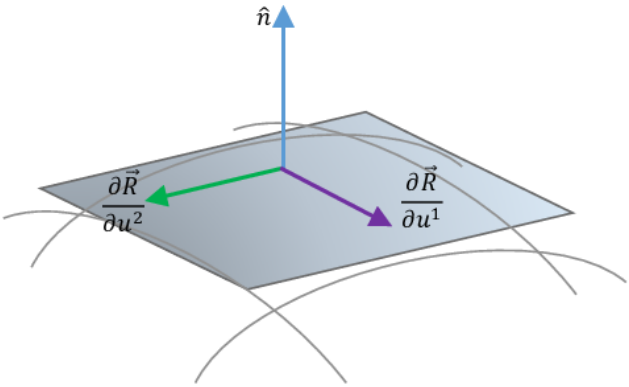
$$\frac{d^2\vec{R}}{d\lambda^2} = \frac{d^2u}{d\lambda^2}\frac{\partial\vec{R}}{\partial u} + \frac{d^2v}{d\lambda^2}\frac{\partial\vec{R}}{\partial v} + \left(\frac{du}{d\lambda}\right)^2\frac{\partial^2\vec{R}}{\partial u^2} + \frac{du}{d\lambda}\frac{dv}{d\lambda}\frac{\partial^2\vec{R}}{\partial v\partial u}$$
$$+ \frac{dv}{d\lambda}\frac{du}{d\lambda}\frac{\partial^2\vec{R}}{\partial u\partial v} + \left(\frac{dv}{d\lambda}\right)^2\frac{\partial^2\vec{R}}{v^2}. \tag{C.7}$$

Vamos mudar a notação, chamando $u = u^1$ e $v = u^2$ e após usar a convenção de soma de Einstein:

$$\frac{d^2\vec{R}}{d\lambda^2} = \frac{d^2u^i}{d\lambda^2}\frac{\partial\vec{R}}{\partial u^i} + \frac{du^i}{d\lambda}\frac{du^j}{d\lambda}\frac{\partial^2\vec{R}}{\partial u^i\partial u^j}. \tag{C.8}$$

Nessa expressão, podemos ver duas situações, a primeira parte da soma, representa a o vetor tangente a superfície, já o segundo termo da soma pode não ser tangente a superfície, portanto, vamos analisar essa parte para identificar se ele é normal, tangente ou uma mistura de bases. Mais especificamente o termo da derivada segunda com relação as bases u^i e u^j, como sendo as bases de um plano tangente e um vetor de normal a superfície, ver imagem abaixo.

Figura C.1: Plano tangente formado pelas derivadas com vetor normal $\hat{n}$



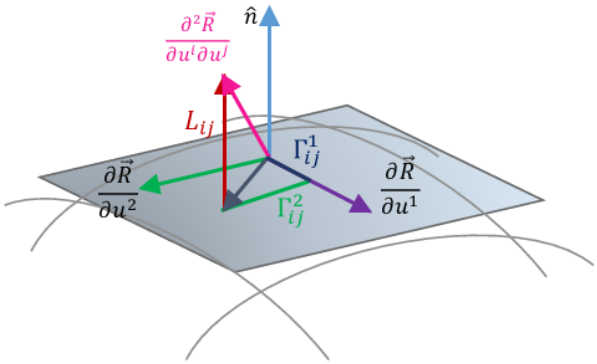
Fonte: Medeiros (2022)

Já que não conhecemos as componentes, vamos criar novas variáveis para descrever esse vetor de segunda ordem, como uma combinação linear das componentes dos vetores:

$$\frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial u^i \partial u^j} = \Gamma_{ij}^1 \frac{\partial \vec{R}}{\partial u^1} + \Gamma_{ij}^2 \frac{\partial \vec{R}}{\partial u^2} + L_{ij}\hat{n}\,. \tag{C.9}$$

em que o termo L_{ij} refere-se a chamada segunda forma Fundamental, além de nos dizer as componentes normais dessa derivada de segunda ordem em relação a u^i e u^j. Já os símbolos Gama maiúsculo representam os símbolos de Christoffel e nos dão as componentes tangenciais do vetor de segunda ordem. Então o primeiro Símbolo nos diz quanto do vetor de base ao longo de u^1 e o segundo termo da soma, nos diz a informação acerca de quanto é necessário deste vetor de base ao longo de u^2.

Figura C.2: Combinação Linear de vetores de base para compor o vetor de Segunda derivada.



Fonte: Medeiros (2022)

Vamos reescrever a eq. (C.9) a partir da convenção de soma de Einstein por um índice k

$$\frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial u^i \partial u^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \vec{R}}{\partial u^k} + L_{ij}\hat{n}\,. \tag{C.10}$$

É possível observar na figura 4.22 que o vetor $\hat{n}$ será sempre normal a superfície tangente a curva, o que significa que podemos afirmar que o produto escalar entre ele e qualquer um dos vetores tangentes, será nulo uma vez que o vetor normal e os vetores tangentes são perpendiculares entre si.

