Dimensão global forte e complexidade na categoria derivada

Francisco Batista de Medeiros

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Eduardo do Nascimento Marcos

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu dispensa integral das atividades docentes pelo IFRN no período de 05/2013 a 12/2014

São Paulo, janeiro de 2015

Dimensão global forte e complexidade na categoria derivada

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 28/11/2014. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Eduardo do Nascimento Marcos (orientador) IME-USP
- Prof. Dr. Flávio Ulhoa Coelho IME-USP
- Prof. Dr. Marcelo A. Lanzillota Universidad de la Republica (Uruguai)
- Prof^a. Dr^a. Sônia Maria Fernandes UFV
- Prof. Dr. Hernán A. Giraldo Salazar Universidad de Antioquia (Colômbia)

Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao meu orientador, professor Eduardo, por sua paciência, insistência e confiança ao longo dos últimos anos, além, é claro, por seus valiosos ensinamentos.

Gostaria de agradecer também aos meus colegas, amigos e professores com quem convivi e que fazem parte desse momento da minha vida. Em especial, à Paula pelos comentários e sugestões que tornaram este trabalho melhor; e à Heily que fez uma leitura microscópica das inúmeras versões preliminares, todas do começo ao fim, colocando todos os pingos nos is. Às duas, pelo apoio e companheirismo.

Esta tese não teria sido criada e escrita sem o apoio do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte (IFRN). Como professor deste Instituto tive o privilégio de poder concentrar-me inteiramente a este trabalho intelectual.

Esta tese é dedicada à memória do meu pai, Francisco, como uma forma de tentar transmitir a minha mãe, Francisca, e aos demais membros da família, a gratidão que sinto pelo privilégio de nossa convivência.

Resumo

MEDEIROS, F. B. **Dimensão global forte e complexidade na categoria derivada**. 2014. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

Apresentamos neste trabalho uma definição de complexidade na categoria derivada de complexos (limitados superiormente) de módulos sobre uma k-álgebra de dimensão finita. Um dos resultados que conseguimos foi uma relação entre a complexidade de objetos indecomponíveis e a noção de dimensão global forte. Mais especificamente, mostramos que a existência de um objeto indecomponível em $\mathcal{D}^-(\text{mod }\Lambda)$ com complexidade não nula é condição suficiente para que Λ tenha dimensão global forte infinita. Também investigamos se existe uma relação entre as dimensões global e global forte da classe das álgebras shod ([CL99]). Fomos motivados pela caracterização da classe das álgebras quase inclinadas ([HRS96b]) em termos da sua dimensão global forte, dada por D. Happel e D. Zacharia em [HZ08], e pelo fato das álgebras shod serem uma generalização das álgebras quase inclinadas. Nossa conclusão foi que não existe, em geral, uma caracterização das álgebras shod em termos de sua dimensão global forte. Isto é, mostramos que para cada inteiro $d \geq 3$ existe uma álgebra shod estrita cuja dimensão global forte é igual a d.

Palavras-chave: complexidade, categoria derivada, dimensão global forte, álgebra shod.

Abstract

MEDEIROS, F. B. Strong global dimension and complexity in the derived category. 2014. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

We introduce in this thesis a definition of complexity in the derived category of bounded above complexes of modules over a finite dimensional k-algebra. One of our result shows a relationship between the complexity of indecomposable objects and the notion of strong global dimension. More specifically, we prove that the existence of an indecomposable object in $\mathcal{D}^-(\text{mod }\Lambda)$ whose complexity is not zero is a sufficient condition for Λ being of infinite strong global dimension. We also investigate the existence of a relationship between the global dimension and the strong global dimension of shod algebras ([CL99]). Our motivation came from characterization of quasitilted algebras ([HRS96b]) by its strong global dimension, given by D. Happel and D. Zacharia in [HZ08], and from the fact that shod algebras are a generalization of quasitilted algebras. Our conclusion was that there is not in general a characterization of shod algebras in terms of its strong global dimension. This conclusion comes from the fact that we showed that for each integer $d \geq 3$ there exists a strictly shod algebra whose strong global dimension is d.

Keywords: complexity, derived category, strong global dimension, shod algebra.

Sumário

Lista de Símbolos iz Introdução				
	1.1	Categorias e funtores	7	
	1.2	Categorias aditivas e abelianas	13	
	1.3	Categorias Krull-Schmidt	19	
	1.4	Álgebras de caminhos e representações	23	
	1.5	As categorias de complexos e de homotopia	27	
	1.6	Triângulos na categoria de homotopia	38	
	1.7	Categorias derivadas	42	
2	Complexidade na categoria derivada			
	2.1	Complexos homotopicamente minimal	46	
	2.2	Complexidade em $\mathcal{D}^-(\Lambda)$	49	
	2.3	Complexidade e triângulos	55	
	2.4	Complexidade e dimensão global forte	59	
3	Sobre a dimensão global forte de álgebras shod			
	3.1	Álgebras shod	71	
	3.2	Critério de Bautista-Liu	77	
	3.3	Diagramas escada	82	
	3.4	Dimensão global forte de álgebras shod	96	
4	Dimensão global forte e complexidade			
	4.1	Limite inverso na categoria de complexos	103	
	4.2	Exemplo	105	
\mathbf{R}	eferê	ncias Bibliográficas	111	
Ín	dice	Remissivo	115	

Lista de Símbolos

k	corpo
Λ	k-álgebra de dimensão finita
$\operatorname{mod} \Lambda$	categoria de Λ -módulos à direita finitamente gerados
${\mathcal P}$ ou proj Λ	subcategoria plena de mod Λ dos módulos projetivos
$\operatorname{ind} \Lambda$	subcategoria plena de mod Λ dos módulos indecomponíveis
$\operatorname{rad} M$	radical de Jacobson de um $\Lambda\text{-m\'odulo }M$
$\operatorname{pd} M$	dimensão projetiva de um $\Lambda\text{-m\'odulo}$ finitamente gerado M
$\operatorname{id} M$	dimensão injetiva de um $\Lambda\text{-m\'odulo}$ finitamente gerado M
$\operatorname{gl.dim} \Lambda$	dimensão global da álgebra Λ
$\operatorname{s.gl.dim} \Lambda$	dimensão global forte da álgebra Λ
$\beta_i(M)$	$i\text{-}\mathrm{\acute{e}simo}$ número de Betti de um $\Lambda\text{-}\mathrm{m\acute{o}dulo}$ finitamente gerado M
cx(M)	complexidade de um $\Lambda\text{-m\'odulo finitamente gerado }M$
$\mathcal{C}(\mathcal{A})$	categoria dos complexos sobre uma categoria aditiva \mathcal{A}
$\mathcal{C}^-(\mathcal{A})$	subcategoria plena de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ dos complexos limitados superiormente
$\mathcal{C}^b(\mathcal{A})$	subcategoria plena de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ dos complexos limitados
$\mathcal{K}(\mathcal{A})$	categoria de homotopia de complexos sobre uma categoria aditiva ${\mathcal A}$
$\mathcal{K}^-(\mathcal{A})$	categoria de homotopia de complexos limitados superiormente
$\mathcal{K}^b(\mathcal{A})$	categoria de homotopia de complexos limitados
$\mathcal{D}(\mathcal{A})$	categoria derivada de uma categoria abeliana \mathcal{A}
$\mathcal{D}^-(\mathcal{A})$	categoria derivada limitada superiormente de uma categoria abeliana ${\mathcal A}$
$\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$	categoria derivada limitada de uma categoria abeliana ${\mathcal A}$
C_f	cone de um morfismo de complexos f
$\beta_i(M^{\bullet})$	$i\text{-}\acute{\rm e}{\rm simo}$ número de Betti de um objeto M^{\bullet} de $\mathcal{K}^{-}(\mathcal{P})\cong\mathcal{D}^{-}(\mathrm{mod}\Lambda)$
$\operatorname{cx}(M^{\bullet})$	complexidade de um objeto M^{\bullet} de $\mathcal{K}^{-}(\mathcal{P}) \cong \mathcal{D}^{-}(\operatorname{mod}\Lambda)$

Introdução

Uma das motivações deste trabalho foi definir o conceito de complexidade na categoria derivada de uma álgebra. Primeiramente por que a noção de complexidade – aparentemente proposto em [Alp77] como uma forma de estudar o comportamento do crescimento dos termos de uma resolução projetiva minimal de um dado módulo finitamente gerado sobre uma álgebra de grupo – tem se mostrado, nos últimos anos, como uma interessante ferramenta para estudar características dos módulos em componentes do carcás de Auslander-Reiten de uma álgebra de Artin, em especial das álgebras de Artin autoinjetivas (vide, por exemplo, [GZ09, GZ11, KZ11, Pur12]). Vale salientar que o conceito de complexidade tem sido estudado em outras áreas da matemática (vide, por exemplo, [Car83, Avr89, Avr10, EHT⁺04]).

Segundo, por que a categoria derivada de uma álgebra tem se mostrado bastante útil em teoria de representações de álgebras (vide, por exemplo, [Hap91, HRS96b, Hap01]), principalmente depois de resultados de D. Happel em [Hap88]. Por exemplo, foi a partir de resultados deste trabalho que se deu uma caracterização das álgebras quase inclinadas em termos de categorias derivadas, que também foi dada por D. Happel em [Hap01] através de uma caracterização das categorias hereditárias abelianas com objetos inclinantes. Vale a pena lembrar que a introdução da noção de objeto inclinante numa categoria abeliana, dada em [HRS96b], tinha como objetivo encontrar um tratamento comum para a classe das álgebras inclinadas ([HR82]) e para a classe das álgebras canônicas ([Rin90]) e, segundo os autores, foi a busca por este tratamento comum que os levaram à definição de álgebra quase inclinada.

Diante deste contexo, já estávamos muito "próximos" da noção de álgebra hereditária por partes. Classe esta de álgebras definida inicialmente em [Hap88] como sendo aquelas álgebras cuja categoria derivada limitada é equivalente a categoria derivada limitada de uma álgebra hereditária de dimensão finita H, isto é, derivadamente equivalente a uma álgebra hereditária de dimensão finita. Neste mesmo trabalho, o autor caracterizou esta classe de álgebras como sendo as álgebras inclinadas iteradas ([AH81]), no caso de H ser do tipo de representação finito; e em [Hap87] no caso de H ser do tipo de representação manso. Em [HRS88], os autores estenderam este resultado sem levar em conta o tipo de representação de H. Finalmente, após os novos conceitos e ferramentas obtidos em [HRS96b], deu-se a seguinte nova definição para álgebra hereditária por partes.

Definição ([HRS96a]) Seja A uma álgebra de Artin. Dizemos que A é uma álgebra hereditária por partes, do tipo \mathcal{H} , se existe uma categoria abeliana hereditária \mathcal{H} e uma equivalência triangulada entre as categorias derivadas limitadas $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$ e $\mathcal{D}^b(\mathcal{H})$.

2 SUMÁRIO 0.0

Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado k ($k = \bar{k}$). D. Happel e I. Reiten provaram em [HR98] que se A é hereditária por partes do tipo \mathcal{H} , então \mathcal{H} tem objeto inclinante. Por outro lado, D. Happel mostrou em [Hap01] que existem apenas dois tipos de categorias que são derivadamente equivalentes a uma categoria abeliana hereditária com objeto inclinante. A saber, mod H, onde H é uma k-álgebra hereditária de dimensão finita, ou mod C, onde C é uma k-álgebra canônica de dimensão finita. Logo, a álgebra A é do tipo mod H ou do tipo mod C.

Foi a partir de uma caracterização homológica das álgebras hereditárias por partes, dada em [HZ08], que fomos levados a um dos temas deste trabalho. A saber, a dimensão global forte de uma álgebra.

Na década de 80, C. M. Ringel propôs considerar o supremo dos comprimentos dos complexos limitados indecomponíveis de módulos projetivos finitamente gerados (sobre uma álgebra de dimensão finita Λ). Esta noção foi denominada, a posteriori, dimensão global forte da álgebra Λ . Denotamos este invariante homológico de Λ por "s.gl.dim Λ ". A. Skowroński retomou este assunto em [Sko87], onde caracaterizou a classe das k-álgebras de dimensão global forte finita como sendo aquelas cuja álgebra repetitiva ([HW83]) é localmente de suporte finito ([DS85]), para k algebricamente fechado. No final deste trabalho, o autor sugere que seria interessante conhecer quando uma dada k-álgebra, de dimensão finita, tem dimensão global forte finita; e como a dimensão global forte depende da dimensão global. Mais tarde, O. Kerner, A. Skowroński, K. Yamagata e D. Zacharia, em [KSYZ04], responderam parcialmente a primeira questão. Eles mostraram que se Λ é uma k-álgebra de dimensão finita com rad $^2\Lambda = 0$, então Λ tem dimensão global forte finita se e somente se Λ é hereditária por partes (também para k algebricamente fechado). Finalmente, quatro anos mais tarde, D. Happel e D. Zacharia mostraram, em [HZ08], que esta caracterização também é verdadeira sem as hipóteses "rad $^2\Lambda = 0$ " e " $k = \bar{k}$ ".

Quanto a segunda questão, não parece que a dimensão global forte (finita) dependa da dimensão global, como sugere, por exemplo, [HZ10]-(2.8). A saber, os autores mostram que a álgebra $\Lambda = kQ/I$, onde Q é de tipo \mathbb{A}_n , para n ímpar, orientado linearmente,

$$Q = 1 \stackrel{\alpha_1}{\longleftarrow} 2 \stackrel{\alpha_2}{\longleftarrow} \cdots \stackrel{\alpha_{n-1}}{\longleftarrow} n$$

e $I = \langle \alpha_2 \alpha_1, \alpha_4 \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1} \alpha_{n-2} \rangle$, é hereditária por partes com gl.dim $\Lambda = 2$ e s.gl.dim $\Lambda = n-1$.

Ainda nestes dois trabalhos, D. Happel e D. Zacharia se propuseram, dentre outras coisas, a investigar a classe das álgebras hereditárias por partes cuja dimensão global coincide com a dimensão global forte. No primeiro deles, [HZ08], viram que as álgebras que têm dimensão global e dimensão global forte iguais a 1 são justamente as álgebras hereditárias não semisimples. Ainda nesta mesma direção, eles também obtiveram a seguinte caracterização para as álgebras quase inclinadas.

Teorema 1 ([HZ08], Prop. 3.3) Seja Λ uma k-álgebra de dimensão finita. As sequintes

0.0 Sumário 3

proposições são equivalentes:

(i) gl.dim $\Lambda = 2 = \text{s.gl.dim } \Lambda$.

No segundo trabalho, [HZ10], eles obtiveram o resultado seguinte, que de certa forma está relacionado com o teorema acima.

Teorema 2 ([HZ10], Cor. 2.12) Seja Λ uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado. Se Λ é hereditária por partes e

$$\operatorname{gl.dim} \Lambda = d = \operatorname{s.gl.dim} \Lambda,$$

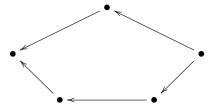
então pd
$$X + id X \leq d + 1$$
, para cada Λ -módulo indecomponível X .

Apesar da caracterização dada no teorema anterior não dizer muito sobre a classe das álgebras hereditárias por partes que têm dimensão global igual a dimensão global forte, vimos que esta caracaterização poderia servir como um "filtro" na hora de escolher uma classe de álgebras para estudar uma relação similar à dada no Teorema 1. Nossa ideia, inicialmente, foi estudar o caso d=3. Neste contexto, aparecem a classe das álgebras shod ([CL99]), não só por que generalizam as álgebras quase inclinadas, mas também por que uma álgebra shod Λ que não é quase inclinada (chamada de shod estrita) tem dimensão global igual a 3 e satisfaz

pd
$$X + id X \leq 3 + 1$$
, para cada Λ -módulo indecomponível X .

Juntando os fatos e as questões acima, foi natural pensarmos sobre a existência de um resultado semelhante ao Teorema 1 para a classe das álgebras *shod estritas*. Em caso negativo, poderíamos pensar se para esta classe de álgebras existiria pelo menos alguma relação entre as dimensões *global* e *global forte*, como proposto em [Sko87].

O primeiro passo, naturalmente, foi investigar se a classe das álgebras shod estritas estaria contida na classe das álgebras hereditárias por partes, ou seja, se toda álgebra shod estrita teria dimensão global forte finita. Porém, a k-álgebra kQ/I onde Q é o carcás



e I é o ideal de kQ gerado pelos caminhos de comprimento 2, é um exemplo de álgebra shod estrita que não é hereditária por partes (para detalhes, veja o Exemplo 3.4.2). Em particular, uma das implicações dada no Teorema 1 para o caso shod estrita não vale.

4 SUMÁRIO 0.0

Diante disto, passamos a investigar se o resultado seria válido acrescentando-se a hipótese "hereditária por partes" à classe das álgebras shod estritas. Porém, mais uma vez, encontramos um contraexemplo. A saber, a k-álgebra $\Lambda = kQ/I$ onde Q é o carcás

e I é o ideal de kQ gerado pelos caminhos de comprimento 2, é uma álgebra que satisfaz a igualdade

$$\operatorname{gl.dim} \Lambda = 3 = \operatorname{s.gl.dim} \Lambda$$

e que não é *shod* (estrita) – para detalhes, veja o Exemplo 3.4.3. Em particular, não vale uma das implicações do Teorema 1, para o caso *shod*, mesmo quando acrescentamos a hipótese "hereditária por partes".

A partir destes contraexemplos e de uma conversa com, à epoca, estudante de pósdoutorado do IME-USP, Heily Wagner, pensamos que um dos seus resultados do doutorado poderia ser um caminho para determinar um limitante para a dimensão global forte da classe das álgebras shod estritas (hereditárias por partes). A saber, nossa ideia seria usar o Teorema 1 juntamente com o fato de que toda álgebra shod estrita poder ser escrita como um tipo especial de pullback de álgebras $A \to B$ e $C \to B$, onde as álgebras A e C são quase inclinadas ([CW]). O resultado principal do Capítulo 3 mostra que tal limitante também não existe. Isto é, mostramos que para cada inteiro $d \ge 3$, existe uma álgebra shod estrita cuja dimensão global forte é igual a d (vide Teorema 3.4.4). Na prova deste resultado, usamos: uma caracterização das álgebras shod strings, dada por J. Bélanger e C. Tosar ([BT05]); um resultado de R. Bautista e S. Liu que determina um limitante para a dimensão global forte de uma classe especial de álgebras hereditárias por partes ([BL13]); e a noção de diagramas escada, defina neste trabalho em 3.3.5. Desses diagramas e de um resultado de [HZ08] foi possível construir complexos indecomponíveis a partir do cone de certos morfismos na categoria de homotopia de complexos.

Voltemos a primeira motivação deste trabalho: definir o conceito de complexidade na categoria derivada. O que foi feito no **Capítulo 2**. Inicialmente, definimos a sequência dos números de Betti de um objeto da categoria de homotopia de complexos limitados superiormente. Daí, para definir a sequência de Betti de um objeto da categoria derivada limitada superiormente usamos a bem conhecida equivalência (triangulada) entre $\mathcal{D}^-(\text{mod }\Lambda)$ e $\mathcal{K}^-(\text{proj }\Lambda)$, onde Λ é uma k-álgebra de dimensão finita e proj Λ é a subcategoria plena de mod Λ dos módulos projetivos. Aqui, a noção de complexo radical fez o papel da noção de resolução projetiva minimal, que é usada para definir a sequência de Betti de um módulo. E, naturalmente, definimos a complexidade de um objeto da categoria derivada como sendo a complexidade da sequência dos números de Betti deste objeto.

Para que a sequência de Betti de um dado objeto de $\mathcal{K}^-(\text{proj }\Lambda)$ estivesse bem definida, precisamos de alguns resultados de [Kra05]. Mais especificamente, do resultado que garante que todo complexo cujas componentes são módulos projetivos finitamente gerados pode ser escrito como uma soma direta de um complexo homotopicamente minimal com um complexo

0.0 Sumário 5

homotopicamente nulo; e que, além disso, o somando homotopicamente minimal é unicamente determinado, a menos de isomorfismos (vide Teorema 2.1.6). Neste contexto, mostramos que a noção de complexo homotopicamente minimal é equivalente ao conceito de complexo radical e isso nos permitiu definir a sequência dos números de Betti de um objeto de $\mathcal{K}^-(\operatorname{proj}\Lambda)$ através de seu somando radical.

Ainda no Capítulo 2, mostramos que nossa definição de complexidade estende a noção de complexidade na categoria de módulos e que algumas propriedades de complexidade de módulos podem ser reproduzidas em objetos da categoria derivada. Além disso, vimos que a existência de objetos indecomponíveis de $\mathcal{D}^-(\Lambda)$ com complexidade não nula está relacionada com a dimensão global forte de Λ . Mais especificamente, mostramos no Teorema 2.4.13 que se existe um objeto indecomponível em $\mathcal{D}^-(\Lambda)$ cuja complexidade é maior ou igual a 1, então Λ tem dimensão global forte infinita. Acreditamos que vale a recíproca deste resultado, pelo menos para o caso em que rad $^2\Lambda=0$. Esta discussão é tratada somente no Capítulo 4, devido a necessidade de algumas ferramentas utilizadas no Capítulo 3, tais como o critério de Bautista-Liu (Teorema 3.2.5) e a noção de diagramas escada (Definição 3.3.5). Outro resultado, do Capítulo 4, que gostaríamos de destacar é o Teorema 4.2.2, que dá condições sobre o carcás ordinário de uma álgebra Λ , com rad $^2\Lambda=0$, para que ela seja hereditária por partes. Tal teorema complementa, portanto, o critério de Bautista-Liu.

Como de praxe, reservamos o capítulo inicial para apresentar ao leitor um resumo dos principais conceitos utilizados ao longo dos capítulos seguintes. A saber, categorias e funtores; categorias aditivas, abelianas e Krull-Schmidt; categoria de complexos, categoria de homotopia de complexos e categorias derivadas. Para o leitor familiarizado com estes conceitos, o Capítulo 1 pode ser evitado sem maiores prejuízos.

Assumimos conhecidos os conceitos e propriedades da categoria de módulos sobre um anel associativo com unidade e, em especial, sobre uma k-álgebra, onde k é um corpo. Sobre estes temas, indicamos como referência os livros "Rings and categories of modules", [AF92]; Algèbres et modules: Cours et exercices", [Ass97]; "Representation theory of Artin algebras", [ARS97]; e "Elements of the representation theory of associative algebras, vol. 1", [ASS06].

Antes de encerrar é importante salientar que todas as álgebras consideradas neste trabalho, a menos de menção em contrário, são álgebras associativas com unidade e de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado k, mesmo tendo consciência de que muitos dos conceitos e resultados, aqui apresentados, valem num contexto mais geral. Para denotá-las, escolhemos a décima primeira letra do alfabeto grego, Λ .

6 SUMÁRIO 0.0

Capítulo 1

Conceitos básicos

Apresentaremos neste capítulo uma compilação dos conceitos de categorias e funtores; categorias aditivas, abelianas e Krull-Schmidt; categoria de complexos, categoria de homotopia de complexos e categorias derivadas.

Como enfatizado na Introdução, todas as álgebras consideradas neste trabalho, a menos de mensão em contrário, são álgebras associativas com unidade e de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado k. Resevamos a letra grega " Λ " para tais álgebras. Além disso, denotamos por $\operatorname{Mod} \Lambda$ a categoria dos Λ -módulos à direita; por $\operatorname{mod} \Lambda$ a subcategoria plena de $\operatorname{Mod} \Lambda$ cujos objetos são os Λ -módulos finitamente gerados; por $\operatorname{proj} \Lambda$, ou simplesmente por \mathcal{P} , a subcategoria plena de $\operatorname{mod} \Lambda$ cujos objetos são Λ -módulos projetivos; por $\operatorname{ind} \Lambda$ a subcategoria plena de $\operatorname{mod} \Lambda$ cujos objetos são Λ -módulos indecomponíveis; e por $\operatorname{rad} M$ o radical de Jacobson de $M \in \operatorname{Mod} \Lambda$. Finalmente, quando mencionarmos " Λ -módulo" estará subentendido, a menos de menção em contrário, que se trata de um módulo finitamente gerado à direita sobre uma k-álgebra de dimensão finita Λ , onde escreveremos, algumas vezes, simplesmente $M \in \operatorname{mod} \Lambda$.

1.1 Categorias e funtores

Apresentamos nesta seção o conceito de uma categoria e definimos as noções de monomorfismo, epimorfismo, seção, retração e isomorfismo em uma categoria qualquer. As definições de pullback, pushout e soma direta, bem conhecidas na categoria de módulos, também serão apresentadas para uma categoria arbitrária. Os conceitos de funtor e equivalência de categorias também serão abordados nesta seção.

Categorias e subcategorias

Definição 1.1.1 Uma categoria C é dada por uma classe Ob C, cujos elementos são chamados de objetos de C, uma classe Hom C, cujo elementos são chamados de morfismos de C, e uma operação parcial binária \circ definida em Hom C, tais que:

(a) a cada par ordenado de objetos $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$, associamos um conjunto $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ tal que:

- $\operatorname{Hom} \mathcal{C} = \bigcup_{X,Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{C} \times \operatorname{Ob} \mathcal{C}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y); e$
- $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,U)$ se e somente se X = Z e Y = U.
- (b) para cada tripla ordenada de objetos $X, Y, Z \in Ob(\mathcal{C})$, a operação

$$\circ : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z), \ (g, f) \mapsto g \circ f,$$

(chamada de composição de f e g), está definida e tem as duas seguintes propriedades:

- $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, para toda tripla de morfismos $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y), g \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z), h \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,U)$; e
- para cada $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ existe um elemento $1_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$, chamado morfismo identidade de X, tal que se $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ e $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,X)$, então $f \circ 1_X = f$ e $1_X \circ g = g$.

Notações: Escreveremos, algumas vezes,

- $X \in \mathcal{C}$ ao invés de $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$;
- $\operatorname{Hom}(X,Y)$ ao invés de $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, quando não houver dúvidas sobre a categoria em questão;
- $f: X \to Y$ ou $X \xrightarrow{f} Y$ ao invés de $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, e diremos que f é um morfismo de X em Y ou que f é um morfismo com dominio X e codominio Y; e
- \bullet que um diagrama na categoria $\mathcal C$ da forma

$$X \xrightarrow{f} Y$$

$$\downarrow g$$

$$Z \xrightarrow{l} U$$

é comutativo para dizer que são iguais as composições de morfismos $g \circ f$ e $l \circ h$.

Definição 1.1.2 Dizemos que uma categoria \mathcal{C}' é uma subcategoria da categoria \mathcal{C} se todo objeto de \mathcal{C}' é um objeto de \mathcal{C} , se todo morfismo em \mathcal{C}' é um morfismo em \mathcal{C} , se a composição é a mesma em \mathcal{C}' e \mathcal{C} e se o morfismo identidade $1_X' \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}'}(X,X)$ coincide com o morfismo identidade $1_X \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$, para todo objeto $X \in \mathcal{C}'$.

Assim, se X e Y são dois objetos de \mathcal{C}' , então

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}'}(X,Y) \subseteq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y).$$

Se esta inclusão é uma igualdade para todo $X,Y\in\mathcal{C}'$, dizemos que \mathcal{C}' é uma subcategoria plena de \mathcal{C} .

Objetos e morfismos especiais

Definição 1.1.3 Sejam C uma categoria e $f: X \to Y$ um morfismo de C. Chamaremos o morfismo f de:

- (a) um endomorfismo $de\ X\ quando\ X = Y$.
- (b) um monomorfismo se $f \circ u = f \circ v$ implica que u = v, para todo par de morfirmos u, v com codomínio X. Em diagrama:

$$U \xrightarrow{u} X \xrightarrow{f} Y \qquad \Longrightarrow \qquad u = v$$

(c) um epimorfismo se $u \circ f = v \circ f$ implica que u = v, para todo par de morfirmos u, v com domínio Y. Em diagrama:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{u} V \longrightarrow u = v$$

(d) uma retração se existe um morfismo $f' \colon Y \to X$ tal que $f \circ f' = 1_Y$. Em diagrama:

$$X \xrightarrow{f'} Y$$

$$X \xrightarrow{f} Y$$

(e) uma seção se existe um morfismo $f'': Y \to X$ tal que $f'' \circ f = 1_X$. Em diagrama:

(f) um isomorfismo se f é uma retração e uma seção. Neste caso, dizemos que X é isomorfo a Y e escrevemos $X \cong Y$. Em diagrama:

$$X \xrightarrow{f' \quad f' \quad Y} X \xrightarrow{f' \quad f'' \quad Y} X$$

Da comutatividade do diagrama acima, temos que

$$f' = 1_X \circ f' = f'' \circ 1_Y = f''.$$

Neste caso, chamaremos f' = f'' de inversa de f e a denotaremos por f^{-1} .

Listamos na proposição seguinte uma série de resultados que envolvem os morfismos que definimos acima.

Proposição 1.1.4 Sejam $f: X \to Y$ e $g: Y \to Z$ dois morfismos da categoria C.

- (a) Se f é uma retração, então f é um epimorfismo.
- (b) Se f é uma seção, então f é um monomorfismo.
- (c) Se f e g são monomorfismos (respectivamente, epimorfismos), então a composta $g \circ f$ também é um monomorfismo (respectivamente, epimorfismo).
- (d) Se f e g são retrações (respectivamente, seções), então a composta $g \circ f$ também é uma retração (respectivamente, seção).
- (e) Se a composta $g \circ f$ é um isomorfismo, então g é um retração e f é uma seção. \Box

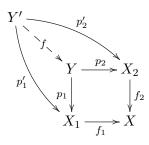
Definição 1.1.5 (a) Dados dois morfismos $X_1 \xrightarrow{f_1} X \xleftarrow{f_2} X_2$ em uma categoria C, diremos que o diagrama comutativo

$$Y \xrightarrow{p_2} X_2$$

$$\downarrow p_1 \downarrow \qquad \qquad \downarrow f_2$$

$$X_1 \xrightarrow{f_1} X$$

é um pullback de f_1 e f_2 se satisfaz a seguinte propriedade universal: para todo par de morfismos $p'_1: Y' \to X_1$ e $p'_2: Y' \to X_2$ tais que $f_1 \circ p'_1 = f_2 \circ p'_2$, existe único morfismo $f: Y' \to Y$ tal que $p'_1 = p_1 \circ f$ e $p'_2 = p_2 \circ f$. Isto é, o diagrama seguinte é comutativo.



(b) Dados dois morfismos $X_1 \stackrel{f_1}{\longleftarrow} X \stackrel{f_2}{\longrightarrow} X_2$ em uma categoria C, diremos que o diagrama comutativo

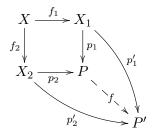
$$X \xrightarrow{f_1} X_1$$

$$f_2 \downarrow \qquad \qquad \downarrow p_1$$

$$X_2 \xrightarrow{p_2} P$$

é um pushout de f_1 e f_2 se satisfaz a seguinte propriedade universal: para todo par de morfismos $p'_1: X_1 \to P'$ e $p'_2: X_2 \to P'$ tais que $p'_1 \circ f_1 = p'_2 \circ f_2$, existe único morfismo

 $f \colon P \to P'$ tal que $p_1' = f \circ p_1$ e $p_2' = f \circ p_2$. Isto é, o diagrama seguinte é comutativo.



Caso exista o pullback de dois morfismos em C, ele é único no seguinte sentido:

Lema 1.1.6 *Seja*

$$P \xrightarrow{p_2} X_2$$

$$\downarrow^{p_1} \qquad \qquad \downarrow^{f_2}$$

$$X_1 \xrightarrow{f_1} X$$

um pullback dos morfismos f_1 e f_2 . Se o diagrama seguinte

$$P' \xrightarrow{p_2'} X_2$$

$$\downarrow f_2$$

$$X_1 \xrightarrow{f_1} X$$

também é um pullback de f_1 e f_2 , então existe um único isomorfismo $f \colon P \to P'$ tal que $p_1 = p'_1 \circ f \ e \ p_2 = p'_2 \circ f.$

Analogamente ao lema acima para um diagrama pullback, tem-se que se existe o pushout de dois morfismos em C, ele é único a menos de isomorfismos.

Funtores

Definição 1.1.7 Sejam C e C' duas categorias. Um funtor covariante $F: C \to C'$ consiste:

- (a) de uma aplicação que associa a cada objeto X de C um objeto F(X) de C'; e
- (b) para cada par ordenado de objetos $X, Y \in \mathcal{C}$, de uma aplicação

$$F_{X,Y} : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X),F(Y)),$$

tal que

- $F_{X,X}(1_X) = 1_{F(X)}$.
- $F_{X,Z}(g \circ f) = F_{X,Y}(g) \circ F_{Y,Z}(f)$, para cada par de morfismos $X \xrightarrow{f} Y$ e $Y \xrightarrow{g} Z$ $em \ C.$

Quando não houver perigo de confusão, denotaremos $F_{X,Y}(g)$ simplesmente por F(g).

Exemplo 1.1.8 (a) Seja \mathcal{C}' uma subcategoria de \mathcal{C} . Existe um funtor natural, chamado de inclusão, $J \colon \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ definido para cada objeto $X \in \mathcal{C}'$ por J(X) := X e para cada morfismo f de \mathcal{C}' por J(f) := f. Se $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$, o funtor inclusão é chamado funtor identidade e denotado por $1_{\mathcal{C}} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$.

(b) Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ e \mathcal{C}'' três categorias e $F: \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ e $G: \mathcal{C}' \to \mathcal{C}''$ dois funtores. O funtor composição $G \circ F$ de \mathcal{C} em \mathcal{C}'' é definido por $(G \circ F)(X) := G(F(X))$, para todo objeto $X \in \mathcal{C}$, e $(G \circ F)(f) := G(F(f))$, para todo morfismo f em \mathcal{C} .

Lema 1.1.9 Sejam $F: \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ um funtor $e \ f$ um morfismo em \mathcal{C} .

- (a) Se f é uma retração em C, então F(f) é uma retração em C'.
- (b) Se f é uma seção em C, então F(f) é uma seção em C'.

Definição 1.1.10 Sejam $F, G: \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ dois funtores. Definimos um morfismo funtorial ou uma transformação natural $\Psi: F \to G$, de F em G, como sendo uma classe de morfismos em \mathcal{C}'

$$\Psi_X \colon F(X) \to G(X), \quad X \in \mathcal{C},$$

tal que para todo morfismo $f: X \to Y$ em C, o diagrama seguinte é comutativo.

$$F(X) \xrightarrow{\Psi_X} G(X)$$

$$F(f) \downarrow \qquad \qquad \downarrow G(f)$$

$$F(Y) \xrightarrow{\Psi_Y} G(Y)$$

Sejam $F, G, H: \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ três funtores e $\Psi: F \to G$ e $\Phi: G \to H$ dois morfismos funtoriais. O morfismo funtorial composição $\Phi \circ \Psi: F \to H$ é definido por

$$(\Phi \circ \Psi)_X := \Phi_X \circ \Psi_X,$$

para todo objeto $X \in \mathcal{C}$. Para todo funtor $F: \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, definimos o morfismo funtorial identidade $1_F: F \to F$ por $(1_F)_X := 1_{F(X)}$.

Sejam $F, G: \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ dois funtores e $\Psi: F \to G$ um morfismo funtorial. Dizemos que Ψ é um isomorfismo funtorial se para cada objeto $X \in \mathcal{C}$, Ψ_X é um isomorfismo em \mathcal{C}' . Vemos, então, facilmente que os morfismos Ψ_X^{-1} definem um morfismo funtorial de G em F, o qual denotamos por $\Psi^{-1}: G \to F$ e o chamamos de inversa de Ψ . Logo, $\Psi: F \to G$ é um isomorfismo funtorial se e somente se existe um morfismo funtorial $\Phi: G \to F$ tal que $\Psi \circ \Phi = 1_G$ e $\Phi \circ \Psi = 1_F$.

Definição 1.1.11 Duas categorias C e C' são ditas equivalentes se existe dois funtores $F: C \to C'$ e $G: C' \to C$ e dois isomorfismos funtoriais $F \circ G \xrightarrow{\simeq} 1_{C'}$ e $G \circ F \xrightarrow{\simeq} 1_{C}$.

