Curso Técnico Nível Médio Subsequente

Informática Para Internet

Fundamentos de Lógica e Algoritmos

Aula 04

Implicação e Equivalência Lógica, Técnica da Redução por Absurdos

Thiago Medeiros Barros

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia
do Rio Grande do Norte
Natal-RN
2015

Presidência da República Federativa do Brasil

Ministério da Educação

Secretaria de Educação a Distância

Este Caderno foi elaborado em parceria entre o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia e o Sistema Escola Técnica Aberta do Brasil – e-Tec Brasil.

Equipe de Elaboração
Cognitum

Coordenação Institucional
COTED

Professor-autor
Thiago Medeiros Barros

Projeto Gráfico
Eduardo Meneses e Fábio Brumana

Diagramação
Yann Valber

Ficha catalográfica

B277c Barros, Thiago Medeiros.

Curso Técnico Nível Médio Subsequente Informática para Internet : Fundamentos de Lógica e Algoritmos - Aula 04 : Implicação e equivalência lógica, técnica da redução por absurdos / Thiago Medeiros Barros. – Natal : IFRN Editora, 2015.

24 f. : il. color.

1. Fundamentos de Lógica e Algoritmos - EaD. 2. Implicação e equivalência lógica. 3. Redução por absurdos - técnica. I. Título.

