INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO RIO GRANDE DO NORTE

MISAEL PEGADO OLIVEIRA DA SILVA

TEORIA DOS GRAFOS COMO FERRAMENTA PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA

NATAL

2021

MISAEL PEGADO OLIVEIRA DA SILVA

TEORIA DOS GRAFOS COMO FERRAMENTA PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte, em cumprimento às exigências legais como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Dr. Francisco Batista de Medeiros.

NATAL

2021

Silva, Misael Pegado Oliveira da.
S586t Teoria dos grafos como ferramenta para ensino da matemática / Misael Pegado Oliveira da Silva. – Natal, 2021.
62 f : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte. Natal, 2021.
Orientador (a): Dr. Francisco Batista de Medeiros.

1. Ensino de Matemática. 2.Teoria dos Grafos. 3. Proposta pedagógica. I. Medeiros, Francisco Batista de. II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte. III. Título.

CDU: 51

Catalogação na Publicação elaborada pelo Bibliotecária Maria Ilza da Costa – CRB-15/412
Biblioteca Central Sebastião Fernandes (BCSF) – IFRN

MISAEL PEGADO OLIVEIRA DA SILVA

TEORIA DOS GRAFOS COMO FERRAMENTA PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte, para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Francisco Batista de Medeiros.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado e aprovado em 22/01/2021 , pela seguinte Banca Examinadora:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Francisco Batista de Medeiros - Presidente. Instituto Federal de Educação, Ciencia e tecnologia do Rio Grande do Norte - IFRN

Profa. Dra. Rainelly Cunha de Medeiros - Examinadora. Instituto Federal de Educação, Ciencia e tecnologia do Rio Grande do Norte - IFRN

Prof. Me. Robson Pereira de Sousa - Examinador . Instituto Federal de Educação, Ciencia e tecnologia do Rio Grande do Norte - IFRN

Documento assinado eletronicamente por:

- **Rainelly Cunha de Medeiros**, **PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO**, em 03/02/2021 11:01:16.
- **Robson Pereira de Sousa**, **PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO**, em 03/02/2021 11:38:22.
- **Francisco Batista de Medeiros**, **PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO**, em 03/02/2021 10:39:50.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 28/01/2021. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.ifrn.edu.br/autenticar-documento/ e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 264489
Código de Autenticação: 6b8a96fc17

Dedico este trabalho à minha mãe Marcia Lourdes de Oliveira (in memoriam) e a minha esposa Eneida Laís de Oliveira Sousa Pegado.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus por toda sua inteligência e por quem Ele é em minha vida. Sem Ele o "nada" não viraria o "tudo".

Agradeço a minha mãe Marcia Lourdes (in memoriam) por toda a entrega que fez durante sua vida para dar o melhor para seus filhos.

Ainda com muita gratidão, explicito aqui o reconhecimento da dedicação e zelo da minha esposa Eneida Pegado que me incentiva em todos os meus empreendimentos.

Quero agradecer ao Prof. Dr. Francisco Batista de Medeiros por me apreentar essa ferramenta que é a Teoria dos Grafos e também me orientar academicamente e pessoalmente.

Também venho agradecer a todos os meus colegas do curso que contribuiram direta e indiretamente para o meu crescimento pessoal e profissional.

” Matematicamente, nada, sendo original, admite cópia ”.

Misael Pegado

RESUMO

Neste trabalho trataremos da Teoria dos Grafos, nos aspectos históricos e teóricos somado com uma proposta de atividade, partindo de algumas definições mais básicas e culminando na possibilidade de prática em sala de aula objetivando elucidar a respeito da Teoria dos Grafos e suas aplicações no cotidiano, bem como no meio acadêmico, além de sua viabilidade no ensino de matemática. Como o resultado, a argumentação da viabilidade, que é contruida durante todo o texto, fica mais evidente na proposta de atividade onde o foco é a aplicação da teoria (práxis) para um aprendizado significativo.

Palavras-chave: Teoria dos Grafos; ensino de matemática; viabilidade.

ABSTRACT

In this work we will deal with Graph Theory, in the historical and theoretical aspects added with an activity proposal, starting from some more basic definitions and culminating in the possibility of classroom practice aiming to elucidate about Graph Theory and its applications in daily life, as well as in academia, in addition to its feasibility in teaching mathematics. As a result, the viability argument, which is constructed throughout the text, is more evident in the activity proposal where the focus is on the application of theory (praxis) for meaningful learning.

Keywords: Graph Theory; teaching of mathmatics; viability.

Sumário

1 INTRODUÇÃO **10**

2 TEORIA DOS GRAFOS **12**

2.1 UM BREVE HISTÓRICO 12

2.2 NOÇÕES BÁSICAS 13

2.2.1 **Grafos Planares** 14

2.2.2 **Subgrafos** 14

2.2.3 **Grau de um vértice de um grafo** 15

2.3 GRAFOS ESPECIAIS 20

2.3.1 **Grafo trivial** 20

2.3.2 **Grafo Completo** 20

2.3.3 **Complementar de um Grafo** 21

2.3.4 **Grafo regular** 21

2.4 PASSEIO, CAMINHO E CICLO 22

2.4.1 **Passeio** 22

2.5 CONEXIDADE DE GRAFOS 27

2.5.1 **Pontes** 29

2.5.2 **Árvores** 30

2.5.3 **Grafos Eulerianos** 34

3 PARADOXO DE BRAESS **39**

4 PROPOSTA PEDAGÓGICA **43**

4.1 BNCC 43

4.2 ATIVIDADE PROPOSTA. 49

5 CONCLUSÃO **56**

REFERÊNCIAS **58**

APÊNDICE - Desenhos técnicos da maquete. **60**

1 INTRODUÇÃO

A Teoria dos Grafos é considerada atualmente como uma ferramenta eficiente para a modelagem matemática de problemas do nosso cotidiano. Baseado nesse fato, e na mordenização do Currículo da Educação Básica, no que diz respeito a capacidade de abstração de problemas bem como a interpretação dos mesmos por meio de diagramas, isso como uma das habilidades fundamentais a serem desenvolvidas pelo estudante de Ensino Médio. Além disso, é defesa de estudiosos como o matemático francês e professor da Universidade de Etienne Ghys que o uso de Grafos no Ensino Básico com o objetivo de incentivar os estudantes a encontrarem, de forma prática, uma representação abstrata para uma série de problemas que podem ser apresentadas de diversas formas e maneiras possíveis. Porém, esses problemas podem ser de fácil acesso, tratando do cotidiano comum, por exemplo, problemas envolvendo fluxo de trânsito e internet (em um determinado espaço de tempo) ou problemas de mobilidade urbana envolvendo a criação de esquemas de rotas otimizadas para o transporte público, coleta seletiva, entrega de correspondências, dentre tantas possibilidades.

Este trabalho tem como objetivo o embasamento teórico da Teoria dos Grafos para capacitá-la à modelagem e resolução de problemas que, vez ou outra, são ditas como simples, contudo trazem consigo uma carga teórica de relevante complexidade, vista de maneira mais a fundo no ensino superior, porém de aplicabilidade fluida e, portanto, de fácil difusão podendo ser usada, mesmo com moderação, no Ensino Básico. Assim, é com esse entusiasmo, de espalhamento da Teoria dos Grafos que se trabalha para a formação do pensamento crítico e matemático, com a capacidade de reduzir as barreiras dos desafios propostos todos os dias e os seus conhencimentos construídos em sada de aula.

No tocante ao ensino da Matemática, deve-se levar em conta vários aspectos tais como a natureza das competências que serão estudadas, o motivo dessas serem incorporadas no currículo e os alunos aos quais se destinam, isso com a finalidade da distinção do nível de compreensão e adequação do que se é ensinado e o que se pode construir através da modelagem matemática.

Além disso, o ensino da Matemática deve abranger três pilares tidos como fundamentais, são eles: Conceituação, Manipulação e Aplicações. Onde ambas ou em excesso ou em falta, uma em relação a outra, costumam gerar um processo de aprendizagem não efetiva ou mal

sucedida. Tendo como objetivo a difusão da Teoria dos Grafos, busca-se o equilíbrio entre teoria e prática, trazendo a solidez do conhecimento específico e contribuindo para a abstração necessária para desenvolver as modelagens matemáticas e resolver problemas reais.

Inicialmente, buscaremos mostrar os aspectos históricos da Teoria dos Grafos, tais como seu surgimento e desenvolvimento ao longo do tempo, além de suas contribuições para a Matemática que conhecemos hoje. Em seguida, mostraremos, um exemplo da aplicabilidade da Teoria dos Grafos no ensino da Matemática no contexto do ensino básico, sabendo que já é notória sua empregabilidade no ensino superior em diversas áreas como: engenharias, neurociências, Física e Química, além, lógico, da própria Matemática. Por seguinte, propomos uma atividade condizente com o tema, a fim de extrairmos informações conclusivas a respeito do ensino de Grafos na Matemática.

2 *TEORIA DOS GRAFOS*

Neste capítulo são abordados concitos necessários para o desenvolvimento do trabalho. Aqui é apresentado as principais noções e resultados sobre a Teoria dos Grafos, contemplando uma breve abordagem histórica até conceitos formais simples.

2.1 UM BREVE HISTÓRICO

A Teoria dos Grafos teve seu início na Europa do século XVIII na antiga cidade chamada Königsberg na Prúcia (hoje, Kaliningrado na Rússia) com o problema das *Sete Pontes de Königsberg*. Tal cidade era banhada pelo rio Pregel e continha duas ilhas e sete pontes. Após algum tempo os moradores da região começaram a questionar se era possível partir de um ponto qualquer da cidade, atravessar todas as pontes apenas uma vez e voltar para o mesmo ponto de partida.

Leonhard Paul Euler (1707 - 1783) resolveu esse problema, pensando em um diagrama em que fosse possível representar, sem perda de generalidade, o mapa da cidade. Representou cada margem e ilha, com um ponto e, cada ponte, com uma curva – hoje, chamamos esses pontos de *vértices* e as curvas de *arestas*. Segundo (HARARY, 1969) a Teoria dos Grafos foi descoberta várias vezes durante a história, ou ainda, que vários problemas foram estudados isoladamente por todo o mundo e se mostraram semelhantes por suas características. Além disso, é importante destacar que depois da demonstração de Euler em 1736, sobre o Problema das Sete Pontes de Königsberg, até o final do século XIX, tiveram pouquíssimos trabalhos (registrados) sobre o assunto. No século seguinte o alemão Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887), em 1847, fez uso dos modelos de grafos no estudo de circuitos elétricos, criando a teoria das árvores, que é uma classe de Grafos, para caracterizar conjuntos de ciclos independentes. Por seguinte o matemático Arthur Cayley (1821-1895) com outra aplicação em 1857, agora na Química, onde veio a apresentar a enumeração dos isômeros dos hidrocarbonetos alifáticos saturados (que também têm estruturas de árvores), em química orgânica. E, por fim, o francês Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922) em 1869, veio a trabalhar árvores de maneira estritamente analítica. O primeiro livro didático sobre a Teoria dos Grafos foi o *Theorie de endlichen und unendlichen Graphen* publicado em 1936 (apenas 85 anos antes desse trabalho) e foi escrito pelo matemático

húngaro Dénes König.

De acordo com (LÓSS, 1981), no Brasil, o estudo da Teoria dos Grafos tem seu primeiro registro em 1968 no *I Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*. Desde então, vários trabalhos vem sendo apresentados no decorrer dos anos. Embora o número de livros brasileiros que tratam da Teoria dos Grafos e/ou suas aplicações não sejam tão numerosas. Segundo (BOAVENTURA NETTO, 2011) até 2010 apenas 7 livros publicados, embora o número de trabalhos apresentados como resultado de monografias de graduação, dissertações de mestrado e teses de doutorado vem crescendo em diversas áreas como: pesquisa operacional, computação, planejamento, produção, administração, economia, além, claro, da Matemática.