Neste caso, os funtores F e G são chamados equivalências e G é chamado um quase inverso do funtor F.

Existe um critério bem conhecido que permite dizer quando duas categorias \mathcal{C} e \mathcal{C}' são equivalentes. Para tanto, precisamos das definições seguintes: dizemos que um funtor F de \mathcal{C} em \mathcal{C}' é denso quando para cada objeto $Y \in \mathcal{C}'$, existe um objeto $X \in \mathcal{C}$ e um isomorfismo $F(X) \xrightarrow{\simeq} Y$ em \mathcal{C}' ; é fiel quando a aplicação $F_{X,Y}$ é injetora, para todo par de objetos $X, Y \in \mathcal{C}$; e é pleno quando a aplicação $F_{X,Y}$ é sobrejetora, para todo par de objetos $X, Y \in \mathcal{C}$.

Teorema 1.1.12 Sejam C e C' duas categorias. Um funtor $F: C \to C'$ é uma equivalência se e somente se F é fiel, pleno e denso.

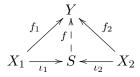
Prova. Veja, por exemplo, Teorema 2.5 do Apêndice A de [ASS06]. □

1.2 Categorias aditivas e abelianas

Apresentamos nesta seção os conceitos de categoria aditiva e categoria abeliana, além de objetos e morfismos especiais destas classes de categorias. Dentre os quais, veremos as definições de morfismo idempotente e objeto indecomponível, assim como alguns resultados que relacionam estes conceitos entre si e com as noções de núcleo e conúcleo. Alguns dos resultados e notações podem ser encontrados em, por exemplo, "Abelian categories with applications to rings and modules", [Pop73].

Soma direta, núcleo e conúcleo

Definição 1.2.1 Seja C um categoria e considere X_1 e X_2 dois objetos de C. Uma soma direta (ou um coproduto) de X_1 e X_2 em C é um objeto S junto com morfismos $\iota_1 \colon X_1 \to S$ e $\iota_2 \colon X_2 \to S$ satisfazendo a seguinte propriedade universal: para todo $Y \in C$ e morfismos $f_1 \colon X_1 \to Y$ e $f_2 \colon X_2 \to Y$, existe um único morfismo $f \colon S \to Y$ fazendo o seguinte diagrama comutativo.



Note que se a soma direta de dois objetos existe, ela é única, a menos de isomorfismos. Neste caso, denotaremos por $\{\iota_1\colon X_1\to X_1\oplus X_2, \iota_2\colon X_2\to X_1\oplus X_2\}$ a uma destas somas direta; cada $\iota_i\colon X_i\to X_1\oplus X_2$ será chamado de *inclusão canônica*; e dados $f_1\colon X_1\to Y$ e $f_2\colon X_2\to Y$, denotaremos por

$$f = (f_1 \ f_2) \colon X_1 \oplus X_2 \longrightarrow Y$$

o único morfismo f em C tal que $f \circ \iota_i = f_i$, para i = 1, 2.

Definição 1.2.2 Um objeto 0 em uma categoria C é chamado de objeto zero em C se para cada $X \in C$, existe um único morfismo $f: 0 \to X$ e um único morfismo $g: X \to 0$. Neste caso, diremos que um morfismo $f: X \to Y$ é um morfismo zero se ele se fatora pelo objeto zero.

Note que se 0 e 0' são dois objetos zero da categoria \mathcal{C} , então $0 \cong 0'$. Além disso, se \mathcal{C} possui objeto zero, então cada conjunto $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ tem exatamente um morfismo zero, o qual será denotado, também, por 0.

Definição 1.2.3 Sejam C uma categoria com objeto zero $e f: X \to Y$ um morfismo em C.

- (i) Um núcleo de f é um objeto Nucf juntamente com um morfismo u: Nuc $f \to X$ satisfazendo as seguintes condições:
 - (a) $f \circ u = 0$; e
 - (b) para todo objeto Z de C e para todo morfismo $h: Z \to X$ tal que $f \circ h = 0$, existe um único morfismo $h': Z \to \operatorname{Nuc} f$ tal que $h = u \circ h'$.

Equivalentemente, um núcleo de f é dado pelo seguinte diagrama de pullback.

$$\begin{array}{c|c} \operatorname{Nuc} f & \longrightarrow 0 \\ \downarrow & \downarrow \\ X & \longrightarrow Y \end{array}$$

- (ii) Um conúcleo de f é um objeto Conucf juntamente com um morfismo $p: Y \to \text{Conuc} f$ satisfazendo as seguinte condições:
 - (a) $p \circ f = 0$; e
 - (b) para todo objeto Z de C e para todo morfismo $g\colon Y\to Z$ tal que $g\circ f=0$, existe um único morfismo $g'\colon \mathrm{Conuc} f\to Z$ tal que $g=g'\circ p$.

 $Equivalentemente, \ um \ conúcleo \ de \ f \ \'e \ dado \ pelo \ seguinte \ diagrama \ de \ pushout.$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow^p \\ 0 & \longrightarrow \text{Conuc} f \end{array}$$

Segue-se do Lema 1.1.6 (e de seu dual) que caso exista o núcleo (ou conúcleo) de um morfismo, ele é único a menos de isomorfismos. Além disso, o morfismo $u \colon \operatorname{Nuc} f \to X$ é um monomorfismo e o morfismo $p \colon Y \to \operatorname{Conuc} f$ é um epimorfismo.

$$\operatorname{Nuc} f \xrightarrow{u} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{p} \operatorname{Conuc} f$$

Categorias aditivas

Definição 1.2.4 Uma categoria \mathcal{C} é uma categoria aditiva se as seguintes condições são satisfeitas:

- (A1) existe soma direta em C para quaisquer $X, Y \in C$;
- (A2) C é uma categoria com objeto zero;
- (A3) para cada par de objetos $X, Y \in \mathcal{C}$, o conjunto $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ é munido de uma estrutura de grupo abeliano; e
- (A4) para cada tripla de objetos X,Y,Z de \mathcal{C} , a composição de morfismos em \mathcal{C}

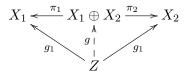
$$\circ : \operatorname{Hom}(Y, Z) \times \operatorname{Hom}(X, Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}(X, Z)$$

é bilinear, isto é, $(f+f') \circ g = f \circ g + f' \circ g$ e $f \circ (g+g') = f \circ g + f \circ g'$, para todo $f, f' \in \text{Hom}(Y, Z)$ e $g, g' \in \text{Hom}(X, Y)$.

Proposição 1.2.5 Sejam \mathcal{C} uma categoria aditiva e X_1 e X_2 dois objetos de \mathcal{C} . Então, o conjunto $\{\iota_1\colon X_1\to X_1\oplus X_2, \iota_2\colon X_2\to X_1\oplus X_2\}$ é uma soma direta em \mathcal{C} de X_1 e X_2 se e somente se existem dois morfismos $\pi_1\colon X_1\oplus X_2\to X_1$ e $\pi_2\colon X_1\oplus X_2\to X_2$, chamados de projeções canônicas associadas a ι_1 e ι_2 , tais que:

- (a) $\iota_1 \circ \pi_1 + \iota_2 \circ \pi_2 = 1_{X_1 \oplus X_2}$; e
- **(b)** $\pi_1 \circ \iota_2 = 0 = \pi_2 \circ \iota_1$.

Neste caso, dados dois morfismos $g_1 \colon Z \to X_1$ e $g_2 \colon Z \to X_2$, existe um único morfismo $g \colon Z \to X_1 \oplus X_2$ tornando o seguinte diagrama comutativo.



Dados dois morfismos $g_1\colon Z\to X_1$ e $g_2\colon Z\to X_2$ na categoria aditiva $\mathcal{C},$ denotaremos por

$$g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} : Z \longrightarrow X_1 \oplus X_2$$

o único morfismo g em \mathcal{C} tal que $\pi_i \circ g = g_i$, para i = 1, 2, onde cada $\pi_i \colon X_1 \oplus X_2 \to X_i$ é a projeção canônica.

Lema 1.2.6 Sejam C uma categoria aditiva e $f: X \to Y$ um morfismo em C com núcleo $u: \operatorname{Nuc} f \to X$ e conúcleo $p: Y \to \operatorname{Conuc} f$. Então,

- (a) $f \notin um \ monomorfismo \ se \ e \ somente \ se \ Nuc f = 0;$
- (b) $f \in um \ epimorfismo \ se \ e \ somente \ se \ Conuc f = 0.$

Exemplo 1.2.7 Seja R um anel associativo com 1.

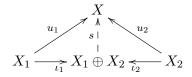
- (a) A categoria Mod R − cujos objetos são R-módulos à direita e, para cada par de objetos M, N ∈ Mod R, o conjunto de morfismos entre M e N é o conjunto de Hom_R(M, N) de todos os homomorfismos de R-módulos à direita − é aditiva. Também é aditiva a categoria mod R de todos os módulos finitamente gerados sobre R.
- (b) A subcategoria plena Proj R de Mod R, consistindo dos módulos projetivos sobre R, é uma categoria aditiva. Também é aditiva a subcategoria plena proj R de mod R, dos módulos projetivos finitamente gerados sobre R.

Daremos outros exemplos de categorias aditivas nas seções 1.5 e 1.7.

Objetos indecomponíveis e morfismos idempotentes

Definição 1.2.8 Seja C uma categoria qualquer. Dizemos que $X' \in C$ é um sub-objeto de $X \in C$ se existe um monomorfismo $u: X' \to X$. Neste caso, diremos que u é uma inclusão de X' em X.

Sejam \mathcal{C} uma categoria aditiva e X_1 e X_2 dois sub-objetos de X. Então existe um único morfismo $s: X_1 \oplus X_2 \to X$ fazendo o seguinte diagrama comutativo,



onde: (a) $\iota_i \colon X_i \to X_1 \oplus X_2$, i=1,2, são as inclusões canônicas; e (b) $u_i \colon X_i \to X$, i=1,2, são as inclusões de X_i em X. Chamaremos s de morfismo soma e diremos que X_1 e X_2 são suplementares quando $s \colon X_1 \oplus X_2 \to X$ for um isomorfismo. Neste caso, diremos que X_1 é um suplementar de X_2 , e vice-versa.

Proposição 1.2.9 Sejam C uma categoria aditiva e X_1 um sub-objeto de X. São equivalentes as seguinte condições:

- (a) X_1 tem um suplementar.
- (b) Existe um sub-objeto X₂ de X tal que o morfismo soma

$$s: X_1 \oplus X_2 \to X$$

é um isomorfismo.

(c) A inclusão de X_1 em X, $u_1: X_1 \to X$, é uma seção.

Um sub-objeto X_1 de X que verifica uma das condições da proposição acima é dito um somando direto de X.

Definição 1.2.10 Sejam C uma categoria qualquer $e \varphi: X \to X$ um endomorfismo em C. Dizemos que φ é idempotente se $\varphi^2 = \varphi$. E, se além disso, existe morfismos $p: X \to Y$ e $u: Y \to X$ tais que $u \circ p = \varphi$ e $p \circ u = 1_Y$, dizemos que φ é um idempotente que cinde.

Note que se $\varphi\colon X\to X$ é um endomorfismo tal que " $u\circ p=\varphi$ e $p\circ u=1_Y$ ", então φ é idempotente, pois

$$\varphi^2 = (u \circ p) \circ (u \circ p) = u \circ 1_Y \circ p = u \circ p = \varphi.$$

Lema 1.2.11 Sejam C uma categoria aditiva e $\varphi: X \to X$ um morfismo idempotente. Então:

- (a) $1_X \varphi$ é um morfismo idempotente.
- (b) φ cinde se e somente se o morfismo $1_X \varphi$ tem núcleo.
- (c) φ cinde se e somente se o morfismo $1_X \varphi$ tem conúcleo.
- (d) Se $u_1: X_1 \to X$ e $u_2: X_2 \to X$ são núcleos de $1_X \varphi$ e φ , respectivamente, então $X = X_1 \oplus X_2$, sendo u_1 e u_2 as inclusões canônicas.

Definição 1.2.12 Um objeto X de uma categoria aditiva \mathcal{C} é chamado indecomponível se X não é o objeto zero de \mathcal{C} e se de um isomorfismo da forma $X \cong X_1 \oplus X_2$ deduzimos que $X_1 = 0$ ou $X_2 = 0$.

Devida a importância da bem conhecida caracterização seguinte para objetos indecomponíveis, usada aqui principalmente nos exemplos, e da ausência de referências para uma prova – até onde podemos verificar –, achamos conveniente apresentar uma prova.

Proposição 1.2.13 Seja C uma categoria aditiva em que todo idempotente cinde e seja X um objeto de C. Então, X é indecompononível se e somente se 0 e 1_X são os únicos idempotentes de $\operatorname{End}(X)$.

Prova. (\Rightarrow) Suponha que X é indecomponível e seja $\varphi \in \operatorname{End}(X)$ um idempotente. Então, $1_X - \varphi$ também é idempotente por Lema 1.2.11-(a). Por hipótese, φ e $1_X - \varphi$ cindem. Segue de 1.2.11-(b) que $\varphi = 1_X - (1_X - \varphi)$ têm núcleo e de 1.2.11-(d) Nuc φ é um somando direto de X. Logo, como Xé indecomponível, Nuc $\varphi = X$ ou Nuc $\varphi = 0$. No primeiro caso, tem-se que $\varphi = 0$. No segundo caso, φ é um monomorfismo e, portanto, $\varphi \circ \varphi = \varphi = \varphi \circ 1_X$ implica que $\varphi = 1_X$.

(\Leftarrow) Suponha que 0 e 1_X são os únicos idempotentes de $\operatorname{End}(X)$ e seja X_1 um somando direto de X. Então, da Proposição 1.2.9, a inclusão de X_1 em X, $u_1 \colon X_1 \to X$, é uma seção, ou seja, existe $p_1 \colon X \to X_1$ tal que $p_1 \circ u_1 = 1_{X_1}$. Logo, $\varphi := u_1 \circ p_1 \in \operatorname{End}(X)$ é um idempotente e, portanto, $u_1 \circ p_1 = 0$ ou $u_1 \circ p_1 = 1_X$. No primeiro caso, $p_1 = 0$ (por u_1 ser um monomorfismo) e assim $0 = p_1 \circ u_1 = 1_{X_1}$, ou seja, $X_1 = 0$. No segundo caso, tem-se que u_1 é uma retração e, portanto, u_1 é um isomorfismo de X_1 em X.

Funtores aditivos

Sejam \mathcal{C} e \mathcal{C}' duas categorias aditivas e $F: \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ um funtor. Dizemos que F preserva somas diretas se, para qualquer par de objetos $X_1, X_2 \in \mathcal{C}$, os morfismos

$$F(X_1) \xrightarrow{F(\iota_1)} F(X_1 \oplus X_2) \xleftarrow{F(\iota_2)} F(X_2),$$

induzidos pelas inclusões canônicas $X_1 \xrightarrow{\iota_1} X_1 \oplus X_2 \xleftarrow{\iota_2} X_2$, nos dão o seguinte isomorfismo

O funtor F é aditivo se ele preserva somas diretas e se, para cada par de objetos $X,Y\in\mathcal{C}$, a aplicação $F_{X,Y}$ satisfaz

$$F(f+g) = F(f) + F(g)$$
, para todo $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

Categorias abelianas

Seja $\mathcal C$ uma categoria com objeto zero em que todo morfismo admite um núcleo e um conúcleo. Então, para cada morfismo $f \colon X \to Y$, existe um único morfismo $\bar f$ em $\mathcal C$ tornando o seguinte diagrama comutativo

$$\operatorname{Nuc} f \xrightarrow{u} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{p} \operatorname{Conuc} f$$

$$\downarrow p' \qquad \qquad \downarrow u' \qquad \qquad \downarrow u'$$

$$\operatorname{Conuc} u - \xrightarrow{\bar{f}} \operatorname{Nuc} p,$$

onde u': Nuc $p \to Y$ é o núcleo de p e p': $X \to \text{Conuc } u$ é o conúcleo de u. O objeto Nuc p será chamado de imagem de f e denotado por Im f. Em particular, Im f é único a menos de isomorfismos.

Definição 1.2.14 Uma categoria \mathcal{C} é uma categoria abeliana se:

(Ab1) C é aditiva; e

(Ab2) cada morfismo $f: X \to Y$ admite um núcleo $u: \operatorname{Nuc} f \to X$ e um conúcleo $p: Y \to \operatorname{Conuc} f$ e o morfismo induzido $\bar{f}: \operatorname{Conuc} u \to \operatorname{Nuc} p$ é um isomorfismo.

Note que do Lema 1.2.11 podemos concluir que todo morfismo idempotente em uma categoria abeliana cinde. Juntando este fato com a Proposição 1.2.13, temos o resultado seguinte.

Corolário 1.2.15 Sejam C uma categoria abeliana e $X \in C$. Então, X é indecompononível se e somente se 0 e 1_X são os únicos idempotentes de $\operatorname{End}(X)$.

Exemplo 1.2.16 Seja R um anel associativo com 1.

- (a) A categoria $\operatorname{Mod} R$ é uma categoria abeliana. De fato, seja $f: M \to N$ um homomorfismo de R-módulos. Então,
 - $\operatorname{Nuc}(f) := \{m \in M : f(m) = 0\}$ e a inclusão de submódulos $u : \operatorname{Nuc}(f) \hookrightarrow M$ é um núcleo de f;
 - Conuc(f) := N/Im(f) e a projeção canônica $p : N \to \text{Conuc}(f)$ é um conúcleo de f, onde $\text{Im}(f) := \{f(m) : m \in M\}$; e
 - como consequência do Teorema de Isomorfismos para R-módulos, o homomorfismo
 f̄: X/Nuc(f) → Im(f), do item (Ab2) da Definição 1.2.14, é um isomorfismo.
- (b) A subcategoria plena mod R de Mod R não é, em geral, uma categoria abeliana. Isto ocorre porque o núcleo de homomorfismos entre módulos finitamente gerados não é em geral um módulo finitamente gerado. No entanto, é sabido que mod R é uma categoria abeliana se e somente se R é um anel noetheriano. Em particular, se Λ é uma k-álgebra de dimensão finita, a categoria mod Λ é abeliana.
- (c) A subcategoria plena Proj R (respectivamente, proj R) de Mod R (respectivamente, mod R) não é em geral uma categoria abeliana, visto que o núcleo de homomorfismos entre módulos projetivos não é necessariamente um módulo projetivo. Porém, se R é um anel hereditário (à direita), então Proj R é uma categoria abeliana.

1.3 Categorias Krull-Schmidt

Apresentamos nesta seção algumas caracterizações daquelas categorias em que vale o Teorema de Krull-Schmidt. Tivemos como base as notas "Krull-Remak-Schmidt categories and projective covers", [Kra12].

Definição 1.3.1 Uma categoria aditiva C é chamada de uma categoria Krull-Schmidt¹ se todo objeto X de C possui uma decomposição $X = X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$, onde cada X_i é um objeto indecomponível cujo anel de endomorfismos $\operatorname{End}_{\mathcal{C}}(X_i)$ é local.

¹É comum encontrar a denominação categoria Krull-Remak-Schmidt.

20 CONCEITOS BÁSICOS 1.3

Observação 1.3.2 A menos de isomorfismos e permutações, a decomposição de um objeto como soma direta de indecomponíveis com anel de endomorfismos local, em uma categoria Krull-Schmidt, é unica. Uma prova deste fato pode ser encontrada em, por exemplo, Prop. 3.2.1 de [Kra12].

Proposição 1.3.3 Seja R um anel associativo com 1. São equivalentes as seguintes condições:

- (a) R tem um conjunto ortogonal completo de idempotentes $\{e_1, \ldots, e_n\}$ em que cada e_iRe_i é um anel local.
- (b) $mod R \not e uma categoria Krull-Schmidt.$
- (c) O módulo R_R admite uma decomposição $R = P_1 \oplus \cdots \oplus P_r$ tal que cada P_i tem anel de endomorfismos local.
- (d) Todo R-módulo simples admite uma cobertura projetiva.
- (e) Todo R-módulo finitamente gerado admite uma cobertura projetiva.

Prova. As equivalências (b) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (d) \Leftrightarrow (e) são justamente a Proposição 3.1.1 de [Kra12] e as equivalências (a) \Leftrightarrow (d) \Leftrightarrow (e) são demonstradas, por exemplo, no Teorema 27.6 de [AF92].

Um anel é *semiperfeito* se ele satisfaz uma das condições da proposição anterior. Uma boa referência sobre a teoria de anéis semiperfeitos é a Seção 27 de [AF92].

A partir desta definição, temos a seguinte caracterização para categorias Krull-Schmidt.

Teorema 1.3.4 ([Kra12], Cor. 3.2.3) Uma categoria aditiva C é uma categoria Krull-Schmidt se e somente se todo idempotente de C cinde e $\operatorname{End}_{\mathcal{C}}(X)$ é um anel semiperfeito, para todo $X \in \mathcal{C}$.

Veremos que a partir da caracterização acima é possível concluir que mod Λ e proj Λ são categorias Krull-Schmidt sempre que Λ for uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo k (não necessariamente algebricamente fechado).

Definição 1.3.5 Seja k um corpo qualquer. Uma categoria \mathcal{C} é chamada de k-categoria se, para cada par de objetos $X,Y\in\mathcal{C}$, o conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ é munido de uma estrutura de k-espaço vetorial tal que a composição de morfismos em \mathcal{C} é uma aplicação k-bilinear. Se além disso, $\dim_k \mathrm{Hom}(X,Y) < \infty$, para todo par de objetos $X,Y\in\mathcal{C}$, dizemos que \mathcal{C} é uma k-categoria Hom -finita.

Note que para qualquer objeto X de um k-categoria \mathcal{C} (respectivamente, Hom-finita), o grupo $\operatorname{End}_{\mathcal{C}}(X)$ é uma k-álgebra (respectivamente, de dimensão finita), onde o produto é a composição de morfismos e $1=1_X$.

Exemplo 1.3.6 Sejam k um corpo e Λ uma k-álgebra. Então $\operatorname{Mod} \Lambda$ e $\operatorname{mod} \Lambda$ são exemplos de k-categorias. E no caso em que $\dim_k \Lambda < \infty$, tem-se que $\operatorname{mod} \Lambda$ \acute{e} uma k-categoria Homfinita.

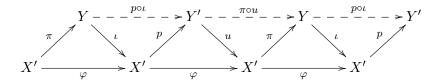
Corolário 1.3.7 Seja C uma k-categoria aditiva Hom-finita. Então C é Krull-Schmidt se e somente se todo idempotente de C cinde. Em particular, toda k-categoria abeliana Hom-finita é Krull-Schmidt.

Prova. A primeira parte segue do Teorema 1.3.4 e do fato de que toda k-álgebra de dimensão finita é um anel semiperfeito. Para a segunda parte, basta lembrar que numa categoria abeliana todo idempotente cinde (vide observação que segue a Definição 1.2.14).

Lema 1.3.8 Sejam C uma categoria aditiva em que todo idempotente cinde e C' uma subcategoria plena de C. Então, todo idempotente em C' cinde se e somente se C' é fechada para somandos direto.

Prova. (\Leftarrow) Suponha que \mathcal{C}' é fechada para somandos direto e seja $\varphi \colon X' \to X'$ um idempotente em \mathcal{C}' . Como φ também é um idempotente em \mathcal{C} e, por hipótese, todo idempotente de \mathcal{C} cinde, então existe um objeto $Y \in \mathcal{C}$ e morfismos $u \colon Y \to X'$ e $p \colon X' \to Y$, em \mathcal{C} , tais que $\varphi = u \circ p$ e $p \circ u = 1_Y$. Em particular, Y é um somando direto de X' e como \mathcal{C}' é fechada para somandos direto, segue que $Y \in \mathcal{C}'$. Logo, por \mathcal{C}' ser uma subcategoria plena de \mathcal{C} , temos que $u \colon Y \to X'$ e $p \colon X' \to Y$ são morfismos de \mathcal{C}' . De onde segue que $\varphi \colon X' \to X'$ cinde em \mathcal{C}' .

(⇒) Suponha que todo idempotente em \mathcal{C}' cinde e seja $Y \in \mathcal{C}$ um somando direto de um objeto X' de \mathcal{C}' . Então, existem morfismos $\iota \colon Y \to X'$ e $\pi \colon X' \to Y$, em \mathcal{C} , tais que $\pi \circ \iota = 1_Y$. Em particular, $\varphi := \iota \circ \pi \colon X' \to X'$ é idempotente em \mathcal{C}' e assim, por hipótese, cinde em \mathcal{C}' , isto é, existe $Y' \in \mathcal{C}'$ e morfismos $u \colon Y' \to X'$ e $p \colon X' \to Y'$, em \mathcal{C}' , tais que $\varphi = u \circ p$ e $p \circ u = 1_{Y'}$. Logo, temos o seguinte diagrama comutativo.



De modo que se $f := p \circ \iota \colon Y \to Y'$ e $g := \pi \circ u \colon Y' \to Y$, temos que

$$g \circ f = \pi \circ \varphi \circ \iota = \pi \circ \iota \circ \pi \circ \iota = 1_{Y} \circ 1_{Y} = 1_{Y}$$

е

$$f \circ g = p \circ \varphi \circ u = p \circ u \circ p \circ u = 1_{Y'} \circ 1_{Y'} = 1_{Y'},$$

ou seja, $Y \cong_{\mathcal{C}} Y'$, onde $Y' \in \mathcal{C}'$ é um somando direto de X'. Isto mostra que \mathcal{C}' é fechada para somandos direto.

Os dois resultados anteriores, Corolário 1.3.7 e Lema 1.3.8, são boas ferramentas para mostrar que determinadas categorias são Krull-Schmidt, como vemos a seguir.

- Exemplo 1.3.9 (a) Seja Λ uma k-álgebra de dimensão finita. Então $\operatorname{mod} \Lambda$ é uma k-categoria abeliana Hom-finita (vide exemplos 1.3.6 e 1.2.16-(b)). Em particular, $\operatorname{mod} \Lambda$ é uma categoria Krull-Schmidt. Este fato poderia ser constatado, também, usando diretamente a Proposição 1.3.3.
- (b) Seja R um anel associativo com 1. Então, proj R é uma categoria aditiva em que todo idempotente cinde. De fato, dado que proj R é fechada para somandos direto e também é uma subcategoria plena de uma categoria em que todo idempotente cinde, a saber Mod R, então todo idempotente de proj R cinde, pelo Lema 1.3.8. E se Λ é uma k-álgebra de dimensão finita, então proj Λ é uma k-categoria Hom-finita em que todo idempotente cinde e, portanto, pelo Corolário 1.3.7 é uma categoria Krull-Schmidt.

Categorias quociente

Seja \mathcal{C} uma k-categoria aditiva. Dizemos que uma classe \mathcal{I} de morfismos de \mathcal{C} é um ideal em \mathcal{C} se \mathcal{I} satisfaz as seguintes condições:

- (a) para cada objeto $X \in \mathcal{C}$, o morfismo zero $0_X \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$ pertence a \mathcal{I} ;
- (b) se $f, g: X \to Y$ são morfismos em \mathcal{I} e $\mu, \lambda \in k$, então $f\mu + g\lambda \in \mathcal{I}$; e
- (c) se $f: X \to Y$ é um morfismo em \mathcal{I} e $g: Y \to Z$ e $h: W \to X$ são morfismo em \mathcal{C} , então $g \circ f$ e $f \circ h$ pertencem a \mathcal{I} .

Dado um ideal \mathcal{I} de uma k-categoria aditiva \mathcal{C} , definimos a categoria quociente \mathcal{C}/\mathcal{I} como sendo a categoria cujos objetos são os mesmos objetos de \mathcal{C} e o espaço dos morfismos de X para Y em \mathcal{C}/\mathcal{I} é o espaço quociente

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{I}}(X,Y) := \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)/\mathcal{I}(X,Y),$$

onde $\mathcal{I}(X,Y)$ é o subespaço de $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ formado pelos morfismos de X para Y em \mathcal{I} . É fácil ver que a categoria quociente \mathcal{C}/\mathcal{I} é uma k-categoria aditiva e no caso em que \mathcal{C} é uma k-categoria aditiva Hom-finita, \mathcal{C}/\mathcal{I} também o é.

Exemplo 1.3.10 Sejam C uma k-categoria aditiva e \mathcal{D} uma subcategoria plena aditiva de \mathcal{C} . Denotamos por $\mathcal{I}_{\mathcal{D}}$ a classe de morfismos em \mathcal{C} que se fatoram sob algum objeto de \mathcal{D} . Então, $\mathcal{I}_{\mathcal{D}}$ é um ideal em \mathcal{C} e a categoria quociente $\mathcal{C}/\mathcal{I}_{\mathcal{D}}$ é chamada de categoria estável de \mathcal{C} por \mathcal{D} . Note que se $X \in \mathcal{C}$ é um somando direto de algum objeto de \mathcal{D} , então $X \cong 0$ em $\mathcal{C}/\mathcal{I}_{\mathcal{D}}$.

O resultado abaixo é bem conhecido – veja, por exemplo, "Auslander-Reiten theory in a Krull-Schmidt category", [Liu10], pag. 431 – e nos será útil na Seção 1.5, aonde veremos outros exemplos de categorias Krull-Schmidt.

Lema 1.3.11 Seja C uma k-categoria aditiva Hom-finita que é Krull-Schmidt e seja \mathcal{I} um ideal de C. Então, a categoria quociente C/\mathcal{I} também é uma k-categoria aditiva Hom-finita que é Krull-Schmidt.

1.4 Álgebras de caminhos e representações

Uma importante classe de álgebras associativas com unidade (de dimensão finita) são aquelas que são dadas por um carcás finito (acíclico), também conhecidas como álgebras de caminhos. É desta classe de álgebras que tiramos boa parte dos exemplos apresentados neste trabalho. Com isto, se faz necessário apresentarmos aqui uma descrição de tais álgebras. Indicamos os Capítulos II e III de [ASS06] para os detalhes omitidos.

Carcases e álgebras de caminhos

Um carcás $Q = (Q_0, Q_1)$ é um grafo orientado onde Q_0 é o conjunto de vértices e Q_1 é o conjunto de flechas entre os vértices. O tipo de Q é o do seu grafo subjacente, o qual é obtido de Q "esquecendo" a orientação das flechas. Um carcás é dito finito se os conjuntos Q_0 e Q_1 são finitos; e conexo se seu grafo subjacente é conexo.

Para uma dada flecha $\alpha \colon u \to v$ de um carcás Q, dizemos que α inicia em u e termina em v e escrevemos $s(\alpha) \doteq u$ e $t(\alpha) \doteq v$. Um caminho p, de comprimento positivo r, no carcás Q é uma sequência de flechas $p = \alpha_1 \cdots \alpha_r$ tal que $s(\alpha_i) = t(\alpha_{i-1})$, para todo $1 < i \le r$. Neste caso, dizemos que $s(\alpha_1)$ é o início de p e $t(\alpha_r)$ é o término de p. E no caso em que o início e o término de p concidem, dizemos que p é um ciclo orientado. Um carcás sem ciclos orientados é chamado de carcás acíclico.

Para cada vértice $v \in Q_0$, associamos um caminho trivial de comprimento zero, denotado por ε_v , onde definimos $s(\varepsilon_v) = t(\varepsilon_v)$.

Dados um carcás Q e um corpo k, denotamos por kQ o k-espaço vetorial que tem como base o conjunto de caminhos em Q. Definimos em kQ um produto da seguinte forma: dados dois caminhos $p = \alpha_1 \cdots \alpha_r$ e $q = \beta_1 \cdots \beta_s$ em Q, seja

$$p \cdot q := \begin{cases} p, & \text{se } q = \varepsilon_v \text{ e } \mathsf{t}(\alpha_r) = v; \\ q, & \text{se } p = \varepsilon_v \text{ e } \mathsf{s}(\beta_1) = v; \\ \alpha_1 \cdots \alpha_r \beta_1 \cdots \beta_s, & \text{se } \mathsf{t}(\alpha_r) = \mathsf{s}(\beta_1); \text{ e} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Estendendo linearmente tal produto, temos definido em kQ uma estrutura de k-álgebra associativa, a qual, com esta estrutura, é chamada de álgebra de caminhos de Q sobre k. Definida desta forma, a álgebra de caminhos tem as seguintes propriedades.

Proposição 1.4.1 Seja kQ a álgebra de caminhos de um carcás Q sobre k. Então,

24 CONCEITOS BÁSICOS 1.4

(a) kQ tem unidade se e somente se Q_0 é um conjunto finito. Neste caso, $\{\varepsilon_v : v \in Q_0\}$ é um conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos de kQ;

- (b) $\dim_k(kQ) < \infty$ se e somente se Q é finito e acíclico; e
- (c) kQ é uma álgebra conexa se e somente se Q é um carcás conexo.

Sejam kQ a álgebra de caminhos de um carcás finito Q e J o ideal em kQ gerado pelas flechas de Q, isto é, gerado pelo conjunto Q_1 . Então, dizemos que um ideal I de kQ é admissível se existir um inteiro m>1 tal que $J^m\subseteq I\subseteq J^2$. É bem conhecido que se I é um ideal admissível de kQ, então I é gerado, como ideal de kQ, por um subconjunto finito $\{\rho_1,\cdots,\rho_n\}$ de kQ, onde cada ρ_i é uma combinação k-linear de caminhos de comprimento maior do que um e com os mesmos vértices iniciais e finais, isto é, para cada um dos caminhos da k-combinação linear de ρ_i , existem vértices $u,v\in Q_0$ tais que $\mathrm{s}(\rho_i)=u$ e $\mathrm{t}(\rho_i)=v$, para todo $i=1,\ldots,n$. Um elemento como um dos ρ_i é chamado de relação em Q.

Definição 1.4.2 Seja I um ideal admissível de kQ. O par (Q,I) é chamado carcás com relações e a álgebra quociente KQ/I, associada ao par (Q,I), é chamada álgebra de caminhos do carcás com relações (Q,I).

Proposição 1.4.3 Sejam Q um carcás finito e I um ideal admissível de kQ. Então,

- (a) kQ/I é uma k-álgebra básica de dimensão finita;
- (b) $\{e_v := \varepsilon_v + I\}_{v \in Q_0}$ é um conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos de kQ/I;
- (c) kQ/I é conexa se e somente se Q é conexo; e
- (d) rad(kQ/I) = J/I.

O seguinte resultado, devido a Gabriel, mostra que sob certas condições, uma dada álgebra de dimensão finita pode ser descrita em termos de um carcás com relações.

Teorema 1.4.4 ([Gab72]) Seja Λ uma álgebra básica de dimensão finita sobre um corpo k algebricamente fechado. Então, existem um carcás finito Q_{Λ} e um ideal admissível I da álgebra kQ_{Λ} , tal que $\Lambda \cong kQ_{\Lambda}/I$ é um isomorfismo de k-álgebras.

O carcás Q_{Λ} associado a Λ é único e é chamado de carcás ordinário de Λ . Veremos no próximo tópico que usando o carcás ordinário associado Q_{Λ} é possível visualizar um Λ -módulo finitamente gerado como uma família de k-espaços vetoriais de dimensão finita conectados por transformações lineares.

Representações e módulos

Seja Q um carcás finito. Uma representação $M=(M_v,\varphi_\alpha)_{v\in Q_0,\alpha\in Q_1}$ de Q é um conjunto de k-espaços vetoriais $\{M_v:v\in Q_0\}$ e um conjunto de transformações lineares

$$\{\varphi_{\alpha} \colon M_u \to M_v / \alpha \colon u \to v \text{ \'e uma flecha de } Q_1\}.$$

Uma representação $M=(M_v,\varphi_\alpha)$ de um carcás Q é de dimensão finita se cada k-espaço vetorial M_v tem dimensão finita.