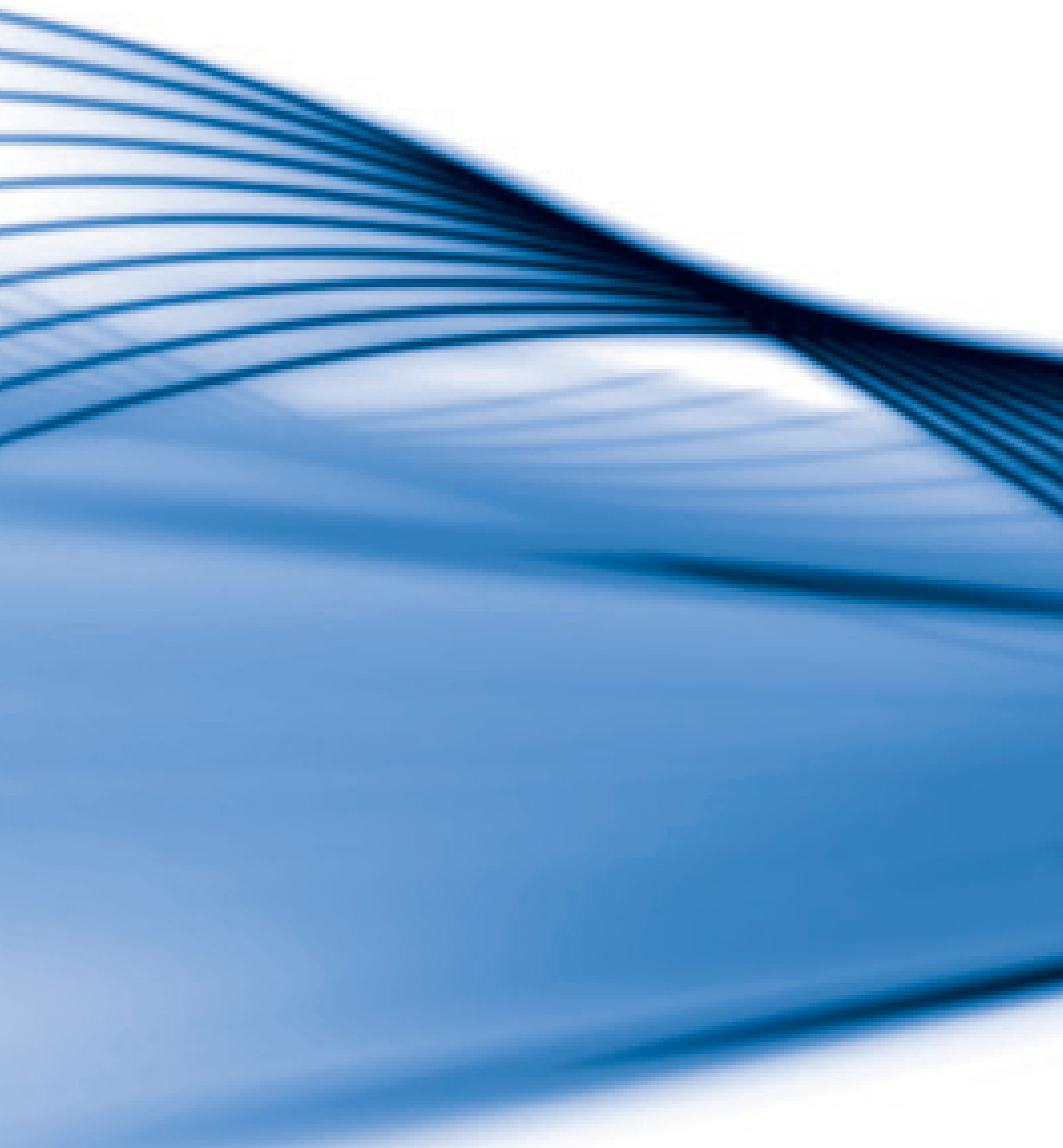
RN/IFRN/EaD CDU 004.421

Ficha elaborada pela bibliotecária Edineide da Silva Marques, CRB 15/488

Apresentação da disciplina

Olá, aluno! Estamos chegando ao final do nosso curso sobre Fundamentos de Lógica e espero você que esteja aprendendo bastante. Nesta última aula, vamos compreender como utilizamos a Lógica Clássica para concluir argumentos verdadeiros e verificar se uma expressão é uma falácia ou é de fato uma conclusão lógicamente correta, a partir dos conceitos de Implicação e Equivalência Lógica. Além disso, aprenderemos uma importante técnica chamada Redução por Absurdo, bastante utilizada em toda Lógica Clássica.

Bons estudos!



Aula 1 - Argumento Lógico, Proposições Simples, Princípios Lógicos

Objetivos

Compreender o conceito de Implicação e Equivalência Lógica;

Verificar se uma dada implicação ou equivalência é verdadeira;

Compreender e aplicar a técnica Redução por Absurdo.

Desenvolvendo o conteúdo

Figura 1: Será que o pensamento do Dinossauro está correto?

Olá, Aluno! Nas aulas anteriores aprendemos ferramentas para sistematizar a valoração da Lógica Proposicional através das tabelas verdades e transformar a Linguagem Natural em Lógica Proposicional. Nesta aula, vamos focar em como podemos utilizar esses conhecimentos e extrair conclusões Lógicas Válidas.

Para isso, vamos começar com a definição de Implicação Lógica.

Definição

A proposição A implica logicamente na proposição B, se B é verdadeiro todas as vezes que A é verdadeiro. A implicação lógica pode ser representada como $A \Rightarrow B$.

Exemplo:

- $p \wedge q$, $p \vee q$ e $p \leftrightarrow q$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \leftrightarrow q$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	0	1	0
0	0	0	0	1

Fonte: autoria própria.

A proposição $p \wedge q$ é verdadeira apenas na primeira linha. Nessa mesma linha, as proposições $p \vee q$ e $p \leftrightarrow q$ também são verdadeiras. Logo,

$p \wedge q \Rightarrow p \vee q$ e $p \wedge q \Rightarrow p \leftrightarrow q$

Uma forma mais simples de verificar se uma proposição implica logicamente em outra é dada pela definição: proposição A implica logicamente na proposição B se e somente se **$A \rightarrow B$ for uma tautologia**.

Exemplo:

- $p \rightarrow p \wedge q \Leftrightarrow p \rightarrow q$

Tabela 1: Tabela Verdade da expressão: $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \wedge q \rightarrow p \vee q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

Fonte: autoria própria.

Uma vez que a expressão $p \wedge q \rightarrow p \vee q$ é uma tautologia, logo podemos afirmar que $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$. Ou seja, $p \wedge q$ implica logicamente em $p \vee q$.