2.2 NOÇÕES BÁSICAS

Grafo é todo $G = \{V,A\}$ onde $V \neq \emptyset$ é o conjunto de **vértices** e A o conjunto de **arestas**. De maneira que $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots\}$ e $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$. No caso deste trabalho, trataremos apenas com os grafos finitos. Sendo de uso $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ e $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m\}$. Nessa altura, chamamos o conjunto de vértices de G e o conjunto de aresta de G, respectivamente, de V_G e A_G. Portanto, $G = \{V_G, A_G\}$. É importante salientar, ainda, que caso haja aresta a implica que dois elementos de V estão interagindo entre si, denotado, genericamente por $a = (v,u)$. Assim, cada a está ligado a dois vértices v_i e v_j - não necessariamente distintos. Aqui, temos também o conjunto das possíveis arestas de G onde $A(V) = \{(v,u) \mid v,u \in V\}$, em que $A \subseteq A(V)$. No caso em que $v = u$, chamamos essa aresta de **laço**, pois mostra uma relação entre um vértice e ele mesmo. Essa relação também pode ser chamada de **identidade**. Embora haja laços nos grafos das Figuras 1 e 2, não é objeto de estudos deste trabalho estruturas semelhantes a essas. Vamos nos deter aqui aos **Grafos Simples** que são grafos sem laços ou relações de identidade.

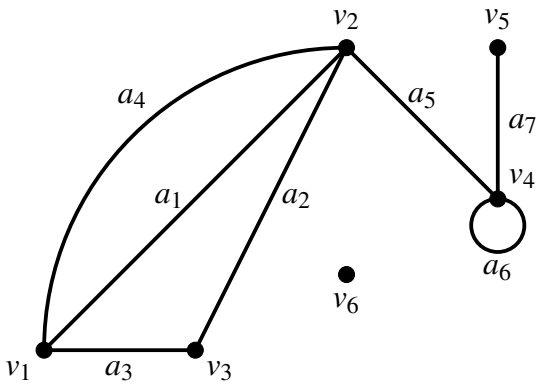
O par (v,u), por identificar arestas, usualmente tem sua escrita simplificada por $a = vu$. Note que, por se tratar de arestas não direcionadas, $vu = uv$. Tomando outra notação simplificada, podemos escrever $v \in G$ e $a \in G$ ao invés de V_G e A_G, quando não houver confusão de notação.

Na literatura, grafos, como definimos acima, são denominados por grafos simples; vértices são chamados de *verteces* (inglês), *pontos*, *nós* ou *nodos*; arestas são chamadas de *edges* (inglês), *linhas*, até mesmo, *ligação*. Durante meus estudos, embora inicial, pude perceber que um grafos pode ser uma representação simplificada de um conjunto de **objetos relacionados** ou não por alguma propriedade. Esses objetos são representados pelos vértices e a relação entre esses, representadas por arestas.

2.2.1 Grafos Planares

Um Grafo G é *planar* se esse pode ser representado por uma figura plana, traçando uma linha (ou uma curva) entre dois pontos v_i e v_j (representando os vértices) se $a_k = v_i v_j$ é uma aresta de G, de maneira que as arestas não se cruzem. Na figura 1 , temos um exemplo onde $G = \{V_G, A_G\}$, com $V_G = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ e $A_G = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$. Neste caso, temos um grafo não orientado onde temos alguns exemplos de sua categoria.

Figura 1: Grafo G.



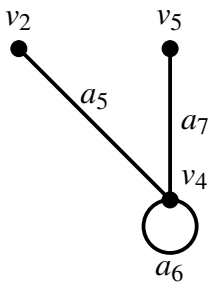
Fonte: Elaboração própria em 2018.

2.2.2 Subgrafos

Dado um grafo $G = \{V, A\}$, chamamos de *subgrafo* de G todo grafo $H = \{V', A'\}$ se $V' \subseteq V$ e $A' \subseteq A$. Em outras palavras, para H ser subgrafo de G, tem que ser, primeiro, um grafo e, depois, que todos os elementos (vértices e arestas) de H pertençam a G. Podemos denotar, assim, que $H \subseteq G$.

***Exemplo* 1.** *Sejam um grafo $G = \{V, A\}$ (figura 1) e seja $H = \{V', A'\}$ um subgrafo de G, tal que $V' = \{v_2, v_4, v_5\}$ e $A' = \{a_5, a_6, a_7\}$. Conforme a figura 2 abaixo.*

Figura 2: Grafo H.



Fonte: Elaboração própria em 2018.

Note que, $\{v_2, v_4, v_5\} \subseteq \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, bem como $\{a_5, a_6, a_7\} \subseteq \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$. Dessa maneira é fácil ver que $V' \subseteq V$ e $A' \subseteq A$, garantindo que $H \subseteq G$.

Segue imediatamente abaixo outros dois conceitos fáceis de entender e que nos ajudarão a compreender outras definições apresentadas posteriormente neste trabalho.

A **ordem** de um grafo G é dada pela cardinalidade do conjunto de vértices, ou seja, pelo número de vértices de G. Dada pela expressão: $|V_G|$ ou $\#V_G$. Sendo assim, um grafo G tem ordem m se, e somente se, $\#V_G = m$ ou $|V_G| = m$.

O **comprimento** de um grafo G é definido pela cardinalidade do conjunto de arestas, ou seja, pelo quantidade de arestas de G. Dada pela expressão: $|A_G|$ ou $\#A_G$. Com efeito, Um grafo G tem comprimento n se, e somente se, $\#A_G = n$ ou $|A_G| = n$.

2.2.3 Grau de um vértice de um grafo

Todo grafo é composto por, pelo menos, um vértices. Cada vértice tem seu grau definido pela quantidade de arestas incidentes nele. Com isso, a quantidade de interações de um vértice define seu grau. Denotamos o grau de um vértice v por $\partial(v)$. Assim, fixando um véritce $v_k \in V$, a quantidade de aresta da forma $v_k v_i \in A$ determina o grau de v_k. (vide exemplo 2).

Outra maneira de expressarmos o grau de um grafo é da seguinte forma: seja $G = \{V,A\}$ e $v \in V$ um vértice de G. As interações de v podem ser dadas por

$$N_G(v) = \{u \in V | vu \in A\}.$$

Dessa forma, como vimos anteriormente, o grau do vértice v pode ser dado pela quantidade de interações nesse vértice. Daí, vem: $\partial(v) = |N_G(v)|$.

***Exemplo* 2.** *Fazendo uso do grafo H do Exemplo 1, tomaremos cada vértice e seus respectivos graus. Assim, temos:* $\partial(v_2) = 1, \partial(v_4) = 3, \partial(v_5) = 1$.

Podemos, definir, ainda o grau máximo e o grau mínimo de um Grafo. O primeiro é definido pelo vértice de maior grau e a segunda é definida pelo vértice de menor grau.

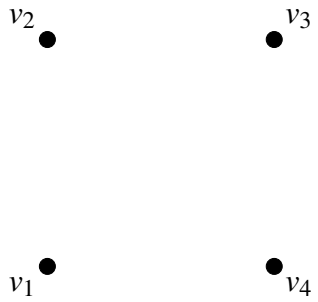
Logo, o grau máximo e mínimo são dados, respectivamente, por $\Delta(G) = \max\{\partial(v)|v \in V\}$ e $\delta(G) = \min\{\partial(v)|v \in V\}$.

***Exemplo* 3.** *Dado o grafo G (ver Figura 1), podemos ver que o vértice* v_6 *não tem arestas incidentes, logo nenhuma interação com o restante do grafo. Assim, temos que* $\partial(v_6) = 0$ *e, portanto,* $\delta(G) = 0$. *Consequentemente, pelo fato de ser o vértice com mais incidência (são quatro), o* $\partial(v_2)$ *define o grau máximo de G. Logo* $\Delta(G) = 4$.

Mas o que aconteceria se tivermos um grafo J com apenas vértices? E se todos os vértices de um grafo W tiverem o mesmo grau, todos diferente de zero? No primeiro questionamento temos um grafo formado por apenas pontos (vértices). Já na segunda interrogativa, temos um grafo que contém tanto vértices como arestas e isso mostra que ambos os grafos são de natureza distintas. Porém, podemos apresentar uma resposta preeliminar que satisfaz os dois questionamentos. Em cada grafo, o grau máximo e o grau mínimo coincidem. Para melhor entendimento, segue os próximos dois exemplos.

***Exemplo* 4.** *Seja o grafo $J = \{V, A\}$ com $\delta(J) = \Delta(J) = 0$. Como não há arestas em J, também não há interações entre seus vértices. Isto caracteriza um grafo totalmente desconexo (veremos mais a posteriore). Assim, uma boa reprodução de J é o seguinte.*

Figura 3: Grafo J.

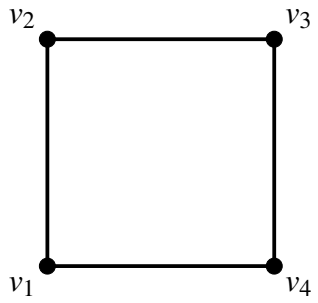


Fonte: Elaboração própria em 2018.

Notoriamente, indepedente do vértice que escolha o grau será o mesmo. Logo, $\max\{\partial(v)|v \in V\} = \min\{\partial(v)|v \in V\}$*, pois,* $\partial(v) = 0$*,* $\forall v \in V$*. Temos, portanto,* $\delta(J) = \Delta(J) = 0$.

***Exemplo* 5.** *Seja agora um grafo $W = \{V, A\}$, onde há uma mesma quantidade de interações entre seus vértices. Segue uma possível interpretação gráfica.*

Figura 4: Grafo W.



Fonte: Elaboração própria em 2018.

Semelhantemente ao Exemplo 4, independente do vértice que escolha, a quantidade de interações entre os vértices será a mesma. Assim, $\max\{\partial(v)|v \in V\} = \min\{\partial(v)|v \in V\}$*, pois,* $\partial(v) = 2$*,* $\forall v \in V$*. Temos, portanto,* $\delta(W) = \Delta(W) = 2$.

Note que, em um grafo, não importa a quantidade de vértices de mesmo grau, e sim a quantidade de interações.

***Exemplo* 6.** *Se tivermos um grafo $G = \{V,A\}$ tal que, $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ com $\partial(v_1) = x$, $\partial(v_2) = y$, $\partial(v_3) = z$, $\partial(v_4) = x$, $\partial(v_5) = y$. Como, neste caso, temos apenas três valores possíveis de graus, o grau máximo será o maior entre eles. Ou seja, entre x, y e z. Isto é, $\Delta(G) = \max\{x,y,z\}$. De manerira análoga, $\delta(G) = \min\{x,y,z\}$.*

Neste ponto podemos introduzir alguns teoremas sobre a existência de um grafo a partir do que vimos até agora. Isso porque existe uma relação de um dado grafo enquanto aos graus de seus vértices. No seguinte, veremos que a soma dos graus de um grafo é igual ao dobro da quantidade de arestas desse mesmo grafo.

Teorema 1. *Seja $G = \{V,A\}$ um grafo, simples e de comprimento n, ou seja, sem arcos e com n arestas. Então,*

$$\sum_{v \in V_G} \partial(v) = 2n.$$

Demonstração. Para isso, utilizaremos da indução matemática.

Assuma que existe $G = \{V,A\}$ um grafo simples de comprimento m, com a seguinte propriedade P:

$$\sum_{v \in V_G} \partial(v) = 2m.$$

Vejamos para $G\{1,\emptyset\}$ tem-se que o grau do único vértice, obviamente é zero (0) e que temos nenhuma aresta $(m = 0)$. Logo P é verdade em G.

Seja agora um grafo G' obtido a partir de G citado, imediatamente, acima por alguma das operações a seguir:

- **Inserindo um vértice:** o vértice u inserido tem grau zero, pois não está

conectado a nennhum outro vértice. Dessa maneira: $\partial(u) = 0$. Logo,

$$0 + \sum_{v \in V_{G'}} \partial(v) = 2m.$$

Como a quantidade de arestas não é alterada, P também é mantida em G'.

- **Inserindo uma aresta:** neste caso temos que a aresta inserida conecta dois vértices de G . Logo, haverá dois vértices que terão seus graus acrescidos de uma unidade. Assim,

$$1 + 1 + \sum_{v \in V_{G'}} \partial(v) = 2 + \sum_{v \in V_{G'}} \partial(v) = 2m + 2 = 2(m+1).$$

Com isso, temos pelo princípio de indução que a propriedade P é verdadeira para qualquer grafo simples. ■

Corolário 1. *Seja $G = \{V,A\}$ um grafo simples. Então o número de vértices de G, que possuam grau ímpar, é par.*

Demonstração. Para essa prova, nos apropriaremos do *Teorema 1*.