Sejam $M=(M_v,\varphi_\alpha)$ e $M'=(M'_v,\varphi'_\alpha)$ duas representações de um carcás finito Q. Um morfismo de representações $f\colon M\to M'$ é um conjunto de transformações lineares $f=(f_v)_{v\in Q_0}$, onde $f_v\colon M_v\to M'_v$, tal que para cada flecha $\alpha\colon u\to v$ em Q_1 o diagrama seguinte comuta.

$$M_{u} \xrightarrow{\varphi_{\alpha}} M_{v}$$

$$f_{u} \downarrow \qquad \qquad \downarrow f_{v}$$

$$M'_{u} \xrightarrow{\varphi'_{\alpha}} M'_{v}$$

A composta de morfismos de representações é definida coordenada a coordenada.

Desta forma, obtemos uma categoria $\operatorname{Rep}(Q)$, chamada de categoria das representações de Q. Denotamos por $\operatorname{rep}(Q)$ a subcategoria plena de $\operatorname{Rep}(Q)$ cujos objetos são as representações de dimensão finita. É bem conhecido que $\operatorname{Rep}(Q)$ e $\operatorname{rep}(Q)$ são k-categorias abelianas.

A noção de representação de um carcás pode ser estendida a carcases com relações da seguinte forma: sejam $M=(M_v,\varphi_\alpha)$ uma representação de um carcás finito Q e $p=\alpha_1\cdots\alpha_r$ um caminho não trivial em Q. Definimos a transformação linear $\varphi_p\colon M_{\mathrm{s}(p)}\to M_{\mathrm{t}(p)}$ como sendo a composta $\varphi_{\alpha_1}\cdots\varphi_{\alpha_r}$. Estendemos esta definição por linearidade a todo elemento da álgebra de caminhos kQ. Finalmente, uma representação de um carcás com relações (Q,I), onde I é um ideal admissível de kQ, é uma representação $M=(M_v,\varphi_\alpha)$ do carcás Q tal que $\varphi_\rho=0$, para todo $\rho\in I$. Denotamos por $\mathrm{Rep}(Q,I)$ e $\mathrm{rep}(Q,I)$ as subcategorias plenas de $\mathrm{Rep}(Q)$ e $\mathrm{rep}(Q)$, respectivamente, cujos objetos são as representações do carcás com relações (Q,I).

O resultado abaixo, juntamente com o Teorema de Gabriel, nos permite identificar os objetos e os morfismos da categoria mod Λ , onde Λ é uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo k algebricamente fechado.

Teorema 1.4.5 Sejam (Q, I) um carcás finito com relações e $\Lambda = kQ/I$ a álgebra de caminhos de (Q, I). Então, as k-categorias $\operatorname{rep}(Q, I)$ e $\operatorname{mod} \Lambda$ são equivalentes.

Em vários momentos deste trabalho, não fazemos distinção entre um kQ/I-módulo finitamente gerado e sua imagem na categoria $\operatorname{rep}(Q,I)$, em especial, os kQ/I-módulos simples e projetivos indecomponíveis, os quais podem ser calculados explicitamente como representações do carcás com relações (Q,I) (vide, por exemplo, Seção III.2 de [ASS06]).

26 CONCEITOS BÁSICOS 1.4

Carcás de Auslander-Reiten

Assumimos, do leitor, alguma familiaridade com sequências quase cindidas, também conhecidas como sequências de Auslander-Reiten, em referência àqueles que as introduziram. Tal noção teve papel fundamental no desenvolvimento da teoria de representações de álgebras de Artin. Por exemplo, foi a partir das sequências quase cindidas que C. M. Ringel definiu um carcás que reune importantes informações da categoria dos módulos finitamente gerados sobre uma álgebra de Artin. Carcás este conhecido como carcás de Auslander-Reiten.

Apesar do carcás de Auslander-Reiten ser usado em poucos momentos (de forma explícita!) neste trabalho, achamos importante apresentar seus elementos. Vale salientar, de todo modo, que nossa exposição não será suficiente para entender os poucos exemplos que fazem uso de tal ferramenta, principalmente por não abordarmos a estrutura combinatorial deste carcás. Citamos como referência o texto [ARS97]. Porém, toda a informação mencionada abaixo pode ser encontrada, também, no Capítulo IV de [ASS06].

Sejam k um corpo algebricamente fechado e Λ uma k-álgebra de dimensão finita. Uma sequência quase cindida (ou sequência de Auslander-Reiten) é uma sequência exata em mod Λ

$$0 \longrightarrow X \stackrel{u}{\longrightarrow} E \stackrel{v}{\longrightarrow} Z \longrightarrow 0, \tag{1.1}$$

satisfazendo as seguintes condições:

(AR1) X e Z são indecomponíveis;

(AR2) v não é uma retração; e

(AR3) se $f: W \to Z$ não é uma retração, então existe $f': W \to E$ tal que $v \circ f' = f$.

Teorema 1.4.6 (Auslander-Reiten) Sejam Λ uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo k algebricamente fechado. Então, para cada $Z \in \operatorname{ind} \Lambda$, não projetivo, existe uma sequência quase cindida da forma (1.1), única a menos de isomorfismos, com $X \in \operatorname{ind} \Lambda$. \square

Sejam X e Y dois módulos em mod Λ . Dizemos que um morfismo $f: X \to Y$ é irredutível se f não é seção e nem retração e a igualdade $f = f_2 \circ f_1$ implicar que f_1 é seção ou f_2 é retração. Para qualquer sequência quase cindida da forma (1.1), os morfismos u e v são irredutíveis.

Sejam $X, Y \in \text{ind } \Lambda$ e considere o quociente de k-espaços vetoriais

$$\operatorname{Irr}(X,Y) := \operatorname{rad}_{\Lambda}(X,Y)/\operatorname{rad}_{\Lambda}^{2}(X,Y),$$

onde $\operatorname{rad}_{\Lambda}(X,Y)$ é o k-espaço vetorial dos homomorfismos não invertíveis de X em Y e $\operatorname{rad}_{\Lambda}^{2}(X,Y)$ é o k-espaço vetorial dos homomorfismos da forma $g\circ f$ com $f\in\operatorname{rad}_{\Lambda}(X,Z)$ e $g\in\operatorname{rad}_{\Lambda}(Z,Y)$, para algum $Z\in\operatorname{mod}\Lambda$. É bem conhecido que a dimensão de $\operatorname{Irr}(X,Y)$ é igual ao número (máximo) de morfismos irredutíveis de X em Y, que são linearmente independentes. Finalmente, definimos o $\operatorname{carc\'{a}\!\!\!/}$ de $\operatorname{Auslander-Reiter} \Gamma(\operatorname{mod}\Lambda)$ da categoria $\operatorname{mod}\Lambda$ da seguinte forma:

- Os vértice de $\Gamma(\text{mod }\Lambda)$ são as classes de isomorfismos [X] dos Λ -módulos indecomponíveis X.
- Se [X] e [Y] são dois vértices de $\Gamma(\text{mod }\Lambda)$, correspondentes aos Λ -módulos indecomponíveis X e Y, o número de flechas de [X] para [Y] é igual à dimensão do k-espaço vetorial Irr(X,Y).

Notação: Com o intuito de não sobrecarregar a notação, escreveremos X no lugar [X].

Finalizaremos este capítulo introdutório com uma breve exposição, ao longo das próximas três seções, do principal objeto de estudo do trabalho. A saber, as categorias de complexos e de homotopia de complexos e as categorias derivadas.

1.5 As categorias de complexos e de homotopia

Nosso objetivo nesta seção é apresentar ao leitor uma coletânea de definições e propriedades de objetos e morfismos das categorias de complexos e de homotopia de complexos. Estas categorias serão objeto de estudo ao longo de boa parte do trabalho.

Seja \mathcal{A} uma categoria aditiva. Um complexo sobre \mathcal{A} é uma família

$$X^{\bullet} = (X^n, d_X^n)_{n \in \mathbb{Z}}$$

de objetos X^n de \mathcal{A} e de morfismos $d_X^n \colon X^n \to X^{n+1}$ tais que $d_X^n \circ d_X^{n-1} = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. O objeto X^n será chamado de componente homogênia de grau n de X^{\bullet} e os morfismos d_X^n de diferenciais de X^{\bullet} . Escreveremos, algumas vezes, um complexo como $X^{\bullet} \doteq (X^n, d_X^n)$ ou simplesmente como X^{\bullet} ou até mesmo na forma de uma sequência de objetos e morfismos, como indicado abaixo.

$$X^{\bullet}: \cdots \longrightarrow X^{n-1} \xrightarrow{d_X^{n-1}} X^n \xrightarrow{d_X^n} X^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

Sejam $X^{\bullet} = (X^n, d_X^n)$ e $Y^{\bullet} = (Y^n, d_Y^n)$ dois complexos sobre \mathcal{A} . Um morfismo de complexos $f \colon X^{\bullet} \to Y^{\bullet}$ é uma família de morfismos

$$f = (f^n \colon X^n \to Y^n)_{n \in \mathbb{Z}}$$

de \mathcal{A} satisfazendo $f^n \circ d_X^{n-1} = d_Y^{n-1} \circ f^{n-1}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Neste caso, temos o seguinte diagrama comutativo.

$$X^{\bullet}: \qquad \cdots \longrightarrow X^{n-1} \xrightarrow{d_X^{n-1}} X^n \xrightarrow{d_X^n} X^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

$$f \downarrow \qquad \qquad f^{n-1} \downarrow \qquad f^n \downarrow \qquad f^{n+1} \downarrow$$

$$Y^{\bullet}: \qquad \cdots \longrightarrow Y^{n-1} \xrightarrow{d_Y^{n-1}} Y^n \xrightarrow{d_Y^n} Y^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

Escreveremos, algumas vezes, um morfismo de complexos na forma $f \doteq (f^n)_n \colon X^{\bullet} \to Y^{\bullet}$ ou

simplesmente $f \doteq (f^n)_n$. A composta de dois morfimos, quando possível, é feita de forma natural: $g \circ f := (g^n \circ f^n)_n$.

Os complexos sobre uma categoria aditiva \mathcal{A} juntamente com os morfismos de complexos formam uma categoria $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, a categoria de complexos sobre \mathcal{A} . Durante o resto desta seção, a menos de menção em contrário, \mathcal{A} será um categoria aditiva.

Apresentamos nos próximos parágrafos os principais elementos da categoria de complexos que serão usados neste trabalho, tais como: complexos limitados, o truncamento bruto de um complexo, o cone de um morfismo, o funtor translação e as noções de complexos radicais e de morfismos homotópicos.

Complexos limitados inferiormente e superiormente

Seja X^{\bullet} um complexo sobre \mathcal{A} . Dizemos que X^{\bullet} é (a) um complexo limitado inferiormente (respectivamente, superiormente) quando existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $X^n = 0$ para todo $n < n_0$ (respectivamente, $n > n_0$); (b) um complexo limitado quando é limitado inferiormente e superiormente; e (c) um complexo concentrado em grau n quando $X^n \neq 0$ e $X^m = 0$ para todo $m \neq n$.

Indicaremos por $C^+(A)$, $C^-(A)$ e $C^b(A)$ as subcategorias plenas de C(A) cujo objetos são os complexos limitados inferiormente, limitados superiormente e limitados, respectivamente.

Notação: Quando dissermos que uma determinada propriedade é válida para $\mathcal{C}^*(\mathcal{A})$, estaremos dizendo que a tal propriedade é válida para a categoria dos complexos $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ e para qualquer uma das subcategorias plenas: $\mathcal{C}^+(\mathcal{A})$, $\mathcal{C}^-(\mathcal{A})$ e $\mathcal{C}^b(\mathcal{A})$.

Lema 1.5.1 Seja $f = (f^n)_n : X^{\bullet} \to Y^{\bullet}$ um morfismo de complexos.

- (a) Se f é um seção em $C^*(A)$, então cada $f^n: X^n \to Y^n$ é uma seção em A.
- (b) Se f é um retração em $C^*(A)$, então cada $f^n: X^n \to Y^n$ é uma retração em A.
- (c) $f \notin um \text{ isomorfismo } em C^*(A) \text{ se } e \text{ somente se } cada f^n \colon X^n \to Y^n \notin um \text{ isomorfismo } em A.$

Truncamento bruto

Dados um complexo X^{\bullet} e um inteiro m, definimos um complexo chamado de truncamento bruto do complexo X^{\bullet} , o qual denotamos por $\tau^{\geq m}X^{\bullet}$, da seguinte forma:

$$(\tau^{\geq m} X^{\bullet})^i := \begin{cases} X^i, & \text{se } i \geq m; \\ 0, & \text{se } i < m. \end{cases} \quad \text{e} \quad d^i_{\tau^{\geq m} X^{\bullet}} := \begin{cases} d^i_X, & \text{se } i \geq m; \\ 0, & \text{se } i < m. \end{cases}$$

Daí podemos definir um funtor $\tau^{\geq m} \colon \mathcal{C}(\mathcal{A}) \to \mathcal{C}^+(\mathcal{A})$, chamado de funtor trucamento, que associa cada complexo X^{\bullet} ao seu truncamento bruto $\tau^{\geq m}X^{\bullet}$ e cada morfismo de complexos

 $f=(f^n)_n\colon X^\bullet\to Y^\bullet$ à sua restrição e correstrição a $\tau^{\geq m}X^\bullet$ e $\tau^{\geq m}Y^\bullet$, respectivamente. Isto é,

$$(\tau^{\geq m}(f))^i := \begin{cases} f^i, & \text{se } i \geq m; \\ 0, & \text{se } i < m. \end{cases}$$

Observação 1.5.2 Note que:

- (a) se $f: X^{\bullet} \to Y^{\bullet}$ é um morfismo em $C^{-}(A)$, então $\tau^{\geq m}(f)$ é um morfismo em $C^{b}(A)$; e
- (b) pelo Lema 1.1.9, o funtor truncamento $\tau^{\geq m} \colon \mathcal{C}(\mathcal{A}) \to \mathcal{C}^+(\mathcal{A})$ preserva somandos diretos, isto é, se Y^{\bullet} é um somando direto de X^{\bullet} então $\tau^{\geq m}Y^{\bullet}$ é um somando direto de $\tau^{\geq m}X^{\bullet}$.

Funtor translação

Dados um complexo X^{\bullet} e um inteiro p, "transladando" suas componentes homogênias e seus diferenciais podemos definir um novo complexo $X^{\bullet}[p]$, que chamaremos de p-ésima translação de X^{\bullet} , da seguinte forma:

$$X[p]^n := X^{n+p}$$
 e $d_{X[p]}^n := (-1)^p d_X^{n+p}$.

E se $f: X^{\bullet} \to Y^{\bullet}$ é um morfismo de complexos, também podemos definir um novo morfismo f[p], de $X^{\bullet}[p]$ em $Y^{\bullet}[p]$, da seguinte forma:

$$f[p]^n := f^{n+p}$$

Daí temos definido um funtor $[p]: \mathcal{C}(\mathcal{A}) \to \mathcal{C}(\mathcal{A})$, que chamaremos de funtor translação por p, que associa cada complexo X^{\bullet} à sua p-ésima translação $X^{\bullet}[p]$ e cada morfismo de complexos $f: X^{\bullet} \to Y^{\bullet}$ ao morfismo $f[p]: X^{\bullet}[p] \to Y^{\bullet}[p]$. Note que $[p] \circ [-p] = [-p] \circ [p] = 1_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}$, ou seja, [p] é um automorfismo de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Este também é um automorfismo quando restrito a quaisquer uma das subcategorias de complexos: $\mathcal{C}^{-}(\mathcal{A}), \mathcal{C}^{+}(\mathcal{A})$ e $\mathcal{C}^{b}(\mathcal{A})$

Cone de um morfismo

Para um dado um morfismo de complexos $f: X^{\bullet} \to Y^{\bullet}$, podemos definir um novo complexo, chamado de *cone do morfismo f* e que denotaremos por C_f , da seguinte forma:

$$C_f^n := X[1]^n \oplus Y^n \quad \text{e} \quad d_{C_f}^n := \begin{pmatrix} d_{X[1]}^n & 0 \\ f[1]^n & d_Y^n \end{pmatrix}.$$

Note que, neste caso, existe a seguinte sequência de objetos e morfismos em $\mathcal{C}(A)$

$$X^{\bullet} \xrightarrow{f} Y^{\bullet} \xrightarrow{\mu_f} C_f \xrightarrow{\pi_f} X^{\bullet}[1],$$
 (1.2)

onde
$$\mu_f^n := \begin{pmatrix} 0 \\ 1_Y^n \end{pmatrix} : Y^n \to X^{n+1} \oplus Y^n \in \pi_f^n := \begin{pmatrix} 1_X^{n+1} & 0 \end{pmatrix} : X^{n+1} \oplus Y^n \to X^{n+1}$$
. Observe

também que se X^{\bullet} e Y^{\bullet} são objetos em $\mathcal{C}^*(\mathcal{A})$, então $C_f \in \mathcal{C}^*(\mathcal{A})$; e se $f: X^{\bullet} \to Y^{\bullet}$ é um morfismo em $\mathcal{C}(\mathcal{D})$, onde \mathcal{D} é uma subcategoria aditiva de \mathcal{A} , então $C_f \in \mathcal{C}(\mathcal{D})$.

Lema 1.5.3 Sejam $X^{\bullet} = (X^n, d_X^n)$ um complexo de $C^*(A)$ e $1_{X^{\bullet}}$ o morfismo identidade de X^{\bullet} . Então,

$$C_{1_{X^{\bullet}}} \cong I(X^{\bullet}) := (X^{n+1} \oplus X^n, \iota^n)_{n \in \mathbb{Z}}, \quad onde \quad \iota^n := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_X^{n+1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Prova. Definindo $f = (f^n)_n \colon C_{1_{X^{\bullet}}} \to I(X^{\bullet})$ por

$$f^n:=\left(\begin{array}{cc} 1_X^{n+1} & d_X^n \\ 0 & 1_X^n \end{array}\right)\colon X^{n+1}\oplus X^n\to X^{n+1}\oplus X^n,$$

temos que f é um morfismo de complexos em que cada uma de suas componentes f^n é um isomorfismo em \mathcal{A} , cuja inversa é dada por

$$g^n := \left(\begin{array}{cc} 1_X^{n+1} & -d_X^n \\ 0 & 1_X^n \end{array} \right).$$

Logo, do Lema 1.5.1-(c), temos que f é um isomorfismo em $C^*(A)$.

Homotopia

Sejam $f, g: X^{\bullet} \to Y^{\bullet}$ dois morfismos em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Dizemos que f e g são homotópicos, e denotamos por $f \sim g$, se existe uma família $(s^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de morfismos $s^n: X^n \to Y^{n-1}$ em \mathcal{A} satisfazendo a igualdade

$$f^n - g^n = d_Y^{n-1} \circ s^n + s^{n+1} \circ d_X^n,$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Neste caso, diremos que a família $(s^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de morfismos é uma homotopia de f em g. Em particular, quando g for o morfismo zero de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ – veremos no Lema 1.5.10 que $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ é uma categoria aditiva –, diremos que f é homotópico a zero; que $(s^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ é uma homotopia de f; e escrevemos $f \sim 0$.

É fácil ver que \sim é uma relação de equivalência sobre os morfismos de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Além disso, se $f,g\colon X^\bullet\to Y^\bullet$ são homotópicos e $\alpha\colon W^\bullet\to X^\bullet$ e $\beta\colon X^\bullet\to W^\bullet$ são morfismos de complexos, então $f\circ\alpha\sim g\circ\alpha$ e $\beta\circ f\sim\beta\circ g$, sempre que $f\sim g$. De onde segue-se que temos bem-definida a composição de classes de equivalência de morfismos módulo homotopia, quando definimos a composição em seus representantes.

Então, definimos a categoria de homotopia de complexos, denotada aqui por $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, da seguinte forma:

- $Ob \mathcal{K}(\mathcal{A}) := Ob \mathcal{C}(\mathcal{A});$
- $\operatorname{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X^{\bullet}, Y^{\bullet}) := \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(X^{\bullet}, Y^{\bullet}) / \sim$, para todo $X^{\bullet}, Y^{\bullet} \in \operatorname{Ob} \mathcal{K}(\mathcal{A})$.

As categorias de homotopia das categorias $C^-(A)$, $C^+(A)$ e $C^b(A)$ serão denotadas por $K^-(A)$, $K^+(A)$ e $K^b(A)$, respectivamente.

Exemplo 1.5.4 Seja $X^{\bullet} = (X^n, d_X^n) \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$ tal que o diferencial $d_X^0 : X^0 \to X^1$ é um isomorfismo em \mathcal{A} e $X^n = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1\}$. Então, o morfismo identidade de X^{\bullet} é homotópico a zero. De fato, definindo a família $(s^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de morfismos $s^n : X^n \to X^{n-1}$ em \mathcal{A} como sendo $s^1 : X^1 \to X^0$ a inversa de d_X^0 e $s^n := 0$ para todo $n \neq 1$, temos que

$$d_X^{n-1} \circ s^n + s^{n+1} \circ d_X^n = \begin{cases} 1_X^n, & se \ n \in \{0, 1\} \\ 0, & se \ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\} \end{cases},$$

isto \acute{e} , $(s^n)_{n\in\mathbb{Z}} \acute{e}$ uma homotopia de $1_{X^{\bullet}}$.

Assim, na categoria de homotopia $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ o morfismo identidade $1_{X^{\bullet}}$ é igual ao morfismo zero. Em particular, $X^{\bullet} \cong 0$ em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ (veremos no Lema 1.5.10 que $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ é uma categoria aditiva).

No caso em que $X^0=X=X^1$ e $d_X^0=1_X$, denotamos o complexo X^{ullet} acima por \overline{X} .

$$\overline{X}: \quad \cdots \to 0 \longrightarrow X \stackrel{1}{\longrightarrow} X \longrightarrow 0 \to \cdots$$

Diremos que um complexo X^{\bullet} sobre \mathcal{A} é homotopicamente nulo se o morfismo identidade $1_{X^{\bullet}}$ é homotopicamente nulo. Mostraremos no Lema 2.4.10 uma bem conhecida caracterização destes objetos, quando são indecomponíveis em $\mathcal{C}^{-}(\mathcal{P})$.

Cohomologia de complexos e quase isomorfismos

Sejam R um anel associativo com 1, A uma subcategoria plena aditiva de Mod R e $X^{\bullet} = (X^n, d_X^n)$ um complexo em $\mathcal{C}(A)$. Definimos a n-ésima cohomologia $H^n(X^{\bullet})$ do complexo X^{\bullet} como sendo o quociente em Mod R

$$\mathrm{H}^n(X^{ullet}) := rac{\mathrm{Nuc}\, d_X^n}{\mathrm{Im}\, d_X^{n-1}}.$$

Note que se $f \colon X^{\bullet} \to Y^{\bullet}$ é um morfismo de complexos, então

$$f^n(\operatorname{Nuc} d_X^n) \subseteq \operatorname{Nuc} d_Y^n \quad \text{e} \quad f^n(\operatorname{Im} d_X^{n-1}) \subseteq \operatorname{Im} d_Y^{n-1}, \ \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Em particular, para cada $n \in \mathbb{Z}$, existe um morfismo induzido de f, denotado aqui por $H^n(f): H^n(X^{\bullet}) \to H^n(Y^{\bullet})$, que associa cada classe \overline{x} de $H^n(X^{\bullet})$ a classe $\overline{f(x)}$ de $H^n(Y^{\bullet})$.

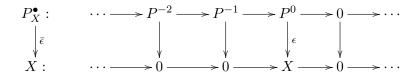
O resultado abaixo, cuja prova pode ser encontrada na página 18 do livro "An introduction

to homological algebra", [Wei08], mostra que também estão bem definidos os morfismos $H^n(f)$ para um dado morfismo f na categoria de homotopia $\mathcal{K}(\mathcal{A})$.

Lema 1.5.5 Sejam $f, g: X^{\bullet} \to Y^{\bullet}$ dois morfismos em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ que são homotópicos. Então, $H^n(f) = H^n(g)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Definição 1.5.6 Diremos que um morfismo $f: X^{\bullet} \to Y^{\bullet}$ de complexos, em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ ou em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, é um quase isomorfismo quando $H^n(f): H^n(X^{\bullet}) \to H^n(Y^{\bullet})$ for um isomorfismo em $\operatorname{Mod} R$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 1.5.7 Sejam Λ uma k-álgebra de dimensão finita e $\mathcal{A} = \operatorname{mod} \Lambda$. Então, para um dado $X \in \operatorname{mod} \Lambda$, a cobertura projetiva $\epsilon \colon P^0 \to X$ induz um morfismo de complexos $\bar{\epsilon}$ entre uma resolução projetiva P_X^{\bullet} de X e o complexo concentrado em X no grau zero.



Dado que $\mathrm{H}^n(P_X^{\bullet})=0=\mathrm{H}^n(X)$, para todo $n\neq 0$, e $\mathrm{H}^0(P_X^{\bullet})\cong X\cong \mathrm{H}^0(X)$, então o morfismo $\bar{\epsilon}\colon P_X^{\bullet}\to X$ é um quase isomorfismo.

Denotamos por $\mathcal{C}^{-,b}(\mathcal{A})$ e $\mathcal{C}^{+,b}(\mathcal{A})$ as subcategorias plenas de $\mathcal{C}^{-}(\mathcal{A})$ e $\mathcal{C}^{+}(\mathcal{A})$, respectivamente, cujos complexos possuem apenas uma quantidade finita de cohomologias não nulas. E por $\mathcal{K}^{-,b}(\mathcal{A})$ e $\mathcal{K}^{+,b}(\mathcal{A})$ suas respectivas categorias de homotopia.

Complexos radicais

Sejam R um anel associativo com unidade 1 e $\mathcal{A} = \operatorname{Mod} R$. Dizemos que um homomorfismo $f \colon X \to Y$ em \mathcal{A} é um morfismo radical se $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{rad} Y$; e que um complexo $X^{\bullet} = (X^n, d_X^n)$ em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ é um complexo radical se cada um dos seus diferenciais é um morfismo radical, isto é, se $\operatorname{Im} d_X^n \subseteq \operatorname{rad} X^{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

É bem conhecido que se $f: X \to Y$ é um homomorfismo de R-módulos, então a imagem de rad X por f está contida em rad Y, isto é, $f(\operatorname{rad} X) \subseteq \operatorname{rad} Y$ (veja, por exemplo, Proposição 9.14 de [AF92]). Os dois resultados abaixo seguem diretamente deste fato.

Lema 1.5.8 Seja $f = (f^n)_n \colon X^{\bullet} \to Y^{\bullet}$ um morfismo em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, onde X^{\bullet} e Y^{\bullet} são complexos radicais. Se existe uma homotopia $(s^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de f, então cada $f^n = d_Y^{n-1} \circ s^n + s^{n+1} \circ d_X^n$ é um morfismo radical.

Prova. Seja $n \in \mathbb{Z}$. Então,

$$f^{n}(X^{n}) = [d_{Y}^{n-1} \circ s^{n}](X^{n}) + [s^{n+1} \circ d_{X}^{n}](X^{n})$$

$$\subseteq \operatorname{rad} Y^{n} + s^{n+1}(\operatorname{rad} X^{n+1})$$

$$\subseteq \operatorname{rad} Y^{n} + \operatorname{rad} Y^{n}$$

$$= \operatorname{rad} Y^{n}.$$

Lema 1.5.9 (a) Se $\iota = (\iota^n)_n \colon Y^{\bullet} \to X^{\bullet}$ é uma seção em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ e X^{\bullet} é um complexo radical, então Y^{\bullet} também é radical.

(b) Se $\pi = (\pi^n)_n \colon X^{\bullet} \to Y^{\bullet}$ é uma retração em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ e X^{\bullet} é um complexo radical, então Y^{\bullet} também é radical.

Prova. Provaremos somente (a). A prova do item (b) é análoga.

Dado que $\iota \colon Y^{\bullet} \to X^{\bullet}$ é uma seção em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, existe um morfismo $p = (p^n)_n \colon X^{\bullet} \to Y^{\bullet}$ em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ tal que $p \circ \iota = 1_{Y^{\bullet}}$. Em particular, $p^n \circ \iota^n = 1_Y^n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Juntando isto ao fato de X^{\bullet} ser radical, temos que

$$d_Y^n(Y^n) = p^{n+1} \circ \iota^{n+1} \circ d_Y^n(Y^n) = p^{n+1} \circ d_X^n \circ \iota^n(Y^n) \subseteq p^{n+1}(\operatorname{rad} X^{n+1}) \subseteq \operatorname{rad} Y^{n+1}.$$

Algumas propriedades de C(A) e K(A)

Apresentamos agora algumas das propriedades das categorias de complexos e de homotopia de complexos que são herdadas da categoria \mathcal{A} . Veremos, por exemplo, que tais categorias são aditivas e, então, usaremos os resultados da Seção 1.3 para mostrar que $\mathcal{C}^b(\mathcal{A})$ e $\mathcal{K}^b(\mathcal{A})$ são categorias Krull-Schmidt, para $\mathcal{A} \in \{ \text{mod } \Lambda, \text{proj } \Lambda \}$, onde Λ é uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo k.

Proposição 1.5.10 (a) $C^*(A)$ é uma categoria aditiva.

- (b) $\mathcal{K}^*(\mathcal{A})$ é uma categoria aditiva.
- (c) Se A é abeliana, então a categoria $C^*(A)$ também é abeliana.

Apesar do resultado acima ser bem conhecido e de sua prova constar em praticamente todo livro de Álgebra Homológica que aborde o tema, para conveniência do leitor resolvemos apresentar aqui um arcabouço com os principais elementos da demonstração dos itens (a) e (c). Aquele leitor interessado nos detalhes, poderá consultar, por exemplo: Teorema 1.2.3 de

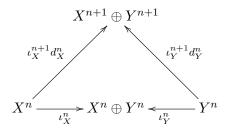
[Wei08]; Proposição 5.100 de [Rot09]; ou Proposições 1.4 (pag. 3) e 2.5 (pag. 9) de [HJ10]. Já a prova do item (b), poderá ser encontrada na Proposição 1.7 (pag. 5) de [HJ10].

Esquema da Prova: (a) Seja A uma categoria aditiva.

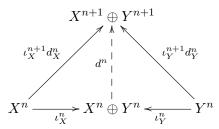
- (A2) O objeto zero em $\mathcal{C}^*(\mathcal{A})$ é o complexo $(0_{\mathcal{A}}, d)$, onde $0_{\mathcal{A}}$ é o objeto zero de \mathcal{A} e todos os diferenciais são o único morfismo zero sobre o objeto zero de \mathcal{A} .
- (A3-4) Para cada par de morfismos $f = (f^n)_n$ e $g = (g^n)_n$ em $\mathcal{C}^*(\mathcal{A})$, definimos a adição f + g da seguinte forma:

$$(f+g)^n := f^n + g^n$$
, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

(A1) Para cada par de complexos $X^{\bullet}, Y^{\bullet} \in \mathcal{C}^*(\mathcal{A})$, definimos $X^{\bullet} \oplus Y^{\bullet}$ em $\mathcal{C}^*(\mathcal{A})$ como sendo $(X^n \oplus Y^n, d^n)_n$, onde cada diferencial d^n é obtido da seguinte forma: sejam $\iota_X^n \colon X^n \to X^n \oplus Y^n$ e $\iota_Y^n \colon Y^n \to X^n \oplus Y^n$ as inclusões canônicas da soma direta de X^n e Y^n em \mathcal{A} . Logo, do diagrama



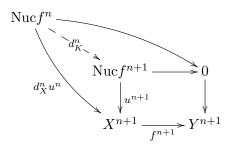
existe um único morfismo $d^n \colon X^n \oplus Y^n \longrightarrow X^{n+1} \oplus Y^{n+1}$ fazendo comutar o diagrama seguinte.



Definido desta forma, temos que $X^{\bullet} \oplus Y^{\bullet} := (X^n \oplus Y^n, d^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ é um objeto de $\mathcal{C}^*(\mathcal{A})$ e o conjunto $\{\iota_X := (\iota_X^n)_n \colon X^{\bullet} \to X^{\bullet} \oplus Y^{\bullet}, \iota_Y := (\iota_Y^n)_n \colon Y^{\bullet} \to X^{\bullet} \oplus Y^{\bullet}\}$ satisfaz a propriedade universal da soma direta.

- (c) Seja \mathcal{A} uma categoria abeliana.
- (Ab1) Segue de (a) que $C^*(A)$ é aditiva.
- (Ab2) Para cada morfismo $f = (f^n)_n \colon X^{\bullet} \to Y^{\bullet}$ em $\mathcal{C}^*(\mathcal{A})$, definimos um núcleo de f como sendo $\operatorname{Nuc} f := (\operatorname{Nuc} f^n, d_K^n)$ e $u := (u^n \colon \operatorname{Nuc} f^n \to X^n)_n \colon \operatorname{Nuc} f \to X^{\bullet}$, onde cada u^n é o núcleo de $f^n \colon X^n \to Y^n$ em \mathcal{A} e cada diferencial d_K^n é o único morfismo fazendo o

diagrama seguinte comutativo.



De forma análoga, constrói-se o conúcleo $p: Y^{\bullet} \to \operatorname{Conuc} f$. E, finalmente, o isomorfismo do morfismo induzido $\bar{f}: \operatorname{Conuc} u \to \operatorname{Nuc} p$ segue do isomorfismo de cada $\overline{f^n}: \operatorname{Conuc} u^n \to \operatorname{Nuc} p^n$ (vide Lema 1.5.1-(c)).

Observação 1.5.11 (a) Quando $A = \operatorname{Mod} R$, onde R é um anel associativo com unidade, a soma direta de dois complexos X^{\bullet} e Y^{\bullet} , em $C^{*}(A)$, é o complexo $(X^{n} \oplus Y^{n}, d^{n})_{n \in \mathbb{Z}}$ onde cada diferencial d^{n} é dado por

$$d^{n}(x^{n}, y^{n}) = (d^{n}_{X}(x^{n}), d^{n}_{Y}(y^{n})), \ para \ x^{n} \in X^{n} \ e \ y^{n} \in Y^{n},$$

ou, na forma matricial, por

$$d^n = \left(\begin{array}{cc} d_X^n & 0\\ 0 & d_Y^n \end{array}\right).$$

Além disso, os morfismos $\iota_X \colon X^{\bullet} \to X^{\bullet} \oplus Y^{\bullet}$ e $\iota_Y \colon Y^{\bullet} \to X^{\bullet} \oplus Y^{\bullet}$ são inclusões. Vale o mesmo para quando \mathcal{A} é uma das subcategorias: mod R, Proj R ou proj R.

(b) Ainda quando A = Mod R, temos que a soma direta de complexos radicais é um complexo radical e segue do Lema 1.5.9 que somando direto de complexo radical também é um complexo radical.

Teorema de Krull-Schmidt em $C^b(A)$ e $K^b(A)$

Lema 1.5.12 Seja \mathcal{A} uma categoria aditiva. Então, todo idempotente de $\mathcal{C}^*(\mathcal{A})$ cinde se e somente se todo idempotente de \mathcal{A} cinde.

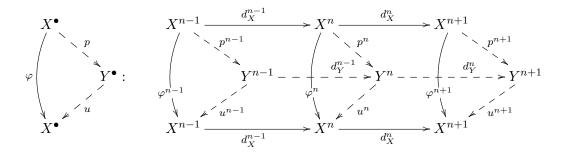
Prova. Se todo idempotente de $\mathcal{C}^*(\mathcal{A})$ cinde, então vendo os objetos de \mathcal{A} como complexos concentrados em grau zero, tem-se que todo idempotente de \mathcal{A} cinde. Reciprocamente, suponha que todo idempotente de \mathcal{A} cinde e seja $\varphi = (\varphi^n)_n \colon X^{\bullet} \to X^{\bullet}$ um idempotente de $\mathcal{C}^*(\mathcal{A})$. Logo, cada uma das componentes $\varphi^n \colon X^n \to X^n$ é um idempotente em \mathcal{A} e, por hipótese, cinde. Isto é, para cada $n \in \mathbb{Z}$, existem morfismos $u^n \colon Y^n \to X^n$ e $p^n \colon X^n \to Y^n$ tais que $\varphi^n = u^n \circ p^n$ e $p^n \circ u^n = 1_{Y^n}$. Se para cada $n \in \mathbb{Z}$, definimos o morfismo $d_Y^n := p^{n+1} \circ d_X^n \circ u^n \colon Y^n \to Y^{n+1}$, temos que:

(i) $Y^{\bullet} := (Y^n, d_Y^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ é um complexo em $\mathcal{C}^*(\mathcal{A})$;

(ii) $u:=(u^n)_n\colon Y^\bullet\to X^\bullet$ e $p:=(p^n)_n\colon X^\bullet\to Y^\bullet$ são morfismos de complexos; e

(iii)
$$u \circ p = \varphi \in p \circ u = 1_{Y^{\bullet}}$$
.