O **indicador em português** da utilização da implicação lógica é **"concluir que"**,

Exemplo:

- "Se eu correr então vou ficar com sede, e hoje eu corri, **posso concluir** corretamente que estou com sede".
  - » p: correr
  - » q: ficar com sede
  - » $(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$

Exemplo: (SEFAZ-MG 2005/ESAF) O reino está sendo atormentado por um terrível dragão. O mago diz ao rei: "O dragão desaparecerá amanhã se e somente se Aladim beijou a princesa ontem". O rei, tentando compreender melhor as palavras do mago, faz as seguintes perguntas ao lógico da corte:

1. Se a afirmação do mago é falsa e se o dragão desaparecer amanhã, posso concluir corretamente que Aladim beijou a princesa ontem?

2. Se a afirmação do mago é verdadeira e se o dragão desaparecer amanhã, posso concluir corretamente que Aladim beijou a princesa ontem?

3. Se a afirmação do mago é falsa e se Aladim não beijou a princesa ontem, posso concluir corretamente que o dragão desaparecerá amanhã?

O lógico da corte, então, diz acertadamente que as respostas logicamente corretas para as três perguntas são, respectivamente,

a. Não, sim, não.

b. Não, não, sim.

c. Sim, sim, sim.

d. Não, sim, sim.

e. Sim, não, sim.

Resolução

Sendo d:dragão desaparecerá, a: Aladim beijou a princesa, temos: d↔a.

1) ¬(d↔a) ^d => a, não é tautologia

2) (d↔a)^d => a, é tautologia

3)¬(d↔a)^¬a => d, é tautologia

Então temos não, sim, sim.

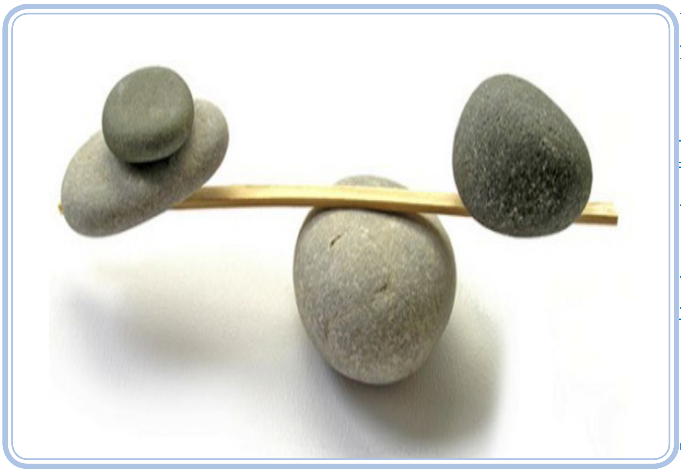
Atividade de aprendizagem 1

Verifique se as implicações lógicas abaixos estão corretas.

$(H \lor S) \land \neg H \Rightarrow S$

$(I \rightarrow C) \land \neg I \rightarrow D \Rightarrow C \lor D$

$(P \rightarrow L) \land (L \rightarrow N) \land N \Rightarrow P$



Fonte: www.cultivatingemotionalbalance.org/sites/default/files/rocks_on_balance_0.jpg

Fig. 02: A equivalência lógica pode ser interpretada como a igualdade matemática

A Equivalência Lógica pode ser comparada com a igualdade aritmética. Para entendê-la melhor, vamos à definição:

Definição

A proposição A é logicamente equivalente a proposição B, se as tabelas verdades dessas duas proposições forem identicas. A implicação lógica pode ser representado como $A \Leftrightarrow B$.

Exemplo:

Tabela 2: Tabela Verdade da expressão $p \to p \wedge q$, $p \to q$

P	Q	$p \wedge q$	$p \to p \wedge q$	$p \to q$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	0	1	1
0	0	0	1	1

Fonte: autoria própria.

Uma forma mais simples de verificar se uma proposição é equivalente logicamente em outra é dada pela definição: A é equivalente logicamente à proposição B se e somente se $A \leftrightarrow B$ for uma tautologia.