- **Prova direta:** Admita que $G = \{V,A\}$ é um grafo simples. Seja agora n o número de vértices de grau ímpar pertencentes a G. Pelo *Teorema 1*, temos que o somatório dos graus dos vértices de G é um número par. Logo a quantidade de vértices de grau ímpar pertecentes a G é sempre par.

- **Prova por contradição:** Assuma que $G = \{V,A\}$ é um grafo simples. Seja n a quantidade dos vértices de G que tenham grau ímpar. Suponha, agora, que n seja ímpar. Ocorre agora que o somatório dos graus dos vértices de G é ímpar, contradizendo o *Teorema 1*. Logo, o número de vértices de grau ímpar pertencentes a G é sempre par.

■

2.3 GRAFOS ESPECIAIS

No que segue, definiremos dois tipos de gráficos. O primeiro chamado de grafo trivial, o segundo de grafo completo.

2.3.1 Grafo trivial

***Definição* 1.** *Um grafo $G = \{V, A\}$ é denominado de **trivial**, se este tiver apenas um vértice, isto é, $\#V_G = 1$; Caso contrário, G é não trivial.*

Figura 5: Grafo Trivial.

Fonte: Elaboração própria em 2018.

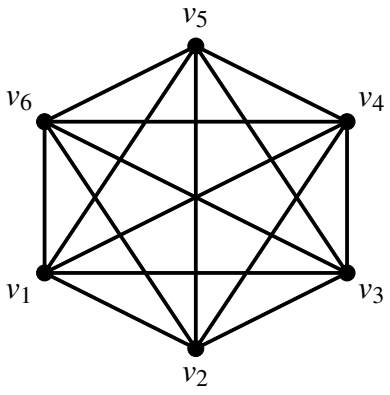
Figura 6: Grafo não-trivial mais simples.

Fonte: Elaboração própria em 2018.

2.3.2 Grafo Completo

***Definição* 2.** *Um grafo $G = K_V$ é denominado de **grafo completo** em V_G se, tomado quaisquer dois vértices distintos, estes sejam adjacentes. Assim, todos os vértices interagem uns com os outros e $A = A(V)$. Dessa maneira, todos os grafos completos de ordem n podem representar os mesmos casos e problemas com cada ordem correspondente. Eles serão denotados por K_n.*

Figura 7: Grafo completo.



Fonte: Elaboração própria em 2018.

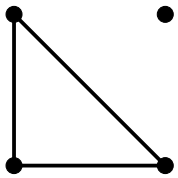
2.3.3 Complementar de um Grafo

Definição* 3.** *O* ***complementar *de G é o grafo* $\overline{G}$ *em* V_G*, tal que* $A_{\overline{G}} = \{a \in A(V) | a \notin A_G\}$*. O complementar do grafo completo* $G = K_n$ *é chamado de* ***grafo discreto****. Em um grafo discreto* $A_G = \emptyset$*. O grafo discreto comumente pode ser chamado de* ***grafo vazio.***

Ou seja, o complemento de um grafo G, denotado por $\overline{G}$, é o grafo simples que possui os mesmos vértices de G, de maneira que se dois vértices distintos são adjacentes em $\overline{G}$, não sejam em G.

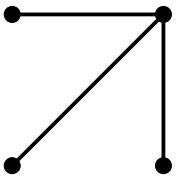
***Exemplo* 7.** *Considere os grafos representados a seguir, note que se caso venhamos sobrepor um ao outro, não teríamos arestas coincidentes. Perceba também que a junção de G com* $\overline{G}$ *é exatamente o grafo* K_4.

Figura 8: Grafo *G*.



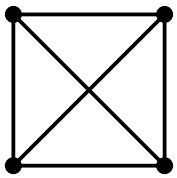
Fonte: Elaboração própria em 2018.

Figura 9: Grafo $\overline{G}$.



Fonte: Elaboração própria em 2018.

Figura 10: Grafo $G \cup \overline{G} = K_4$.



Fonte: Elaboração própria em 2018.

2.3.4 Grafo regular

Definição* 4.** *Um grafo G de ordem n é dito* ***regular*, se todos seus vértices apresentarem o mesmo grau. Caso* $\partial(v_1) = \partial(v_2) = \cdots = \partial(v_{n-1}) = \partial(v_n) = x$*, G é denotado por* ***x-regular*** *ou* ***regular de grau*** *x.*

Por exemplo os grafos regulares representados nas figuras 3, 4 e 7 que vimos anteriormente. Na Figura 3 temos um grafo 0-regular, na Figura 4 temos um 2-regular e a Figura 7 é um 5-regular.

Mais geralmente, todo grafo discreto é um 0-regular, e um grafo completo K_n é $(n-1)$-regular. Em particular, $\#A_{K_n} = n(n-1)/2$, e com isso $\#A_G \leq n(n-2)/2$ para todo grafo G de ordem n.

2.4 PASSEIO, CAMINHO E CICLO

Alguns assuntos em Teoria dos Grafos têm o papel de ferramentas fundamentais para o entendimento de outros assuntos mais complexos, ou pelo menos não triviais, e que são de uso significativo no estudo e aplicação da Matemática. É o caso dos conceitos de Passeio e Caminho. Primeiramente abordaremos o que é um passeio e, desse conceito, abordaremos o que é um caminho.

2.4.1 Passeio

Um **passeio** de comprimento k em um grafo G é uma sequência de alternâncias entre vértices e arestas $v_1, a_1, v_2, a_2, \ldots, v_k, a_k, v_{k+1}$, de modo que um passeio começa em um vértice e termina em outro não necessariamente distintos entre si. O cenário em que esse passeio tenha todas as arestas distintas, dizemos que esse passeio é uma **trilha**.

Quando um passeio contiver todos os vértices distintos – exceto, possivelmente, o primeiro e o último – chamamos esse passeio de **caminho**.

Dizemos que dois vértices estão conectados se, e somente se, houver um passeio entre eles. Esse passeio garante, sem importar a distância entre esses vértices, que essas duas extremidades estão ligadas.

O comprimento de um passeio entre os vértices u e v, por exemplo, é dado pela qantidade de arestas entre essas duas extremidades.

***Definição* 5.** *Seja $a_i = u_i u_{i+1} \in G$ as arestas de G para $i \in [1,k]$. A sequência*

*$W = a_1a_2\ldots a_k$ é um **passeio** de comprimento k que vai de u_1 até u_{k+1}. Podemos aqui, dizer que a_i e a_{i+1} são adjacentes para todo $i \in [1,k-1]$. Assim,*

$$W : u_1 \to u_2 \to \cdots \to u_k \to u_{k+1}$$

ou, até mesmo

$$W : u_1 \overset{k}{\to} u_{k+1}.$$

Escreveremos $u \rightsquigarrow v$ para dizer que esse passeio tem comprimento qualquer e que vai de u até v. Podemos entender então que $W : u \rightsquigarrow v$ sempre será um passeio específico $W = a_1a_2\ldots a_k$. Para o comprimento de um passeio W denotamos $|W|$.

***Definição* 6.** *Seja $W = a_1a_2\ldots a_k$, com $(a_i = u_iu_{i+1})$ um passeio. Então:*

- *W é **fechado**, se $u_1 = u_{k+1}$;*
- *W é um **caminho**, se $u_i \neq u_j \;\forall\; i \neq j$; exceto, possívelmente, o primeiro e o último.*
- *W é um **ciclo**, se esse for fechado e $u_i \neq u_{i+1} \;\forall\; i = j$ exceto que $u_1 = u_{k+1}$;*
- *W é um **caminho trivial**, se seu comprimento for nulo $(|W| = 0)$. É fácil ver que um caminho trivial não tem arestas;*
- *Para todo*

  $$W : u = u_1 \to \cdots \to u_{k+1} = v$$

  passeio em G, então

  $$W^{-1} : v = u_{k+1} \to \cdots \to u_1 = u$$

  *também é um passeio em G chamado de **passeio inverso** de W.*

*Um vértice u é o **fim** de um caminho P, se P inicia ou termina em u.*

A junção de dois passeios com um fim comum, $W_1 : u \rightsquigarrow v$ e $W_2 : v \rightsquigarrow w$ é um passeio $W_1W_2 : u \rightsquigarrow w$. Isso porque ambos passeios têm um fim v em comum.

*Dois caminhos P e Q são ditos **disjuntos** se não têm vértices em comum, e são denominados **independentes** se podem compartilhar apenas seus fins.*

Claramente, o passeio inverso P^{-1} de um caminho P também é um caminho.

A junção de dois caminhos não nessariamente é um caminho. Por exemplo, basta tomar dois caminhos triviais.

***Exemplo* 8.** *Sejam P e Q dois caminhos triviais distintos, então sua junção não pode ser um caminho.*

Figura 11: $P : u$

Fonte: Elaboração própria em 2018.

Figura 12: $Q : v$

Fonte: Elaboração própria em 2018.

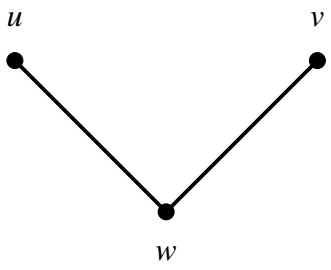
Figura 13: Junção PQ

Fonte: Elaboração própria em 2018.

De fato, a resultante da junção entre P e Q não pode ser um caminho pois a condição mínima, de ser um grafo conectado, não é atendida.

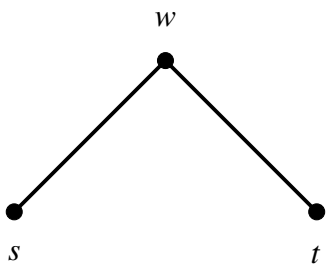
***Exemplo* 9.** *Sejam dois caminhos P e Q que têm apenas um vértice w em comum, ou seja, ambos passam pelo vértice w de maneira que $P : u \rightsquigarrow w \rightsquigarrow v$ e $Q : s \rightsquigarrow w \rightsquigarrow t$ com $P \cap Q = \{w\}$. A junção entre eles, de maneira alguma poderá ser um caminho. Para fins didáticos, nas contruções abaixo, representaremos o símbolo "$\rightsquigarrow$" por uma aresta.*

Figura 14: $P_1 : u \rightsquigarrow w \rightsquigarrow v$



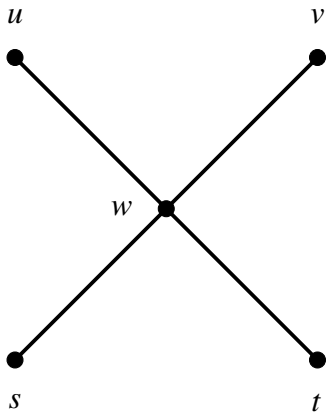
Fonte: Elaboração própria em 2018.

Figura 15: $Q_1 : s \rightsquigarrow w \rightsquigarrow t$



Fonte: Elaboração própria em 2018.

Figura 16: Junção P_1Q_1



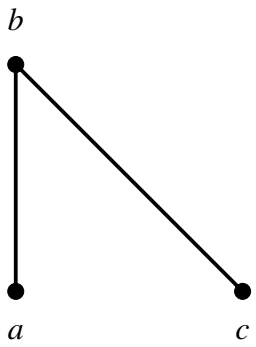
Fonte: Elaboração própria em 2018.

De fato a junção P_1Q_1 não é um caminho. Isso devido ao fato de que para ser caminho, durante todo o passeio, $u_i \neq u_j \; \forall \; i \neq j$. Não é o que acontece. Pois para um possível passeio contemplando todas as arestas, seria preciso passar mais de uma vez por w impossibilitando que esse passeio seja um caminho.

Um grafo que é um caminho, sem ciclo, de comprimento $k-1$ tem k vértices e é denotado por P_k. Se k é par, dizemos que o caminho é **par**, caso k seja ímpar o caminho também será **ímpar**.

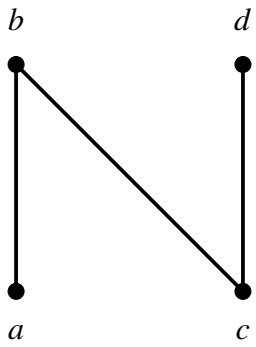
***Exemplo* 10.** *$P_3, P_5, P_7, \ldots$ são caminhos ímpares, já os caminhos $P_2, P_4, P_6, \ldots$ são caminhos pares.*

Figura 17: Caminho P_3



Fonte: Elaboração própria em 2018.