De fato, o item (iii) é trivial e os outros itens seguem das contas abaixo.



Para cada $n \in \mathbb{Z}$, temos:

$$\begin{array}{ll} d_Y^n \circ d_Y^{n-1} & = & (p^{n+1} \circ d_X^n \circ u^n) \circ (p^n \circ d_X^{n-1} \circ u^{n-1}) \\ & = & p^{n+1} \circ d_X^n \circ \varphi^n \circ d_X^{n-1} \circ u^{n-1} \\ & = & p^{n+1} \circ d_X^n \circ d_X^{n-1} \circ \varphi^{n-1} \circ u^{n-1} \\ & = & 0, \end{array}$$

Sejam \mathcal{A} uma k-categoria aditiva e $X^{\bullet}, Y^{\bullet} \in \mathcal{C}^*(\mathcal{A})$. Então, a estrutura de k-espaço vetorial de cada conjunto de morfismos $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X^n, Y^n)$, onde a composição de morfismos é uma aplicação k-bilinear, induz naturalmente uma estrutura de k-espaço vetorial para o conjunto de morfismos de complexos $\operatorname{Hom}(X^{\bullet}, Y^{\bullet})$, onde a composição de morfismos também é uma aplicação k-bilinear. Em outras palavras, $\mathcal{C}^*(\mathcal{A})$ é uma k-categoria aditiva sempre que \mathcal{A} o for. E se além disso \mathcal{A} for uma categoria Hom-finita, então $\mathcal{C}^b(\mathcal{A})$ também o é. De fato, para cada par de objetos $X^{\bullet}, Y^{\bullet} \in \mathcal{C}^b(\mathcal{A})$, existe apenas uma quantidade finita de inteiros em que $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X^n, Y^n) \neq 0$. E por \mathcal{A} ser $\operatorname{Hom-finita}$, cada um destes conjuntos de morfismos

é um k-espaço vetorial de dimensão finita. Logo,

$$\dim_k \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^b(\mathcal{A})}(X^{\bullet}, Y^{\bullet}) \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \dim_k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X^n, Y^n) < \infty,$$

ou seja, $\mathcal{C}^b(\mathcal{A})$ é uma categoria Hom-finita. Resumimos esta discussão no lema abaixo.

Lema 1.5.13 (a) Se A é uma k-categoria aditiva, então $C^*(A)$ é uma k-categoria aditiva.

(b) Se \mathcal{A} é uma k-categoria aditiva Hom-finita, então $\mathcal{C}^b(\mathcal{A})$ é uma k-categoria aditiva Hom-finita.

Proposição 1.5.14 Se Λ uma k-álgebra de dimensão finita, então $C^b(\text{mod }\Lambda)$ e $C^b(\text{proj }\Lambda)$ são k-categorias Hom-finita Krull-Schmidt.

Prova. Dado que mod Λ e proj Λ são k-categorias Hom-finita em que todo idempotente cinde (vide Exemplo 1.3.9), então $\mathcal{C}^b(\text{mod }\Lambda)$ e $\mathcal{C}^b(\text{proj }\Lambda)$ são k-categorias Hom-finita (pelo Lema 1.5.13) em que todo idempotente cinde (pelo Lema 1.5.12). E, portanto, são Krull-Schmidt pelo Corolário 1.3.7.

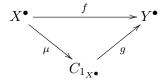
É conhecido que a categoria de homotopia $\mathcal{K}^*(\mathcal{A})$ pode ser vista, também, como a categoria estável da categoria de complexos por uma subcategoria plena de $\mathcal{C}^*(\mathcal{A})$. Vejamos abaixo uma ideia de como podemos chegar a este fato. Caso o leitor se interesse pelos detalhes, basta consultar, por exemplo, as páginas 27 e 28 de [Hap88]. Teremos como consequência imediata que $\mathcal{K}^b(\mathcal{A})$ é Krull-Schmidt, para $\mathcal{A} \in \{ \text{mod } \Lambda, \text{proj } \Lambda \}$.

Lema 1.5.15 Sejam \mathcal{A} uma categoria aditiva e $f = (f^n)_n \colon X^{\bullet} \to Y^{\bullet}$ um morfismo em $\mathcal{C}^*(\mathcal{A})$. Então, f é homotópico a zero se e somente se f se fatora através do morfismo canônico $\mu \doteq \mu_{1_X \bullet} \colon X^{\bullet} \to C_{1_X \bullet}$, onde $C_{1_X \bullet}$ é o cone do morfismo identidade de X^{\bullet} .

Prova. Suponha que $f: X^{\bullet} \to Y^{\bullet}$ é homotópico a zero e considere $(s^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ uma homotopia de f. Definindo $g = (g^n)_n : C_{1_{X^{\bullet}}} \to Y^{\bullet}$ por

$$g^n := (s^{n+1} \ f^n) \colon X^{n+1} \oplus X^n \to Y^n,$$

temos que g é um morfismo de complexos que faz o diagrama seguinte comutar.



Isto completa a primeira parte. Reciprocamente, se $g=(g^n)_n\colon C_{1_{X^{\bullet}}}\to Y^{\bullet}$ é um morfismo em $\mathcal{C}^*(\mathcal{A})$ tal que $g\circ \mu=f$, então, para cada $n\in\mathbb{Z},\ g^n=(g_1^{n+1}\ g_2^n)\colon X^{n+1}\oplus X^n\to Y^n$ é

1.6

tal que

$$f^n = g^n \circ \mu^n = (g_1^{n+1} \ g_2^n) \begin{pmatrix} 0 \\ 1_X^{n+1} \end{pmatrix} = g_2^n$$

e daí,

$$g^n \circ d^n_{C_{1_X \bullet}} = d^n_Y \circ g^{n-1} \Leftrightarrow -g^{n+1}_1 \circ d^n_X + f^n = d^n_Y \circ g^n_1,$$

isto é, $f \sim 0$ onde $(g_1^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ é uma homotopia de f.

Sejam \mathcal{A} uma k-categoria aditiva e \mathcal{D} um subcategoria plena aditiva de $\mathcal{C}^*(\mathcal{A})$ cujos objetos são da forma

$$I^{\bullet}(X) := (X^{n+1} \oplus X^n, \iota^n)_{n \in \mathbb{Z}}, \text{ onde } \iota^n := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{X^{n+1}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Seguindo a notação do Exemplo 1.3.10, considere $\mathcal{I}_{\mathcal{D}}$ o ideal de $\mathcal{C}^*(\mathcal{A})$ dado pela classe dos morfismos em $\mathcal{C}^*(\mathcal{A})$ que se fatora por algum objeto de \mathcal{D} . Usando os Lemas 1.5.15 e 1.5.3, temos que o quociente aditivo de $\mathcal{C}^*(\mathcal{A})$ por \mathcal{D} , que denotamos por $\mathcal{C}^*(\mathcal{A})/\mathcal{I}_{\mathcal{D}}$, é igual a categoria de homotopia $\mathcal{K}^*(\mathcal{A})$.

Juntando estas considerações à Proposição 1.5.14 e ao Lema 1.3.11, obtemos o seguinte bem conhecido resultado.

Proposição 1.5.16 Se Λ uma k-álgebra de dimensão finita, então as categorias de homotopia $\mathcal{K}^b(\operatorname{mod} \Lambda)$ e $\mathcal{K}^b(\operatorname{proj} \Lambda)$ são k-categorias Hom-finita Krull-Schmidt.

1.6 Triângulos na categoria de homotopia

Apesar da noção de categoria triangulada ser fundamental no Capítulo 3 e em alguns momentos do Capítulo 2, não usaremos as ferramentas, em si, desta classe de categorias. De modo que vamos no restringir a uma apresentação da definição de categoria triangulada e, mais especificamente, mostrar os triângulos da categoria de homotopia. Nossa apresentação se baseia em [HJ10] e [Alv14]. Além destes textos, sugerimos os livros Triangulated Categories ([Nee01]) e Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras ([Hap88]) àquele leitor interessado num estudo aprofundado da noção de categoria triangulada.

Categoria triangulada

Sejam \mathcal{A} uma categoria aditiva e $T: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ um funtor aditivo que é um automorfismo de \mathcal{A} . Um $tri\hat{a}ngulo$ em \mathcal{A} é uma sequência de objetos e morfismos em \mathcal{A} da forma

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X).$$

Um morfismo de triângulos é uma tripla (f,g,h) de morfismos em \mathcal{A} fazendo o diagrama

seguinte comutativo em A.

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X)$$

$$\downarrow f \qquad \downarrow g \qquad \downarrow h \qquad \downarrow T(f)$$

$$X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} T(X')$$

Se, neste caso, os morfismos f, g e h são isomorfismos em \mathcal{A} , dizemos que o morfismo de triângulos (f, g, h) é um isomorfismo de triângulos.

Definição 1.6.1 Uma categoria triangulada é uma categoria aditiva munida de um automorfismo aditivo $T: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ e uma família de triângulos distinguidos satisfazendo os seguintes axiomas:

- (TR0) Qualquer triângulo isomorfo a um triângulo distinguido é também um trinângulo distinguindo;
- (TR1) Para qualquer objeto $X \in \mathcal{A}$, o triângulo $X \xrightarrow{1_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow T(X)$ é um triângulo distinguido;
- (TR2) Para qualquer morfismo $u: X \to Y$ em \mathcal{A} existe um triângulo distinguido da forma $X \xrightarrow{u} Y \longrightarrow Z \longrightarrow T(X);$
- (TR3) Um triângulo $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X)$ é um triângulo distinguido se e somente se o triângulo $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X) \xrightarrow{-T(w)} T(Y)$ também é um triângulo distinguido;
- (TR4) Dados dois triângulos distinguidos $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X)$ e $X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} T(X')$, cada diagrama comutativo

$$\begin{array}{cccc} X \stackrel{u}{\longrightarrow} Y \stackrel{v}{\longrightarrow} Z \stackrel{w}{\longrightarrow} T(X) \\ \downarrow^f & \downarrow^g & \downarrow^{T(f)} \\ X' \stackrel{u'}{\longrightarrow} Y' \stackrel{v'}{\longrightarrow} Z' \stackrel{w'}{\longrightarrow} T(X') \end{array}$$

pode ser completado a um morfismo de triângulos; e

(TR5) Dados os triângulos distinguidos $X \xrightarrow{u} Y \longrightarrow Z' \longrightarrow T(X), \ Y \xrightarrow{v} Z \longrightarrow X' \longrightarrow T(Y) \ e \ X \xrightarrow{vu} Z \longrightarrow Y' \longrightarrow T(X), \ existe \ um \ triângulo \ distinguido \ Z' \longrightarrow Y' \longrightarrow X' \longrightarrow T(Z') \ fazendo \ o \ seguinte$

diagrama comutativo.

$$X \xrightarrow{u} Y \longrightarrow Z' \longrightarrow T(X)$$

$$\parallel \qquad \qquad \downarrow^{v} \qquad \qquad \parallel$$

$$X \xrightarrow{vu} Z \longrightarrow Y' \longrightarrow T(X)$$

$$\downarrow^{u} \qquad \qquad \downarrow^{T(u)}$$

$$Y \xrightarrow{v} Z \longrightarrow X' \longrightarrow T(Y)$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$Z' \longrightarrow Y' \longrightarrow X' \longrightarrow T(Z')$$

Proposição 1.6.2 Sejam A uma categoria triangulada e

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X)$$

$$\downarrow f \qquad \downarrow g \qquad \downarrow h \qquad \downarrow T(f)$$

$$X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} T(X')$$

um morfismo de triângulos distinguidos. Se quaisquer dois dos três morfismos f, g e h são isomorfismos, então o terceiro morfismo também é um isomorfismo. Neste caso, (f, g, h) é um isomorfismo de triângulos.

Equivalência triangulada

Sejam \mathcal{A} e \mathcal{A}' duas categorias trianguladas com automorfismos T e T', respectivamente. Um funtor aditivo $F\colon \mathcal{A}\to \mathcal{A}'$ é chamado exato se leva triângulo distinguido de \mathcal{A} em triângulo distinguido de \mathcal{A}' , no seguinte sentido: existe um isomorfismo natural $\Psi\colon F\circ T\to T'\circ F$ tal que dado um triângulo distinguido $X\stackrel{u}{\longrightarrow} Y\stackrel{v}{\longrightarrow} Z\stackrel{w}{\longrightarrow} T(X)$ em \mathcal{A} , então

$$F(X) \xrightarrow{F(u)} F(Y) \xrightarrow{F(v)} F(Z) \xrightarrow{\Psi_X F(w)} T'(F(X))$$

é um triângulo distinguido em \mathcal{A}' . Se um funtor exato $F \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ é uma equivalência de categorias, dizemos que F é uma equivalência de categorias trianguladas. É conhecido que um quase inverso de uma equivalência triangulada também é uma equivalência triangulada (vide, por exemplo, pag. 4 de [Hap88]).

Estrutura triangulada da categoria de homotopia

Vimos na Seção 1.5 que a categoria de homotopia de complexos $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, sobre uma categoria aditiva \mathcal{A} , é uma categoria aditiva. Descrevemos agora uma família de triângulos em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ que dão uma estrutura de categoria triangulada a esta categoria. Para tanto precisamos do resultado seguinte, o qual mostra que podemos estender à categoria de homotopia o

funtor translação [p] de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ e a sequência de objetos e morfismos

$$X^{\bullet} \xrightarrow{f} Y^{\bullet} \xrightarrow{\mu_f} C_f \xrightarrow{\pi_f} X^{\bullet}[1],$$

descrita na expressão (1.2) da Seção 1.5.

Lema 1.6.3 Sejam $f, g: X^{\bullet} \to Y^{\bullet}$ dois morfismos em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ tais que $f \sim g$. Então,

- (a) $f[p] \sim g[p] \ e \ [p] \ \acute{e} \ um \ automorfismo \ aditivo \ de \ \mathcal{K}(\mathcal{A}), \ para \ todo \ p \in \mathbb{Z}; \ e$
- (b) existe um isomorfismo em C(A) do cone de f no cone de g, digamos $h: C_f \to C_g$, fazendo o diagrama seguinte comutar em K(A).

Prova. (b) Por hipótese, existe uma homotopia $(s^n : X^n \to Y^{n-1})_{n \in \mathbb{Z}}$ de f em g. Então, definindo $h : C_f \to C_g$ por

$$h^n:=\left(\begin{array}{cc}1_X^{n+1}&0\\-s^{n+1}&1_Y^n\end{array}\right)\colon X^{n+1}\oplus Y^n\to X^{n+1}\oplus Y^n,$$

temos que h é um morfismo de complexos onde cada componente h^n é um isomorfismo em \mathcal{A} , cuja inversa é dada por

$$(h^n)^{-1} := \begin{pmatrix} 1_X^{n+1} & 0 \\ s^{n+1} & 1_Y^n \end{pmatrix} : X^{n+1} \oplus Y^n \to X^{n+1} \oplus Y^n.$$

Logo, pelo Lema 1.5.1, $h: C_f \to C_g$ é um isomorfismo em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Além disso, é fácil ver que $h \circ \mu_f = \mu_g$ e $\pi_g \circ h = \pi_f$. Em particular, o diagrama do enunciado comuta em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$.

Definição 1.6.4 Seja $f: X^{\bullet} \to Y^{\bullet}$ um morfismo em $\mathcal{C}(A)$. Chamamos a sequência de objetos e morfismos

$$X^{\bullet} \xrightarrow{f} Y^{\bullet} \xrightarrow{\mu_f} C_f \xrightarrow{\pi_f} X^{\bullet}[1]$$

de triângulo padrão em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ ligado à f. Um triângulo distinguido $em \mathcal{K}(\mathcal{A})$ é uma sequência de objetos e morfismos em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$,

$$X^{\bullet} \xrightarrow{u} Y^{\bullet} \xrightarrow{v} Z^{\bullet} \xrightarrow{w} X^{\bullet}[1],$$

que é isomorfo (em K(A)) a um triângulo padrão.

Note que apesar de morfismos homotópicos em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ não "produzirem" necessariamente o mesmo triângulo padrão, podemos garantir pelo Lema 1.6.3-(b) que tais triângulos são

42 CONCEITOS BÁSICOS 1.7

isomorfos em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$. De modo que a família de triângulos distinguidos de $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ está bem definida. Portanto, a categoria de homotopia $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ quando munida do funtor translação T := [1] e da classe de triângulos distinguidos é uma categoria triangulada. Uma prova para este fato pode ser encontrada, por exemplo, no Teorema 6.7 de [HJ10].

Com a mesma estrutura dada acima, também são trianguladas as categorias de homotopia $\mathcal{K}^{-}(\mathcal{A}), \mathcal{K}^{+}(\mathcal{A}), \mathcal{K}^{-,b}(\mathcal{A}), \mathcal{K}^{+,b}(\mathcal{A})$ e $\mathcal{K}^{b}(\mathcal{A})$.

1.7 Categorias derivadas

Uma classe importante de categorias trianguladas é formada pelas categorias derivadas de categorias abelianas. Tais categorias são obtidas das categorias de homotopia de complexos por um processo de localização com respeito aos quase isomorfismos. Em outras palavras, por um processo formal que torna invertível todos os quase isomorfismos da categoria de homotopia.

Como na seção anterior, o que se segue é baseado em [HJ10] e [Alv14]. Não vamos descrever, formalmente, os morfismos da categoria derivada, uma vez que não vamos precisar manipulá-los neste trabalho. Este também é motivo pelo qual não iremos falar sobre localização de categorias. Ao leitor interessado numa descrição formal dos morfismos categoria derivada e/ou no estudo de localização de categorias, sugerimos, além das referências supracitadas, o Capítulo 10 de [Wei08] ou os clássicos "Residues and Duality", [Har66](Cap. 1), e "Catégories dérivées, état 0", [Ver77], aonde o leitor encontrará, além destes assuntos, formas diferentes (e equivalentes) de descrever a categoria derivada.

Definição

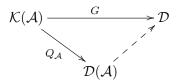
Nesta seção \mathcal{A} será uma **categoria abeliana** e $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ a categoria de homotopia de complexos sobre \mathcal{A} . Estamos particularmente interessados no caso em que $\mathcal{A} = \text{mod } \Lambda$, onde Λ é uma k-álgebra de dimensão finita. Neste caso, denotamos $\mathcal{K}(\text{mod }\Lambda)$ simplesmente por $\mathcal{K}(\Lambda)$.

Primeiro, observe que um morfismo de complexos f é um quase isomorfismo se e somente se todo morfismo que é homotópico a f é um quase isomorfismo (vide Lema 1.5.5). De modo que, a partir de agora, sempre que dissermos que um morfismo em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ é um quase isomorfismo estará subentendido que qualquer uma de suas classes de equivalência é um quase isomorfismo.

Teorema 1.7.1 ([HJ10], Teo. 7.10) Seja \mathcal{A} uma categoria abeliana. Então, existe uma categoria $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, chamada a categoria derivada de \mathcal{A} , e um funtor $Q_{\mathcal{A}} \colon \mathcal{K}(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(\mathcal{A})$, chamado funtor localização, satisfazendo as seguintes propriedades:

- (L1) Para todo quase isomorfismo s em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, $Q_{\mathcal{A}}(s)$ é um isomorfismo em $\mathcal{D}(\mathcal{A})$; e
- (L2) Todo funtor G de $\mathcal{K}(A)$ em uma categoria qualquer \mathcal{D} associando a todo quase isomor-

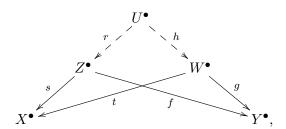
fismo de K(A) um isomorfismo em D, fatora-se unicamente sobre Q_A .



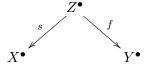
Note que a propriedade (L2) implica, em particular, que a categoria derivada é única a menos de equivalência de categorias.

Na prova do teorema acima define-se os objetos da categoria $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ como sendo os mesmos da categoria $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ e o funtor localização $Q_{\mathcal{A}}$ como sendo a identidade sobre os objetos de $\mathcal{K}(\mathcal{A})$. Logo, da propriedade (L1), podemos concluir que dois complexos X^{\bullet} e Y^{\bullet} são isomorfos como objetos da categoria derivada $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ sempre que existir um quase ismorfismo de complexos $s: X^{\bullet} \to Y^{\bullet}$.

Sobre os morfismos de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, podemos dizer, a grosso modo, o seguinte: um morfismo \bar{f} de X^{\bullet} para Y^{\bullet} na categoria derivada $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ pode ser representado por uma classe de equivalência de uma fração f/s, onde $f\colon Z^{\bullet}\to Y^{\bullet}$ é um morfismo em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ e $s\colon Z^{\bullet}\to X^{\bullet}$ um quase isomorfismo de $\mathcal{K}(\mathcal{A})$. Dizemos que duas frações f/s e g/t de X^{\bullet} para Y^{\bullet} são equivalentes se existe um diagrama comutativo da forma



onde $s \circ r$ é um quase isomorfismo (o que não significa que o par (r, h) é uma fração). Uma prova de que tal relação é de fato uma relação de equivalência pode ser encontrada, por exemplo, no Lema 2.2.1 de [Alv14]. Note que estamos visualizando cada fração f/s como um "telhado" da forma abaixo.



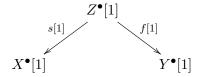
É conhecido que a categoria derivada $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ é uma categoria aditiva (vide, por exemplo, Proposição 7.15 de [HJ10]) e que o funtor localização $Q_{\mathcal{A}}$ é um funtor aditivo (vide, por exemplo, Corolário 10.3.11 de [Wei08]). Ingredientes estes necessários para definirmos a estrutura triangulada de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

Proposição 1.7.2 Seja \mathcal{A} uma categoria abeliana. Então, a categoria derivada $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ é uma categoria aditiva e o funtor localização $Q_{\mathcal{A}}$ é um funtor aditivo.

Triângulos em $\mathcal{D}(\mathcal{A})$

Podemos obter uma estrutura triangulada para a categoria derivada $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ quando "transportamos", via o funtor localização $Q_{\mathcal{A}} \colon \mathcal{K}(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(\mathcal{A})$, os triângulos da categoria de homotopia $\mathcal{K}(\mathcal{A})$.

O automorfismo T sobre $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ é definido como o funtor translação [1] sobre os objetos, ou seja, $T(X^{\bullet}) = X^{\bullet}[1]$ para todo objeto $X^{\bullet} \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, e para um morfismo $\bar{f} \colon X^{\bullet} \to Y^{\bullet}$ em $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, representado por uma fração f/s, definimos $T(\bar{f}) \doteq \bar{f}[1]$ como uma classe de equivalência do "telhado" seguinte.



Um triângulo em $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ é um triângulo distinguido se ele é isomorfo (em $\mathcal{D}(\mathcal{A})$) a imagem de um triângulo distinguido de $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ pelo funtor localização $Q_{\mathcal{A}}$.

A categoria derivada $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ quando munida do funtor T e da classe de triângulos distinguindos, como definidos acima, é uma categoria triangulada. Uma prova deste fato pode ser encontrada, por exemplo, no Teorema 7.18 de [HJ10]. Com esta mesma estrutura, também são trianguladas as categorias derevidas $\mathcal{D}^-(\mathcal{A}), \mathcal{D}^+(\mathcal{A})$ e $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ das categorias de homotopia $\mathcal{K}^-(\mathcal{A}), \mathcal{K}^+(\mathcal{A})$ e $\mathcal{K}^b(\mathcal{A})$, respectivamente.

$\mathcal{D}^{-}(\operatorname{mod}\Lambda)$ versus $\mathcal{K}^{-}(\operatorname{proj}\Lambda)$

Sejam $\mathcal{A} = \text{mod } \Lambda$ a categoria de módulos finitamente gerados sobre uma k-álgebra Λ de dimensão finita e $\mathcal{P} \doteq \text{proj } \Lambda$ a subcategoria plena de mod Λ dos módulos projetivos finitamente gerados. Denotamos a categoria de homotopia de complexos limitados inferiormente simplesmente por $\mathcal{K}^-(\Lambda)$; e por $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$ a categoria de homotopia da categoria $\mathcal{C}^-(\mathcal{P})$ de complexos limitados inferiomente sobre \mathcal{P} . Então, existe um funtor inclusão $\iota \colon \mathcal{K}^-(\mathcal{P}) \to \mathcal{K}^-(\Lambda)$. Denotando a categoria $\mathcal{D}^-(\text{mod } \Lambda)$ simplesmente por $\mathcal{D}^-(\Lambda)$ e o funtor localização de $\mathcal{K}^-(\Lambda)$ em $\mathcal{D}^-(\Lambda)$ por Q_Λ^- , temos um funtor $F \colon \mathcal{K}^-(\mathcal{P}) \to \mathcal{D}^-(\Lambda)$ dado pela composição $Q_\Lambda^- \circ \iota$. Como consequência direta da Proposição 1.7.2 e das definições dos triângulos distinguidos de $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$ e de $\mathcal{D}^-(\Lambda)$, tem-se que F é um funtor exato. E usando uma versão dual do Teorema III.5.21 do livro "Methods of Homological Algebra", [GM03], temos o seguinte (bem conhecido) resultado.

Teorema 1.7.3 O funtor $F: \mathcal{K}^-(\mathcal{P}) \to \mathcal{D}^-(\Lambda)$ é uma equivalência de categorias trianguladas.

No próximo capítulo apresentamos uma prova da densidade do funtor F, a qual será útil no desenvolmento daquele capítulo.

Capítulo 2

Complexidade na categoria derivada

Apresentaremos, neste capítulo, uma definição de complexidade na categoria derivada (limitada superiormente) da categoria de módulos sobre uma k-álgebra de dimensão finita. Veremos que nossa definição contempla a noção de complexidade como definida na categoria de módulos e que algumas propriedades de complexidade de módulos podem ser reproduzidas em objetos da categoria derivada. Por exemplo, daremos uma caracterização para os objetos da categoria derivada que têm complexidade menor do que ou igual a 1. Em particular, veremos que os objetos indecomponíveis da categoria derivada limitada que têm complexidade zero são justamente aqueles que são finais de triângulos de Auslander-Reiten. Nosso principal resultado, que é mostrado na última seção, trata de uma conexão entre a complexidade de objetos indecomponíveis da categoria derivada e a dimensão global forte da respectiva álgebra.

Ao longo do capítulo, Λ denotará uma álgebra não semisimples e de dimensão finita sobre um corpo k (não necessariamente algebricamente fechado); mod Λ a categoria de Λ -módulos finitamente gerados; $\mathcal{P} \doteq \operatorname{proj} \Lambda$ a subcategoria plena de mod Λ cujos objetos são módulos projetivos; $\mathcal{C}(\mathcal{P})$ e $\mathcal{K}(\mathcal{P})$ as categorias de complexos e de homotopia, respectivamente, sobre \mathcal{P} ; $\mathcal{D}(\Lambda)$ a categoria derivada de mod Λ ; pd M a dimensão projetiva de $M \in \operatorname{mod} \Lambda$; e gl.dim Λ a dimensão global da álgebra Λ .

Começaremos lembrando a definição de complexidade de sequências de inteiros não negativos e, em seguida, de módulos finitamente gerados sobre uma álgebra A de Artin.

Definição. Seja $(b_i)_i$ uma sequência de inteiros não negativos. Dizemos que a complexidade de $(b_i)_i$ é no máximo n, e escrevemos $\operatorname{cx}(b_i) \leq n$, se existe $c \in \mathbb{Q}$ tal que

$$b_i \leq c \cdot i^{n-1}$$
, para todo $i \in \mathbb{N}$ suficientemente grande $(i \gg 0)$.

Se $\operatorname{cx}(b_i) \leq n \ mas \ \operatorname{cx}(b_i) \nleq n-1$, dizemos que a sequência $(b_i)_i$ tem complexidade igual a n e escrevemos $\operatorname{cx}(b_i) = n$. Finalmente, dizemos que a complexidade de $(b_i)_i$ é infinita, e escrevemos $\operatorname{cx}(b_i) = \infty$, se tal n não existe.

Para uma dada uma álgebra de Artin A, definimos a complexidade de um A-módulo finitamente gerado M como sendo a complexidade da sequência dos números de Betti de M.

Mais precisamente, seja

$$P_M: \cdots \longrightarrow P^2 \xrightarrow{d_2} P^1 \xrightarrow{d_1} P^0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$
 (2.1)

uma resolução projetiva minimal de $M \in \text{mod } A$. Então, o i-ésimo número de Betti de M, denotado por $\beta_i(M)$, é definido como sendo o número de somandos indecomponíveis de P^i . Note que cada $\beta_i(M)$ é um inteiro não negativo e depende somente de M por que cada A-módulo projetivo P^i da resolução (2.1) é unicamente determinado (a menos de isomorfismos) por M. Portanto, definimos a complexidade M, e denotamos por cx(M), como sendo a complexidade da sequência $(\beta_i(M))_i$ dos números de Betti de M.

Encerraremos este tópico com uma lista de propriedades sobre a complexidade de módulos que, apesar de elementares, têm um papel importante na obtenção de outros resultados não tão imediatos. Como se vê nas seções seguintes, procuramos apresentar uma versão para cada uma destas propriedades em objetos da categoria derivada.

- (a) $\operatorname{cx}(M) = 0$ se e somente se pd $M < \infty$. Em particular, se gl.dim $A < \infty$ então $\operatorname{cx}(M) = 0$, para todo $M \in \operatorname{mod} A$.
- (b) cx(M) = 1 se e somente se pd $M = \infty$ e M tem sequência de Betti limitada.
- (c) $\operatorname{cx}(M) = 2$ se e somente se existe $c \in \mathbb{Q}$ tal que $\beta_i(M) \leq c \cdot i$, para $i \gg 0$.
- (d) $cx(M \oplus N) = max\{cx(M), cx(N)\}.$
- (e) Seja $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ uma sequência exata em mod A. Então,

$$cx(M_i) < max\{cx(M_i), cx(M_l)\}$$

para
$$\{i, j, l\} = \{1, 2, 3\}.$$

2.1 Complexos homotopicamente minimal

Antes de definir o conceito de complexidade em $\mathcal{D}^-(\Lambda)$, introduziremos a noção de complexo homotopicamente minimal. Veremos que esse conceito, sob certos aspectos, é equivalente a noção de complexo radical, definida no capítulo anterior. A noção de complexo homotopicamente minimal terá papel fundamental na nossa definição de complexidade de objetos da categoria derivada. A saber, usaremos frequentemente neste capítulo o fato, devido a H. Krause ([Kra05]), de que todo complexo em $\mathcal{C}(\mathcal{P})$ pode ser escrito como uma soma direta de um complexo homotopicamente minimal e de um complexo homotopicamente nulo (vide Teorema 2.1.6).

Definição 2.1.1 ([Kra05]) Um complexo P^{\bullet} em C(P) é dito homotopicamente minimal se todo automorfismo $f: P^{\bullet} \to P^{\bullet}$ em K(P) também é um automorfismo de complexos.

Note que um isomorfismo $f: X^{\bullet} \to Y^{\bullet}$ em $\mathcal{C}(\mathcal{P})$ também é um isomorfismo em $\mathcal{K}(\mathcal{P})$. O lema abaixo mostra que vale a recíproca quando os complexos X^{\bullet} e Y^{\bullet} são homotopicamente minimais.

Lema 2.1.2 Todo isomorfismo em $\mathcal{K}(\mathcal{P})$ entre complexos homotopicamente minimais é também um isomorfismo em $\mathcal{C}(\mathcal{P})$.

Prova. Seja $f: P^{\bullet} \to Q^{\bullet}$ um isomorfismo em $\mathcal{K}(\mathcal{P})$ onde P^{\bullet} e Q^{\bullet} são complexos homotopicamente minimais. Então existe $g: Q^{\bullet} \to P^{\bullet}$ tal que $g \circ f \sim 1_{P^{\bullet}}$ e $f \circ g \sim 1_{Q^{\bullet}}$. Logo, por $g \circ f: P^{\bullet} \to P^{\bullet}$ ser um isomorfismo em $\mathcal{K}(\mathcal{P})$ e por P^{\bullet} ser um complexo homotopicamente minimal, tem-se que $g \circ f$ é um isomorfismo em $\mathcal{C}(\mathcal{P})$. Em particular, pela Proposição 1.1.4-(e), f é uma seção em $\mathcal{C}(\mathcal{P})$. Tem-se de forma análoga que f é uma retração em $\mathcal{C}(\mathcal{P})$ e, portanto, um isomorfismo em $\mathcal{C}(\mathcal{P})$.

Dualizando o Lema B.1 de [Kra05], teremos o seguinte resultado.

Lema 2.1.3 ([Kra05]) Seja $P^{\bullet} = (P^n, d^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ um complexo em C(P). As seguintes condições são equivalentes:

- (i) O complexo P^{\bullet} é homotopicamente minimal.
- (ii) Se Q^{\bullet} é um somando direto de P^{\bullet} que não é homotopicamente nulo, então $Q^{\bullet} = 0$.
- (iii) A aplicação $d^n: P^n \to \operatorname{Im}(d^n)$ é uma cobertura projetiva para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Observação 2.1.4 Segue da equivalência (i)-(ii) do lema acima que somando direto não nulo de complexo homotopicamente minimal em C(P) é ainda um complexo homotopicamente minimal. Compare isto com o Lema 1.5.9.

Vemos abaixo que os conceitos de complexo homotopicamente minimal e complexo radical são equivalentes em $\mathcal{C}(\mathcal{P})$.

Lema 2.1.5 Um complexo $P^{\bullet} = (P^n, d^n)$ em $C(\mathcal{P})$ é homotopicamente minimal se e somente se ele é radical.

Prova. Suponha que P^{\bullet} seja homotopicamente minimal. Dado $n \in \mathbb{Z}$ qualquer, da equivalência (i)-(iii) do Lema 2.1.3 tem-se que $d^n \colon P^n \to \operatorname{Im}(d^n)$ é uma cobertura projetiva. Logo, $\operatorname{Nuc}(d^n) \subseteq \operatorname{rad}(P^n)$ e, portanto, $\operatorname{Im}(d^{n-1}) \subseteq \operatorname{Nuc}(d^n) \subseteq \operatorname{rad}(P^n)$. Como n é um inteiro arbitrário, isto mostra que P^{\bullet} é um complexo radical.

Reciprocamente, suponha que P^{\bullet} é um complexo radical e seja $f: P^{\bullet} \to P^{\bullet}$ um automorfismo em $\mathcal{K}(\mathcal{P})$. Então, existe um morfismo de complexos $g: P^{\bullet} \to P^{\bullet}$ tal que $f \circ g \sim 1_{P^{\bullet}}$ e $g \circ f \sim 1_{P^{\bullet}}$. Em particular, existe uma homotopia s de talque $1_{P^{\bullet}} - g \circ f = s \circ d + d \circ s$.

Como P^{\bullet} é radical por hipótese, então $\operatorname{Im}(d^{n-1}) \subseteq \operatorname{rad}(P^n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Logo, do Lema 1.5.8, tem-se que

$$[1_{P^n} - g^n \circ f^n](P^n) = [s^{n+1} \circ d^n + d^{n-1} \circ s^n](P^n) \subset \operatorname{rad}(P^n) = P^n \cdot \operatorname{rad}\Lambda, \ \forall \ n \in \mathbb{Z}. \ (2.2)$$

Se para cada $n \in \mathbb{Z}$ denotarmos $1_{P^n} - g^n \circ f^n$ por h_n , então, da expressão (2.2),

$$h_n^2(P^n) = h_n(h_n(P^n)) \subseteq h_n(P^n \cdot \operatorname{rad} \Lambda) = h_n(P^n) \cdot \operatorname{rad} \Lambda \subseteq P^n \cdot (\operatorname{rad} \Lambda) \cdot (\operatorname{rad} \Lambda) = P^n \cdot \operatorname{rad}^2 \Lambda.$$

Continuando este processo indutivamente, tem-se que $h_n^l(P^n) \subset P^n \cdot \operatorname{rad}^l \Lambda$, para todo $l \geq 1$ e para todo $n \in \mathbb{Z}$. Mas por Λ ser uma álgebra de dimensão finita, segue-se que rad Λ é nilpotente e, portanto, cada $h_n = 1_{P^n} - g^n \circ f^n$ é nilpotente, todos com o mesmo índice de nilpotência. Logo, a composta $g \circ f = 1_{P^{\bullet}} - (1_{P^{\bullet}} - g \circ f)$ é um autormorfismo de P^{\bullet} . Em particular, f é uma seção em $\mathcal{C}(\mathcal{P})$.