Exemplo:

$$p \to p \wedge q \Leftrightarrow p \to q$$

Tabela 3: Verdade da expressão $p \to p \wedge q \Leftrightarrow p \to q$

P	Q	$p \to p \wedge q$	$p \to q$	$p \to p \wedge q \leftrightarrow p \to q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Fonte: autoria própria.

Uma vez que a expressão $p \to p \wedge q \leftrightarrow p \to q$ é uma tautologia, logo podemos afirmar que $p \to p \wedge q \Leftrightarrow p \to q$. Ou seja, $p \to p \wedge q$ é equivalente a $p \to q$.

Fonte: VALBER (2015)

Fig. 03: Tirinha sobre verdade absoluta

Algumas equivalência famosas são:

- Leis Distributivas:

$$a \lor (b \land c) \Leftrightarrow (a \lor b) \land (a \lor c)$$

$$a \land (b \lor c) \Leftrightarrow (a \land b) \lor (a \land c)$$

- Leis da Negação:

$$\neg(\neg a) \Leftrightarrow a$$

$$\neg(a \rightarrow b) \Leftrightarrow a \land \neg b$$

$$\neg(a \leftrightarrow b) \Leftrightarrow (a \land \neg b) \lor (\neg a \land b)$$

- Leis de Morgan:

$$a \lor b \Leftrightarrow b \lor a$$

$$a \land b \Leftrightarrow b \land a$$

$$a \lor (b \lor c) \Leftrightarrow (a \lor b) \lor c$$

$$a \land (b \land c) \Leftrightarrow (a \land b) \land c$$

$$\neg(a \land b) \Leftrightarrow \neg a \lor \neg b$$

$$\neg(a \lor b) \Leftrightarrow \neg a \land \neg b$$

$$(a \lor b) \land b \Leftrightarrow b$$

$(a \wedge b) \vee b \Leftrightarrow b$

- Lei do Terceiro Excluído:

$a \vee \neg a$

- Lei da Contradição:

$\neg(a \wedge \neg a)$

- Lei da Contraposição:

$a \rightarrow b \Leftrightarrow \neg b \rightarrow \neg a$

- Lei da Exportação:

$(a \wedge b) \rightarrow c \Leftrightarrow a \rightarrow (b \rightarrow c)$

- Outras

$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p \Leftrightarrow \neg p \vee q \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$

$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$

$p \vee q \Leftrightarrow \neg p \rightarrow q$

Exemplos

(SGA/AC 2007/CESPE-UnB) As proposições A→B e (¬B) → (¬A) têm a mesma tabela verdade.

Resolução

Ao gerar as duas tabelas verdades é constatado que ambas são iguais, logo, são equivalentes.

(Agente Penitenciário SJDH-BA 2010/FCC) Uma afirmação equivalente à afirmação "Se bebo, então não dirijo" é

(A) Se não bebo, então não dirijo.

(B) Se não dirijo, então não bebo.

(C) Se não dirijo, então bebo.

(D) Se não bebo, então dirijo.

(E) Se dirijo, então não bebo.

Resolução

b: bebo, d:dirijo. Expressão b -> ¬d, a qual é equivalente: ¬b v ¬d e d -> ¬b (letra e) ao se fazer a tabela verdade.

Atividade de aprendizagem 2

Verifique as equivalências lógicas abaixo.

$$a \vee (b \wedge c) \Leftrightarrow (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

$$\neg(a \vee b) \Leftrightarrow \neg a \wedge \neg b$$

$$\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow \neg a \vee \neg b$$

Redução por Absurdo

Segundo Medeiros (1995), a prova por redução por absurdo tem como ideia básica que uma proposição não pode ser verdadeira se dela deduzirmos uma contradição: em outras palavras, demonstrar por redução ao absurdo o argumento é válido **se e somente se** a conjunção das premissas com a negação da conclusão é uma expressão contraditória, sendo a contradição uma expressão que afirma e nega algo ao mesmo tempo.