Figura 18: Caminho P_4

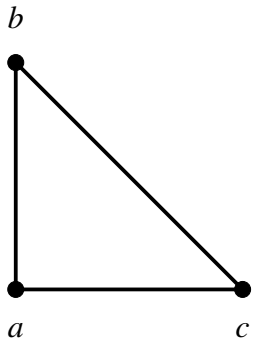


Fonte: Elaboração própria em 2018.

Um grafo que é também um ciclo de comprimento k tem k vértices e é denotado por C_k. Caso k seja par, chamamos os ciclo de **par**. Caso contrário, ou seja, se k for um número ímpar, chamamos o ciclo de **ímpar**.

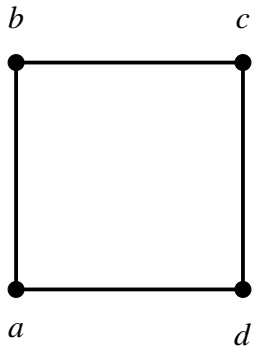
***Exemplo* 11.** *$C_3, C_5, C_7, \ldots$ são ciclos ímpares, porém, os ciclos $C_2, C_4, C_6, \ldots$ são ciclos pares.*

Figura 19: Ciclo C_3



Fonte: Elaboração própria em 2018.

Figura 20: Ciclo C_4



Fonte: Elaboração própria em 2018.

Claramente todos os caminhos de comprimento k são isomorfos entre si. Ou seja, podem ser repreentado com um mesmo grafo. O mesmo acontece com os "pedaços"de ciclos de comprimentos fixados.

2.5 CONEXIDADE DE GRAFOS

Uma ponto muito pertinente, também, na Teoria dos Grafos que reaciona-se com o que acabamos de expor é o conceito de **conexidade**. Esse é de extrema importância para a resolução de vários problemas neste ramo da matemática.

***Definição* 7.** *Um grafo G é dito conexo quando, dados dois vértices quaisquer, existe um caminho entre eles. Ou seja, para cada dois elementos de V_G exixte um caminho que os ligam.*

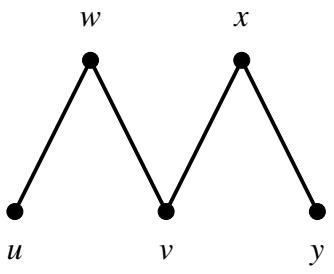
$$\exists\, P_G : u_i \rightsquigarrow u_j \;\forall\; i\,,\; j.$$

***Exemplo* 12.** *Grafos formados por caminhos disjuntos de forma alguma são conexos.*

De maneira geral, grafos não conexos são compostos de caminhos disjuntos. Esses caminhos, isoladamente, podem ser confundidos como grafos menores isolados entre si.

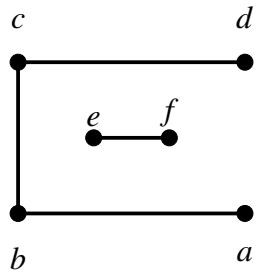
***Exemplo* 13.** *Considerando os gráficos G e H das figuras 21 e 22 respectivamente, observamos que G é claramente conexo enquanto H desconexo.*

Figura 21: *G* conexo.



Fonte: Elaboração própria em 2018.

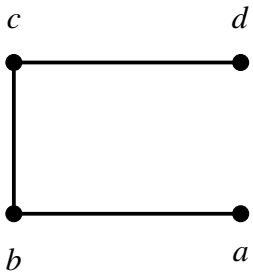
Figura 22: *H* não conexo.



Fonte: Elaboração própria em 2018.

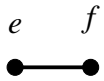
Veja que o grafo H (Figura 22) pode ser expresso pela junção de dois (sub)grafos disjuntos, os quais podem ser chamados de H_1' e H_2' de maneira que $H_1', H_2' \subseteq H$. Com isso, temos a junção $H_1'H_2' = H$.

Figura 23: H_1'.



Fonte: Elaboração própria em 2018.

Figura 24: H_2'.



Fonte: Elaboração própria em 2018.

Teorema 2. *Seja $G = \{V, A\}$ um grafo simples e conexo de n vértices. Então, G contém pelo menos $n-1$ arestas. Ou seja, $\#A_G \geq \#V_G - 1$.*

Demonstração. Adote que $G = \{V, A\}$ é um grafo simples e conexo de n vértices. Seja P a propriedade de que G tenha pelo menos $n-1$ arestas.

Note que para $G = \{\{v_1\}, \emptyset\}$ tem um vértice e nenhuma aresta. Logo, a propriedade P é verdadeira.

Seja $G = \{V, A\}$ um grafo simples e conexo com a propriedade P descrita acima, e a partir de G considere um grafo G' obtido por meio de uma das seguintes operações:

- **Inserindo um vértice:** Para que o grafo G' permaneça conexo, é necessário adicionarmos pelo menos mais uma aresta que o relacione com outro vértice de G'. Neste caso G' tem $(m+1)$ vértices e $m = (m+1) - 1$ arestas. Logo, a propriedade P é mantida.

- **Inserindo uma aresta:** A inserção de uma aresta não altera a propriedade P. Pois, se tiver-mos n arestas, mesmo assim, teremos pelo menos $n-1$ arestas.

Assim, G tem $(m+1)$ vértices e pelo menos $m = (m+1) - 1$ arestas como no enunciado. ■

Teorema 3. *Seja $G = \{V,A\}$ um grafo simples e conexo de n vértices. Se G contém mais do que $n-1$ arestas, então G tem pelo menos um ciclo.*

Demonstração. Admita que $G = \{V,A\}$ é um grafo simples e conexo com n vérticies e mais de $n-1$ arestas. Assim, G contém um ou mais subgrafos na forma $G' = \{V,A'\}$ com $A' \subset A$ e $|A'| = n-1$, porém, como G é conexo, teremos que pelo menos um destes subgrafos é uma trilha. Sendo $T = \{V,A'\}$ a trilha em questão, ou seja, T não tem ciclos. Como G tem mais do que $n-1$ arestas, qualquer aresta de $A_G - A_T$ que for transportada de G para T criará uma ligação alternativa entre dois vértices nos quais esta aresta está relacionando. Logo, G tem pelo menos um ciclo. ■

2.5.1 Pontes

No início do capítulo falamos sobre o problema inicial da teoria dos Grafos, o das Pontes de Königsberg. Esse problema gerou, também, um conceito bem estabelecido, a saber o de pontes.

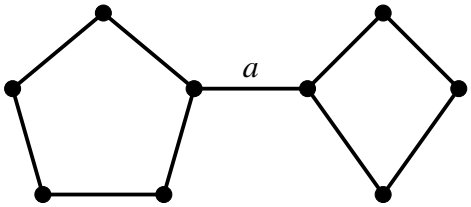
***Definição* 8.** *Uma aresta $a \in G$ é uma **ponte** de G, se $(G-a)$ tiver mais partes conexas que G. Ou seja, ao retirar a ponte **a** tem-se dois "pedaços"do grafo G, assim, a quantidade de partes é maior sem a ponte do que com ela. Nota-se que, ao retirar uma ponte tem-se um grafo desconexo em algum par de vértices.*

Em particular, e mais importante, uma aresta a em um grafo conexo G é uma ponte se e somente se $(G-a)$ é um grafo desconexo. Assim, temos que para qualquer aresta $a \in G$, $a = uv$ é uma ponte se e somente se u, v estão em diferentes componentes conexas de $(G-a)$.

***Exemplo* 14.** *Seja o grafo G representado na **Figura 25**, um grafo conexo e $a \in A_G$. Ao retirarmos a aresta a, temos que o novo grafo $(G-a)$ é desconexo como podemos ver na **Figura 26**. Sendo assim, pela definição 8 temos que a*

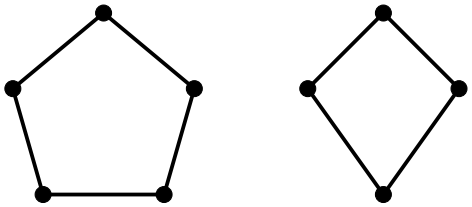
é uma ponte de G. Note que, além disso, a é a única ponte de G, logo, ao suprimirmos uma aresta qualquer, desde que não seja a aresta ***a****, não teremos um grafo desconexo.*

Figura 25: G.



Fonte: Elaboração própria em 2018.

Figura 26: $(G-a)$.



Fonte: Elaboração própria em 2018.

Teorema 4. *Uma aresta $a = uv \in G$ é uma ponte se, e somente se,* ***a*** *não está em algum ciclo de G.*

Demonstração. Por contraposição, temos: $(\Rightarrow)$ Se existe um ciclo em G que contenha a, digamos $C = PaQ$, então $QP : v \rightsquigarrow u$ é um caminho em $G - a$. Logo, a não é ponte de G, pois ainda teremos um grafo conexo.

$(\Leftarrow)$ Se $a = uv$ não é uma ponte, então u e v estão no mesmo componente conexo de $G - a$, e existe um caminho $P : v \rightsquigarrow u$ em $G - a$. Agora, $aP : u \rightarrow v \rightsquigarrow u$ é um ciclo em G. ■

2.5.2 Árvores

Você provavelmente já deve ter visto uma árvore. Pois bem. Me refiro ao vegetal de natureza frutífera ou não que possue ramificações e folhas. Porém, Árvore também é o nome de uma das áreas mais importantes da teoria dos grafos, além de ser um importate aliado das tecnologias da informação.

O conceito que conhecemos hoje sobre árvores tem três protagonistas, a saber, Kirchhoff (1847), Cayley (1857) e Jordan (1869). O primeiro criou a teoria das árvores ao aplicar modelos de grafos para problemas de circuitos elétricos, já o segundo aplicou, embora na mesma linha de grafos, na química

com a enumeração de isômeros de hidrocarbonetos alifáticos saturados. O terceiro se deteve a uma abordagem puramente matemática.

Definição* 9.** *Um grafo é denominado* ***acíclico*, se não tem ciclos. Um grafo acíclico e desconexo é chamado de* ***floresta****. Uma* ***árvore*** *é um grafo acíclico conexo.*

Pelo teorema 4 e pela definição de árvores, temos o resultado seguinte.

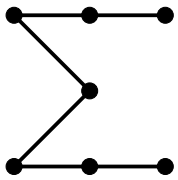
Corolário 2. *Um grafo conexo é uma árvore se e somente se todas as arestas são pontes.*

A seguir temos a classificação das árvores dadas as quantidades dos vértices. E apesar de existirem várias provas, a primeira foi dada por Cayley em 1889. Na prova em questão é afirmado que existem n^{n-1} árvores possíveis em um conjunto de vértices V com n elementos. Por precisar de elementos como dígrafos (que não apresentaremos aqui) omitiremos a prova.

Por outro lado, comparando com a quantidade de isomorfismos de uma árvore de n vértices, temos que poucas árvores não isomorfas.

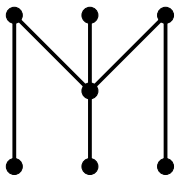
***Exemplo* 15.** *Segundo a fórmula de Cayley, uma árvore com* 7 *vértices tem* $7^6 = 117{,}649$ *árvores possíveis. Porém, com apenas* 11 *árvores não isomorfos entre si. Ilustramos:*

Figura 27: Primeiro não isomorfo.



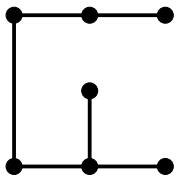
Fonte: Elaboração própria em 2018.

Figura 28: Segundo não isomorfo.



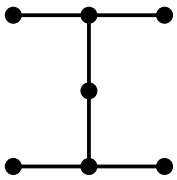
Fonte: Elaboração própria em 2018.

Figura 29: Terceiro não isomorfo.



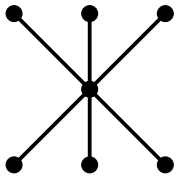
Fonte: Elaboração própria em 2018.

Figura 30: Quarto não isomorfo.



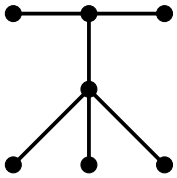
Fonte: Elaboração própria em 2018.

Figura 31: Quinto não isomorfo.



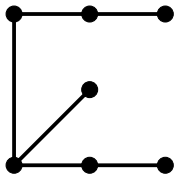
Fonte: Elaboração própria em 2018.