Usando o mesmo raciocínio para $1_{P^{\bullet}} - f \circ g$, chegaremos que f é uma retração em $\mathcal{C}(\mathcal{P})$. Portanto, f é um automorfismo em $\mathcal{C}(\mathcal{P})$, como queríamos demonstrar.

A prova de que todo complexo radical é um complexo homotopicamente minimal, dada acima, é apenas uma adaptação do item (1) da Proposição 3.1 de [BL13]. Vale salientar que apesar de termos uma prova independente, optamos pela demonstração de Liu e Bautista por se tratar de uma ideia usada em outras momentos deste texto.

O próximo resultado (dual da Proposição B.2 de [Kra05]) mostra que todo complexo P^{\bullet} em $\mathcal{C}(\mathcal{P})$ admite uma decomposição $P^{\bullet} = P_1^{\bullet} \oplus P_2^{\bullet}$, onde P_1^{\bullet} é um complexo radical e P_2^{\bullet} é homotopicamente nulo.

Teorema 2.1.6 ([Kra05]) Todo objeto $P^{\bullet} \in \mathcal{C}(\mathcal{P})$ admite uma decomposição $P^{\bullet} = P_1^{\bullet} \oplus P_2^{\bullet}$, onde P_1^{\bullet} é um complexo radical e P_2^{\bullet} é homotopicamente nulo. Além disso, o complexo P_1^{\bullet} é unicamente determinado no seguinte sentido: dada uma segunda decomposição $P^{\bullet} = Q_1^{\bullet} \oplus Q_2^{\bullet}$, onde Q_1^{\bullet} é um complexo radical e Q_2^{\bullet} é homotopicamente nulo, a aplicação canônica $P_1^{\bullet} \rightarrowtail P^{\bullet} \twoheadrightarrow Q_1^{\bullet}$ é um isomorfismo em $\mathcal{C}(\mathcal{P})$.

Observação 2.1.7 Note que se P^{\bullet} é um complexo em $\mathcal{C}(\mathcal{P})$ e $P^{\bullet} = P_1^{\bullet} \oplus P_2^{\bullet}$ é uma decomposição de P^{\bullet} como no teorema acima, então P^{\bullet} e P_1^{\bullet} são isomorfos em $\mathcal{K}(\mathcal{P})$.

Finalizaremos esta seção mostrando que os complexos indecomponíveis radicais de $\mathcal{C}(\mathcal{P})$ e $\mathcal{K}(\mathcal{P})$ são os mesmos.

Lema 2.1.8 Seja $X^{\bullet} = (X^i, d_X^i) \in \mathcal{C}(\mathcal{P})$ um complexo radical. Então, X^{\bullet} é indecomponível em $\mathcal{C}(\mathcal{P})$ se e somente se X^{\bullet} é indecomponível em $\mathcal{K}(\mathcal{P})$.

Prova. (\Leftarrow) Suponha que X^{\bullet} é indecomponível em $\mathcal{K}(\mathcal{P})$ e seja Y^{\bullet} um somando direto, não nulo, de X^{\bullet} em $\mathcal{C}(\mathcal{P})$. Então, é claro que X^{\bullet} é um complexo diferente de zero e, pelos lemas

2.1.5 e 2.1.3 (equivalência (i) \Leftrightarrow (ii)) e pela Observação 2.1.4, Y^{\bullet} é um complexo radical e não nulo em $\mathcal{K}(\mathcal{P})$. Logo, como X^{\bullet} é indecomponível em $\mathcal{K}(\mathcal{P})$ e Y^{\bullet} também é um somando direto de X^{\bullet} em $\mathcal{K}(\mathcal{P})$, segue que $X^{\bullet} \cong Y^{\bullet}$ em $\mathcal{K}(\mathcal{P})$. Portanto, pelo Lema 2.1.2, temos que $X^{\bullet} \cong Y^{\bullet}$ em $\mathcal{C}(\mathcal{P})$.

 (\Rightarrow) Suponha agora que X^{\bullet} é indecomponível em $\mathcal{C}(\mathcal{P})$. Para ver que X^{\bullet} é um objeto não nulo de $\mathcal{K}(\mathcal{P})$, basta observar que para qualquer sequência de homomorfismos

$$(s^{i+1}\colon X^{i+1}\to X^i)_{i\in\mathbb{Z}},$$

temos que $\operatorname{Im}(s^{n+1} \circ d_X^n + d_X^{n-1} \circ s^n) \subseteq \operatorname{rad} X^n$ e, portanto, $s^{n+1} \circ d^n + d^{n-1} \circ s^n \neq 1_{X^n}$.

Seja $Y^{\bullet} = (Y^{i}, d_{Y}^{i})$ um somando direto não nulo de X^{\bullet} em $\mathcal{K}(\mathcal{P})$. Pelo Teorema 2.1.6, podemos supor que Y^{\bullet} é um complexo radical. Assim, se $\iota \colon Y^{\bullet} \to X^{\bullet}$ é uma seção em $\mathcal{K}(\mathcal{P})$, então existe um morfismo $\pi \colon X^{\bullet} \to Y^{\bullet}$ tal que $1_{Y^{\bullet}} - \pi \circ \iota$ é homotopicamente nulo. Como consequência existe uma homotopia $r = (r^{i+1} \colon Y^{i+1} \to Y^{i})_{i \in \mathbb{Z}}$ de $1_{Y^{\bullet}}$ tal que $1_{Y^{n}} - \pi^{n} \circ \iota^{n} = r^{n+1} \circ d_{Y}^{n} + d_{Y}^{n-1} \circ r^{n}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Mas como cada d_{Y}^{n} é um morfismo radical, então todos os morfismos $1_{Y^{n}} - \pi^{n} \circ \iota^{n}$ são radicais. Logo, para todo $n \in \mathbb{Z}$, temos que $(1_{Y^{n}} - \pi^{n} \circ \iota^{n})^{l} = 0$, onde l é o índice de nilpotência de rad Λ , e portanto $(1_{Y^{\bullet}} - \pi \circ \iota)^{l} = 0$. Isto é suficiente para concluírmos que $\pi \circ \iota$ é um isomorfismo de complexos e, em particular, $\iota \colon Y^{\bullet} \to X^{\bullet}$ é uma seção em $\mathcal{C}(\mathcal{P})$. Logo, por X^{\bullet} ser um indecomponível em $\mathcal{C}(\mathcal{P})$, $Y^{\bullet} = X^{\bullet}$. Isto conclui a prova.

2.2 Complexidade em $\mathcal{D}^-(\Lambda)$

Como na categoria de módulos, definimos primeiro a noção de número de Betti em $\mathcal{D}^-(\Lambda)$ antes de definir o conceito de complexidade nesta categoria. Vamos começar definindo números de Betti de objetos de $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$.

Definição 2.2.1 Seja $P^{\bullet} \in \mathcal{K}^{-}(\mathcal{P})$ e considere uma decomposição $P^{\bullet} = P_{1}^{\bullet} \oplus P_{2}^{\bullet}$ em $C^{-}(\mathcal{P})$, onde P_{1}^{\bullet} é radical e P_{2}^{\bullet} é homotopicamente nulo, conforme Teorema 2.1.6. Para cada $i \in \mathbb{Z}$, defina $\beta_{i} \colon \mathcal{K}^{-}(\mathcal{P}) \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ como sendo a função que associa a cada objeto P^{\bullet} de $\mathcal{K}^{-}(\mathcal{P})$ o número natural dado pela quantidade de somandos indecomponíveis projetivos da i-ésima componente P_{1}^{i} do complexo P_{1}^{\bullet} . Tal número será denotado por $\beta_{i}(P^{\bullet})$ e chamado de i-ésimo número de Betti de P^{\bullet} .

Note que se $P^{\bullet} = Q_1^{\bullet} \oplus Q_2^{\bullet}$ é outra decomposição de P^{\bullet} , onde Q_1^{\bullet} é radical e Q_2^{\bullet} é homotopicamente nulo, segue do Teorema 2.1.6 que $P_1^{\bullet} \cong Q_1^{\bullet}$ em $C^{-}(\mathcal{P})$ e, em particular, $P_1^i \cong Q_1^i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$ (vide Lema 1.5.1-(c)). Isto mostra que a relação β_i , como definida acima, é de fato uma função.

Vamos usar a equivalência

$$F \colon \mathcal{K}^{-}(\mathcal{P}) \hookrightarrow \mathcal{K}^{-}(\Lambda) \xrightarrow{Q_{\Lambda}^{-}} \mathcal{D}^{-}(\Lambda),$$

dada no Teorema 1.7.3, para estender a noção de números de Betti na categoria $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$ para a categoria $\mathcal{D}^-(\Lambda)$. Para tanto, precisamos ver que a sequência dos números de Betti de objetos em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$ é a mesma para aqueles objetos que têm imagens, por F, isomórficas em $\mathcal{D}^-(\Lambda)$.

Lema 2.2.2 Seja $F: \mathcal{K}^-(\mathcal{P}) \to \mathcal{D}^-(\Lambda)$ a equivalência triangulada dada acima e suponha que P^{\bullet} e Q^{\bullet} são dois objetos de $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$ tais que $F(P^{\bullet}) \cong F(Q^{\bullet})$ em $\mathcal{D}^-(\Lambda)$. Então, $\beta_i(P^{\bullet}) = \beta_i(Q^{\bullet})$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Prova. Dado que $F: \mathcal{K}^-(\mathcal{P}) \to \mathcal{D}^-(\Lambda)$ é uma equivalência, o isomorfismo $F(P^{\bullet}) \cong F(Q^{\bullet})$ em $\mathcal{D}^-(\Lambda)$ implica que os complexos P^{\bullet} e Q^{\bullet} são isomorfos em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$. Sejam $P^{\bullet} = P_1^{\bullet} \oplus P_2^{\bullet}$ e $Q^{\bullet} = Q_1^{\bullet} \oplus Q_2^{\bullet}$ decomposições de P^{\bullet} e Q^{\bullet} em $\mathcal{C}^-(\mathcal{P})$, onde P_1^{\bullet} e Q_1^{\bullet} são complexos radicais e P_2^{\bullet} e Q_2^{\bullet} são complexos homotopicamente nulos. Assim, como $P^{\bullet} \cong P_1^{\bullet}$ e $Q^{\bullet} \cong Q_1^{\bullet}$ em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$ (vide Observação 2.1.7), segue-se do isomorfismo $P^{\bullet} \cong Q^{\bullet}$ que $P_1^{\bullet} \cong Q_1^{\bullet}$ em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$. Logo, do Lema 2.1.2, $P_1^{\bullet} \cong Q_1^{\bullet}$ em $\mathcal{C}^-(\mathcal{P})$, pois, por hipótese, P_1^{\bullet} e Q_1^{\bullet} são ambos homotopicamente minimais. De onde segue que $Q_1^i \cong P_1^i$, para todo $i \in \mathbb{Z}$, ou seja, $\beta_i(P^{\bullet}) = \beta_i(Q^{\bullet})$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Pela densidade da equivalência $F: \mathcal{K}^-(\mathcal{P}) \to \mathcal{D}^-(\Lambda)$, temos que para cada objeto M^{\bullet} em $\mathcal{D}^-(\Lambda)$ existe um objeto P^{\bullet} em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$ tal que $F(P^{\bullet}) \cong M^{\bullet}$ em $\mathcal{D}^-(\Lambda)$. Tendo em vista este fato e o lema acima, podemos finalmente definir a noção de número de Betti em $\mathcal{D}^-(\Lambda)$.

Definição 2.2.3 Seja $M^{\bullet} \in D^{-}(\Lambda)$ e considere $P^{\bullet} \in \mathcal{K}^{-}(\mathcal{P})$ tal que $F(P^{\bullet}) \cong M^{\bullet}$ em $\mathcal{D}^{-}(\Lambda)$. Então, define-se o i-ésimo número de Betti de M^{\bullet} , denotado por $\beta_{i}(M^{\bullet})$, como sendo $\beta_{i}(P^{\bullet})$.

Note que o Lema 2.2.2 garante que a definição acima não depende da escolha do objeto P^{\bullet} de $\mathcal{K}^{-}(\mathcal{P})$. Também é natural esperar que a sequência dos números de Betti em $\mathcal{D}^{-}(\Lambda)$ seja invariante sob isomorfismos. É o que mostra o resultado abaixo.

Lema 2.2.4 Sejam M^{\bullet} e N^{\bullet} dois objetos de $\mathcal{D}^{-}(\Lambda)$ que são isomorfos. Então, $\beta_i(M^{\bullet}) = \beta_i(N^{\bullet})$, para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Prova. Sejam P^{\bullet} e Q^{\bullet} objetos de $\mathcal{K}^{-}(\mathcal{P})$ tais que $F(P^{\bullet}) \cong M^{\bullet}$ e $F(Q^{\bullet}) \cong N^{\bullet}$, em $\mathcal{D}^{-}(\Lambda)$. Logo $F(P^{\bullet}) \cong F(Q^{\bullet})$ e segue do Lema 2.2.2 que $\beta_{i}(P^{\bullet}) = \beta_{i}(Q^{\bullet})$. Portanto, $\beta_{i}(M^{\bullet}) = \beta_{i}(N^{\bullet})$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Vamos incluir aqui uma prova da densidade da equivalência $F: \mathcal{K}^-(\mathcal{P}) \to \mathcal{D}^-(\Lambda)$ – dada em [GM03](III.5.21) –, a qual será útil, por exemplo, para o cálculo dos números de Betti de certos objetos da categoria derivada.

Densidade do funtor $F: \mathcal{K}^-(\mathcal{P}) \to \mathcal{D}^-(\Lambda)$

Seja $M^{\bullet} = (M^i, d^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ um objeto em $\mathcal{D}^-(\Lambda)$. Suponha, sem perda de generalidade, que $M^i = 0$ para todo i > 0. Note que para verificar a densidade de F é suficiente construir um complexo P^{\bullet} em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$ e um quasi-isomorfismo $s \colon P^{\bullet} \to M^{\bullet}$. Faremos isto por indução sobre i.

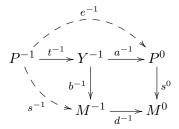
• Seja $s^0 \colon P^0 \to M^0$ a cobertura projetiva de M^0 e considere o pullback seguinte.

$$Y^{-1} \xrightarrow{a^{-1}} P^{0}$$

$$\downarrow s^{0}$$

$$M^{-1} \xrightarrow[d^{-1}]{} M^{0}$$

Agora considere a cobertura projetiva de Y^{-1} , digamos $t^{-1}\colon P^{-1}\to Y^{-1}$, e defina os homomorfismos $e^{-1}:=a^{-1}\circ t^{-1}\colon P^{-1}\to P^0$ e $s^{-1}:=b^{-1}\circ t^{-1}\colon P^{-1}\to M^{-1}$.



Neste caso, temos que

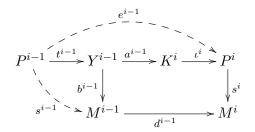
$$s^{0} \circ e^{-1} = s^{0} \circ a^{-1} \circ t^{-1} = d^{-1} \circ b^{-1} \circ t^{-1} = d^{-1} \circ s^{-1}. \tag{2.3}$$

• Suponha definidos P^n, e^n e s^n para $n \in \{-1, -2, \dots, i\}$ e seja $K^i := \text{Nuc}(e^i)$. Tomamos a inclusão $\iota^i \colon K^i \to P^i$, o pullback

$$Y^{i-1} \xrightarrow{a^{i-1}} K^{i} \downarrow s^{i}\iota^{i}$$

$$M^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} M^{i}$$

e a cobertura projetiva $t^{i-1}\colon P^{i-1}\to Y^{i-1}$, e assim definimos os homomorfismos $e^{i-1}:=t^i\circ a^{i-1}\circ t^{i-1}\colon P^{i-1}\to P^i$ e $s^{i-1}:=b^{i-1}\circ t^{i-1}\colon P^{i-1}\to M^{i-1}$.



Neste caso, temos que

$$s^{i} \circ e^{i-1} = s^{i} \circ \iota^{i} \circ a^{i-1} \circ t^{i-1} = d^{i-1} \circ b^{i-1} \circ t^{i-1} = d^{i-1} \circ s^{i-1}, \ \forall i \le -1.$$
 (2.4)

Usando a construção acima, seja $P^{\bullet} = (P^i, e^i)_{i \in \mathbb{Z}}$, onde $P^i = 0$ para todo i > 0. Então, P^{\bullet} é um objeto de $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$. De fato, é claro que P^{\bullet} é limitado superiormente e por constução suas componentes estão em \mathcal{P} . Além disso, como para todo $i \leq -1$ temos que ι^i é a inclusão de $\mathrm{Nuc}(e^i)$ em P^i , segue-se que

$$e^i \circ e^{i-1} = \underbrace{e^i \circ \iota^i}_{=0} \circ a^{i-1} \circ t^{i-1} = 0, \quad \forall i \le -1.$$

Segue das expressões (2.3) e (2.4) que os homomorfismos $s^n \colon P^n \to M^s$ determinam um morfismo de complexos $s = (s^n)_n \colon P^{\bullet} \to M^{\bullet}$. Para a prova de que s é um quase isomorfismo, veja [GM03](III.5.21). Portanto, $P^{\bullet} \cong M^{\bullet}$ em $\mathcal{D}^-(\Lambda)$.

A partir de agora, denotaremos o complexo P^{\bullet} , obtido na construção acima, por $P(M^{\bullet})$ e o chamaremos de resolução de M^{\bullet} em $\mathcal{K}^{-}(\mathcal{P})$. Neste caso, temos que $\beta_{i}(M^{\bullet}) = \beta_{i}(P(M^{\bullet}))$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Temos também como consequência direta da construção de $P(M^{\bullet})$ os seguintes fatos.

- Observação 2.2.5 (a) Note que $s: P(M^{\bullet}) \to M^{\bullet}$ ser um quase isomorfismo implica que as cohomologias de $P(M^{\bullet})$ e de M^{\bullet} são isomorfas, em cada grau. De modo que se $M^{\bullet} \in \mathcal{D}^b(\Lambda)$, então $P(M^{\bullet})$ tem cohomologia limitada, ou seja, $P(M^{\bullet}) \in \mathcal{K}^{-,b}(\mathcal{P})$.
- (b) Seja M um Λ-módulo e considere o complexo M[•] como sendo o concentrado de M em grau zero. Vendo M[•] como um objeto de D^b(Λ), tem-se que a resolução de M[•] em K^{-,b}(P) é a resolução projetiva minimal de M em mod Λ. De fato, basta observar que do item (a) tem-se que P(M[•]) é um complexo acíclico e aplicando a definição categórica de núcleo em cada passo da construção de P(M[•]) tem-se que Y⁻¹ = Nuc(s⁰) e Yⁿ = Nuc(eⁿ), para todo n ≤ -2.

Dadas estas observações, vemos abaixo que o conceito de números de Betti, como definido em 2.2.3, estende a noção de números de Betti na categoria de módulos.

Proposição 2.2.6 Seja $M^{\bullet} \in \mathcal{D}^b(\Lambda)$ o complexo concentrado em grau zero de um módulo $M \in \text{mod } \Lambda$. Então, $\beta_i(M) = \beta_{-i}(M^{\bullet})$ para todo $i \geq 0$.

Prova. O resultado segue do item (b) da Observação 2.2.5, uma vez que $\beta_i(M^{\bullet}) = \beta_{-i}(P(M^{\bullet}))$ para todo $i \geq 0$.

Complexidade

Sejam $M^{\bullet} \in \mathcal{D}^{-}(\Lambda)$, $n \in \mathbb{Z}$ e $M^{\bullet}[n]$ seu o transladado de grau n. Logo, se $P^{\bullet} \in \mathcal{K}^{-}(\mathcal{P})$ é tal que $F(P^{\bullet}) \cong M^{\bullet}$ em $\mathcal{D}^{-}(\Lambda)$, então

$$M^{\bullet}[n] \cong F(P^{\bullet})[n] \cong F(P^{\bullet}[n]).$$

Em particular, $\beta_i(M^{\bullet}[n]) = \beta_{i+n}(M^{\bullet})$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Portanto, não estaremos perdendo nada em supor, a partir de agora, a menos de menção em contrário, que $\beta_i(M^{\bullet})$ denota o i-ésimo número de Betti de um objeto $M^{\bullet} \in \mathcal{D}^-(\Lambda)$ cuja componente homogênea de grau zero é não nula e todas as componentes de grau positivo são iguais a zero. Isto é, $M^0 \neq 0$ e $M^n = 0$ para todo n > 0. Finalmente, a definição de complexidade em $\mathcal{D}^-(\Lambda)$.

Definição 2.2.7 Seja M^{\bullet} um objeto de $\mathcal{D}^{-}(\Lambda)$.

- (a) Dizemos que a complexidade de M^{\bullet} é no máximo n, e escrevemos $\operatorname{cx}(M^{\bullet}) \leq n$, se existe $c \in \mathbb{Q}$ tal que $\beta_i(M^{\bullet}) \leq c \cdot |i|^{n-1}$, para todo $i \ll 0$.
- (b) Dizemos que a complexidade de M^{\bullet} é igual a n, e escrevemos $\operatorname{cx}(M^{\bullet}) = n$, $\operatorname{se} \operatorname{cx}(M^{\bullet}) \leq n$ mas $\operatorname{cx}(M^{\bullet}) \nleq n 1$.
- (c) Dizemos que a complexidade de M^{\bullet} é infinita, e escrevemos $\operatorname{cx}(M^{\bullet}) = \infty$, se tal n não existe.

Observação 2.2.8 A definição de complexidade de um objeto em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$ é dada como acima, aonde usamos o conceito de números de Betti em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$.

É imediato da definição que a complexidade de um objeto $M^{\bullet} \in \mathcal{D}^{-}(\Lambda)$ não depende de uma quantidade finita de termos da sequência dos números de Betti de M^{\bullet} . Além disso, como $\beta_{i}(M^{\bullet}[j]) = \beta_{i+j}(M^{\bullet})$, para todo $M^{\bullet} \in \mathcal{D}^{-}(\Lambda)$ e todo $i, j \in \mathbb{Z}$, a complexidade de um objeto de $\mathcal{D}^{-}(\Lambda)$ é invariante sob translações, isto é, $\operatorname{cx}(M^{\bullet}) = \operatorname{cx}(M^{\bullet}[n])$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Juntando este fato com a Proposição 2.2.6, vemos que a noção de complexidade em $\mathcal{D}^{-}(\Lambda)$ estende o conceito de complexidade na categoria mod Λ no seguinte sentido: se considerarmos $M \in \operatorname{mod} \Lambda$ como sendo um complexo concentrado, digamos M^{\bullet} , então $\operatorname{cx}(M) = \operatorname{cx}(M^{\bullet})$. Finalmente, segue do lemas 2.2.2 e 2.2.4 que a complexidade é invariante sob isomorfismos em $\mathcal{D}^{-}(\Lambda)$ e que a complexidade de um objeto M^{\bullet} de $\mathcal{D}^{-}(\Lambda)$ pode ser "calculada" usando a resolução de M^{\bullet} em $\mathcal{K}^{-}(\mathcal{P})$. Resumimos na proposição seguinte estas propriedades.

Proposição 2.2.9 Sejam M^{\bullet} e N^{\bullet} dois objetos de $\mathcal{D}^{-}(\Lambda)$ e seja $M \in \text{mod } \Lambda$. Então:

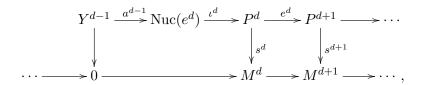
- (i) $cx(M^{\bullet}) = cx(M^{\bullet}[n])$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.
- (ii) Se M^{\bullet} é o concentrado do módulo M, então $\operatorname{cx}(M^{\bullet}) = \operatorname{cx}(M)$.
- (iii) Se M^{\bullet} e N^{\bullet} são dois objetos isomorfos em $\mathcal{D}^{-}(\Lambda)$, então $\operatorname{cx}(M^{\bullet}) = \operatorname{cx}(N^{\bullet})$.

(iv)
$$\operatorname{cx}(M^{\bullet}) = \operatorname{cx}(P(M^{\bullet})).$$

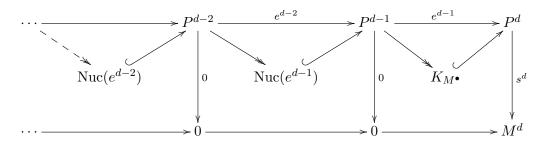
Vimos acima que quando consideramos um módulo como sendo um objeto da categoria derivada limitada sua complexidade na categoria de módulos coincide com a complexidade na categoria derivada. Na verdade vale um pouco mais do que isto, conforme proposição abaixo.

Proposição 2.2.10 Seja $M^{\bullet} = (M^i, d^i)$ um objeto de $\mathcal{D}^b(\Lambda)$. Então, existe um Λ -módulo $K_{M^{\bullet}}$ tal que $\operatorname{cx}(M^{\bullet}) = \operatorname{cx}(K_{M^{\bullet}})$.

Prova. Suponha que $M^d \neq 0$ e que $M^i = 0$ para todo $i < d \leq 0$. Temos da construção de $P(M^{\bullet})$ o diagrama seguinte



onde Y^{d-1} é o pullback dos homomorfismos $\operatorname{Nuc}(e^d) \xrightarrow{s^d \iota^d} M^d \longleftarrow 0$, que por sua vez é igual a $\operatorname{Nuc}(s^d \circ \iota^d) = \operatorname{Nuc}(e^d) \cap \operatorname{Nuc}(s^d)$, e a^{d-1} é a inclusão de Y^{d-1} em $\operatorname{Nuc}(e^d)$. Tomando $K_{M^{\bullet}} := Y^{d-1} = \operatorname{Nuc}(e^d) \cap \operatorname{Nuc}(s^d)$, temos que $t^{d-1} : P^{d-1} \to K_{M^{\bullet}}$ é cobertura projetiva. Repetindo este argumento para cada passo da construção de $P(M^{\bullet})$, chegamos ao diagrama seguinte.



Logo,

$$\cdots \longrightarrow P^{d-2} \longrightarrow P^{d-1} \longrightarrow K_{M^{\bullet}} \longrightarrow 0$$

é a resolução projetiva minimal de $K_{M^{\bullet}}$ e, neste caso, $\beta_{j+d-1}(M^{\bullet}) = \beta_{|j|}(K_{M^{\bullet}})$, para todo $j \leq 0$. Portanto, $\operatorname{cx}(M^{\bullet}) = \operatorname{cx}(K_{M^{\bullet}})$, uma vez que a complexidade não depende de uma quantidade finita de termos da sequência dos números de Betti e ela pode ser calculada via $P(M^{\bullet})$.

Corolário 2.2.11 Seja Λ uma k-álgebra de dimensão finita. Então, gl.dim $\Lambda < \infty$ se e somente se todo objeto de $\mathcal{D}^b(\Lambda)$ tem complexidade nula.

Veremos abaixo uma caracterização dos objetos cuja complexidade é igual a 0 ou a 1. Ficará claro na prova que esta caracterização de $M^{\bullet} \in \mathcal{D}^{-}(\Lambda)$ poderia ser dada em termos de um objeto qualquer da imagem inversa de M^{\bullet} pela equivalência F. Fizemos a opção pela resolução $P(M^{\bullet})$ por esta ser dada explicitamente em termos do objeto M^{\bullet} .

Proposição 2.2.12 Seja $M^{\bullet} \in \mathcal{D}^{-}(\Lambda)$. Então

(i) $cx(M^{\bullet}) = 0$ se e somente se $P(M^{\bullet}) \in \mathcal{K}^b(\mathcal{P})$.

(ii) $cx(M^{\bullet}) = 1$ se e somente se $P(M^{\bullet}) \notin \mathcal{K}^b(\mathcal{P})$ e M^{\bullet} tem sequência de Betti limitada.

Prova. Seja $P(M^{\bullet}) = P_1^{\bullet} \oplus P_2^{\bullet}$ uma decomposição de $P(M^{\bullet})$ como no Teorema 2.1.6.

- (i) (\Leftarrow) Suponha que $P(M^{\bullet}) \in \mathcal{K}^b(\mathcal{P})$. Como P_1^{\bullet} é um somando direto de $P(M^{\bullet})$ na categoria complexos e $P(M^{\bullet})$ é um complexo limitado, então $P_1^{\bullet} \in \mathcal{C}^b(\mathcal{P})$. De modo que existe apenas uma quantidade finita de termos da sequência de Betti de M^{\bullet} que é diferente de zero. Logo, $\operatorname{cx}(M^{\bullet}) = 0$.
 - (⇒) Se cx $(M^{\bullet}) = 0$ então existe $c \in \mathbb{Q}$ tal que $0 \le \beta_i(M^{\bullet}) \le c/|i|$, para todo $i \ll 0$. Como cada $\beta_i(M^{\bullet})$ é um inteiro não negativo, segue-se que $\beta_i(M^{\bullet}) = 0$ para todo $i \ll 0$. Logo, P_1^{\bullet} é um complexo limitado e como $P(M^{\bullet}) \cong P_1^{\bullet}$ em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$, temos que $P(M^{\bullet}) \in \mathcal{K}^b(\mathcal{P})$.
- (ii) (\Rightarrow) Suponha que $\operatorname{cx}(M^{\bullet}) = 1$. Então $P(M^{\bullet}) \notin \mathcal{K}^b(\mathcal{P})$, pelo item (i); e existe $c \in \mathbb{Q}$ tal que $\beta_i(M^{\bullet}) \leq c \cdot |i|^{1-1} = c$, para todo $i \ll 0$, pela definição de complexidade.
 - (⇐) De $P(M^{\bullet}) \notin \mathcal{K}^b(\mathcal{P})$ segue que $\operatorname{cx}(M^{\bullet}) > 0$. E por M^{\bullet} ter sequência de Betti limitada segue que $\operatorname{cx}(M^{\bullet}) \leq 1$.

Corolário 2.2.13 (i) Se $M^{\bullet} \in \mathcal{D}^{-}(\Lambda)$ é tal que $\operatorname{cx}(M^{\bullet}) = 0$, então $M^{\bullet} \in \mathcal{D}^{b}(\Lambda)$.

(ii) Seja $M^{\bullet} \in \mathcal{D}^b(\Lambda)$. Então $\operatorname{cx}(M^{\bullet}) = 1$ se e somente se $\operatorname{pd} K_{M^{\bullet}} = \infty$ e $K_{M^{\bullet}}$ tem sequência de Betti limitada, onde $K_{M^{\bullet}}$ é o Λ -módulo obtido na Proposição 2.2.10.

Prova.

- (i) Segue do fato de $M^{\bullet} \cong P(M^{\bullet})$ em $\mathcal{D}^{-}(\Lambda)$ e do item (i) da proposição acima.
- (ii) Segue do item (ii) da proposição acima e da igualdade $\operatorname{cx}(M^{\bullet}) = \operatorname{cx}(K_{M}^{\bullet})$, obtida na Proposição 2.2.10.

Note que a segunda parte do corolário acima sugere que não vale, em geral, a recíproca do primeiro item. Isto é, pode existir objetos de $\mathcal{D}^b(\Lambda)$ cuja complexidade é diferente de zero. De fato, basta tomar um módulo de dimensão projetiva infinita cuja complexidade é igual a 1 (ou, equivalentemente, com sequência de Betti limitada). Daí, temos que o complexo concentrado neste módulo é um objeto de $\mathcal{D}^b(\Lambda)$ com complexidade é igual a 1.

2.3 Complexidade e triângulos

Vimos no início deste capítulo que existe uma relação entre as complexidades dos termos de uma sequência exata na categoria de módulos. Veremos agora que vale uma relação similiar para as complexidades dos termos de um triângulo em $\mathcal{D}^-(\Lambda)$. Veremos também uma outra forma de caracterizar os objetos em $\mathcal{D}^b(\Lambda)$ de complexidade zero, a saber, em

termos de triângulos de Auslander-Reiten de $\mathcal{D}^b(\Lambda)$, quando estes existirem. Para tanto, vamos precisar, além dos resultados da última seção, do resultado principal do trabalho de D. Happel ([Hap91]) em que o autor mostra condições necessárias e suficientes sobre Λ para que $\mathcal{D}^b(\Lambda)$ tenha triângulos de Auslander-Reiten.

Vamos começar definindo os conceitos de triângulo de Auslander-Reiten e de categoria com triângulos de Auslander-Reiten. Para definições equivalentes e propriedades destes conceitos, o leitor poderá consultar, por exemplo, [Hap88].

Seja \mathcal{C} uma k-categoria triangulada (com automorfismo $T\colon \mathcal{C}\to \mathcal{C}$), Hom-finita e Krull-Schmidt. Um triângulo em \mathcal{C}

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X) \tag{2.5}$$

é chamado de triângulo de Auslander-Reiten se satisfaz as seguintes condições:

(AR1) X e Z são indecomponíveis;

(AR2) v não é uma retração; e

(AR3) Se $f: W \to Z$ não é uma retração, então existe $f': W \to Y$ tal que $f = v \circ f'$.

Dizemos que a categoria C tem triângulos de Auslander-Reiten se para todos objetos indecomponíveis $Z \in C$ existe um triângulo satisfazendo as condições acima. O triângulo (2.5) é chamado de triângulo de Auslander-Reiten terminando em Z.

Sabemos, por exemplo, que os triângulos de Auslander-Reiten de $\mathcal{D}^b(\Lambda)$ que são provinientes de sequências de Auslander-Reiten de mod Λ , da forma

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \longrightarrow 0, \tag{2.6}$$

são aqueles em que id $X \leq 1$ e pd $Z \leq 1$. Em outras palavras, se $w \in \operatorname{Ext}^1_{\Lambda}(Z,X) \cong \operatorname{Hom}_{D^b(\Lambda)}(Z,X[1])$ é o elemento correspondente a sequência (2.6), então

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$$

é um triângulo de Auslander-Reiten em $\mathcal{D}^b(\Lambda)$ se e somente se id $X \leq 1$ e pd $Z \leq 1$ (vide [Hap88] – Capítulo I, seção 4.7). Em particular, o termo final de tais triângulos têm complexidade zero. Veremos a seguir que este fato também é válido para o termo final de qualquer triângulo de Auslander-Reiten de $\mathcal{D}^b(\Lambda)$. Para tanto, vamos precisar do seguinte resultado.

Teorema 2.3.1 ([Hap91], Th. 1.4) Sejam Λ uma k-álgebra de dimensão finita e Z^{\bullet} um objeto indecomponível de $K^{-,b}(\mathcal{P})$. Então, existe um triângulo de Auslander-Reiten

$$X^{\bullet} \longrightarrow Y^{\bullet} \longrightarrow Z^{\bullet} \longrightarrow X^{\bullet}[1]$$

se e somente se $Z^{\bullet} \in \mathcal{K}^b(\mathcal{P})$.

Proposição 2.3.2 Seja $Z^{\bullet} \in \mathcal{D}^b(\Lambda)$ um indecomponível. Então, existe um triângulo de Auslander-Reiten terminando em Z^{\bullet} se e somente se $\operatorname{cx}(Z^{\bullet}) = 0$.