Portanto, para conseguimos definir os símbolos de Christoffel, vamos tomar o produto escalar da eq. (C.10) por um vetor tangente u^l, logo:

$$\left(\frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial u^i \partial u^j}\right) \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial u^l} = \left(\Gamma_{ij}^k \frac{\partial \vec{R}}{\partial u^k} + L_{ij}\hat{n}\right) \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial u^l}, \tag{C.11a}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial u^i \partial u^j}\right) \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial u^l} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \vec{R}}{\partial u^k} \frac{\partial \vec{R}}{\partial u^l}. \tag{C.11b}$$

Entretanto, o produto de dois vetores de base, como estudamos anteriormente, representa o tensor métrico. Deste modo, temos:

$$\frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial u^i \partial u^j} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial u^l} = \Gamma_{ij}^k g_{kl}\,. \tag{C.12}$$

Agora é de nosso interesse, que o símbolo de Christoffel seja isolado, logo, vamos usar a definição do delta de Kronecker, tomando o produto entre o tensor métrico covariante pelo contravariante, logo

$$\frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial u^i \partial u^j} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial u^l} g^{kl} = \Gamma_{ij}^k g_{kl} g^{lm}\,. \tag{C.13a}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial u^i \partial u^j} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial u^l} g^{lm} = \Gamma_{ij}^k \delta_k^m\,. \tag{C.13b}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial u^i \partial u^j} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial u^l} g^{lm} = \Gamma_{ij}^m\,. \tag{C.13c}$$

De maneira semelhante, podemos definir a componente da segunda forma fundamental aplicando o produto escalar em ambos os lados para que tenhamos agora a derivada dos símbolos de Christoffel nula, uma vez que são perpendiculares entre si, e encontremos o seguinte resultado

$$\frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial u^i \partial u^j} \cdot \hat{n} = L_{ij}\,. \tag{C.14a}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial u^i \partial u^j} \cdot \frac{\vec{e}_i \times \vec{e}_j}{\left|\left|\vec{e}_i \times \vec{e}_j\right|\right|} = L_{ij}\,. \tag{C.14b}$$

A eq. (C.14b) é uma forma mais concreta de se conseguir determinar o vetor normal $\hat{n}$, uma vez que $\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{R}}{\partial u^i}$ e $\vec{e}_j = \frac{\partial \vec{R}}{\partial u^j}$. Note ainda que, como os dois vetores sempre estão no plano tangente, quanto tomamos o produto vetorial entre eles

sempre teremos como resultado um vetor perpendicular ao plano tangente que, para garantirmos que sua magnitude será um, dividimos esse produto por seu módulo.

Agora, voltando para eq. (C.8) substituído o resultado para a segunda derivada eq. (C.10), aplicando a propriedade distributiva e reagrupando os termos, temos a seguinte expressão:

$$\frac{d^2\vec{R}}{d\lambda^2} = \left(\frac{d^2u^k}{d\lambda^2} + \Gamma^k_{ij}\frac{du^i}{d\lambda}\frac{du^j}{d\lambda}\right)\frac{\partial\vec{R}}{\partial u^k} + L_{ij}\frac{du^i}{d\lambda}\frac{du^j}{d\lambda}\hat{n}\,. \tag{C.15}$$

O que queremos com todo esse aparato matemático, é definir uma curva geodésica onde o vetor de aceleração é sempre normal a superfície, de modo que a parte tangencial será sempre nula, a qual já vimos que é possível apresentá-la como uma parte tangente e uma parte normal eq. (C.1). Isto é exatamente o que temos apresentado acima, uma vez que tomando a primeira parte da soma ou a parte tangencial de aceleração como nula, teremos uma forma eficaz de saber se uma curva é ou não geodésica. Deste modo, qualquer curva u^k parametrizada por λ que satisfaça a equação:

$$\frac{d^2u^k}{d\lambda^2} + \Gamma^k_{ij}\frac{du^i}{d\lambda}\frac{du^j}{d\lambda} = 0\,, \tag{C.16}$$

será considerada uma geodésica, portanto, a expressão acima é conhecida como a equação da geodésica.

Uma informação importante acerca da utilização desta equação em aplicações da TRG reside no fato de que muitas vezes, o parâmetro $d\lambda$ pode as vezes ser tomado com o próprio $ds = cd\tau$. E isto é frequente em situações em que corpos massivos se deslocam através da geodésica. No entanto, quando se trata da luz, é importante lembrar o parâmetro $d\tau$ se torna impróprio para se descrever tal situação, e que neste caso, devemos utilizar a parametrização dada por λ.