Figura 32: Sexto não isomorfo.



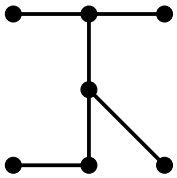
Fonte: Elaboração própria em 2018.

Figura 33: Sétimo não isomorfo.



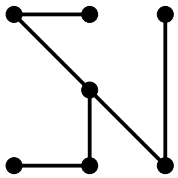
Fonte: Elaboração própria em 2018.

Figura 34: Oitavo não isomorfo.



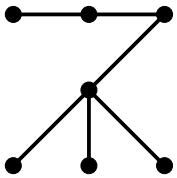
Fonte: Elaboração própria em 2018.

Figura 35: Nono não isomorfo.



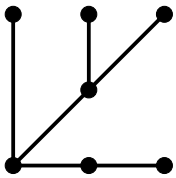
Fonte: Elaboração própria em 2018.

Figura 36: Décimo não isomorfo.



Fonte: Elaboração própria em 2018.

Figura 37: Décimo primeiro não isomorfo.



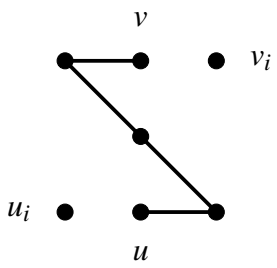
Fonte: Elaboração própria em 2018.

Dizemos que um caminho $P : u \rightsquigarrow v$ é **máximo** em G, se não há um $a \in G$ de maneira que Pa ou aP sejam um caminho. Como V_G é finito, esse caminho

existe.

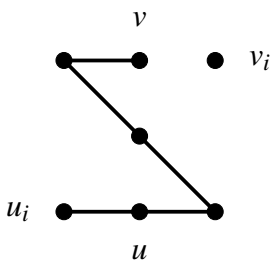
***Exemplo* 16.** *Suponha que P seja um caminho $P : u \rightsquigarrow v$ (figura 38) que começa em u e termina em v um caminho máximo em G, isso significa que não existe caminho maior que conecta u a v. Caso exista uma aresta $a = u_i u$ ou $a = vv_i$ com $u_i, v_i \in V_G$ então os novos caminhos aP ou Pa seriam caminhos máximos em G.*

Figura 38: Caminho *P*.



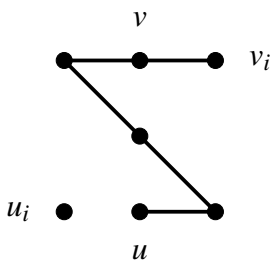
Fonte: Elaboração própria em 2018.

Figura 39: Caminho *aP*.



Fonte: Elaboração própria em 2018.

Figura 40: Caminho *Pa*.



Fonte: Elaboração própria em 2018.

Note que, caso tivéssomos os caminhos aP (figura 39) ou Pa (figura 40), como $aP > P$ e também $Pa > P$, P não poderia ser um caminho máximo em G.

Teorema 5. *Seja $P : u \rightsquigarrow v$ um caminho máximo em um grafo G. Então, $N_G(v) \subseteq P$. Além disso, se G é acíclico, então $\partial(v) = 1$.*

Demonstração. Se $a = vw \in A_G$ com $w \notin P$, então *Pa* também é um caminho, o que contradiz a suposição de maximilidade para *P*. Portanto $N_G(v) \subseteq P$. Para grafo acíclico, se $wv \in G$, então *w* pertence a *P*, e *wv* é necessáriamente a ultima aresta de *P* para que não haja cíclos. ■

2.5.3 Grafos Eulerianos

Leonard Euler, segundo (ORE, 1990), é considerado o primeiro matemático a escrever um documento sobre o início do que conhecemos por Teoria dos Grafos. Iniciou tal estudo, sobre essa teoria, analizando e tentando resolver um problema conhecido como Problema das Pontes de Königsberg. A cidade de Königsberg, na região da Prússia, estava localizada nas margens e em duas ilhas do rio Preguel, as quais eram ligadas por sete pontes, como vimos anteriormente. Também vimos que a discussão entre os moradores da cidade era: Será possível sair e retornar para casa, percorrendo a cidade toda cruzando cada ponte apenas uma vez?

A contribuição de Euler no problema citado acima foi a demonstração de que o problema não tinha solução. Generalizando, a solução do seu teorema estava baseada em três quesitos: se há mais de duas márgens/ilhas às quais leva um número ímpar de pontes, então tal percurso é impossível, (este era o caso de Königsberg); caso o número de pontes seja ímpar para exatamente duas regiões (margens ou pontes), então, o percurso é possível se começar em qualquer dessas regiões; finalmente, caso não existam regiões às quais incidam um número ímpar de pontes, então o percurso quisto pode ser realizada começando a partir de qualquer região da cidade.

De modo simplificado pode ser dito que o trajeto do tipo descrito logo acima (conhecido também como um Caminho Euleriano) só é possível se e somente se a quantidade de regiões que contemplam um número ímpar de pontes é 0 ou 2. No caso, a cidade de Königsberg tinha quatro regiões onde uma contemplava cinco e, as outras, três pontes cada, de modo que não era possível um Caminho Euleriano. Porém, como a guerra destruiu algumas pontes, na reconstrução e construção de uma nova ponte o problema foi modificado, mas a solução global de Euler se manteve e este passou a apresentar um percurso Euleriano.

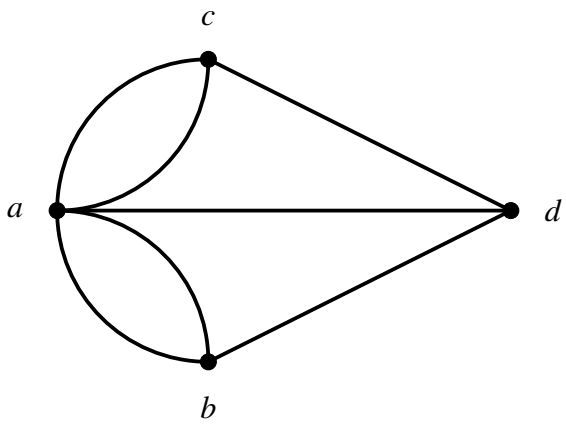
Na conclusão de seu artigo, Euler mostrou como após ter sido estabelecida a existência de uma solução, a rota pode ser determinada.

Figura 41: Mapa da cidade de Königsberg.

Fonte: Hebrew University of Jerusalem and the Jewish National and University Library, 2000.

O resultado foi o famoso grafo da figura 42. Nela os pontos *a, b, c* e *d* representam as faixas de terra e as pontes são representadas pelas curvas que ligam os pontos.

Figura 42: Grafos do problema das pontes de Königsberg.



Fonte: Elaboração própria em 2018.

Ao observar este diagrama, é possível notar que para este problema ter uma solução é preciso traçar um passeio fechado contendo todas as arestas, ou seja, um caminho contendo todas as arestas. Como elas devem ser atravessadas exatemente uma vez cada, está aí um ciclo também podendo ser chamado de **circuito**.

Além disso, ao analizar o problema, é notório que, para a situação ser favorável à uma caminhada passando por todos os pontos (margem ou ilha) devem ter uma quantidade par de pontes incidentes em cada faixa de terra.

Euler iniciou seus estudos com o problema: pode ser possível a partir de um grafo encontrar um caminho fechado contendo todas as suas arestas? Com isso, vem as definições abaixo.

Definição* 10.** *Seja G um grafo simples, caso um passeio contenha todas as arestas de G chamamos esse passeio de* ***Passeio Euleriano*. Do mesmo modo, se um caminho vier a conter todas as arestas de G, este caminho é chamado de* ***Caminho Euleriano****. Se um ciclo contém todas as arestas de G, dizemos que esse ciclo é um* ***Ciclo Euleriano*** *e, de maneira geral, dizemos que G é um* ***Grafo Euleriano****.*

Ou seja, caso em um grafo G haja um ciclo que contenha todas as arestas de G, então, G é um grafo Euleriano. E, em particular, o ciclo que garante a propriedade de ser Euleriano é denotado de ciclo euleriano.

Os resultados apresentados a seguir servirão para resolver o Problema das Pontes de Königsberg.

Lema 1. *Seja G um grafo cujo grau de cada vértice é pelo menos* 2*, então G contém um ciclo.*

Demonstração. Caso G tenha algum laço ou aresta múltipla, o resultado é imediato.

Suponhamos então que G seja um grafo simples. Dado $v \in G$ construiremos um ciclo através de um processo recursivo: escolhemos v_1 um vértice qualquer adjacente a v e, para cada $i > 1$, escolhemos v_{i+1} algum vértice diferente de v_{i-1} adjacente à v_i. Temos que a existência de tais vértices é garantida por hipótese pois cada vértice está ligada a no mínimo duas arestas. E como G tem um

número finito de vértices, devemos em algum momento escolher um vértice já escolhido antes. Se v_k é o primeiro tal vértice, então o percurso entre as duas ocorrências de v_k é um ciclo, como queríamos. ■

Observação: 1. *Para a prova do resultado seguinte, observamos que um grafo conexo G contendo apenas uma aresta possui todos os vértices pares se, e somente se, esta aresta é um laço.*

Teorema 6. *Seja G um grafo conexo. Então, G é Euleriano se, e somente se, cada vértice de G é par.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Suponha T um Caminho Euleriano de G. Se T passa por um vértice qualquer v, então T contribui com pelo menos duas arestas para o grau de v (caso T contribuísse com somente uma aresta, então T seria um passeio mas não um caminho ou não seria uma trilha). Como T é um caminho, cada aresta de G ocorre exatamente uma vez em T , assim todos os vértices de G tem as características do vértice v. Logo cada vértice de G é par.

$(\Leftarrow)$Suponha que cada vértice de G seja par. Provaremos aplicando indução sobre o número de arestas de G. Para o número de arestas de G igual a 1, pela Observação 1 de que G é euleriano, existe em G um circuito euleriano.

Agora, seja G um grafo conexo qualquer. Como G é conexo, cada vértice tem grau no mínimo 2. Assim, pelo Lema 1, G contém um ciclo C. Se C contém todas as arestas de G a prova está completa. Se não, removemos de G as arestas de C para formar um novo grafo H com cada vértice par. Como $H \subsetneq G$, H tem menos arestas do que G e pela hipótese de indução, cada componente de H tem um circuito Euleriano. Pela conexidade de G, cada componente de H tem no mínimo um ponto em comum com C. Obtemos assim um circuito Euleriano em G seguindo as arestas de C até um vértice não isolado de H, trançando o circuito Euleriano da componente H que contém este vértice e continuando ao longo das arestas de C, até alcançarmos um vértice pertencente a outra componente de H

e assim sucessivamente, até retornarmos ao vértice inicial. ■

Com o Teorema 6 pode-se resolver o problema das pontes. De fato todos quatro os vértices do grafo gerado pelo problema das sete pontes têm graus ímpares. E vimos anteriormente que para esse caminho seja possível, o número de vértices de grau ímpar tem que ser zero ou dois.

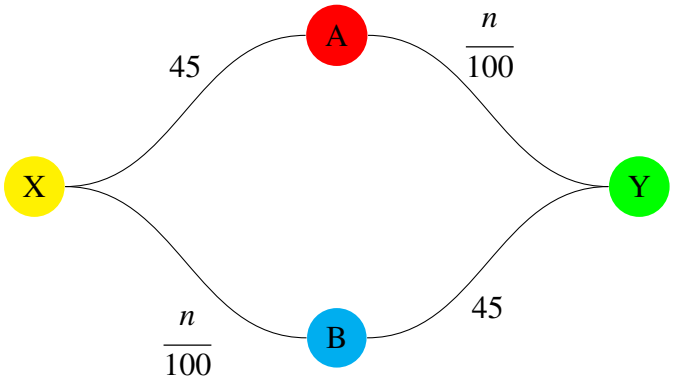
3 PARADOXO DE BRAESS

Diariamente podemos enfrentar algumas questões em nossas vidas. Uma delas é em relação ao tráfego, seja o transito de automóveis em uma cidade, informações sendo transportadas em um fluxo contínuo ou não, eletricidade distribuida para as residências de um bairro, calor transferido em um motor termodinâmico. Podemos citar como exemplo prático o que ocorreu em 1990 na cidade de Nova Iorque onde a *42d Street* foi fechada para o Dia da Terra (*Earth Day*). O que acontece é que essa rua é bastante movimentada na cidade, nisso muitos acharam que a decisão de fechar a via iria resultar em muitos transtornos no trânsito, o que, felizmente, não ocorreu já que o fechamento da *42d Street* gerou uma melhoria no trânsito na cidade.