Prova. Pelo teorema anterior e pela equivalência triangulada $F: \mathcal{K}^{-,b}(\mathcal{P}) \to \mathcal{D}^b(\Lambda)$, temos que um indecomponível $Z^{\bullet} \in \mathcal{D}^b(\Lambda)$ é final de um triângulo de Auslander-Reiten se e somente se sua resolução $P(Z^{\bullet})$ pertence a $\mathcal{K}^b(\mathcal{P})$. O resultado segue da Proposição 2.2.12-(i). \square

Encerraremos esta seção mostrando que a complexidade de qualquer termo de um triângulo distinguido de $\mathcal{D}^-(\Lambda)$ não ultrapassa o máximo da complexidade dos outros dois termos deste triângulo. Para isto, precisaremos do seguinte lema.

Lema 2.3.3 Sejam M^{\bullet} e N^{\bullet} dois objetos em $\mathcal{D}^{-}(\Lambda)$. Então

$$\operatorname{cx}(M^{\bullet} \oplus N^{\bullet}) = \max\{\operatorname{cx}(M^{\bullet}), \operatorname{cx}(N^{\bullet})\}.$$

Prova. Sejam $P^{\bullet}, Q^{\bullet} \in \mathcal{K}^{-}(\mathcal{P})$ tais que $F(P^{\bullet}) \cong M^{\bullet}$ e $F(Q^{\bullet}) \cong N^{\bullet}$, em $\mathcal{D}^{-}(\Lambda)$. Então, dado que F é funtor aditivo, $F(P^{\bullet} \oplus Q^{\bullet}) = F(P^{\bullet}) \oplus F(Q^{\bullet}) \cong M^{\bullet} \oplus N^{\bullet}$, em $\mathcal{D}^{-}(\Lambda)$, e assim $\beta_{i}(M^{\bullet} \oplus N^{\bullet}) = \beta_{i}(P^{\bullet} \oplus Q^{\bullet})$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Além disso, tem-se do Teorema 2.1.6 que os complexos P^{\bullet} e Q^{\bullet} admitem decomposições $P^{\bullet} = P_{1}^{\bullet} \oplus P_{2}^{\bullet}$ e $Q^{\bullet} = Q_{1}^{\bullet} \oplus Q_{2}^{\bullet}$, onde P_{1}^{\bullet} e Q^{\bullet}_{1} são radicais e P^{\bullet}_{2} e Q^{\bullet}_{2} são homotopicamente nulos. Logo, como $P^{\bullet}_{1} \oplus Q^{\bullet}_{1}$ é um complexo radical e $P^{\bullet}_{2} \oplus Q^{\bullet}_{2}$ é um complexo homotopicamente nulo, então $(P^{\bullet}_{1} \oplus Q^{\bullet}_{1}) \oplus (P^{\bullet}_{2} \oplus Q^{\bullet}_{2})$ é uma decomposição para $P^{\bullet} \oplus Q^{\bullet}$ como no Teorema 2.1.6. Em particular, $\beta_{i}(P^{\bullet} \oplus Q^{\bullet}) = \beta_{1}(P^{\bullet}) + \beta_{i}(Q^{\bullet})$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Portanto,

$$\beta_i(M^{\bullet} \oplus N^{\bullet}) = \beta_i(M^{\bullet}) + \beta_i(N^{\bullet}), \text{ para todo } i \in \mathbb{Z}.$$
 (2.7)

Pela igualdade acima, temos que a tese é clara nos casos em que $\operatorname{cx}(M^{\bullet}) = \infty$ ou $\operatorname{cx}(N^{\bullet}) = \infty$. Então, suponha que $\operatorname{cx}(M^{\bullet}) = m < \infty$ e $\operatorname{cx}(N^{\bullet}) = n < \infty$. Logo, existem $c, d \in \mathbb{Q}$ tais que $\beta_i(M^{\bullet}) \leq c \cdot |i|^{m-1}$ e $\beta_i(N^{\bullet}) \leq d \cdot |i|^{n-1}$, para todo $i \ll 0$. Seja $r = \max\{c, d\}$ e $s = \max\{m, n\}$. Assim, pela igualdade (2.7) temos que

$$\beta_i(M^{\bullet} \oplus N^{\bullet}) \leq c \cdot |i|^{m-1} + d \cdot |i|^{n-1}$$

$$\leq r \cdot |i|^{s-1} + r \cdot |i|^{s-1}$$

$$= 2r \cdot |i|^{s-1}, \text{ para todo } i \ll 0.$$

Portanto,

$$\operatorname{cx}(M^{\bullet} \oplus N^{\bullet}) \le s = \max\{\operatorname{cx}(M^{\bullet}), \operatorname{cx}(N^{\bullet})\}.$$

Para verificar que vale a igualdade, basta notar que se existe um inteiro t < s e um racional c' tais que $\beta_i(M^{\bullet} \oplus N^{\bullet}) \leq c' \cdot |i|^{t-1}$, para todo $i \ll 0$, então $\beta_i(M^{\bullet}) \leq c' \cdot |i|^{t-1}$ e $\beta_i(N^{\bullet}) \leq c' \cdot |i|^{t-1}$, para todo $i \ll 0$, o que contradiz a minimalidade de m e n.

Proposição 2.3.4 Seja $\eta: M_1^{\bullet} \to M_2^{\bullet} \to M_3^{\bullet} \to M_1^{\bullet}[1]$ um triângulo distinguido em $\mathcal{D}^-(\Lambda)$. Então, a designaldade

$$\operatorname{cx}(M_i^{\bullet}) \le \max\{\operatorname{cx}(M_i^{\bullet}), \operatorname{cx}(M_l^{\bullet})\} \tag{2.8}$$

 $\acute{e} \ verdadeira \ para \ \{i,j,l\} = \{1,2,3\}.$

Prova. Vamos mostrar somente a desigualdade

$$\operatorname{cx}(M_3^{\bullet}) \le \max\{\operatorname{cx}(M_1^{\bullet}), \operatorname{cx}(M_2^{\bullet})\}.$$

As outras duas desigualdades podem ser verificadas de forma análoga usando o fato da complexidade ser invariante sob translações; e o axioma (TR3) da definição de categoria triangulada, isto é, que $M_2^{\bullet} \to M_3^{\bullet} \to M_1^{\bullet}[1] \to M_2^{\bullet}[1]$ e $M_3^{\bullet} \to M_1^{\bullet}[1] \to M_2^{\bullet}[1] \to M_3^{\bullet}[1]$ também são triângulos distinguidos em $\mathcal{D}^-(\Lambda)$.

Dado que os triângulos distinguidos de $\mathcal{D}^-(\Lambda)$ são isomorfos a imagem dos triângulos distiguidos de $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$ pela equivalência triangulada $F \colon \mathcal{K}^-(\mathcal{P}) \to \mathcal{D}^-(\Lambda)$; os triângulos distinguidos de $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$ são isomorfos a triângulos (padrões) da forma

$$X^{\bullet} \xrightarrow{f} Y^{\bullet} \xrightarrow{\mu_f} C_f \xrightarrow{\pi_f} X^{\bullet}[1];$$
 (2.9)

e a complexidade é invariante sob isomorfismos e sob a imagem do funtor F, então podemos "substituir" o triângulo η de $\mathcal{D}^-(\Lambda)$ pelo triângulo padrão (2.9) de $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$, ou seja, é suficiente verificar a designaldade

$$\operatorname{cx}(C_f) \le \max\{\operatorname{cx}(X^{\bullet}), \operatorname{cx}(Y^{\bullet})\}.$$

Para tanto, considere as decomposições $X^{\bullet} = X_1^{\bullet} \oplus X_2^{\bullet}$ e $Y^{\bullet} = Y_1^{\bullet} \oplus Y_2^{\bullet}$ como no Teorema 2.1.6. Escrevendo o morfismo $f \colon X^{\bullet} \to Y^{\bullet}$ na forma matricial

$$f = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$$
, onde $f_{ij} \colon X_j^{\bullet} \to Y_i^{\bullet}$,

temos que os morfismos f_{12} , f_{21} e f_{22} são homotópicos a zero, uma vez que X_2^{\bullet} e Y_2^{\bullet} são, por construção, complexos homotopicamente nulos. Logo, temos o diagrama comutativo em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$

$$X^{\bullet} \xrightarrow{f} Y^{\bullet} \xrightarrow{\mu_{f}} C_{f} \xrightarrow{\pi_{f}} X^{\bullet}[1]$$

$$\downarrow (1 \ 0) \qquad \qquad \downarrow (1 \ 0)[1]$$

$$X_{1}^{\bullet} \xrightarrow{f_{11}} Y_{1}^{\bullet} \xrightarrow{\mu_{f}} C_{f_{11}} \xrightarrow{\pi_{f_{11}}} X_{1}^{\bullet}[1]$$

que, pelo axioma (TR4), pode ser completado a um morfismo de triângulos em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$, isto é, existe um morfismo de complexos $h \colon C_f \to C_{f_{11}}$ fazendo o diagrama acima comutativo em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$. Além disso, como os morfismos correspondentes as duas primeiras flechas verticais são isomorfismos em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$, h também é um isomorfismo (vide Proposição 1.6.2). Em

particular,

$$cx(C_f) = cx(C_{f_{11}}).$$
 (2.10)

Por outro lado, dado que $(C_{f_{11}})^i = (X_1^{\bullet}[1])^i \oplus (Y_1^{\bullet})^i$, para todo $i \in \mathbb{Z}$, e os complexos $X_1^{\bullet}[1]$ e Y_1^{\bullet} são, respectivamente, os somandos diretos radicais de $X^{\bullet}[1]$ e Y^{\bullet} usados para o cálculo de suas rescrectivas sequências de Betti, temos que

$$\beta_i(C_{f_{11}}) \leq \beta_i(X^{\bullet}[1] \oplus Y^{\bullet})$$
, para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Portanto, $\operatorname{cx}(C_{f_{11}}) \leq \operatorname{cx}(X^{\bullet}[1] \oplus Y^{\bullet})$ e, pelo Lema 2.3.3 e pela igualdade (2.10),

$$\operatorname{cx}(C_f) \le \operatorname{cx}(X^{\bullet}[1] \oplus Y^{\bullet}) = \max\{\operatorname{cx}(X^{\bullet}[1]), \operatorname{cx}(Y^{\bullet})\} = \max\{\operatorname{cx}(X^{\bullet}), \operatorname{cx}(Y^{\bullet})\},$$

como queríamos demonstrar.

Note que a desigualdade (2.8), obtida na proposição anterior, pode ser *estrita*. De fato, basta tomar o triângulo distinguido

$$X^{\bullet} \xrightarrow{1} X^{\bullet} \longrightarrow 0 \longrightarrow X^{\bullet}[1],$$

em $\mathcal{D}^-(\Lambda)$, com X^{\bullet} sendo um objeto de complexidade diferente de zero.

2.4 Complexidade e dimensão global forte

O objetivo desta seção é mostrar que podemos relacionar a noção de complexidade de objetos indecomponíveis de $\mathcal{D}^-(\Lambda)$ com a dimensão global forte de Λ . Fomos motivados pelos seguintes fatos: vimos no final da Seção 2.2 que os objetos de $\mathcal{D}^-(\Lambda)$ cuja complexidade é nula são justamente aqueles em que sua resolução pertence a $\mathcal{K}^b(\mathcal{P})$; como consequência deste resultado, mostramos na Proposição 2.3.2 que é possível decidir se Λ tem dimensão global finita analisando a complexidade dos indecomponíveis de $\mathcal{D}^b(\Lambda)$; e, finalmente, pelo fato (bem conhecido) de que a dimensão global de Λ não excede sua dimensão global forte.

Dimensão global forte

Sejam Λ uma k-álgebra de dimensão finita e $X^{\bullet} \in \mathcal{C}^b(\Lambda)$, não nulo. Então, existem inteiros $r \leq s$ tais que $X^r \neq 0 \neq X^s$ e $X^i = 0$ para todo i < r ou i > s. Neste caso, definimos o comprimento de X^{\bullet} como sendo $\ell(X^{\bullet}) := s - r$. Portanto, a dimensão global forte de Λ é definida por

$$\operatorname{s.gl.dim} \Lambda := \sup \{\ell(P^{\bullet}) : P^{\bullet} \in \mathcal{C}^b(\mathcal{P}) \text{ indecomponivel} \}.$$

¹Apresentaremos aqui uma prova alternativa para este fato.

Note que da desigualdade

$$\operatorname{gl.dim} \Lambda \leq \operatorname{s.gl.dim} \Lambda$$
 (2.11)

e da Proposição 2.3.2, temos que se s.gl.dim $\Lambda < \infty$ então $\operatorname{cx}(M^{\bullet}) = 0$, para todo indecomponível $M^{\bullet} \in \mathcal{D}^b(\Lambda)$. No entanto, a recíproca não é verdadeira em geral, isto é, o fato da complexidade de todos os indecomponíveis de $\mathcal{D}^b(\Lambda)$ ser nula, não significa, necessariamente, que s.gl.dim $\Lambda < \infty$. De fato, basta lembrar que existem álgebras cuja dimensão global é finita (o que implica que todo indecomponível $M^{\bullet} \in \mathcal{D}^b(\Lambda)$ tem complexidade zero) e cuja dimensão global forte é infinita (veremos isto no Exemplo 3.4.2 e no exemplo dado na Seção 4.2). Em resumo, não parece existir uma relação simples, nos moldes da Proposição 2.3.2, entre a dimensão global forte e a complexidade de indecomponíveis de $\mathcal{D}^b(\Lambda)$. Porém, o resultado seguinte nos levou a outros questionamentos.

Lema 2.4.1 Seja $M \in \operatorname{ind} \Lambda$ e denote por P(M) sua resolução projetiva minimal

$$P(M) = \cdots \to P^n \longrightarrow P^{n+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow P^0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Então, P(M) é um objeto indecomponível de $C^-(\mathcal{P})$ em que cada truncamento bruto $\tau^{\geq m}P(M)$, com $m \leq -1$, é um complexo radical indecomponível em $C^b(\mathcal{P})$.

Antes de apresentar uma prova para este resultado, faremos um resumo de algumas de suas implicações. Primeiro, veremos uma prova alternativa para a já conhecida desigualdade (2.11). Em seguida, ainda como consequência deste resultado, veremos que é possível concluir que se existe um módulo indecomponível em mod Λ cuja complexidade é maior do que zero, então s.gl.dim $\Lambda = \infty$. Neste ponto, naturalmente, perguntamos se vale a recíproca: "se s.gl.dim $\Lambda = \infty$ então existe $M \in \operatorname{ind} \Lambda$ tal que $\operatorname{cx}(M) \geq 1$?". A resposta é sim no caso em que gl.dim $\Lambda = \infty$ e não no caso em que gl.dim $\Lambda < \infty$. Na verdade, é conhecido que a existência ou não de um módulo indecomponível cuja complexidade é diferente de zero não depende da dimensão global forte da álgebra. De fato,

- se gl.dim $\Lambda = \infty$ então existe $M \in \operatorname{ind} \Lambda$ tal que pd $M = \infty$. De onde segue-se que $\operatorname{cx}(M) \geq 1$;
- se gl.dim $\Lambda < \infty$ então pd $M < \infty$, qualquer que seja $M \in \operatorname{ind} \Lambda$. Em particular, todo módulo finitamente gerado tem complexidade nula.

Daremos a seguir provas para o Lema 2.4.1 e para as suas implicações, comentadas acima. Em seguida, veremos que a existência de um objeto indecomponível em $\mathcal{D}^-(\Lambda)$ cuja complexidade é diferente de zero nos dá alguma informação sobre a dimensão global forte da álgebra Λ ; e vice-versa.

Prova do Lema 2.4.1: Note que por M ser um módulo indecomponível, P(M) é um objeto indecomponível de $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$. Mas como P(M) é radical, então temos do Lema 2.1.8 que P(M) também é indecomponível em $\mathcal{C}^-(\mathcal{P})$.

Vejamos que $\tau^{\geq -m}P(M)$ é indecomponível em $\mathcal{C}^b(\mathcal{P})$, para todo $m\geq 1$. Suponha, por absurdo, que existem $m\geq 1$ e dois complexos não nulos $X^{\bullet}=(X^i,d_X^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ e $Y^{\bullet}=(Y^i,d_Y^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ em $\mathcal{C}^b(\mathcal{P})$ tais que $\tau^{\geq -m}P(M)=X^{\bullet}\oplus Y^{\bullet}$. Como P(M) é um complexo radical, $\tau^{\geq -m}P(M)$ também é radical e, por conseguinte, X^{\bullet} e Y^{\bullet} são radicais (vide Lema 1.5.9). Suponha, sem perda de generalidade, que $X^0\neq 0$ e seja $t_0:=\max\{t\in\mathbb{Z}:Y^t\neq 0\}$. Então, $-m\leq t_0\leq 0$. Como M é indecomponível e X^{\bullet} e Y^{\bullet} são complexos radicais com $X^0\neq 0$, temos que $t_0\neq 0$, pois $M\cong \operatorname{Conuc}(d_P^{-1})\cong \operatorname{Conuc}(d_X^{-1})\oplus \operatorname{Conuc}(d_Y^{-1})$ e $\operatorname{Conuc}(d_X^{-1})\neq 0$. Assim, existe uma seção $\iota\colon Y^{\bullet}\to \tau^{\geq -m}P(M)$ em $\mathcal{C}^b(\mathcal{P})$, onde $\iota^i\neq 0$, para todo $-m\leq i\leq t_0<0$, e $\iota^i=0$ para todo $i\leq -m$ ou $i\geq t_0$.

Vemos no diagrama acima que $d_P^{t_0} \circ \iota^{t_0} = 0$, de onde segue que

$$Y^{t_0} \cong \operatorname{Im}(\iota^{t_0}) \subseteq \operatorname{Nuc}(d_P^{t_0}) \subseteq \operatorname{rad}(P^{t_0}) = \operatorname{rad}(X^{t_0}) \oplus \operatorname{rad}(Y^{t_0}),$$

o que é um absurdo. $\hfill\Box$

Corolário 2.4.2 Seja Λ uma k-álgebra de dimensão finita. Então, gl.dim (Λ) < s.gl.dim (Λ).

Prova. Seja $M \in \operatorname{ind} \Lambda$ tal que gl.dim $(\Lambda) = \operatorname{pd}(M)$. Então, P(M) é um complexo radical indecomponível em $\mathcal{C}^-(\mathcal{P})$ tal que $\ell(P(M)) = \operatorname{pd}(M)$. Daí temos os seguintes casos:

- (i) Se pd $(M) = n < \infty$, então P(M) é um complexo radical indecomponível em $C^b(\mathcal{P})$ cujo comprimento é igual n. Logo, s.gl.dim $(\Lambda) \ge n = \text{gl.dim}(\Lambda)$.
- (ii) Se pd $(M) = \infty$, então segue do Lema 2.4.1 que $(\tau^{\geq -m}P(M))_{m\geq 1}$ é uma sequência (infinita) em $C^b(\mathcal{P})$ de complexos radicais indecomponíveis. Como $\ell(\tau^{\geq -m}P(M)) = m$, para todo $m \geq 1$, então gl.dim $(\Lambda) = \text{s.gl.dim}(\Lambda) = \infty$.

Em quaisquer dos casos, tem-se que gl.dim $(\Lambda) \leq s.gl.dim(\Lambda)$.

Corolário 2.4.3 Seja Λ uma k-álgebra de dimensão finita. Se existe $M \in \operatorname{ind} \Lambda$ tal que $\operatorname{cx}(M) \geq 1$, então s.gl.dim $(\Lambda) = \infty$.

Prova. Seja $M \in \operatorname{ind} \Lambda$ tal que $\operatorname{cx}(M) \geq 1$. Então, pd $M = \infty$ e, portanto, gl.dim $\Lambda = \infty$. O resultado segue do corolário anterior.

É importante investigar se o resultado do Lema 2.4.1 pode ser estendido para complexos radicais indecomponíveis em $\mathcal{C}^-(\mathcal{P})$. De fato, se tal lema pode ser estendido, então da existência de um objeto indecomponível $M^{\bullet} \in \mathcal{D}^-(\Lambda)$ cuja complexidade é positiva, teríamos um complexo radical indecomponível – a seber o somando direto radical de $P(M^{\bullet})$ obtido no Teorema 2.1.6, que é indecomponível em $\mathcal{C}^-(\mathcal{P})$ pelo Lema 2.1.8 –, em que cada truncamento bruto seria um complexo radical indecomponível em $\mathcal{C}^b(\mathcal{P})$. De modo que se segueria da Proposição 2.2.12 que s.gl.dim $(\Lambda) = \infty$. Porém, veremos no Exemplo 2.4.5 que o funtor truncamento não preserva indecomponíveis. Para fazê-lo, precisaremos do seguinte resultado.

Lema 2.4.4 Seja $X^{\bullet} = (X^i, d_X^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ um complexo e suponha que existe um somando direto de X^n , digamos Y^n , tal que $Y^n \subseteq \ker(d_X^n)$. Então, o complexo concentrado em Y^n , no grau n, é um somando direto de $\tau^{\geq n} X^{\bullet}$.

Prova. Denote o complexo concentrado em Y^n no grau n por Y^{\bullet} e seja $\iota \colon Y^{\bullet} \to \tau^{\geq n} X^{\bullet}$ a aplicação induzida naturalmente da inclusão de Y^n em X^n . Como $Y^n \subseteq \ker(d_X^n)$, por hipótese, então $d_X^n \circ \iota^n = 0$ e, portanto, ι é um morfismo de complexos.

Além disso, denotando por π^n a projeção canônica de X^n em Y^n , temos um morfismo de complexos $\pi\colon \tau^{\geq n}X^\bullet\to Y^\bullet$ em que $\pi\circ\iota=1_{Y^\bullet}$.

$$\tau^{\geq n} X^{\bullet}: \qquad \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow X^{n} \xrightarrow{d_{X}^{n}} X^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad$$

Logo, Y^{\bullet} é um somando direto de $\tau^{\geq n}X^{\bullet}$.

Exemplo 2.4.5 Mostraremos um exemplo de um complexo radical indecomponível $P^{\bullet} \in \mathcal{C}^{-}(\mathcal{P})$ onde nenhum truncamento bruto $\tau^{\geq n}P^{\bullet}$, com $n \leq -1$, é indecomponível em $\mathcal{C}^{b}(\mathcal{P})$.

Considere a k-álgebra Λ dada pelo carcás com relações (Q, I), onde Q = x $y \in I = J^{2}$. Seja $P^{\bullet} = (P^{i}, d^{i})_{i \in \mathbb{Z}}$ o complexo em $\mathcal{C}^{-}(\mathcal{P})$ dado por

$$P^{\bullet} = \cdots \longrightarrow \Lambda \oplus \Lambda \xrightarrow{d^{-3}} \Lambda \oplus \Lambda \xrightarrow{d^{-2}} \Lambda \oplus \Lambda \xrightarrow{d^{-1}} \Lambda \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots,$$

onde
$$d^{-1}=(x\ 0)$$
 e $d^n=\left(\begin{array}{cc} x & 0 \\ y & 0 \end{array}\right)$, para todo $n\leq -2$.

Primeiro, note que como $\operatorname{Im}(d^{-1}) = \langle x \rangle$ e $\operatorname{Im}(d^n) = \langle x \rangle \oplus \langle y \rangle$, para todo $n \leq -2$, então $\operatorname{Im}(d^n) \subseteq \operatorname{rad} P^{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Logo, P^{\bullet} é um complexo radical. Note também que a

segunda cópia de Λ em $P^n = \Lambda \oplus \Lambda$, para $n \leq -1$, está contida em $\operatorname{Nuc}(d^n)$. De onde segue, pelo Lema 2.4.4, que o complexo concentrado em Λ , no grau $n \leq -1$, é um somando direto de $\tau^{\geq n}P^{\bullet}$. Isto é, nenhum trucamento bruto de P^{\bullet} de comprimento positivo é indecomponível em $C^b(\mathcal{P})$. Resta-nos, portanto, verificar que P^{\bullet} é indecomponível, que será feito vendo que 0 e 1 são os únicos indepotentes de $\operatorname{End}(P^{\bullet})$ – vide Corolário 1.2.15.

Seja $\varphi = (\varphi_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \operatorname{End}(P^{\bullet})$ tal que $\varphi^2 = \varphi$. Então $\varphi_0 \colon \Lambda \to \Lambda$ e $\varphi_n \colon \Lambda \oplus \Lambda \to \Lambda \oplus \Lambda$, para todo $n \leq -1$, são tais que $\varphi_0^2 = \varphi_0$ e $\varphi_n^2 = \varphi_n$. Para cada $n \leq -1$, denote $\varphi_n = \begin{pmatrix} r_n & s_n \\ t_n & v_n \end{pmatrix}$.

Como $\Lambda_{\Lambda} \in \operatorname{ind} \Lambda$ e Λ é uma k-álgebra de dimensão finita, então $\operatorname{End}(\Lambda_{\Lambda})$ é local e, portanto, $\varphi_0 = 0$ ou $\varphi_0 = 1$.

Usando a hipótese de φ ser um morfismo de complexos vemos – por indução – que para cada $n \leq -1$ o homomorfismo φ_n é da forma:

(1)
$$\varphi_n = \begin{pmatrix} r_n & s_n \\ t_n & v_n \end{pmatrix}$$
, $com \ r_n, s_n, t_n, v_n \in rad \Lambda$, no caso $em \ que \ \varphi_0 = 0$.

(2)
$$\varphi_n = \begin{pmatrix} 1 + r'_n & s_n \\ t_n & 1 + v'_n \end{pmatrix}$$
, $com \ r'_n, s_n, t_n, v'_n \in rad \Lambda$, no caso em que $\varphi_0 = 1$.

E usando a hipótese $\varphi_n^2 = \varphi_n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, em cada um dos dois casos acima, tem-se que:

(1')
$$r_n = s_n = t_n = v_n = 0$$
, no caso em que $\varphi_0 = 0$.

(2')
$$r'_n = s_n = t_n = v'_n = 0$$
, no caso em que $\varphi_0 = 1$.

De modo que $\varphi = 0$ ou $\varphi = 1_{P^{\bullet}}$, respectivamente. Isto mostra que 0 e 1 são os únicos idempotentes de $\operatorname{End}(P^{\bullet})$ e, portanto, P^{\bullet} é indecomponível.

Colocamos abaixo as contas para a prova do caso (2) (o outro caso é análogo). Ou seja, vamos supor que $\varphi_0 = 1$ e mostrar por indução que as componentes de cada φ_n têm a forma:

$$\begin{cases} r_n = 1 + r'_n, onde \ r'_n \in \operatorname{rad} \Lambda \\ v_n = 1 + v'_n, onde \ v'_n \in \operatorname{rad} \Lambda \\ s_n, t_n \in \operatorname{rad} \Lambda \end{cases}$$
 (2.12)

(a)
$$(x \ 0) = (x \ 0) \cdot \begin{pmatrix} r_{-1} & s_{-1} \\ t_{-1} & v_{-1} \end{pmatrix} \iff \begin{cases} s_{-1} \in \operatorname{rad} \Lambda \\ r_{-1} = 1 + r'_{-1}, onde \ r'_{-1} \in \operatorname{rad} \Lambda \end{cases}$$

(b)
$$\begin{pmatrix} r_{-1} & s_{-1} \\ t_{-1} & v_{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_{-2} & s_{-2} \\ t_{-2} & v_{-2} \end{pmatrix} \iff \begin{cases} r_{-1}x + s_{-1}y = xr_{-2} \\ xs_{-2} = 0 \\ t_{-1}x + v_{-1}y = yr_{-2} \\ ys_{-2} = 0 \end{cases}$$

Segue do item (a) que isto ocorre se e somente se $\begin{cases} x = xr_{-2} \\ xs_{-2} = 0 \\ t_{-1}x + v_{-1}y = yr_{-2} \\ ys_{-2} = 0 \end{cases}$. Logo,

$$\begin{cases} r_{-2} = 1 + r'_{-2}, onde \ r'_{-2} \in \operatorname{rad} \Lambda \\ s_{-2} \in \operatorname{rad} \Lambda \\ t_{-1} \in \operatorname{rad} \Lambda \ e \ v_{-1} = 1 + v'_{-1}, onde \ v'_{-1} \in \operatorname{rad} \Lambda \end{cases}$$

De onde segue que

$$\varphi_{-1} = \begin{pmatrix} 1 + r'_{-1} & s_{-1} \\ t_{-1} & 1 + v'_{-1} \end{pmatrix}, onde \ r'_{-1}, s_{-1}, t_{-1}, v'_{-1} \in \operatorname{rad} \Lambda,$$

e, portanto, as componentes de φ_{-1} têm a forma (2.12).

Suponha que as componentes de φ_i têm a forma (2.12) e vejamos que vale o mesmo para as componentes de φ_{i-1} .

(c) De $\varphi_i \circ d^{i-1} = d^{i-1} \circ \varphi_{i-1}$ e da hipótese de indução tem-se que

$$\begin{pmatrix} 1+r'_{i} & s_{i} \\ t_{i} & 1+v'_{i} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_{i-1} & s_{i-1} \\ t_{i-1} & v_{i-1} \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xr_{i-1} & xs_{i-1} \\ yr_{i-1} & ys_{i-1} \end{pmatrix}.$$

Logo, $s_{i-1} \in \operatorname{rad} \Lambda \ e \ r_{i-1} = 1 + r'_{i-1}, \ onde \ r'_{i-1} \in \operatorname{rad} \Lambda.$

(d) De $\varphi_{i-1} \circ d^{i-2} = d^{i-2} \circ \varphi_{i-2}$ e do item (c) tem-se que

$$\begin{pmatrix} 1 + r'_{i-1} & s_{i-1} \\ t_{i-1} & v_{i-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_{i-2} & s_{i-2} \\ t_{i-2} & v_{i-2} \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x & 0 \\ t_{i-1}x + v_{i-1}y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xr_{i-2} & xs_{i-2} \\ yr_{i-2} & ys_{i-2} \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{cases} s_{i-2} \in \operatorname{rad} \Lambda \\ r_{i-2} = 1 + r'_{i-2}, \, onde \, r'_{i-2} \in \operatorname{rad} \Lambda \\ t_{i-1}x + v_{i-1}y = yr_{i-2} \end{cases}$$

Segue das igualdades $t_{i-1}x + v_{i-1}y = yr_{i-2}$ e $r_{i-2} = 1 + r'_{i-2}$, com $r'_{i-2} \in \operatorname{rad} \Lambda$, que

 $t_{i-1} \in \operatorname{rad} \Lambda \ e \ v_{i-1} = 1 + v'_{i-1}, \ com \ v'_{i-1} \in \operatorname{rad} \Lambda.$

Juntando as conclusões de (c) e (d) tem-se que

$$\varphi_{i-1} = \begin{pmatrix} 1 + r'_{i-1} & s_{i-1} \\ t_{i-1} & 1 + v'_{i-1} \end{pmatrix}, onde \ r'_{i-1}, s_{i-1}, t_{i-1}, v'_{i-1} \in \operatorname{rad} \Lambda.$$

Isto conclui a prova de que as componentes de cada φ_n é da forma (2.12).

Observação 2.4.6 Seja $P^{\bullet} \in C^{-}(\mathcal{P})$. Note que se (quase) todos truncamentos bruto $\tau^{\geq n}P^{\bullet}$ é indecomponível em $C^{b}(\mathcal{P})$, então P^{\bullet} é indecomponível em $C^{-}(\mathcal{P})$. De fato, se Q^{\bullet} um somando direto não nulo de P^{\bullet} , então $\tau^{\geq n}Q^{\bullet}$ é um somando direto de $\tau^{\geq n}P^{\bullet}$, para todo $n \leq -1$. Pode-se mostrar que cada $\tau^{\geq n}Q^{\bullet}$ é não nulo e, portanto, igual a $\tau^{\geq n}P^{\bullet}$. Logo, $Q^{\bullet} = P^{\bullet}$.

Vimos com o exemplo anterior que a partir de um complexo radical indecomponível $P^{\bullet} \in \mathcal{C}^{-}(\mathcal{P})$ não é possível construir uma sequência de complexos radicais indecomponíveis em $\mathcal{C}^{b}(\mathcal{P})$ usando apenas truncamentos de P^{\bullet} . Porém, veremos que a partir de um dado indecomponível $P^{\bullet} \in \mathcal{C}^{-}(\mathcal{P})$, não limitado, é possível construir uma sequênica infinita $(P_{n}^{\bullet})_{n \leq -1}$ em $\mathcal{C}^{-}(\mathcal{P})$ com as seguintes propriedades:

- (i) $\tau^{\geq n} P_n^{\bullet}$ é um indecomponível em $\mathcal{C}^b(\mathcal{P})$, para todo $n \leq -1$;
- (ii) $\ell(\tau^{\geq n}P_n^{\bullet}) = |n|$, para todo $n \leq -1$; e
- (iii) Cada P_n^{\bullet} será radical sempre que P^{\bullet} for um complexo radical.

Lema 2.4.7 Seja $P^{\bullet} \in \mathcal{C}^{-}(\mathcal{P})$ indecomponível, não limitado, tal que $P^{0} \neq 0$ e $P^{n} = 0$ para todo n > 0. Seja $Q^{\bullet} \in \mathcal{C}^{b}(\mathcal{P})$ um somando direto não nulo do truncamento bruto $\tau^{\geq n}P^{\bullet}$, para $n \leq -1$, então existe um homomorfismo não nulo $\delta^{n-1} \colon P^{n-1} \to Q^{n}$ tal que

$$P_n^{\bullet} = \cdots \longrightarrow P^{n-2} \xrightarrow{d_P^{n-2}} P^{n-1} \xrightarrow{\delta^{n-1}} Q^n \xrightarrow{d_Q^n} Q^{n+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q^{-1} \xrightarrow{d_Q^{-1}} Q^0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

é um complexo em $C^-(\mathcal{P})$. Além disso,

- (a) se P^{\bullet} é um complexo radical, então Q^{\bullet} e P_n^{\bullet} são radicais;
- (b) se Q^{\bullet} é um indecomponível tal que $Q^{0} \neq 0$, então $\tau^{\geq n} P_{n}^{\bullet}$ é um indecomponível em $C^{b}(\mathcal{P})$ cujo comprimento é igual a |n|

Prova. Sejam $n \leq -1$ e Q^{\bullet} um somando direto não nulo de $\tau^{\geq n}P^{\bullet}$. Então, existem morfismos de complexos $\iota \colon Q^{\bullet} \to \tau^{\geq n}P^{\bullet}$ e $\pi \colon \tau^{\geq n}P^{\bullet} \to Q^{\bullet}$ tais que $\pi \circ \iota = 1_{Q^{\bullet}}$. Definindo $\delta^{n-1} \colon P^{n-1} \to Q^n$ como sendo a composta $\pi^n \circ d_P^{n-1}$, temos que o diagrama

$$P^{n-2} \xrightarrow{d_P^{n-2}} P^{n-1} \xrightarrow{d_P^{n-1}} P^n \xrightarrow{d_P^n} P^{n+1}$$

$$\downarrow^{\pi^n} \qquad \downarrow^{\pi^{n+1}}$$

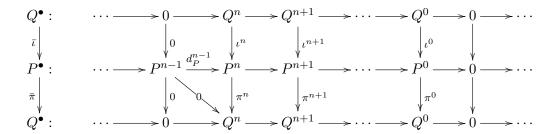
$$Q^n \xrightarrow{d_P^n} Q^{n+1}$$

é comutativo e assim:

•
$$\delta^{n-1} \circ d_P^{n-2} = \pi^n \circ d_P^{n-1} \circ d_P^{n-2} = 0$$
 e

$$\bullet \ \, d_Q^n \circ \delta^{n-1} = d_Q^n \circ \pi^n \circ d_P^{n-1} = \pi^{n+1} \circ d_P^n \circ d_P^{n-1} = 0.$$

De onde segue-se que P_n^{\bullet} é um objeto de $C^-(\mathcal{P})$. Vejamos que δ^{n-1} é diferente de zero: se $\delta^{n-1} = 0$ então podemos considerar um morfismo de P^{\bullet} em Q^{\bullet} induzido de π , como no diagrama abaixo.



Observe que neste caso teríamos Q^{\bullet} como sendo um somando não trivial de P^{\bullet} , contradizendo o fato de P^{\bullet} ser indecomponível.

A seguir mostraremos os itens (a) e (b).