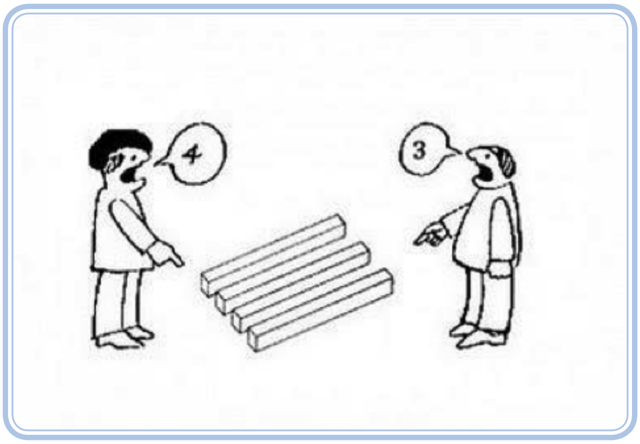
Em outras palavras, para verificar se uma **conclusão é verdadeira**, tentamos **provar que a mesma é falsa** através da redução por absurdo, a partir do seguinte pensamento: se ao tentarmos provar que a conclusão é falsa (ou seja, assumindo as premissas verdadeiras em conjunção com a negação da conclusão) **encontrarmos um absurdo**, falhamos em falsificar a expressão. Portanto, a **expressão é verdadeira**.

Exemplo: Se chover, então vou ficar molhado. Choveu, logo, fiquei molhado.

p: Chover

q: Ficar Molhado

$(p \rightarrow q) \ \Lambda \ p \Rightarrow p$



Fonte: http://www.barrett.com.au/blogs/SalesBlog/wp-content/uploads/2013/10/point-of-view.jpg

Fig. 04: Imagem ilustrando uma contradição ótica.

De acordo com a redução ao absurdo, se a **conjunção das premissas com a <u>negação da conclusão</u> possui alguma proposição que <u>afirma e nega algo ao mesmo tempo temos um absurdo</u>**, logo a expressão É VERDADEIRA.

Voltando ao nosso exemplo, temos:

- Premissas: $(p \rightarrow q) \land p$
- Conclusão: p
- $(p \rightarrow q) \land p \land \neg p$

Como podemos notar, no passo 3 temos na mesma fórmula p e ¬p. Portanto, há uma proposição que afirma e nega ao mesmo tempo, logo, **encontramos um absurdo**, concluindo então que a **expressão é verdadeira**, pois **tentamos falsificar e não conseguimos**.

Podemos ter um olhar sobre a redução por absurdo utilizando a função de valoração. Tomemos o mesmo exemplo $(p \rightarrow q) \land p \Rightarrow p$, o qual queremos comprovar se é uma conclusão logicamente válida. Pela redução por absurdo, como visto acima, temos:

1. $(p \rightarrow q) \land p \land \neg p$

E queremos comprovar se a expressão é válida, ou seja, utilizando a função de valoração temos:

1. $V((p \rightarrow q) \land p \land \neg p)=1$

Como visto na aula 2 do nosso curso, temos que para a conjunção ser verdadeira, todas as subfórmulas são verdadeiras:

2. $V(p \rightarrow q)=1$
3. $V(p)=1$
4. $V(\neg p)=1$

Com o passo 3 e 4 chegamos claramente em um absurdo, logo, não conseguimos falsificar a expressão. Portanto, a expressão é verdadeira.

Nem sempre o absurdo acontece entre as premissas. Há casos em que há a necessidade de um maior desdobramento na fórmula para encontrarmos o absurdo. Veja o exemplo abaixo.

Exemplo: Se chover então vai ficar nublado hoje. Se ficar nublado hoje não vou à praia. Portanto, se chover hoje eu não vou à praia.