A necessidade de resoluções rápidas e solucionáveis nos exige respostas que nem sempre são tão óbvias. Com isso vem o proposto nesse capítulo: E se puséssemos uma via em nossa rota de casa ao trabalho? Será que iriamos melhorar o fluxo, tendo em vista mais opções de tráfego? Possivelmente não. Daí o paradoxo.

Como exemplo, suponha que temos diariamente seis mil veículos que vão de uma cidade X para uma cidade Y podendo passar apenas por A ou por B – conforme a figura abaixo. Porém, as estradas que vão de X até A e de B até Y são estradas lentas, onde os condutores gastam exatamente 45 minutos para percorre-las. Por outro lado, as estradas que vão de X até B e de A até Y são estradas boas, contudo, o tempo em minutos, para atravessa-las é diretamente proporcional a um centésimo da quantidade (n) de veículos passando por ela.

Figura 43: Primeiro estágio do problema.



Fonte: Elaboração própria em 2018.

Analisando o estado atual do flúxo de carros atravéz de um equilíbrio simples, que seria: metade dos condutores irem pelo caminho XAY e a outra pelo caminho XBY. Se tratando de tempo, usaremos $T_A(n)$ e $T_B(n)$ como o tempo necessário para n veículos fazerem o caminho XAY e XBY respectivamente. Assim, neste caso, temos:

$$T_A\left(\frac{n}{2}\right) = T_B\left(\frac{n}{2}\right) = 45 + \frac{\frac{n}{2}}{100}$$

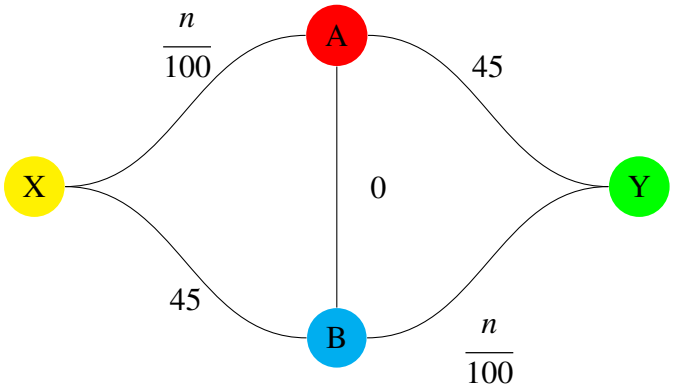
Como temos que $n = 6000$, vem:

$$T_A(3000) = T_B(3000) = 45 + \frac{3000}{100} = 75min.$$

Assim, temos que o tempo médio de fluidez entre X e Y é de $75min$. Esse valor também é dado pela média aritmética dos tempos de cada caminho.

Supomos agora que, por motivo de melhoria, foi adicionada uma outra via, desta vez, entre A e B de tempo zero –conforme figura 44. Ou seja, essa via permite a conversão de A para B de maneira instatânea.

Figura 44: Segundo estágio do problema.



Fonte: Elaboração própria em 2018.

Mais uma vez fazendo com que cada via tenha uma quantidade equivalente de veículos, teríamos, desta vez 2000 veículos indo por cada um dos caminhos, a saber XAY, XBY e $XABY$.

Assim teríamos:
Para XAY e XBY temos $T_A(2000) = T_B(2000) = 65min$.
Porém para $XABY$, $T_{AB}(2000) = 40min$.

Agora a nova média é de $56{,}7min$. Essa média é $75{,}6\%$ de $75min$. Seria algo muito melhor para todos os condutores. Porém, se tratando de decisões pessoais, possivelmente egoístas, o que ocorre é que cada vez mais os condutores vão preferir ir pela via mais rápida com a intenção de reduzir seus tempos de percurso. Está aí o "preço da anarquia". Com o aumento de veículos pelo caminho novo, o tempo aumenta proporcionalmente. Disso, temos que: $T_{AB}(6000) = 120min$. Isso quer dizer que esse novo tempo é 60% maior que o tempo médio inicial.

À primeira vista, realmente é melhor ir sempre pela via mais rápida. Porém, aqui entra um conceito que também é utilizada na teoria dos jogos, que é o **Equilíbrio de Nash**. Nele, uma partida, uma negociação, uma decisão só alcançará esse equilíbrio se, quando tomada as devidas decisões, essas são

as melhores estratégias possíveis para ambos os participantes. Neste caso, a melhor decisão não é a possível global, e sim a melhor decisão possível, tomada a decisão, ainda que oculta, dos outros condutores. Sendo assim, as variações são dadas gradativamente como um pêndulo de três esferas. No caso das rodovias uma nova via seria, na teoria dos jogos, por exemplo, como uma nova estratégia.

Esse é o paradoxo, não é possível garantir um melhor fluxo "apenas"adicionando uma via. Não é tão simples. É comum em tomada de decisões a apreciação de várias vistas que, comumente, se tornam variáveis.

4 PROPOSTA PEDAGÓGICA

Neste capítulo é apresentada uma proposta pedagógica tomando como base a BNCC e a utilização do exposto nos capítulos anteriores.

4.1 BNCC

A *Base Nacional Comum Curricular* (BNCC) é o que estabelece, por normas, as aprendizagens essenciais que todos os alunos da Educação Básica devem adquirir na escola. Anunciada no final de 2018, entrou em vigor no ano de 2020, mesmo fazendo parte do Novo Ensino Médio a partir de 2019, foi discutida e idealizada por especialistas de todas as áreas do conhecimento com o intuito de ser criado um documento que descrevesse as partes comuns nos currículos das escolas básicas no Brasil. As aprendizagens essenciais listadas na BNCC devem garantir o desenvolvimento de competências gerais e competências específicas. As aprendizagens essenciais são desenvolvidas através do que a BNCC chama de objetos de conhecimento, que são os conteúdos: razão e proporção, conjuntos numéricos, funções etc.

> "Na BNCC, competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. (...)
> É imprescindível destacar que as competências gerais da Educação Básica, apresentadas a seguir, inter-relacionam-se e desdobram-se no tratamento didático proposto para as três etapas da Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio), articulando-se na construção de conhecimentos, no desenvolvimento de habilidades e na formação de atitudes e valores, nos termos da Lei de Diretrizes e Bases (LDB). (...)
> A área de Matemática, no Ensino Fundamental, centra-se na compreensão de conceitos e procedimentos em seus diferentes campos e no desenvolvimento

> do pensamento computacional, visando à resolução e formulação de problemas em contextos diversos. No Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. Também devem construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade." (BNCC, 2018. p. 8)

Abaixo destacamos 4 das 10 competências gerais nas quais a Teoria dos Grafos está inteiramente relacionada:

- Competência geral 1: Valorização e utilização dos conhecimentos histórico construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital a fim de entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

- Competência geral 2: Estimular a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, onde é inclusa as práticas investigativas, o exercício da reflexão, a análise crítica, a criatividade e a imaginação, com o intuito de investigar causas, elaborar hipóteses e testá-las, formular e resolver problemas e criar soluções, tudo isso com base nas diferentes áreas do conhecimento.

- Competência geral 4: Utilização de diferentes linguagens verbais (inclusive visualmotora, como Libras), corporal, visual e digital, bem como conhecimentos das linguagens artísticas, matemáticas e científicas, para expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir entendimento mútuo.

- Competência geral 5: Compreensão, utilização e criação de tecnologias de informação e comunicação de forma crítica e significativa, reflexiva e ética nas mais variáveis práticas sociais para a comunicação, acesso e disseminação de informações, produção de conhecimentos, resolução de

problemas e exercício do protagonismo e autoria na vida pessoal e também coletiva. (BNCC, 2018).

Essas competências devem ser desenvolvidas durante todo o ensino básico dentro das competências de cada área (Matemática, Ciências, Geografia, História, Artes, etc).

A respeito das competências específicas da Matemática, podemos separar, com respeito à Teoria dos Grafos:

- Competência específica 2: Desenvolvimento do raciocínio lógico, do espírito de investigação e da capacidade de produzir argumentos convincentes, fazendo uso dos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
- Competência específica 3: Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
- Competência específica 5: Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
- Competência específica 6: Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens

(gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).

- Competência específica 8: Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles. (BNCC, 2018).

De acordo com a BNCC, as competências supracitadas são desenvolvidas no momento em que os alunos adquirem *habilidades*. Estas habilidades são mapeadas por códigos alfanuméricos e são explicados.

Vamos tomar como exemplo o código:

EF05MA01

EF $\rightarrow$ primeiro par de letras diz respeito a etapa do ensino. Neste caso é Ensino Fundamental.

05 $\rightarrow$ O primeiro par de números indica o ano a que se refere a competência. Neste exemplo é o 5° ano.

MA $\rightarrow$ O segundo par de letras faz referência ao componente curricular. Onde, neste caso **MA** = Matemática.

01 $\rightarrow$ O ultimo par de números referencia a posição da habilidade na numeração sequencial do ano ou do bloco de anos.

Como o foco são as competências e habilidades pertinentes à Teoria dos grafos, podemos indentificar as seguintes habilidades no Ensino Fundamental:

- (EF06MA34) Interpretar e desenvolver fluxogramas simples, identificando as relações entre os objetos representados.

- (EF07MA05) Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos.
- (EF07MA06) Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos.
- (EF07MA07) Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas. (BNCC,2018).

Continuando na BNCC, as competências que devem ser abordadas no Ensino Médio são as mesmas do Ensino Fundamental, porém com ênfase na aplicação da Matemática ao cotidiano.

Com a intenção de alcançar as competências específicas do Ensino Médio, a BNCC enfoca que os alunos devem desenvolver habilidades referentes ao processo de investigação, construção e resolução de modelos e problemas. Motivando a atividade posteriormente aqui apresentada.

Cada habilidade do Ensino Médio também pode ser identificada através de um código alfanumérico, que pode ser traduzido como o exemplo a seguir:

EM13MAT101

EM $\rightarrow$ As duas letras iniciais indicam a etapa de Ensino Médio.

13 $\rightarrow$ O par inicial de números é a indicação de que as habilidades descritas podem ser desenvolvidas da 1^a à 3ª série do Ensino Médio.

MAT $\rightarrow$ Estas três letras indicam a competência da Matemática e suas Tecnologias.

101 $\rightarrow$ A trinca numérica no fim do código diz respeito a competência específica à qual se relaciona a Habilidade (indicada no 1° número) e a sua numeração no conjunto de habilidades relativas a cada competência (dois

últimos números).

Com isso, as competências específicas de Matemática no Ensino Médio, bem como as respectivas habilidades nas quais a Teoria dos Grafos pode ser incluída estão a seguir:

- Competência Específica 1: Utilização de estratégias, conceitos e procedimentos da matemática para a interpretação de situações em contextos variados, tanto em atividades cotidianas, quanto em fatos das Ciências da Natureza e Humanas, também em questões socioeconômicas ou tecnológicas, de modo a contribuir para a contrução de uma formação mais geral.
  - (EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos.
- Competência Específica 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
  - (EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.
- Competência Específica 4: Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, os diferentes registros de representações matemáticas (algébrica, geométrica, estatístico, computacional etc.), na busca de soluções e comunicação de resultados de problemas.
  - (EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem

corrente e/ou matemática.

- (EM13MAT407) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de setores, árvores, entre outros), dando reconhecimento aos mais eficientes para sua análise e resolução de problemas.

Esta nova estrutura dada ao Ensino Médio traz uma certa flexibilização no currículo, que permite aos discentes escolherem os assuntos de acordo com seus interesses, o que os tornam, neste ponto, protagonistas de seus desenvolvimentos escolares. Estes assuntos, entre os quais poderia estar a Teoria dos Grafos, são os chamados **Itinerários Formativos**, que têm a função de desenvolver o aprofundamento dos conhecimentos estruturantes dentro das áreas do saber, como Matemática e suas tecnologias. E precisam ser ofertadas tendo como foco a realidade local e os recursos materiais e humanos de cada escola, trazendo uma formação contemporânea que converse com a vida alunos.