(a) Suponha que P^{\bullet} é um complexo radical. Então, $\tau^{\geq n}P^{\bullet}$ é radical e, assim, o somando direto Q^{\bullet} também é radical.

Note que para verificar que P_n^{\bullet} é radical é suficiente mostrar que $\delta^{n-1} \colon P^{n-1} \to Q^n$ é um morfismo radical. De fato,

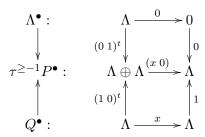
$$\operatorname{Im} \delta^{n-1} = \delta^{n-1}(P^{n-1}) = \pi^n(d_P^{n-1}(P^{n-1})) \subseteq \pi^n(\operatorname{rad} P^n) \subseteq \operatorname{rad} Q^n.$$

(b) Suponha que Q^{\bullet} é um indecomponível tal que $Q^{0} \neq 0$. Como $\delta^{n-1}: P^{n-1} \to Q^{n}$ é um homomorfismo não nulo, tem-se em particular que $Q^{n} \neq 0$. Logo, $\tau^{\geq n} P_{n}^{\bullet}$ é um indecomponível em $C^{b}(\mathcal{P})$, a saber Q^{\bullet} , cujo comprimento é igual a |n|.

Exemplo 2.4.8 Seja P^{\bullet} o complexo do Exemplo 2.4.5:

$$\cdots \longrightarrow \Lambda \oplus \Lambda \xrightarrow{\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}} \Lambda \oplus \Lambda \xrightarrow{\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}} \Lambda \oplus \Lambda \xrightarrow{(x & 0)} \Lambda \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

(a) Note que $Q^{\bullet} = \cdots \to 0 \longrightarrow \Lambda \xrightarrow{x} \Lambda \longrightarrow 0 \to \cdots$ é o complemento, indecomponível, do complexo concentrado em Λ , no grau -1, como somando direto do truncamento $\tau^{\geq -1}P^{\bullet}$.

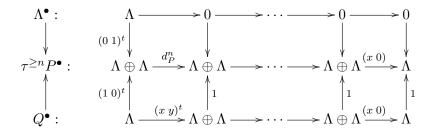


Neste caso, $\delta^{-2} \colon \Lambda \oplus \Lambda \to \Lambda$ é dado pelo produto $(1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}$, ou seja, $\delta^{-2} = (x \ 0)$. E assim,

$$P_{-1}^{\bullet} = \cdots \longrightarrow \Lambda \oplus \Lambda \xrightarrow{d_P^{-3}} \Lambda \oplus \Lambda \xrightarrow{(x\ 0)} \Lambda \xrightarrow{x} \Lambda \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

é tal que $\tau^{\geq -1}P_{-1}^{\bullet} = Q^{\bullet}$ é um indecomponível radical com comprimento igual a 1.

(b) Sejam $n \leq -2$ e $Q^{\bullet} = \cdots \to 0 \longrightarrow \Lambda \xrightarrow{(x \ y)^t} \Lambda \oplus \Lambda \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Lambda \oplus \Lambda \xrightarrow{(x \ 0)} \Lambda \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$ o complemento do complexo concentrado em Λ , no grau n, como somando direto do truncamento $\tau^{\geq n} P^{\bullet}$.



Procedendo de forma análoga ao Exemplo 2.4.5, tem-se que 0 e 1 são os únicos idempotentes de End(Q^{\bullet}) e, portanto, Q^{\bullet} é indecomponível em $C^b(\mathcal{P})$. Como em (a), $\delta^{n-1} \colon \Lambda \oplus \Lambda \to \Lambda$ é dado por $(x \ 0)$, de modo que

$$P_n^{\bullet} = \cdots \to \Lambda \oplus \Lambda \xrightarrow{d_P^{n-2}} \Lambda \oplus \Lambda \xrightarrow{(x\ 0)} \Lambda \xrightarrow{(x\ y)^t} \Lambda \oplus \Lambda \xrightarrow{\longrightarrow} \cdots \xrightarrow{} \Lambda \oplus \Lambda \xrightarrow{(x\ 0)} \Lambda \xrightarrow{\longrightarrow} 0 \xrightarrow{} \cdots$$

é tal que $\tau^{\geq n}P_n^{\bullet} = Q^{\bullet}$ é um indecomponível radical com comprimento igual a |n|.

Observação 2.4.9 Não sabemos se, para um dado $n \in \mathbb{Z}$, a "colagem" de um complexo indecomponível $P^{\bullet} \in \mathcal{C}^{-}(\mathcal{P})$ a um somando indecomponível $Q^{\bullet} \in \mathcal{C}^{b}(\mathcal{P})$ do truncamento bruto $\tau^{\geq n}P^{\bullet}$ (construção do complexo P_{n}^{\bullet} no Lema 2.4.7) determina um objeto indecomponível em $\mathcal{C}^{-}(\mathcal{P})$. O exemplo acima não serve de contra-exemplo, uma vez que cada P_{n}^{\bullet} é indecomponível em $\mathcal{C}^{-}(\mathcal{P})$.

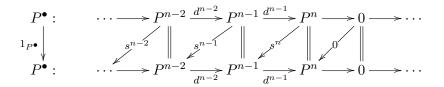
Lema 2.4.10 Seja $P^{\bullet} \in C^{-}(\mathcal{P})$ um indecomponível que é homotopicamente nulo. Então, a menos de translações, P^{\bullet} é da forma

$$\cdots \to 0 \longrightarrow P \xrightarrow{1_P} P \longrightarrow 0 \to \cdots, \tag{2.13}$$

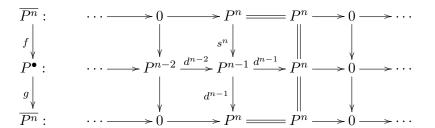
para algum módulo projetivo indecomponível P.

Prova. Seja $n \in \mathbb{Z}$ tal que $P^n \neq 0$ e $P^m = 0$ para todo m > n. Dado que P^{\bullet} é homotopica-

mente nulo, existe uma homotopia $s = (s_i)_i$ de $1_{P^{\bullet}}$, como ilustrado abaixo.



Em particular, $s^n : P^n \to P^{n-1}$ é um homomorfismo tal que $d^{n-1} \circ s^n = 1_{P^n}$. De onde temos os dois seguintes morfismos de complexos



satisfazendo $g \circ f = 1_{\overline{P^n}}$, ou seja, $\overline{P^n}$ é um somando direto de P^{\bullet} . Logo, como $\overline{P^n} \neq 0$ e P^{\bullet} é indecomponível, tem-se que $P^{\bullet} = \overline{P^n}$. Finalmente, se P é um somando direto indecomponível de P^n , então o complexo \overline{P} é um somando não nulo de P^{\bullet} e, portanto, $P^n = P$. O que conclui a prova do lema.

- Observação 2.4.11 (i) Note que se P[•] ∈ C⁻(P) é um indecomponível ilimitado, então P[•] é um complexo radical. De fato, por P[•] ser indecomponível, segue do Teorema 2.1.6 que P[•] é um complexo radical ou um complexo homotopicamente nulo. E por ser ilimitado, o lema acima garante que P[•] não pode ser homotopicamente nulo.
- (ii) De forma análoga, um indecomponível em $C^b(\mathcal{P})$ ou é um complexo radical ou é da forma (2.13). Em particular,

s.gl.dim
$$\Lambda = \sup\{1, \ell(P^{\bullet}) : P^{\bullet} \in \mathcal{C}^b(\mathcal{P}) \text{ indecomposite radical}\}.$$
 (2.14)

Por outro lado, como estamos supondo neste trabalho que Λ não é semisimples, então pela prova do Corolário 2.4.2 temos que $C^b(\mathcal{P})$ possui um complexo radical indecomponível cujo comprimento é maior ou igual a 1. Portanto, podemos reescrever (2.14) da seguinte forma:

s.gl.dim
$$\Lambda = \sup\{\ell(P^{\bullet}) : P^{\bullet} \in \mathcal{C}^{b}(\mathcal{P}) \text{ indecomposivel radical}\}.$$
 (2.15)

(iii) Segue do item (i), acima, que a hipótese "se P[•] é um complexo radical" dada no item
(a) do Lema 2.4.7 é desnecessária.

Proposição 2.4.12 Seja Λ uma álgebra de dimensão finita. Se existe $P^{\bullet} \in \mathcal{C}^{-}(\mathcal{P})$ indecomponível e não limitado, então s.gl.dim $\Lambda = \infty$.

Prova. Suponha que $P^0 \neq 0$ e $P^n = 0$ para todo n > 0. Para cada $n \leq -1$, seja $\tau^{\geq n}P^{\bullet} \in \mathcal{C}^b(\mathcal{P})$ o truncamento bruto de P^{\bullet} . Como $C^b(\mathcal{P})$ é Krull-Schimdit e $P^0 \neq 0$, $\tau^{\geq n}P^{\bullet}$ possui um somando direto indecomponível Q_n^{\bullet} com $Q_n^0 \neq 0$. Logo, pelo Lema 2.4.7 e pela Observação 2.4.11, existe um complexo radical P_n^{\bullet} tal que $\tau^{\geq n}P_n^{\bullet} = Q_n^{\bullet}$ é um indecomponível cujo comprimento é igual a |n|. Em particular, s.gl.dim $\Lambda = \infty$. □

Teorema 2.4.13 Seja Λ uma álgebra de dimensão finita. Se existe $M^{\bullet} \in \mathcal{D}^{-}(\Lambda)$ indecomponível e tal que $\operatorname{cx}(M^{\bullet}) \geq 1$, então s.gl.dim $\Lambda = \infty$.

Prova. Seja $P^{\bullet} \in \mathcal{K}^{-}(\mathcal{P})$ tal que $F(P^{\bullet}) \cong M^{\bullet}$, onde F é a equivalência triangulada entre as categorias $\mathcal{K}^{-}(\mathcal{P})$ e $\mathcal{D}^{-}(\Lambda)$. Seja $P^{\bullet} = P_{1}^{\bullet} \oplus P_{2}^{\bullet}$ uma decomposição em $\mathcal{C}^{-}(\mathcal{P})$, onde P_{1}^{\bullet} é radical e P_{2}^{\bullet} é homotopicamente nulo (vide Teorema 2.1.6). Assim, $P_{1}^{\bullet} \cong M^{\bullet}$ em $\mathcal{D}^{-}(\Lambda)$, e por M^{\bullet} ser indecomponível em $\mathcal{D}^{-}(\Lambda)$ e F ser um funtor aditivo que é uma equivalência, tem-se que P_{1}^{\bullet} é indecomponível em $\mathcal{K}^{-}(\mathcal{P})$ e, pelo Lema 2.1.8, indecomponível em $\mathcal{C}^{-}(\mathcal{P})$. Além disso, como $\operatorname{cx}(M^{\bullet}) \neq 0$, segue-se da Proposição 2.2.12-(i) que P_{1}^{\bullet} é um complexo ilimitado. O resultado segue-se da aplicação da Proposição 2.4.12 ao complexo P_{1}^{\bullet} .

Naturalmente, estamos interessados na recíproca do resultado acima. Isto é, queremos saber se para álgebras Λ satisfazendo s.gl.dim $\Lambda = \infty$ sempre existe um objeto $M^{\bullet} \in \mathcal{D}^{-}(\Lambda)$, indecomponível, tal que $\operatorname{cx}(M^{\bullet}) \geq 1$. Claramente, esta afirmação vale se gl.dim $\Lambda = \infty$ (vide Proposição 2.2.9-(ii) e o parágrafo seguinte ao Lema 2.4.1). Para álgebras de dimensão global finita, é claro que o resultado não vale se nos restringirmos ao complexos concentrados. No entanto, acreditamos que neste caso, gl.dim $\Lambda < \infty$, sempre existe um complexo não limitado e indecomponível em $\mathcal{K}^{-}(\mathcal{P})$.

Para fazer um esboço de como estamos pensando neste problema, no caso de álgebras com radical quadrado zero, precisaremos de algumas definições e ferramentas utilizadas ao longo do Captítulo 3, de modo que optamos por adiar essa discussão para o último capítulo deste trabalho.

Capítulo 3

Sobre a dimensão global forte de álgebras shod

Vimos na Introdução que um dos objetivos deste trabalho é descobrir se para a classe das álgebras shod (não quase inclinadas ou shod estritas) existe alguma relação entre sua dimensão global forte e sua dimensão global e, ao mesmo tempo, se a classe das álgebras shod estritas podem ser caracterizadas, homologicamente, como sendo aquelas álgebras cujas dimensões global e global forte são ambas iguais a 3. Como observamos anteriormente, estas questões foram pensadas a partir questionamentos deixados por A. Skowroński, em [Sko87], e por D. Happel e D. Zacharia, em [HZ08, HZ10].

Veremos neste capítulo que uma tal caracterização não existe para as álgebras shod estritas e que, além disso, não existe uma relação entre as dimensões global e global forte de tais álgebras. Em outras palavras, veremos que para cada inteiro $d \geq 3$, existe uma álgebra shod estrita Λ_d cuja dimensão global forte é igual a d.

Três trabalhos tiveram papel fundamental na construção de tais álgebras. A saber: (i) um preprint de R. Bautista e S. Liu ([BL13]), onde mostram, dentre outras coisas, uma forma de encontrar um limitante para a dimensão global forte de uma classe especial de álgebras hereditárias por partes (vide Teorema 3.2.5); (ii) um trabalho de J. Bélanger e C. Tosar ([BT05]), em que usamos, especificamente, uma caracterização da classe das álgebras shod strings em termos de elementos do seu respectivo carcás ordinário (vide Teorema 3.1.13); e (iii) o artigo [HZ08], que dentre outras diversas contribuições para o nosso trabalho, usamos um critério que mostra condições necessárias para que o cone de um morfismo seja um objeto indecomponível numa categoria triangulada (vide Lema 3.3.1).

Ao longo do capítulo, Λ denotará uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado k e s.gl.dim Λ a dimensão global forte da álgebra Λ .

3.1 Álgebras shod

A classe das álgebras *shod* (small homological dimension), introduzida por F. U. Coelho e M. A. Lanzilotta ([CL99]), é uma generalização das álgebras *quase inclinadas* que foram

definidas por D. Happel, I. Reiten e S. Smalø ([HRS96b]) como uma generalização das álgebras *inclinadas* ([HR82]).

Um dos objetivos desta seção é apresentar a noção de álgebra *shod*, assim como algumas de suas caracterizações. Além disso, apresentaremos também uma caracterização das álgebras *shod string*, por meio do seu carcás ordinário, devida à J. Bélanger e C. Tosar ([BT05]), a qual será útil na prova do resultado principal do capítulo (Teorema 3.4.4).

Começaremos relembrando a definição de uma álgebra *quase inclinada* e algumas de suas caracterizações. Para tanto, vamos precisar definir mais alguns conceitos da teoria de categorias e de algumas subcategorias da categoria de módulos.

Seja Λ uma k-álgebra de dimensão finita. Dados $X,Y\in\operatorname{ind}\Lambda$, dizemos que existe um caminho de X para Y, e denotamos por $X\leadsto Y$, quando existe uma sequência de morfismos não nulos entre Λ -módulos indecomponíveis da forma

$$X = X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{t-1} \xrightarrow{f_t} X_t = Y,$$

para algum $t \ge 0$. Neste caso, define-se as seguintes subcategorias plenas de ind Λ :

$$\mathcal{L}_{\Lambda} := \{ X \in \operatorname{ind} \Lambda : \operatorname{se} Y \leadsto X, \operatorname{ent\tilde{a}o} \operatorname{pd} Y \leq 1 \} e$$

$$\mathcal{R}_{\Lambda} := \{ X \in \operatorname{ind} \Lambda : \operatorname{se} X \leadsto Y, \operatorname{ent\tilde{a}o} \operatorname{id} Y \leq 1 \}$$

Seja \mathcal{H} uma k-categoria abeliana Hom-finita. Dizemos que \mathcal{H} é hereditária quando para cada par de objetos $X,Y\in\mathcal{H}$, $\operatorname{Ext}^2_{\mathcal{H}}(X,Y)=0$ e o k-espaço vetorial $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{H}}(X,Y)$ tem dimensão finita. Neste caso, dizemos que um objeto $T\in\mathcal{H}$, é inclinante quando $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{H}}(T,T)=0$ e X=0 é único objeto de \mathcal{H} tal que $\operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(X,T)=0=\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{H}}(X,T)$.

Definição 3.1.1 ([HRS96b]) Uma álgebra Γ é dita quase inclinada se existe uma categoria hereditária \mathcal{H} e um objeto inclinante T em \mathcal{H} tais que $\Gamma \cong \operatorname{End}_{\mathcal{H}}(T)$.

As álgebras quase inclinadas possuem várias propriedades e características interessantes, mas nos limitaremos aqui a seguinte caracterização homológica desta classe de álgebras.

Teorema 3.1.2 ([HRS96b]) Seja Γ uma álgebra de dimensão finita. As seguintes condições são equivalentes:

- (a) Γ é quase inclinada.
- (b) gl.dim $\Gamma \leq 2$ e todo Γ -módulo indecomponível X satisfaz pd $X \leq 1$ ou id $X \leq 1$.
- (c) \mathcal{L}_{Γ} contém todos os Γ -módulos projetivos indecomponíveis.
- (d) \mathcal{R}_{Γ} contém todos os Γ -módulos injetivos indecomponíveis.

Seguindo F. U. Coelho e M. A. Lanzilotta, em [CL99], temos o seguinte conceito.

Definição 3.1.3 Dizemos que uma álgebra Λ é shod se todo Λ -módulo indecomponível X satisfaz pd $X \leq 1$ ou id $X \leq 1$. Se Λ é shod mas não é quase inclinada, dizemos que Λ é shod estrita.

Observe que, pelo Teorema 3.1.2 e pela definição acima, toda álgebra quase inclinada é shod e, portanto, a classe das álgebras shod consiste das álgebras quase inclinadas e das álgebras shod estritas. Além disso, sabemos de [HRS96b] (Ch. II, Proposition 1.1) que a dimensão global de uma álgebra shod é menor ou igual a 3. Logo, pelo Teorema 3.1.2, uma álgebra shod estrita tem dimensão global igual a 3.

Teorema 3.1.4 ([CL99], Th. 2.1) Seja Λ uma álgebra de dimensão finita. Então, Λ é uma álgebra shod se e somente se ind $\Lambda = \mathcal{L}_{\Lambda} \cup \mathcal{R}_{\Lambda}$.

Como uma consequência direta deste resultado e do Teorema 3.1.2 temos a seguinte caracterização das álgebras shod estrita, dentro da classe das álgebras shod.

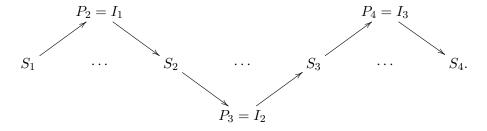
Teorema 3.1.5 ([CL99]) Para uma álgebra shod Λ , as seguintes condições são equivalentes.

- (a) Λ é shod estrita.
- (b) $\mathcal{L}_{\Lambda} \setminus \mathcal{R}_{\Lambda}$ contém um Λ -módulo injetivo indecomponível.
- (c) $\mathcal{R}_{\Lambda} \setminus \mathcal{L}_{\Lambda}$ contém um Λ -módulo projetivo indecomponível.

Exemplo 3.1.6 (a) Seja (Q, I) o carcás com relações

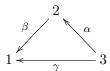
$$1 \leftarrow 2 \leftarrow 3 \leftarrow 4$$

onde uma linha pontilhada sobre um caminho significa que a composição das flechas sobre este caminho é um gerador do ideal I. Note que o carcás de Auslander-Reiten da álgebra $\Lambda=kQ/I$ é dado por

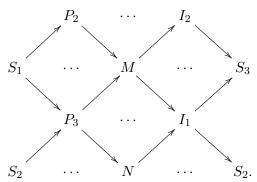


Observe também que $\mathcal{L}_{\Lambda} = \{S_1, P_2, S_2, P_3\}$, $\mathcal{R}_{\Lambda} = \{I_2, S_3, I_3, S_4\}$ e ind $\Lambda = \mathcal{L}_{\Lambda} \cup \mathcal{R}_{\Lambda}$, de modo que Λ é shod, pelo Teorema 3.1.4. Além disso, como $\mathcal{L}_{\Lambda} \setminus \mathcal{R}_{\Lambda}$ contém um Λ -módulo injetivo indecomponível, a saber I_1 , então Λ é shod estrita, pelo Teorema 3.1.5.

(b) Seja (Q, I) o carcás com relações



onde $I = \langle \alpha \beta \rangle$. Neste caso, o carcás de Auslander-Reiten da álgebra $\Lambda = kQ/I$ é dado por



 $\mathcal{L}_{\Lambda} = \{S_1, P_2\}, \mathcal{R}_{\Lambda} = \{I_2, S_3\} \ e \ \mathcal{L}_{\Lambda} \cup \mathcal{R}_{\Lambda} \subsetneq \operatorname{ind} \Lambda. \ Logo, \ pelo \ \operatorname{Teorema} \ 3.1.4, \ \Lambda \ n\tilde{a}o \ \acute{e} \ shod.$

Antes de apresentar a caracterização das álgebras shod string ([BT05]), precisamos lembrar a definição de mais alguns elementos de um carcás.

Seja Q um carcás finito. Para cada flecha α em Q, define-se uma inversa formal α^{-1} em que $s(\alpha^{-1}) = t(\alpha)$ e $t(\alpha^{-1}) = s(\alpha)$. Um passeio ω em Q é um produto formal $\omega = c_1 \cdots c_n$ com n > 0, onde c_i é um caminho trivial, uma flecha ou a inversa de uma flecha, tal que $s(c_i) = t(c_{i-1})$ para todo $1 \le i < n$. Neste caso, escrevemos $s(\omega) = s(c_1)$ e $t(\omega) = t(c_n)$, e dizemos que ω é um passeio de $s(\omega)$ para $t(\omega)$. Se $\omega = c_1 \cdots c_n$ e $\omega' = c'_1 \cdots c'_m$ são dois passeios em Q tais que $t(\omega) = s(\omega')$, então $\omega \omega' = c_1 \cdots c_n c'_1 \cdots c'_m$ é um passeio em Q, chamado a composta de ω e ω' . Um passeio ω em Q é dito fechado se $s(\omega) = t(\omega)$; e reduzido se ω é um caminho trivial ou se $\omega = c_1 \cdots c_n$ com $c_i \in Q_1$ ou $c_i^{-1} \in Q_1$ tal que $c_{i+1} \neq c_i^{-1}$, para todo $1 \le i < n$.

Seja ω um passeio reduzido não trivial em Q e sejam ω_1 e ω_2 dois subpasseios de ω . Diz-se que ω_1 e ω_2 apontam na mesma direção em ω se existem caminhos p e q de Q tais que $\omega_1 = p$ e $\omega_2 = q$ ou $\omega_1 = p^{-1}$ e $\omega_2 = p^{-1}$.

Seja (Q, I) um carcás com relações. Um caminho p em Q é chamado caminho nulo se p pertence ao ideal I. Uma relação zero em (Q, I) é um caminho nulo tal que nenhum de seus subcaminhos próprios é um caminho nulo. Seja $\omega = c_1 \cdots c_n$ um passeio reduzido não trivial em Q. Diz-se que um subpasseio $u = c_i \cdots c_{i+r}$ é uma relação zero contida em ω se u = p ou $u = p^{-1}$ para alguma relação zero p em (Q, I). Um caminho em Q é dito um caminho não nulo se ele não contém relações zero. Finalmente, diz-se que um caminho p em Q contém duas relações zero que se sobreponhem se $p = p_1p_2p_3$, onde os p_i 's são caminhos não nulos e não triviais tais que p_1p_2 e p_2p_3 são relações zero. No caso em que p_1 (ou p_3) é uma flecha,

ÁLGEBRAS SHOD

diz-se que p é start-tight (ou end-tight, respectivamente).

3.1

$$p:$$
 p_1 p_2 p_3

Exemplo 3.1.7 ([BT05]) Seja (Q, I) o seguinte carcás com relações abaixo.

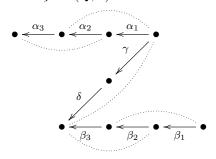
$$\bullet \xrightarrow{\alpha_1} \bullet \xrightarrow{\alpha_2} \bullet \xrightarrow{\alpha_3} \bullet \xrightarrow{\alpha_4} \bullet \xrightarrow{\alpha_5} \bullet$$

Note que o caminho $p = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ contém duas relações zero que se sobreponhem, a saber $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ e $\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, e que o caminho p é start-tight e end-tight. No entanto, o caminho $q = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5$, contendo as relações zero que se sobreponhem $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ e $\alpha_3\alpha_4\alpha_5$, não é start-tight nem end-tight.

Definição 3.1.8 Uma álgebra Λ é dita string se $\Lambda \cong kQ/I$, onde (Q, I) um carcás com relações satisfazendo as seguintes condições:

- (1) O ideal I é gerado por um conjunto de caminhos.
- (2) Cada vértice de Q é o início de no máximo duas flechas e final de no máximo duas flechas.
- (3) Para uma dada flecha α , existe no máximo uma flecha β e no máximo uma flecha γ tal que $\alpha\beta$ e $\gamma\alpha$ não pertencem a I.

Exemplo 3.1.9 O carcás com relações (Q, I)



satisfaz as condições (1)-(3) de 3.1.8, de modo que $\Lambda = kQ/I$ é uma álgebra string.

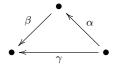
A definição seguinte será particularmente útil na caracterização das álgebras shod string.

Definição 3.1.10 Seja (Q, I) um carcás com relações e seja ω um passeio reduzido em (Q, I) contendo pelo menos duas relações zero tais que todas relações zero apontam na mesma direção em ω . Então, qualquer subpasseio de ω contendo pelo menos duas relações zero é chamado um zero consecutivo.

Observação 3.1.11 Note que no carcás com relações (Q, I) do Exemplo 3.1.9, os passeios $\gamma^{-1}\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, $\beta_1\beta_2\beta_3$ e $\beta_1\beta_2\beta_3\delta^{-1}$ são todos os zeros consecutivos. Note também que cada um destes zero consecutivos possui exatamente duas relações zero, as quais se sobreponhem. Além disso, os caminhos $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ e $\beta_1\beta_2\beta_3$ são, trivialmente, start-tight e end-tight.

Exemplo 3.1.12 Seja (Q, I) o carcás ordinário

76

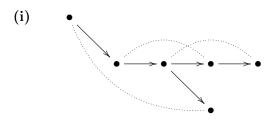


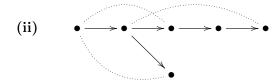
onde $I = \langle \alpha \beta \rangle$. Note que $\omega = \alpha \beta \gamma^{-1} \alpha \beta$ é um passeio reduzido em Q contendo duas relações zero apontando na mesma direção, a saber $\alpha \beta$ duas vezes. Logo, ω é um zero consecutivo em Q. Temos, analogamente, que $\omega_n = c_1 c_2 \cdots c_n$, onde n > 1 e $c_i = \alpha \beta \gamma^{-1}$, para todo $1 \le i \le n$, é um passeio reduzido em Q contendo n relações zero apontando na mesma direção, todas iguais a $\alpha \beta$.

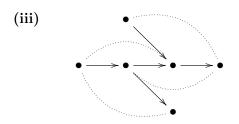
Em [BT05] J. Bélanger e C. Tosar enunciaram o resultado seguinte.

Teorema 3.1.13 Seja $\Lambda = kQ/I$ uma álgebra string. Então, Λ é shod se e somente se (Q, I) satisfaz as seguintes condições:

- (1) Todo zero consecutivo em (Q, I) contém exatamente duas relações zero. Neste caso, elas se sobreponhem e o caminho contendo estas duas relações zero é um start-tight ou um end-tight.
- (2) (Q, I) não contém subcategoria plena das seguintes formas ou duais.







Tal como enunciado este resultado não é verdadeiro, como mostra o Exemplo 3.4.3. Porém, o enunciado é válido para o caso de árvores, que é o que será usado neste trabalho.

- Exemplo 3.1.14 (a) Seja (Q, I) o carcás com relações do Exemplo 3.1.7. É claro que Λ é uma álgebra string. Note que o caminho $q = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5$ é um zero consecutivo contendo três relações zero. Portanto, Λ não é shod, uma vez que (Q, I) não satisfaz a condição (1) do teorema acima.
- (b) Considere a álgebra Λ = kQ/I onde (Q, I) é o carcás com relações do Exemplo 3.1.9. Como já observado, Λ é uma álgebra string. Além disso, a condição (2) do teorema acima é trivialmente satisfeita e a condição (1) segue da Observação 3.1.11. Logo, Λ é shod.
- (c) Seja $\Lambda = kQ/I$ a álgebra dada pelo carcás com relações do Exemplo 3.1.12. Vimos no Exemplo 3.1.6-(b) que esta álgebra não é shod. Observe que Λ é uma álgebra string e que, para cada inteiro positivo n > 1, existe um zero consecutivo ω_n contendo n relações zero, ou seja, Λ não satisfaz a condição (1) do Teorema 3.1.13.

3.2 Critério de Bautista-Liu

Apresentaremos nesta seção um resultado de R. Bautista e S. Liu ([BL13]), que terá um papel importante neste capítulo e em parte do capítulo seguinte. O resultado trata da existência de um limitante para o comprimento dos objetos indecomponíveis da categoria derivada limitada de uma álgebra de dimensão finita com radical quadrado zero ([BL13], Corollary 3.14). Este limitante é dado em função de alguns elementos do respectivo carcás ordinário da álgebra. Deste mesmo trabalho, usaremos uma caracterização para as álgebras com radical quadrado zero que são derivadamente equivalentes a álgebras hereditárias de dimensão finita ([BL13], Corollary 4.7).

Ao longo desta seção, Λ denotará uma álgebra conexa, não semisimples, de dimensão finita (sobre um corpo k algebricamente fechado) e com radical quadrado zero. Neste caso, $\Lambda \cong kQ/J^2$, onde Q é um carcás conexo e finito e J é o ideal de kQ gerado pelas flechas de Q.

Seja Q um carcás. Um passeio ω em Q é chamado um ciclo se ω é reduzido, fechado e não é trivial. O grau de um passeio ω , denotado por $\partial(\omega)$, é definido como segue:

- (a) $\partial(\omega) = 0, 1$ ou -1 no caso em que ω é um passeio trivial, uma flecha ou o inverso de uma flecha, respectivamente.
- (b) $\partial(uv) = \partial(u) + \partial(v)$ sempre que u e v são passeios com t(u) = s(v).

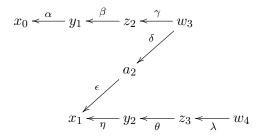
Note que neste caso um caminho é um passeio cujo grau é igual ao seu comprimento.

Definição 3.2.1 Um carcás Q é chamado graduável se o grau de todo passeio fechado em Q é zero.

Sejam x e y dois vértices de um carcás graduável Q. Então todos os passeios em Q de x para y têm o mesmo grau, o qual será denotado por d(x,y). Temos a seguinte relação de equivalência \sim sobre Q_0 : $x \sim y$ se e somente se d(x,y) = 0. As classes de equivalência em Q_0/\sim são chamadas de classes de graduação de Q_0 . Tal nome se deve ao seguinte fato: fixe $x_0 \in Q_0$ e para cada $n \in \mathbb{Z}$ defina $Q^n(x_0) = \{x \in Q_0 : d(x_0, x) = n\}$. Então as classes em Q_0/\sim são precisamente os conjuntos não-vazios $Q^n(x_0)$ com $n \in \mathbb{Z}$. Ilustremos estes conceitos com os exemplos seguintes.

Exemplo 3.2.2 Seja Q o carcás abaixo

78



Note que, por ser uma árvore, Q é graduável. Note também que há 5 classes de gradução, onde os vértices indexados pelo mesmo número pertencem a mesma classe. De fato, fixando o vértice x_0 , temos, por exemplo, que $\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma^{-1}\delta\epsilon$ é um passeio de x_0 para x_1 cujo grau é

$$\partial(\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma^{-1}\delta\epsilon) = \partial(\alpha^{-1}) + \partial(\beta^{-1}) + \partial(\gamma^{-1}) + \partial(\delta) + \partial(\epsilon)$$

= $(-1) + (-1) + (-1) + 1 + 1$
= -1 ,

de modo que $d(x_0, x_1) = -1$ e portanto $x_1 \in Q^{-1}(x_0)$. Uma forma mais simples de verificar isto é observando que o passeio $\beta^{-1}\gamma^{-1}\delta\epsilon$, de y_1 para x_1 , tem grau zero e assim x_1 e y_1 pertencem a mesma classe de graduação, que neste caso é $Q^{-1}(x_0)$ – observe que $y_1 \in Q^{-1}(x_0)$ porque α^{-1} é um passeio de x_0 para y_1 cujo grau é -1. Temos da mesma forma que qualquer passeio ligando dois dos três vértices z_2 , a_2 e y_2 tem grau zero, de modo que eles pertencem a mesma classe de graduação $Q^{-2}(x_0)$. Analogamente, vemos que w_3 e z_3 estão na mesma classe de graduação $Q^{-3}(x_0)$. E $w_4 \in Q^{-4}(x_0)$ porque o passeio $\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma^{-1}\delta\epsilon\eta^{-1}\theta^{-1}\lambda^{-1}$ de x_0 para w_4 tem grau -4. Vejamos, finalmente, que aqueles vértices que estão indexados por naturais diferentes não pertencem a mesma classe de graduação. Para tanto, observe que é suficiente verificar este fato para os vértices do subcarcás $x_i \leftarrow y_{i+1} \leftarrow z_{i+2} \leftarrow w_{i+3}$ de Q, onde i = 0 ou i = 1, o que é evidente, pois

$$d(x_i, y_{i+1}) = d(y_{i+1}, z_{i+2}) = d(z_{i+2}, w_{i+3}) = -1 \neq 0,$$

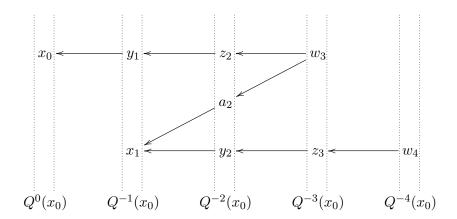
$$d(x_i, z_{i+2}) = d(y_{i+1}, w_{i+3}) = -2 \neq 0 \quad e \quad d(x_i, w_{i+3}) = -3 \neq 0.$$

Portanto, temos as seguintes classes de graduação:

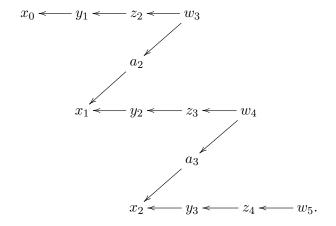
$$Q^0(x_0) = \{x_0\}, \ Q^{-1}(x_0) = \{x_1, y_1\}, \ Q^{-2}(x_0) = \{y_2, a_2, z_2\},\$$

$$Q^{-3}(x_0) = \{z_3, w_3\} \ e \ Q^{-4}(x_0) = \{w_4\},\$$

as quais podem ser ilustradas da seguinte forma:



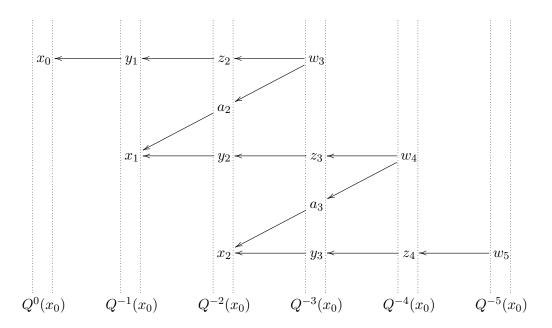
Exemplo 3.2.3 Seja Q o carcás abaixo



Assim como no exemplo anterior, Q é graduável (por ser uma árvore) e os passeios entre quaisquer dois vértices indexados pelo mesmo natural tem grau zero e assim pertencem a mesma classe de graduação. De fato, olhando Q como a união (não disjunta!) de dois carcases do Exemplo 3.2.2, onde $x_1 \leftarrow y_2 \leftarrow z_3 \leftarrow w_4$ é a parte comum, temos que $y_1 \sim x_1$, $z_2 \sim a_2 \sim y_2$ e $w_3 \sim z_3$ (da parte superior) e que $y_2 \sim x_2$, $z_3 \sim a_3 \sim y_3$ e $w_4 \sim z_4$ (da parte inferior). Logo, temos as seguintes relações: $y_1 \sim x_1$, $z_2 \sim a_2 \sim y_2 \sim x_2$, $w_3 \sim z_3 \sim a_3 \sim y_3$ e $w_4 \sim z_4$. Finalmente, para verificar que os vértices indexados por naturais diferentes não pertencem a mesma classe de graduação, basta observar que as contas do exemplo anterior para o subcarcás $x_i \leftarrow y_{i+1} \leftarrow z_{i+2} \leftarrow w_{i+3}$ de Q não dependeram do valor de i.