Formalizando temos:

c: chover hoje

n: nublado hoje

p: ir a praia hoje

premissas: $(c \rightarrow n) \land (n \rightarrow p)$

conclusão: $c \rightarrow p$

Pela redução ao absurdo temos:

$V((c \rightarrow n) \land (n \rightarrow p) \land \neg(c \rightarrow p))=1$

Pela regra da conjunção temos:

$V(c \rightarrow n)=1$

$V(n \rightarrow p)=1$

$V(\neg(c \rightarrow p))=1$

A partir de 4 e pela regra da negação, temos:

$V(c \rightarrow p)=0$

Para falsificar uma implicação (5), temos:

V(c)=1

V(p)=0

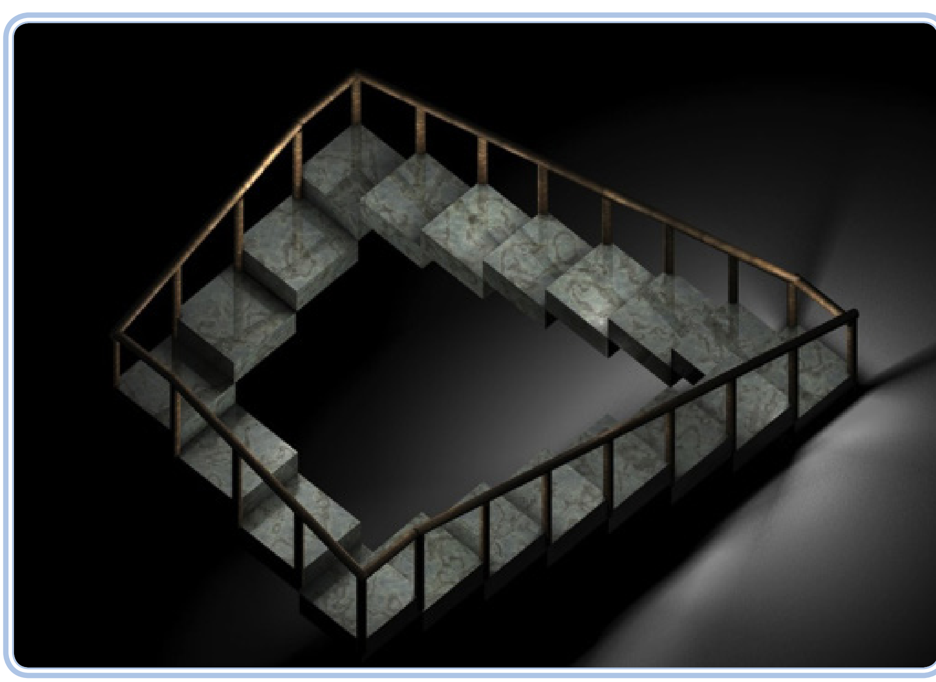
Do passo (7) e do passo (3) afirma-se que o valor de p é falso e a implicação n→p é verdadeira, para isso acontecer, necessariamente pela tabela verdade da implicação, o antecessor tem que ser falso, logo:

V(n)=0

Do passo (8) e do passo (2) e utilizando a Tabela Verdade da implicação, temos:

V(c)=0

Do passo (6) e do passo (9) encontramos um absurdo, ou seja, tentamos falsificar a expressão, não conseguimos, logo, a afirmação é verdadeira. Percebam que para encontrar o absurdo houve a necessidade de um maior desdobramento. Entretanto, não foi necessário a construção de toda a tabela verdade ($2^3 = 8$ linhas). Essa é a grande vantagem do uso da técnica de redução por absurdo.



Fonte: http://www.barrett.com.au/blogs/SalesBlog/wp-content/uploads/2013/10/point-of-view.jpg

Fig. 05: Imagem ilustrando uma contradição ótica

E, caso não encontrarmos o absurdo, o que deve ser feito? Nesse caso, nós encontramos o **contraexemplo**. Contraexemplo é um **conjunto de valorações para as proposições** que consegue **falsificar a expressão**, ou seja, é uma linha na Tabela Verdade a qual a conjunção das premissas com a negão da conclusão é verdadeiro. Quando encontramos o contraexemplo significa que conseguimos **falsificar a expressão**, logo, **a conclusão é falsa**. Veja o exemplo abaixo:

Se o sol aparecer então eu vou à praia. Eu fui à praia. Portanto, o sol apareceu.

s: sol aparecer

p: ir à praia

Premissas: $(s \rightarrow p) \land p$

Conclusão: s

Utilizando a técnica de redução ao absurdo, temos:

1. $V((s \rightarrow p) \land p \land \neg s)=1$

Pela regra da conjunção, temos:

2. $V(s \rightarrow p)=1$

3. $V(p)=1$

4. $V(\neg s)=1$

Do passo (4) e pela regra da negação, temos:

5. $V(s)=0$

Percebam que se substituirmos os valores encontrados nos átomos (passo 5 e passo 3) em todas as fórmulas (por exemplo na implicação do passo 2) **não** encontramos **nenhum absurdo**. Portanto, **encontramos um contra-exemplo**, ou seja, um conjunto de valores para os átomos da expressão, o qual consegue falsificá-la. Uma vez que **conseguimos falsificar** a expressão, então a mesma **não é verdadeira**.

Nosso contraexemplo para o problema acima então é: V(s)=0 e V(p)=1

Algumas dicas para uso da redução ao absurdo:

- Inicie realizando as valorações dos átomos que estiverem soltos na fórmula e suas negações.

Exemplo: V($(p \rightarrow q) \wedge p \wedge \neg p$)=1, então valorar as proposições mais simples temos:

V(p)=1

V(¬p)=1

- Dê preferência em desenvolver as fórmulas que apresentam apenas uma única linha na Tabela Verdade.

Exemplo: V($(c \rightarrow n) \wedge (n \rightarrow p) \wedge \neg(c \rightarrow p)$)=1 , temos as seguintes fórmulas para analisar:

V(c→n)=1

V(n→p)=1

V(¬(c→p))=1

A fórmula acima, devido a negação, pode ser representada como: V(c→p)=

Resgatando a Tabela Verdade da implicação, temos:

Tabela 4 – Tabela Verdade

p	q	p→q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Fonte: autoria própria.

Dessa forma, há três resultados possíveis para implicação ser verdadeira e apenas um único resultado para falsificar a implicação. Portanto, deve-se desenvolver o resultado a partir da falsificação da implicação. Como visto na aula 2, os outros casos em que há apenas uma única linha na tabela verdade são:

- Falsificar a disjunção (ou);
- A Conjunção (e) ser verdadeira.

RESUMINDO

Na nossa última aula do curso sobre Fundamentos de Lógica aprendemos sobre os conceitos de Implicação e Equivalência Lógica e como podemos utilizá-los para realizar interpretações de textos na linguagem natural. Também aprendemos uma importante técnica chamada Redução por Absurdo, a qual evita utilizar tabelas verdades a fim de verificar se uma conclusão lógica é válida ou não.

LEITURAS COMPLEMENTARES

Está empolgado sobre como verificar se conclusões são logicamente válidas ou não? Um texto bastante interessante diz respeito às histórias dos cavaleiros e cavilosos, o qual conta várias historinhas lógicas que vai enrolar sua cabeça. Entretanto, utilizando as técnicas que aprendemos nesta aula, você conseguirá resolver e brincar com seus amigos. O livro foi escrito por Raymond Smullyan e traduzido pelo prof. João Marcos de Almeida.

SMULLYAN, R. **A lógica de contar mentiras e verdades.**[200-?]. (Tradução não oficial de João Marcos de Almeida). Disponível em: <https://www.dimap.ufrn.br/~jmarcos/courses/LAaC/Trad-LCP/Smullyan_Cap3-7.pdf>. Acesso em: 13 abr. 2015.

AVALIANDO SEUS CONHECIMENTOS

Através da técnica de redução por absurdo, verifique se as conclusões estão logicamente corretas.

a) Se estudar bastante (E) e fizer todos os exercícios (F) então sou um bom aluno (B), se eu for um bom aluno então vou ter um resultado bom na prova (P). Eu estudei bastante e fiz todos os exercícios. Portanto, eu vou ter um bom resultado na prova.

b) Os meus deveres diários são estudar (E) e ou eu brinco com meus brinquedos (B) ou eu brinco com meus amigos (A). Portanto, todo dia ou estudo e brinco com meus brinquedos ou eu estudo e brinco com meus amigos.

c) Há três suspeitos de um crime: o cozinheiro, a governanta e o mordomo. Sabe-se que o crime foi efetivamente cometido por um ou por mais de um deles, já que podem ter agido individualmente ou não. Sabe-se, ainda que:

(i) se o cozinheiro é inocente, então a governanta é culpada;

(ii) ou o mordomo é culpado ou a governanta é culpada, mas não os dois;

(iii) o mordomo não é inocente.