Quanto ao currículo, no Ensino Médio, os assuntos ditos como itinerários formativos são articulados aos conteúdos da formação geral, permitindo também que possam ser orientados pelas competências específicas de cada área e pelas competências gerais.

Ainda, o que garante o desenrolar das competências específicas, são as habilidades que estão relacionadas aos conteúdos, conceitos e processos. Sendo assim, no próximo tópico procuramos corresponder à atividade proposta a respectiva habilidade de acordo com, talvez não todas, as competências acima listadas.

4.2 ATIVIDADE PROPOSTA.

Neste tópico, como citado acima, apresentaremos uma proposta de atividade utilizando um método lúdico por meio de uma maquete (figura 49).

A atividade consiste na tentativa de resolução do problema das *Sete pontes de königsberg*. Mas não a resolução formal com demonstrações e provas. A intenção, no momento, é fazer uma ligação entre o problema clássico das sete pontes com o *Paradoxo de Braess*. Isso com o intuito de mesclar, o que podemos chamar, o problema que criou o assunto desse texto com um dos assuntos que mais está em pauta na nossa sociedade: mobilidade pública. Fazendo isso, os alunos são expostos a uma nova ferramenta que possibilitará, neste e em outros momentos, uma nova maneira de interpretar, modelar e resolver problemas do dia a dia.

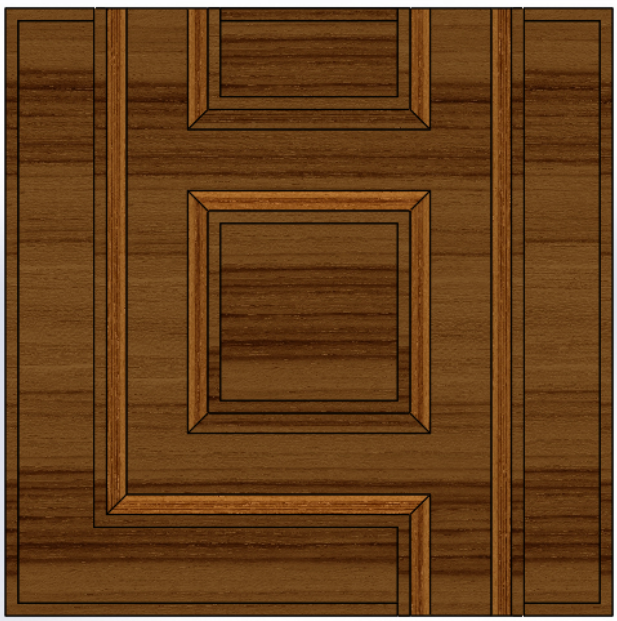
Para esta atividade, faz-se uso de uma maquete que foi desenhada tomando como inspiração uma maquete do acervo da *Matemateca* do Instituto de Matemática e Estatísta da Universidade de São Paulo (IME/USP) disponível na postagem cujo o link segue *http://matemateca.ime.usp.br/acervo/pontes_konigsberg.html*. Se trata de uma maquete de madeira com elementos fixos que representam as faixas de terra disponíveis, e os elementos móveis, também de madeira, que representam as pontes.

Na representação elaborada pelo autor deste texto, apresentadas a seguir nas figuras 45 e 46 temos duas vistas da maquete sem as pontes para promover os detalhes ou, pelo menos, a melhor visualização das partes fixas ou 'faixas de terra'. Enquanto a figura 47 representa, igualmente, os detalhes das pontes separadas da maquete. Aqui, deixo claro que a maquete pode ser feita de qualquer material, não se limitando à madeira. Como parte da atividade, os alunos podem fabricar individualmente ou em grupos suas maquetes. Vale lembrar também que na elaboração (caso queiram) da maquete e suas pontes não são limitadas em quantidade. Os desenhos técnicos estarão em anexo para a livre reprodução para uso de laboratórios de matemática, por exemplo.

Inicialmente, os alunos devem ser apresentados ao problema das *Sete pontes de königsberg* e também à teoria que resultou desse problema, Teoria dos

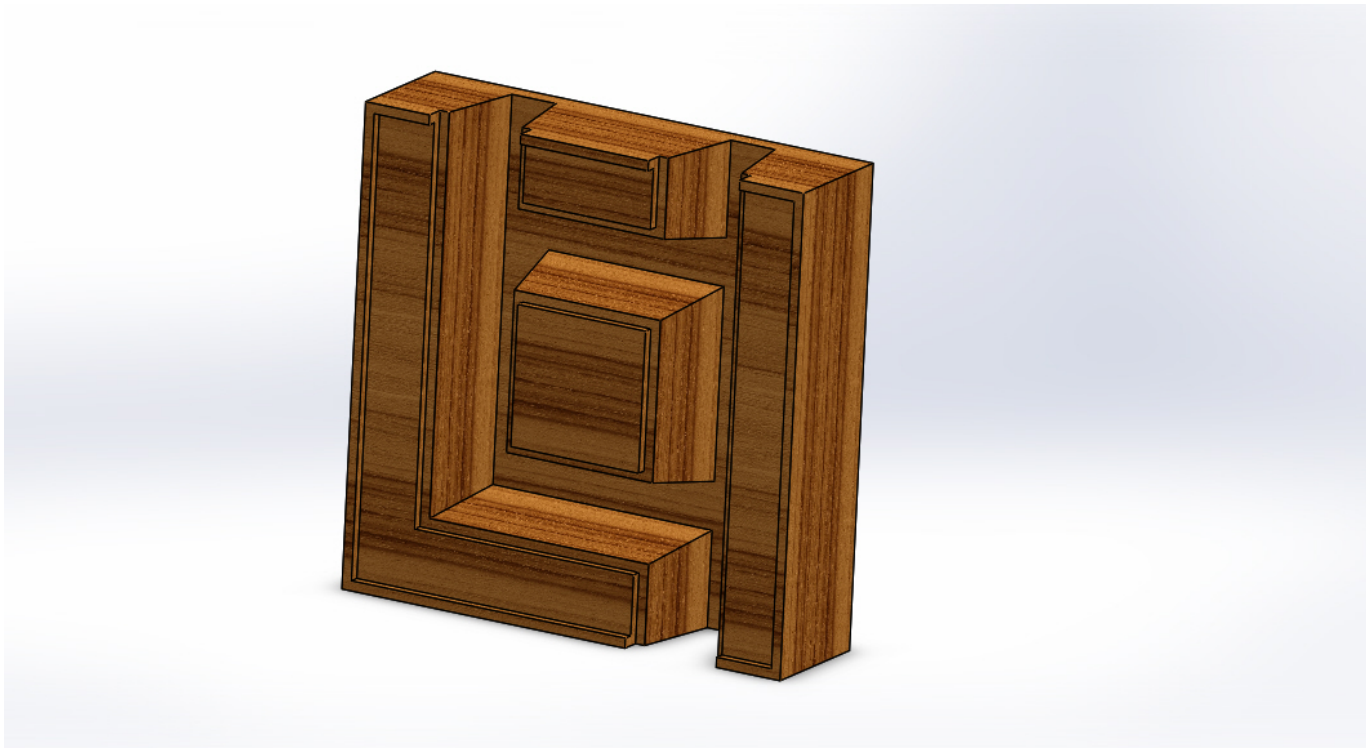
Grafos. Em seguida, os alunos e/ou os responsáveis pela atividade devem montar as pontes na maquete de madeira de maneira que se assemelhe ao modelo do problema das sete pontes conforme a figura 48. Depois disso, os alunos serão instigados a percorrer (com o dedo ou com a ajuda de algo que possa facilitar a visualização do trajeto) as possíveis rotas de passeios na cidade (maquete) a fim de verificar se, de alguma forma, o passeio possa ser feito (que não será possível com suas tentativas). Ainda nessa etapa, os alunos devem traçar em uma folha os grafos de suas tentativas e verificarem as semelhanças dos traçados. Na terceira etapa, os alunos devem ser instruídos sobre a resolução Feita por Leonhard Euler com o intuito de perceberem que realmente o problema não tem solução. Na quarta etapa os alunos devem ser apresentados ao paradoxo de Braess, verificando como o paradoxo sendo aplicado no problema das pontes como alternativa da extinção da inviabilidade do caminho histórico gerador do famoso problema das pontes.

Figura 45: Vista superior da maquete sem as pontes.



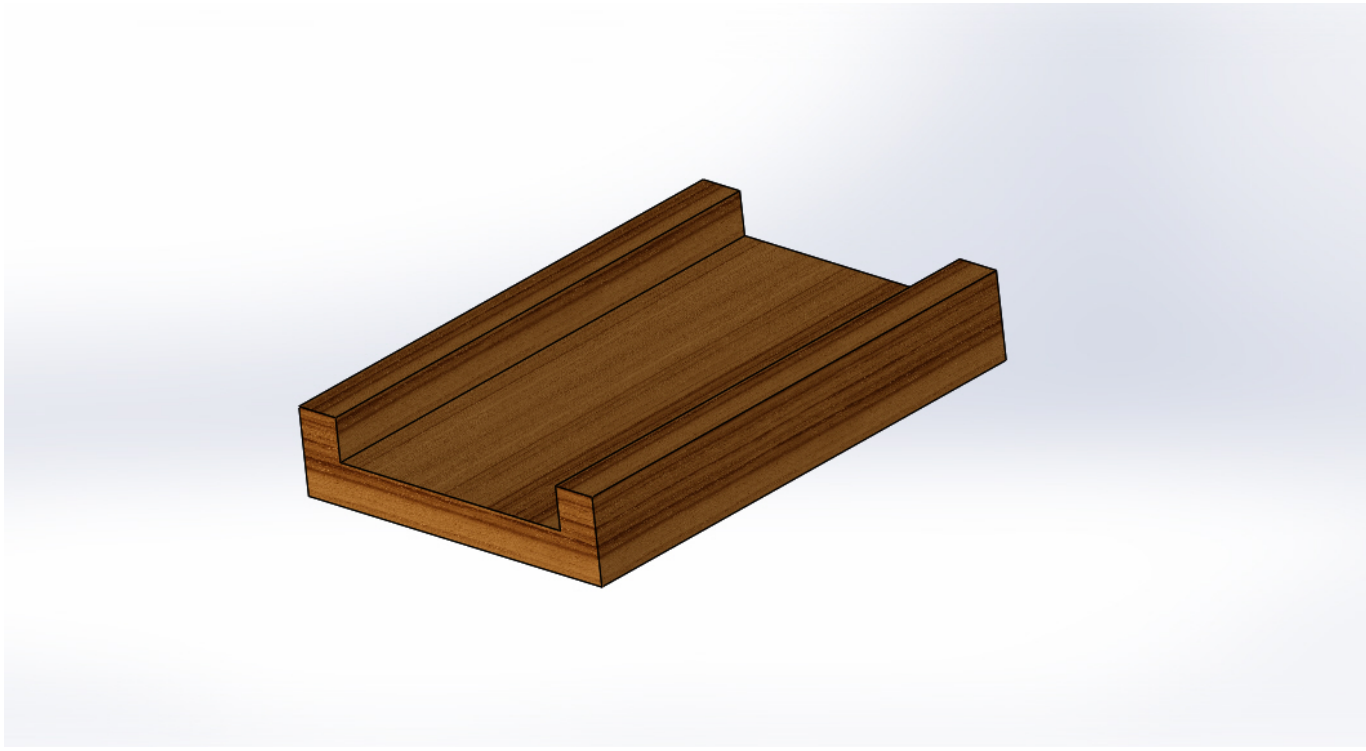
Fonte: Elaboração própria em 2018.

Figura 46: Vista isométrica da maquete sem as pontes.



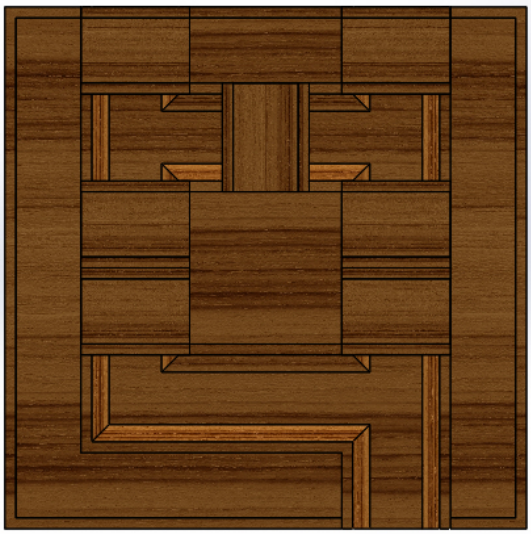
Fonte: Elaboração própria em 2018.