Portanto, é possível concluir que o cozinheiro é culpado?

d) Se dermos arsênico a Rasputin ele ficará gravemente doente ou morrerá. Se ele ficar gravemente doente, não poderá influenciar o Czar; e se ele morrer, obviamente também não poderá influenciar o Czar. Logo, se lhe dermos arsênico, ele não poderá influenciar o Czar.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. (EBSERH|IBFC, 2013) Se o valor lógico de uma proposição p é verdadeiro e o valor lógico de uma preposição q é falso, então o valor lógico da proposição composta $[(p \rightarrow q) \vee \neg p] \wedge \neg q$ é

a) falso e Verdadeiro.

b) verdadeiro.

c) falso.

d) inconclusivo.

2. (EBSERH|IBFC, 2013) Seja uma proposição p: Maria é estagiária e a proposição q: Marcos é estudante. A negação da frase "Maria é estagiária ou Marcos é estudante" é equivalente a

a) Maria não é estagiária ou Marcos não é estudante.

b) Se Maria não é estagiária, então Marcos não é estudante.

c) Maria não é estagiária, se e somente se, Marcos não é estudante.

d) Maria não é estagiária e Marcos não é estudante.

3. (EBSERH|IBFC, 2013) Sejam as afirmações:

a) Se o valor lógico de uma proposição p é falso e o valor lógico de uma proposição q é verdadeiro, então o valor lógico da conjunção entre p e q é verdadeiro.

b) Se todo X é Y, então todo Y é X.

c) Se uma proposição p implica numa proposição q, então a proposição q implica na proposição p.

- Pode se afirmar que são verdadeiras:

a) Todas.

b) Somente duas delas.

c) Somente uma delas.

d) Nenhuma.

4. Se houver fraude no concurso da prefeitura (F) ou se os bugueiros deixarem de operar na cidade (B), então o turismo vai diminuir (D) e a cidade vai sofrer (S). Se o turismo diminuir, então a polícia ficará mais contente (P). A polícia nunca está contente. Portanto, haverá fraude no concurso da prefeitura.

5. Em um júri popular, o advogado de defesa do Sr. X argumenta o seguinte: Se meu cliente fosse culpado, a faca estaria na gaveta. Ou a faca não estava na gaveta ou Rodrigo viu a faca. Se a faca não estava lá no dia 10 de outubro, então Rodrigo não viu a faca. Além disso, se a faca estava lá no dia 10 de outubro, então a faca estava na gaveta e o martelo estava no celeiro. Mas todos sabemos que o martelo não estava no celeiro. Portanto, senhoras e senhores, meu cliente é inocente. Pergunta-se: Sr. X é inocente?

CONHECENDO AS REFERÊNCIAS

BEDREGAL, B. R. **Introdução à Lógica Clássica para a Ciência da Computação**. 2007. Disponível em: <https://www.dimap.ufrn.br/~jmarcos/books/BA_Jul07.pdf>. Acesso em: 05 fev. 2015.

FAJARDO, R. A. **Introdução à Lógica**. [20--?]. Disponível em: <http://www.ime.usp.br/~fajardo/Logica.pdf>. Acesso em: 05 fev. 2015.

MEDEIROS, M. P. N. Aprova por redução ao absurdo na lógica clássica. **Princípios**, Natal, v. 2, n. 01, p. 120-125, jun. 1995. Disponível em: <http://www.periodicos.ufrn.br/principios/article/view/740/682>. Acesso em: 13 abr. 2015.

NOLT, J.; ROHATYN, D. **Lógica**. São Paulo: McGrall-Hall, 1991.