Figura 47: Modelo das pontes.



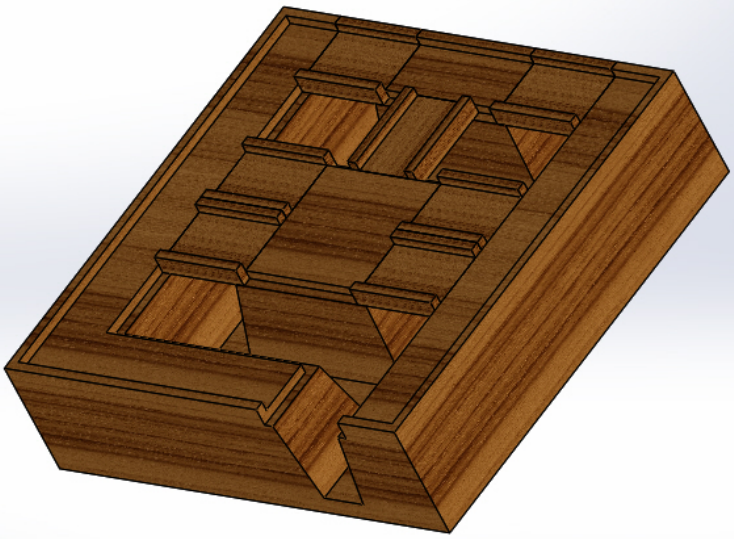
Fonte: Elaboração própria em 2018.

Figura 48: Vista superior da maquete com as pontes.



Fonte: Elaboração própria em 2018.

Figura 49: Vista isométrica da maquete com as pontes.



Fonte: Elaboração própria em 2018.

Um questionário pode ser utilizado como meio, também, avaliativo. Ele é uma ferramenta opcional para a complementação da fixação do aprendizado. Nele, o aluno deve ser capaz de resolver alguns problemas relativos às atividades em cada etapa.

Perguntas como:

1. Construa ou destrua **uma** ponte em Königsberg para que se tenha um passeio euleriano (indique o passeio).
2. Mostre como se pode ter um passeio euleriano fechado construindo mais **uma** ponte em Königsberg (indique o passeio).
3. Mostre como se pode ter um passeio euleriano fechado construindo **uma** ponte e destruindo **outra** em Königsberg.
4. O que ocorre se destruirmos **duas** pontes em Königsberg?
5. Qual o número **mínimo** de pontes para se obter um passeio euleriano? Trasse esse passeio.
6. Durante a segunda guerra mundial, duas das sete pontes de Königsberg foram destruídas. Isso contrubuiu para um passeio euleriano?
7. Sabendo que depois da derrubada de duas pontes não houve mais alteração na quantidade de pontes na cidade. Podemos dizer que essa quantidade de pontes em Kaliningrado (antiga Königsberg) contribue para o paradoxo de Braess? Explique.

Podem compor o hall dos questionamento a serem feitos aos alunos a respeito do exposto na atividade.

Apesar de a atividade ser relativamente simples, as habilidades adquiridas através do seu exercício pode trazer ao aluno uma melhor capacidade de não apenas modelar (que já é bastante coisa) mas também resolver problemas do

dia a dia de maneira a simplificar seu entendimento e resolução por meio da ferramenta Grafos.

5 CONCLUSÃO

A Teoria dos Grafos, por si só, traz uma beleza na simplicidade de sua explicação com a complexidade que queira atribuí-la. Isso nos permite também fazer o caminho inverso. Ou seja, tomar problemas complexos e abstratos em simples e concretos, possibilitando aos seus conhecedores uma forma, muitas vezes, mais rápida e/ou mais fácil. Não é à toa que sua aplicabilidade é tamanha e crescente tendo em vista sua utilidade nos mecanismos tecnológicos em todos os níveis.

Trabalhar com esse tema moatra ser algo prazeroso. Pois nele há a possilidade de colocar em prática parte do ensino da Matemática. Com a Ferramenta Teoria dos Grafos pode-se em todas as etapas de ensino básico citar e exemplificar situações que facilmente podem ser resolvidas utilizando a Teoria dos Grafos.

Este trabalho pode trazer para o universo escolar, basicamente na área de Matemática e suas tecnologias, uma porta a ser aberta por professores, pois apesar da Teoria dos Grafos não ser trabalhada no ensino regular, há bastante coisa a ser explorada, através de grafos, em todas as etapas do ensino básico após o Ensino Fundamental I.

Percebe-se então que os grafos são usados para resolver problemas simples ou complicados em uma abordagem acessível porém que carrega uma sofisticada estrutura matemática. Um conteúdo explorado por matemáticos, físicos, engenheiros e especialistas em computação. Administrar um tema desconhecido e inexplorado para alunos pode ser experiência prazerosa. Isto faz com que os alunos interajam uns com os outros e faz também da aprendizagem

um processo interessante e divertido.

REFERÊNCIAS

AQUINO, Andréia Araújo De Farias. **Atividades de modelagem matemática envolvendo a teoria dos grafos no ensino médio**. Paraná. 2014.

BNCC. **Base Nacional Comum Curricular** : Educação é a base. [S.l.]: MEC, 2018. 594 p.

BOAVENTURA NETTO, Paulo Oswaldo., **Grafos: teoria, modelos, algoritmos** ; São Paulo, Bluncher, 2011.

BOAVENURA, Paulo Oswaldo. **Grafos: Teoria, modelos, algoritmos** . 4. ed. [S.l.]: Edgard Blucher, 2006. 328 p.

FIORENTINI, Dário., LORENZATO, Sérgio. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos** . 2ª ed. Campinas: Autores Associados, 2007.

HARARY, Frank, **Graph Theory** ,Addson-Wesley, 1969.

HEBREW UNIVERSITY OF JERUSALEM AND THE JEWISH NATIONAL AND UNIVERSITY LIBRARY. Department of Geography. **Historic Cities Center**. c2000. Disponível em: <http://historic-cities.huji.ac.il/russia/kaliningrad/maps/braun_hogenberg_III_43_1.html>. Acesso em: 15 jun. 2020.

HOLANDA, Bruno de, **Teoria dos Grafos** , Rio de Janeiro, OMB,2011 Formando o seguinte grafo.

IMEUSP. Matemateca. **As pontes de königsberg** [s.d.]. Disponível em: <http://matemateca.ime.usp.br/acervo/pontes_konigsberg.html>. Acesso em: 15 jun. 2020.

JURKIEWICZ, Samuel., LEVENTHAL, Gilda. **Oficinas de matemática discreta no ensino médio**. In: Carvalho, Luiz Mariano. (org.). História e tecnologia no ensino da matemática, vol. 2. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008.p 221-240.

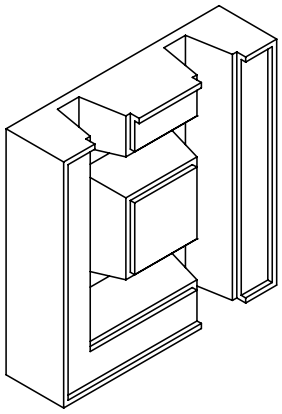
LÓSS, Zilma Eugênia., **O desenvolvimento da pesquisa operacional no**

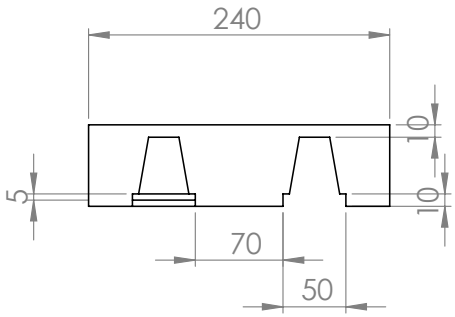
Brasil , Dissertação de M.Sc., PTS-10/81, COOPE/UFRJ, 1981.

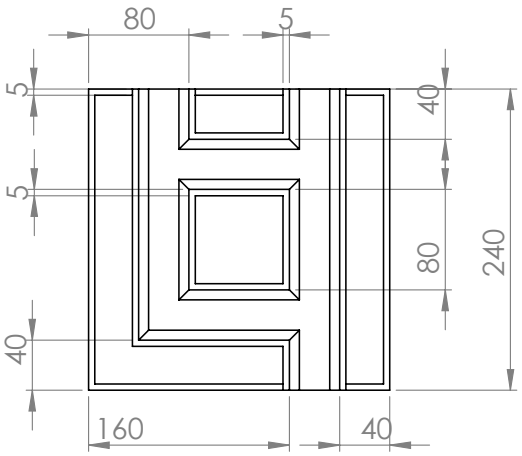
MUNIZ, Ivail. **Grafos: Conceitos e Contextos para o Ensino Médio** : Primeira jornada acadêmica do cap. [S.l.]: CAP-UFRJ, 2010.

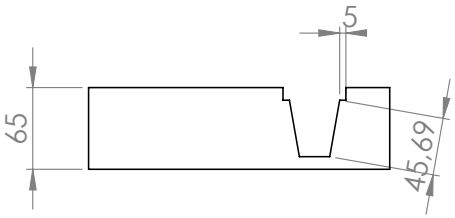
APÊNDICE - Desenhos técnicos da maquete.

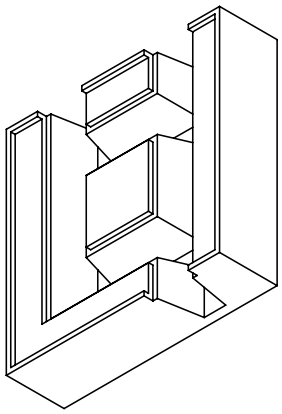
Conforme citado anteriormente, durante a proposta pedagógica , abaixo segue os documentos referentes os desenhos técnicos da maquete. A reprodução deste projeto é livre para todos os laoratórios de matemática, desde que não sejam para fins comerciais.



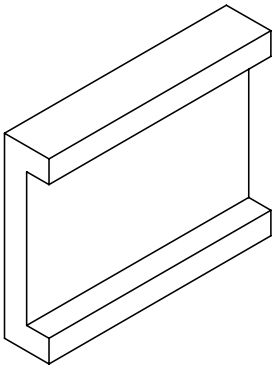


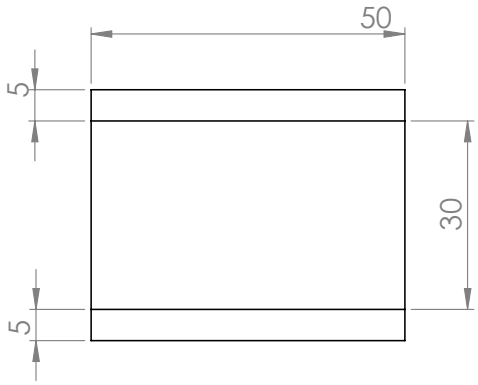


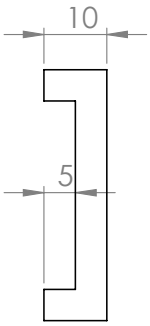




SE NÃO ESPECIFICADO: DIMENSÕES EM MILÍMETROS ACABAM. SUPERFÍCIE: TOLERÂNCIAS: LINEAR: ANGULAR:		ACABAMENTO:			DEBUR AND BREAK SHARP EDGES		NÃO MUDAR A ESCALA DO DESENHO	REVISÃO
	NOME	ASSINATURA	DATA				TÍTULO:	
DES.								
VERIF.								
APROV.								
MANUF.								
QUALID.				MATERIAL:			DES. Nº Pontes001	A4
				PESO:			ESCALA:1:5	FOLHA 1 DE 1







SE NÃO ESPECIFICADO: DIMENSÕES EM MILÍMETROS ACABAM. SUPERFÍCIE: TOLERÂNCIAS: LINEAR: ANGULAR:		ACABAMENTO:		DEBUR AND BREAK SHARP EDGES		NÃO MUDAR A ESCALA DO DESENHO	REVISÃO
	NOME	ASSINATURA	DATA			TÍTULO:	
DES.							
VERIF.							
APROV.							
MANUF.							
QUALID.				MATERIAL:		DES. Nº Pontes002	A4
				PESO:		ESCALA:1:1	FOLHA 1 DE 1