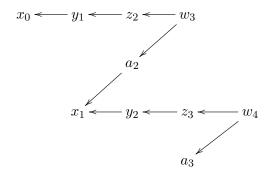


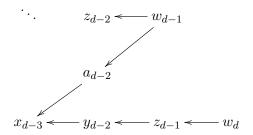
Fixando $x_0 \in Q_0$, podemos ilustrar as classes de graduação de Q como abaixo:



Usando as técnicas destes dois exemplos, podemos provar o resultado seguinte.

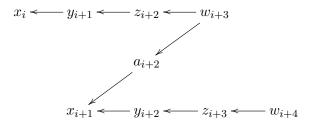
Lema 3.2.4 Seja $d \ge 4$. Então, o carcás Q abaixo tem d+1 classes de graduação.





Prova. Por ser uma árvore, Q é graduável. Além disso, como o conjunto dos índices dos elementos de Q_0 é o conjunto de inteiros $\{0,1,2,\ldots,d\}$, então é suficiente provar que aqueles vértices de Q que são indexados pelo mesmo natural estão na mesma classe de graduação e que aqueles com índices diferentes estão em classes de graduação distintas. Usando o mesmo raciocínio do Exemplo 3.2.3, basta então verificar que para cada $i \geq 0$, os vértices perten-

centes ao subcarcás pleno de Q dado por



satisfaz tais condições. Fato este já verificado no Exemplo 3.2.2, a menos da numeração dos vértices.

Teorema 3.2.5 (Critério de Bautista-Liu, Cor. 4.7 e 3.14) Seja Λ uma k-álgebra de dimensão finita, não semisimples e com radical quadrado zero. Se o carcás ordinário Q de Λ é graduável, então $\mathcal{D}^b(\Lambda) \cong \mathcal{D}^b(kQ^{\mathrm{op}})$ e todo objeto indecomponível em $\mathcal{D}^b(\Lambda)$ é isomorfo a um complexo radical de $\mathcal{K}^b(\mathcal{P})$ cujo comprimento é menor que o número de classes de graduação de Q. Reciprocamente, se existe uma equivalência triangulada $\mathcal{D}^b(\Lambda) \cong \mathcal{D}^b(H)$, onde H é uma k-álgebra de hereditária de dimensão finita, então o carcás ordinário de Λ é graduável. \square

Note que do Lema 2.1.8 e da Observação 2.4.11-(ii), temos que

s.gl.dim
$$\Lambda = \sup\{\ell(P^{\bullet}) : P^{\bullet} \in \mathcal{K}^{b}(\mathcal{P}) \text{ indecomponivel radical}\}.$$
 (3.1)

Juntando este fato ao critério de Bautista-Liu podemos concluir que se o carcás ordinário Q de uma álgebra Λ de dimensão finita com radical quadrado zero é graduável, então Λ é hereditária por partes (do tipo $kQ^{\rm op}$) e s.gl.dim $\Lambda < m$, onde m é o número de classes de graduação de Q.

Observação 3.2.6 A partir de agora quando fizermos referência a dimensão global forte, não faremos distinção entre as igualdades (2.15) e (3.1). Em outras palavras, faremos uso daquela que for mais conveniente.

Exemplo 3.2.7 (a) Seja Λ uma álgebra de dimensão finita com radical quadrado zero cujo carcás ordinário é aquele do Lema 3.2.4. Então, pelo critério de Bautista-Liu, Λ é hereditária por partes. Além disso, como Q possui d+1 classes de graduação, segue do observado no parágrafo anterior que s.gl.dim $\Lambda \leq d$.

(b) Seja(Q, I) o carcás com relações abaixo.

Observe que Q é graduável com 4 classes de graduação e, assim, a álgebra $\Lambda = kQ/I$ é hereditária por partes com dimensão global forte menor ou igual a 3. Por outro

lado, sabemos do Exemplo 3.1.6-(a) que Λ é uma álgebra shod estrita e, portanto, gl.dim $\Lambda=3$. Logo, pelas designaldades $3=\mathrm{gl.dim}\,\Lambda\leq\mathrm{s.gl.dim}\,\Lambda\leq3$, temos que $\mathrm{s.gl.dim}\,\Lambda=3$.

3.3 Diagramas escada

82

Vimos na seção precedente um critério que determina um limitante superior para a dimensão global forte de uma classe de álgebras hereditárias por partes (vide Teorema 3.2.5 e comentário que o segue). Nesta seção, encontraremos um limitante inferior para a dimensão global forte de alguns exemplos específicos de álgebras de caminhos. Para tanto, vamos definir um tipo especial de quíntupla na categoria de complexos limitados. Estas quíntuplas serão chamadas de diagrama escada e veremos que elas serão úteis na construção de complexos indecomponíveis na categoria de homotopia de complexos limitados. Vamos precisar também de um resultado de D. Happel e D. Zacharia, [HZ08], onde se determina condições necessárias para que o cone de um dado morfismo seja um objeto indecomponível.

Ao longo desta seção, Λ denotará uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo k algebricamente fechado.

Seja \mathcal{A} uma k-categoria triangulada, Hom-finita e Krull-Schimidt. Dado um morfismo $f\colon X\to Y$ em \mathcal{A} , temos um triângulo distinguido em \mathcal{A} da forma

$$X \stackrel{f}{\to} Y \to C_f \to T(X).$$

O objeto C_f é unicamente determinado, a menos de isomorfismos, e chamado de *cone de f*. Dizemos que uma tripla (X, Y, f) em \mathcal{A} tem a **propriedade** * se as seguintes condições são satisfeitas:

- (*1) X e Y são objetos indecomponíveis;
- (*2) $f: X \to Y$ é um morfismo não nulo;
- (*3) f não é um isomorfismo; e
- (*4) $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, X[1]) = 0.$

Lema 3.3.1 ([HZ08]) Se (X, Y, f) é uma tripla em A com a propriedade *, então C_f é indecomponível em A.

Estamos particularmente interessados no resultado acima para $\mathcal{A} \in \{\mathcal{K}^b(\Lambda), \mathcal{K}^b(\mathcal{P})\}$. Ainda antes da definição de diagrama escada, faremos alguns lemas técnicos.

Lema 3.3.2 Seja $X^{\bullet} = (X^i, d_X^i)$ um complexo em $\mathcal{C}(\Lambda)$ onde (i) cada componente não nula X^n é um módulo indecomponível e (ii) $d_X^n = 0$ se e somente se $X^j = 0$ para todo j > n ou $X^j = 0$ para todo $j \leq n$. Então, X^{\bullet} é indecomponível em $\mathcal{C}(\Lambda)$.

Prova. Seja $Y^{\bullet} = (Y^i, d_Y^i)$ um complexo não nulo e considere uma retração $\pi = (\pi^i)_i$ de X^{\bullet} em Y^{\bullet} . Vejamos que π é um isomorfismo de complexos. Para tanto, considere uma seção $\iota = (\iota^i)_i \colon Y^{\bullet} \to X^{\bullet}$ em $\mathcal{C}(\Lambda)$ tal que $\pi \circ \iota = 1_{Y^{\bullet}}$. Em particular, para cada $n \in \mathbb{Z}$, temos que $\pi^n \colon X^n \to Y^n$ é uma retração e $\iota^n \colon Y^n \to X^n$ é uma seção satisfazendo $\pi^n \circ \iota^n = 1_{Y^n}$. Para cada $l \in \mathbb{Z}$ tal que $Y^l \neq 0$ (existe porque $Y^{\bullet} \neq 0$) temos um diagrama comutativo

$$\begin{array}{c} Y^{l-1} \xrightarrow{d_Y^{l-1}} Y^l \xrightarrow{d_Y^l} Y^{l+1} \\ \downarrow^{\iota^{l-1}} & \downarrow^{\iota^l} & \downarrow^{\iota^{l+1}} \\ X^{l-1} \xrightarrow{d_X^{l-1}} X^l \xrightarrow{d_X^l} X^{l+1} \\ \downarrow^{\pi^{l-1}} & \downarrow^{\pi^l} & \downarrow^{\pi^{l+1}} \\ Y^{l-1} \xrightarrow{d_Y^{l-1}} Y^l \xrightarrow{d_Y^l} Y^{l+1}, \end{array}$$

onde π^l é um isomorfismo com inversa ι^l , dado que X^l é um módulo indecomponível. Logo,

- se $X^{l-1} \neq 0$ então $Y^{l-1} \neq 0$, uma vez que $d_X^{l-1} \neq 0$ implica que $0 \neq \pi^l \circ d_X^{l-1} = d_Y^{l-1} \circ \pi^{l-1}$. Neste caso, por X^{l-1} ser indecomponível, temos que π^{l-1} é um isomorfismo com inversa ι^{l-1} .
- se $X^{l+1} \neq 0$ então $Y^{l+1} \neq 0$, uma vez que $d_X^l \neq 0$ implica que $0 \neq d_X^l \circ \iota^l = \iota^{l+1} \circ d_Y^l$. Neste caso, por X^{l+1} ser indecomponível, temos que π^{l+1} é um isomorfismo com inversa ι^{l+1} .

Continuando este processo indutivamente, teremos que π é um isomorfismo com inversa ι . \square

Corolário 3.3.3 Seja $X^{\bullet} = (X^i, d_X^i)$ um complexo em $\mathcal{C}(\mathcal{P})$ onde (i) cada componente não nula X^n é indecomponível, (ii) $d_X^n = 0$ se e somente se $X^j = 0$ para todo j > n ou $X^j = 0$ para todo $j \leq n$, e (iii) todo diferencial não nulo d_X^n não é um isomorfismo. Então, X^{\bullet} é indecomponível em $\mathcal{K}(\mathcal{P})$.

Prova. Pelo Lema 3.3.2 temos que X^{\bullet} é indecomponível em $\mathcal{C}(\mathcal{P})$. Além disso, se o diferencial $d_X^n \colon X^n \to X^{n+1}$ é diferente de zero, então por hipótese d_X^n não é um isomorfismo e pelo fato de X^n e X^{n+1} serem projetivos indecomponíveis, segue que $\mathrm{Im} d^n \subsetneq X^{n+1}$ e, portanto, $\mathrm{Im} d^n \subseteq \mathrm{rad} X^{n+1}$. De modo que X^{\bullet} é um complexo radical. Portanto, pelo Lema 2.1.8, X^{\bullet} é indecomponível em $\mathcal{K}(\mathcal{P})$.

Lema 3.3.4 Sejam $n \in \mathbb{Z}$ e $f : X^{\bullet} \to Y^{\bullet}$ um morfismo em $\mathcal{C}(\Lambda)$ tais que:

- (a) $X^n \neq 0 \neq Y^n$;
- **(b)** $X^i = 0$ para todo i < n e $Y^j = 0$ para todo j > n;
- (c) $\text{Hom}_{\Lambda}(Y^n, X^n) = 0$; e

(d) X^{\bullet} ou Y^{\bullet} é indecomponível em $\mathcal{K}(\Lambda)$.

84

Então, f não \acute{e} um isomorfismo em $\mathcal{K}(\Lambda)$.

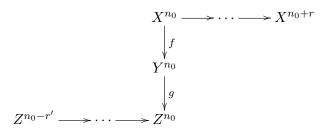
Definição 3.3.5 Sejam $X^{\bullet} = (X^i, d_X^i), Y^{\bullet} = (Y^i, d_Y^i)$ e $Z^{\bullet} = (Z^i, d_Z^i)$ três complexos em $\mathcal{C}^b(\Lambda)$. Diremos que uma quíntupla $(X^{\bullet}, Y^{\bullet}, Z^{\bullet}, f, g)$ forma um diagrama escada em grau n_0 quando:

- (E1) $n_0 = \min\{n : X^n \neq 0\} = \max\{m : Z^m \neq 0\}$ e Y^{\bullet} é um complexo concentrado em grau n_0 ;
- **(E2)** $f: X^{n_0} \to Y^{n_0} \ e \ g: Y^{n_0} \to Z^{n_0} \ s\tilde{a}o \ do is \ homomorphismos \ n\tilde{a}o \ nulos \ tais \ que \ g \circ f = 0;$
- **(E3)** $\operatorname{Hom}_{\Lambda}(Y^{n_0}, X^{n_0}) = 0$ $e \operatorname{Hom}_{\Lambda}(Z^n, X^{n+2}) = 0$, para $n \in \{n_0 2, n_0 1, n_0\}$; e
- (E4) as triplas $(X^{\bullet}, Y^{\bullet}, f^{\bullet})$ e $(Y^{\bullet}, Z^{\bullet}, g^{\bullet})$ têm a propriedade * para $\mathcal{A} = \mathcal{K}^b(\Lambda)$, onde f^{\bullet} e g^{\bullet} são os morfismos de complexos induzidos naturalmente dos homomorfismos f e g, respectivamente.

A fim de simplificar a notação, vamos denotar os morfismos f^{\bullet} e g^{\bullet} da definição acima, simplesmente, por f e g. Além disso, a quíntupla $(X^{\bullet}, Y^{\bullet}, Z^{\bullet}, f, g)$ será denotada por

$$\mathbf{D} = X^{\bullet} \xrightarrow{f} Y^{\bullet} \xrightarrow{g} Z^{\bullet}.$$

Ocultando as entradas nulas dos complexos X^{\bullet}, Y^{\bullet} e Z^{\bullet} , podemos visualizar as condições (**E1**) e (**E2**) de um diagrama escada em grau n_0 da seguinte forma:



Quanto às condições (E3) e (E4), temos as seguintes observações:

- Observação 3.3.6 (i) Pelo Lema 3.3.4, as hipóteses $\operatorname{Hom}(Y^{n_0}, X^{n_0}) = 0$ e X^{\bullet} indecomponível em $\mathcal{K}^b(\Lambda)$ são suficientes para concluir que o morfismo $f \colon X^{\bullet} \to Y^{\bullet}$ não é um isomorfismo em $\mathcal{K}^b(\Lambda)$. Portanto, para mostrar que $X^{\bullet} \xrightarrow{f} Y^{\bullet} \xrightarrow{g} Z^{\bullet}$ é um diagrama escada não é necessário verificar a condição (*3) da Definição 3.3 para a tripla $(X^{\bullet}, Y^{\bullet}, f)$.
- (ii) Se $\operatorname{Hom}(Y^{n_0}, X^{n_0}) = 0$ e Y^{\bullet} é um complexo concentrado em grau n_0 , então

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{K}(\Lambda)}(Y^{\bullet}, X^{\bullet}[1]) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}(\Lambda)}(Y^{\bullet}, X^{\bullet}[1]).$$

(iii) Segue da condição (E4) que os objetos X^{\bullet}, Y^{\bullet} e Z^{\bullet} de um diagrama escada são indecomponíveis em $\mathcal{K}^b(\Lambda)$.

O próximo resultado mostra como obter, a partir de um diagrama escada \mathbf{D} , um objeto indecomponível de $\mathcal{K}^b(\Lambda)$ cujo comprimento é uma função determinada pelos comprimentos dos objetos do diagrama \mathbf{D} .

Proposição 3.3.7 Seja **D** o diagrama escada $X^{\bullet} \xrightarrow{f} Y^{\bullet} \xrightarrow{g} Z^{\bullet}$ em grau n_0 . Então, a aplicação $h: C_f \to Z^{\bullet}$, dada por $h^{n_0} = (0 \ g)$ e $h^i = 0$ para todo $i \neq n_0$, é um morfismo de complexos cujo cone C_h é um objeto indecomponível de $\mathcal{K}^b(\Lambda)$.

Prova. Suponha, sem perda de generalidade, que $n_0 = 0$. A comutativadade do diagrama abaixo, que segue de **(E2)** da Definição 3.3.5, mostra que $h: C_f \to Z^{\bullet}$ é um morfismo de complexos.

$$C_{f}: \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow X^{0} \xrightarrow{(d_{X}^{0} f^{0})^{t}} X^{1} \oplus Y^{0} \xrightarrow{(d_{X}^{1} 0)} X^{2} \xrightarrow{d^{2}} \cdots$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad$$

Para mostrar que C_h é indecomponível em $\mathcal{K}^b(\Lambda)$, é suficiente verificar que a tripla (C_f, Z^{\bullet}, h) tem a propriedade *.

- (*1) Z^{\bullet} e C_f são indecomponíveis em $\mathcal{K}^b(\Lambda)$ por hipótese e porque a tripla $(X^{\bullet}, Y^{\bullet}, f)$ tem a propriedade *, respectivamente.
- (*2) h é não nulo em $\mathcal{K}^b(\Lambda)$. De fato, suponha, por absurdo, que existe uma aplicação $s\colon C_f[1]\to Z^{\bullet}$ tal que $h^i=s^{i+1}d^i_{C_f}+d^{i-1}_Zs^i$ para todo i. Então, para i=0, podemos escrever $s^0=(u^0\ v^0)$, com $v^0\neq 0$, e teremos

$$(0\ g) = h^0 = s^1(d_X^1\ 0) + d_Z^{-1}(u^0\ v^0) = (s^1d_X^1 + d_Z^{-1}u^0 \quad d_Z^{-1}v^0),$$

de modo que o diagrama seguinte é comutativo

o que contradiz o fato de g ser não nulo em $\mathcal{K}^b(\Lambda)$.

(*3) h não é isomorfismo em $\mathcal{K}^b(\Lambda)$. Suponha o contrário. Então existe um morfismo de complexos $l: Z^{\bullet} \to C_f$ tal que $l \circ h \sim 1_{C_f}$ e $h \circ l \sim 1_{Z^{\bullet}}$. Em particular, existe uma

aplicação $s\colon C_f[1]\to C_f$ e um diagrama comutativo

86

$$C_{f}: \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow X^{0} \xrightarrow{(d_{X}^{0}f)^{t}} X^{1} \oplus Y^{0} \xrightarrow{(d_{X}^{1}0)} X^{2} \xrightarrow{d_{X}^{2}} X^{3} \longrightarrow \cdots$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad$$

tal que $1_{C_f}-l\circ h=s\circ d_{C_f}+d_{C_f}\circ s$. Podemos escrever $s^0=(u^0\ v^0),\ s^1=(u^1\ v^1)^t$ e $l^0=(l^0_1\ l^0_2)^t$. Mas como $\mathrm{Hom}(Y^0,X^0)=0$, por hipótese, então $s^0=(u^0\ 0)$. Logo

•
$$1_{X^0} - 0 = s^0 \circ (d_X^0 f)^t + 0 = (u^0 0) \begin{pmatrix} d_X^0 \\ f \end{pmatrix} = u^0 d_X^0$$
 e assim $1_{X^0} = u^0 d_X^0$;

$$\bullet \, \left(\begin{smallmatrix} 1_{X^1} & 0 \\ 0 & 1_{Y^0} \end{smallmatrix} \right) - \left(\begin{smallmatrix} l_1^0 \\ l_2^0 \end{smallmatrix} \right) (0 \; g) = \left(\begin{smallmatrix} u^1 \\ v^1 \end{smallmatrix} \right) (d_X^1 \; 0) + \left(\begin{smallmatrix} d_X^0 \\ f \end{smallmatrix} \right) (u^0 \; 0), \; \text{de onde segue que}$$

$$1_{X^1} = u^1 d_X^1 + d_X^0 u^0;$$

•
$$1_{X^2} - 0 = s^2 d_X^2 + (d_X^1 \ 0) \begin{pmatrix} u^1 \\ v^1 \end{pmatrix}$$
 e assim
$$1_{X^2} = s^2 d_X^2 + d_X^1 u^1; e$$

• para todo $n \ge 3$, temos que $1_{X^n} = s^n d_X^n + d_X^{n-1} s^{n-1}$.

Isso mostra que $1_{X^{\bullet}}$ é homotopicamente nulo, o que contradiz o fato de X^{\bullet} ser indecomponível em $\mathcal{K}^b(\Lambda)$.

(*4) $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^b(\Lambda)}(Z^{\bullet}, C_f[1]) = 0$. Seja $l \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{K}^b(\Lambda)}(Z^{\bullet}, C_f[1])$. Então, existe um diagrama comutativo da forma abaixo.

Como por hipótese $\text{Hom}(Z^n,X^{n+2})=0$, para $n\in\{-2,-1,0\}$, então $l^{-2}=l^0=0$ e $l^{-1}=(0\ l_2^{-1})^t$. Logo, da comutatividade do diagrama acima, segue que $l_2^{-1}d_Z^{-2}=0$.

seguinte forma:

Então, existe um morfismo dado pelo diagrama comutativo abaixo.

$$Z^{\bullet}: \qquad \cdots \longrightarrow Z^{-2} \xrightarrow{d_{Z}^{-2}} Z^{-1} \xrightarrow{d_{Z}^{-1}} Z^{0} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow l_{2}^{-1} \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

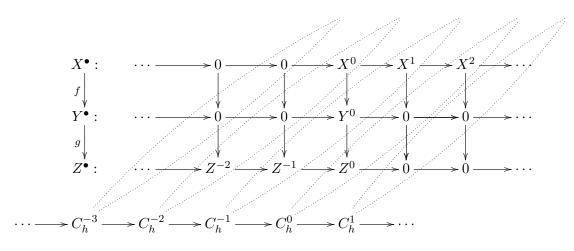
$$Y^{\bullet}[1]: \qquad \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow Y^{0} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Neste caso, se $l_2^{-1} \neq 0$ então existe $s^0 \colon Z^0 \to Y^0$ tal que $s^0 d_Z^{-1} = l_2^{-1}$, pois a tripla $(Y^{\bullet}, Z^{\bullet}, g)$ tem a propriedade * e, em particular, $\operatorname{Hom}_{\mathcal{K}^b(\Lambda)}(Z^{\bullet}, Y^{\bullet}[1]) = 0$. Definindo a aplicação $r \colon Z^{\bullet}[1] \to C_f[1]$ por $r^0 = (0 \ s^0)^t \colon Z^0 \to X^1 \oplus Y^0$ e $r^i = 0$ para todo $i \neq 0$, teremos que $l = r \circ d_Z + d_{C_f} \circ r$, ou seja, l é homotopicamente nulo e, portanto, $\operatorname{Hom}_{\mathcal{K}^b(\Lambda)}(Z^{\bullet}, C_f[1]) = 0$.

Isto mostra que a tripla (C_f, Z^{\bullet}, h) tem a propriedade * e com isso podemos concluir pelo Lema 3.3.1 que C_h é um objeto indecomponível de $\mathcal{K}^b(\Lambda)$.

Segue da demonstração acima que o complexo $C_h = (C_h^i, c^i)$ é dado por

$$\cdots \to Z^{-4} \xrightarrow{c^{-4}} Z^{-3} \xrightarrow{c^{-3}} X^0 \oplus Z^{-2} \xrightarrow{c^{-2}} X^1 \oplus Y^0 \oplus Z^{-1} \xrightarrow{c^{-1}} X^2 \oplus Z^0 \xrightarrow{c^0} X^3 \xrightarrow{c^1} X^4 \to \cdots$$
onde $c^n = d_Z^n$, para todo $n \le -4$, $c^n = d_X^{n+2}$, para todo $n \ge 1$, $c^{-3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -d_Z^{-3} \end{pmatrix}$, $c^{-2} = \begin{pmatrix} d_X^0 & 0 \\ f & 0 \\ 0 & -d_Z^{-2} \end{pmatrix}$, $c^{-1} = \begin{pmatrix} d_X^1 & 0 & 0 \\ 0 & g & -d_Z^{-1} \end{pmatrix}$ e $c^0 = (d_X^2 & 0)$, de modo que C_h pode ser visualizado da



Além disso, observe que se os complexos $X^{\bullet}, Z^{\bullet} \in \mathcal{C}^b(\Lambda)$ são radicais e os homomorfismos f e g são morfismos radicais, então C_h é um complexo radical de $\mathcal{C}^b(\Lambda)$. Este caso particular de diagrama escada será chamado de diagrama escada radical.

O resultado a seguir mostra que se $\mathbf{D} = X^{\bullet} \xrightarrow{f} Y^{\bullet} \xrightarrow{g} Z^{\bullet}$ é um diagrama escada radical em $\mathcal{C}^b(\mathcal{P})$, então é possível determinar o comprimento do indecomponvel C_h em função dos

comprimentos de X^{\bullet} e Z^{\bullet} .

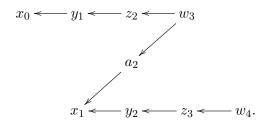
88

Corolário 3.3.8 Seja $\mathbf{D} = X^{\bullet} \xrightarrow{f} Y^{\bullet} \xrightarrow{g} Z^{\bullet}$ um diagrama escada radical em $C^{b}(\mathcal{P})$. Então, C_{h} é um objeto indecomponível de $K^{b}(\mathcal{P})$ cujo comprimento é dado pela fórmula:

$$\ell(C_h) = \begin{cases} 2, & se \ \ell(X^{\bullet}) = \ell(Z^{\bullet}) = 1; \\ \ell(Z^{\bullet}), & se \ \ell(X^{\bullet}) = 1 \ e \ \ell(Z^{\bullet}) \ge 2; \\ \ell(X^{\bullet}), & se \ \ell(Z^{\bullet}) = 1 \ e \ \ell(X^{\bullet}) \ge 2; \\ \ell(X^{\bullet}) + \ell(Z^{\bullet}) - 2, & se \ \ell(X^{\bullet}), \ell(Z^{\bullet}) \ge 2. \end{cases}$$
(3.2)

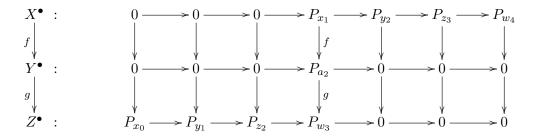
Vamos aplicar este resultado juntamente com o critério de Bautista-Liu e a Proposição 3.3.7 para calcular a dimensão global forte de algumas álgebras com radical quadrado zero. Comecemos com a álgebra dada pelo carcás do Exemplo 3.2.2.

Exemplo 3.3.9 Considere a álgebra Λ com rad $^2\Lambda = 0$ cujo carcás ordinário Q é



Segue do critério de Bautista-Liu e do Exemplo 3.2.2 que Λ é uma álgebra hereditária por partes com s.gl.dim $\Lambda \leq 4$.

Usemos agora a Proposição 3.3.7 para construir um objeto indecomponível de $K^b(\mathcal{P})$ de comprimento 4 para então concluir que s.gl.dim $\Lambda = 4$. Para tanto, considere o diagrama comutativo abaixo, em $C^b(\mathcal{P})$, onde os morfismos entre os módulos projetivos são os homomorfismos não-nulos induzidos das flechas do carcás Q.



Vejamos que $(X^{\bullet}, Y^{\bullet}, Z^{\bullet}, f, g)$ é um diagrama escada (em grau zero). Primeiro, note que a condição (E1) é satisfeita pela própria construção do diagrama acima. Além disso, da forma como foram escolhidos, os homomorfismos f e g são não nulos e $g \circ f = 0$ por rad $^{2}\Lambda = 0$. Isto é justamente a condição (E2). Para a condição (E3), basta notar

que $\operatorname{Hom}(Y^0, X^0) = \operatorname{Hom}(P_{a_2}, P_{x_1}) = 0$ e que não existe homomorfismo, que não o nulo, de projetivos que aparecem em Z^{\bullet} para projetivos que aparecem em X^{\bullet} e, em particular, $\operatorname{Hom}(Z^n, X^{n+2}) = 0$ para todo n. Resta-nos, portanto, verificar que as triplas $(X^{\bullet}, Y^{\bullet}, f)$ e $(Y^{\bullet}, Z^{\bullet}, g)$ têm a propriedade *:

- (*1) É claro que o complexo Y[•] é indecomponível em K^b(P). Já o complexo X[•] é indecomponível pelo Corolário 3.3.3, visto que suas entradas não nulas são módulos projetivos indecomponíveis, dois a dois não isomorfos, e os diferenciais entre eles são homomorfismos não nulos.
- (*2) $f \neq 0$ em $\mathcal{K}^b(\Lambda)$ pois o homomorfismo $f: P_{x_1} \to P_{a_2}$ é não nulo e $\operatorname{Hom}(P_{y_2}, P_{a_2}) = 0$.
- (*3) Que f não \acute{e} um isomorfismo em $\mathcal{K}^b(\Lambda)$ segue da Observação 3.3.6-(i).
- (*4) Dado que $\operatorname{Hom}(P_{a_2}, P_{y_2}) = 0$, então temos que $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^b(\Lambda)}(Y^{\bullet}, X^{\bullet}[1]) = 0$ e, portanto, $\operatorname{Hom}_{\mathcal{K}^b(\Lambda)}(Y^{\bullet}, X^{\bullet}[1]) = 0$.

Isto mostra que a tripla $(X^{\bullet}, Y^{\bullet}, f)$ tem a propriedade *. Analogamente, pode-se verificar o mesmo para a tripla $(Y^{\bullet}, Z^{\bullet}, g)$. Assim, podemos concluir que o complexo C_h é indecomponível em $\mathcal{K}^b(\mathcal{P})$. Por outro lado, como X^{\bullet} e Z^{\bullet} são radicais, assim como os morfismos f e g, então podemos aplicar o Corolário 3.3.8 para determinar o comprimento de C_h :

$$\ell(C_h) = \ell(X^{\bullet}) + \ell(Z^{\bullet}) - 2$$
 [Expressão (3.2)]
= 3 + 3 - 2
= 4.

A álgebra do exemplo anterior será denotada por Λ_4 , para indicar que o maior índice de uma fonte 'w' é igual a 4 e que também, neste caso, s.gl.dim $\Lambda_4 = 4$. Tal notação ficará clara mais adiante.

A noção de diagramas escada consecutivos, definida abaixo, será útil na obtenção de uma sequência de álgebras $\Lambda_3, \Lambda_4, \Lambda_5, \ldots$ tal que

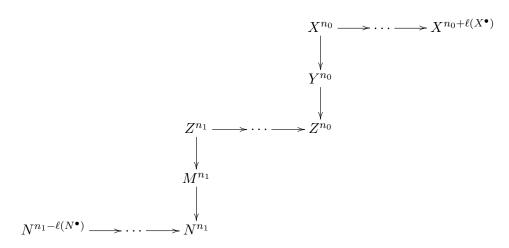
s.gl.dim
$$(\Lambda_3)$$
 < s.gl.dim (Λ_4) < s.gl.dim (Λ_5) < \cdots < ∞ .

Definição 3.3.10 Sejam $\mathbf{D}_0 = X^{\bullet} \xrightarrow{f} Y^{\bullet} \xrightarrow{g} Z^{\bullet}$ e $\mathbf{D}_1 = L^{\bullet} \xrightarrow{\phi} M^{\bullet} \xrightarrow{\psi} N^{\bullet}$ dois diagramas escada em graus n_0 e n_1 , respectivamente. Dizemos que os diagramas \mathbf{D}_0 e \mathbf{D}_1 são consecutivos se $L^{\bullet} = Z^{\bullet}$ e $n_1 = n_0 - \ell(Z^{\bullet})$, onde ℓ denota o comprimento em $\mathcal{C}^b(\Lambda)$.

Observe que podemos esquematizar os diagramas escada consecutivos \mathbf{D}_0 e \mathbf{D}_1 da se-

guinte forma, ocultando as entradas nulas:

90

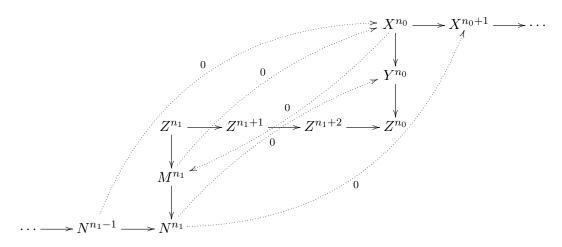


A partir de agora, a menos de menção em contrário, qualquer diagrama escada $\mathbf{D} = X^{\bullet} \xrightarrow{f} Y^{\bullet} \xrightarrow{g} Z^{\bullet}$ é tal que $\ell(X^{\bullet}), \ell(Z^{\bullet}) \geq 3$, onde ℓ denota o comprimento em $\mathcal{C}^b(\Lambda)$.

Sejam $\mathbf{D}_0 = X^{\bullet} \xrightarrow{f} Y^{\bullet} \xrightarrow{g} Z^{\bullet}$ e $\mathbf{D}_1 = Z^{\bullet} \xrightarrow{\phi} M^{\bullet} \xrightarrow{\psi} N^{\bullet}$ dois diagramas escada consecutivos, em graus n_0 e n_1 , respectivamente. Como $\ell(Z^{\bullet}) \geq 3$, então $C_h^{n_1} = Z^{n_1}$ e assim temos um diagrama $\mathbf{D}'_1 = C_h \xrightarrow{\phi} M^{\bullet} \xrightarrow{\psi} N^{\bullet}$ induzido, naturalmente, de \mathbf{D}_0 e \mathbf{D}_1 . Se esperaria que o diagrama \mathbf{D}'_1 fosse um diagrama escada, mas isto nem sempre ocorre, como mostrará o Exemplo 3.3.16. Daremos na proposição seguinte condições suficientes sobre \mathbf{D}_0 e \mathbf{D}_1 para que \mathbf{D}'_1 seja, de fato, um diagrama escada.

Proposição 3.3.11 Seja $Z^{\bullet} \in \mathcal{C}^b(\Lambda)$ tal que $\ell(Z^{\bullet}) = 3$ e sejam $\mathbf{D}_0 = X^{\bullet} \xrightarrow{f} Y^{\bullet} \xrightarrow{g} Z^{\bullet}$ e $\mathbf{D}_1 = Z^{\bullet} \xrightarrow{\phi} M^{\bullet} \xrightarrow{\psi} N^{\bullet}$ dois diagramas escada consecutivos, em graus n_0 e n_1 , respectivamente. Se $\operatorname{Hom}(N^{n_1}, Y^{n_0}) = \operatorname{Hom}(N^{n_1}, X^{n_0+1}) = \operatorname{Hom}(N^{n_1-1}, X^{n_0}) = \operatorname{Hom}(M^{n_1}, X^{n_0}) = \operatorname{Hom}(X^{n_0}, M^{n_1}) = 0$, então $\mathbf{D}_1' = C_h \xrightarrow{\phi} M^{\bullet} \xrightarrow{\psi} N^{\bullet}$ é um diagrama escada.

Antes de passar a prova deste resultado, ilustramos na figura abaixo as hipóteses adicionais aos diagramas \mathbf{D}_0 e \mathbf{D}_1 para que \mathbf{D}_1' seja um diagrama escada.



Prova. Temos que verificar as condições (E1)-(E4) da Definição 3.3.5. As condições (E1) e (E2) são triviais.

Suponha, sem perda de generalidade, que $n_0=0$. Assim $n_1=-3$ e temos o seguinte diagrama:

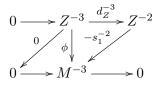
Como $\text{Hom}(M^{-3},Z^{-3})=0$ e $C_h^{-3}=Z^{-3}$, então $\text{Hom}(M^{-3},C_h^{-3})=0$. Além disso, dado que $\text{Hom}(N^i,Z^{i+2})=0$ para $i\in\{-5,-4,-3\}$, então:

- $\operatorname{Hom}(N^{-5}, C_h^{-3}) = \operatorname{Hom}(N^{-5}, Z^{-3}) = 0;$
- $\operatorname{Hom}(N^{-4}, C_h^{-2}) = \operatorname{Hom}(N^{-4}, X^0) \oplus \operatorname{Hom}(N^{-4}, Z^{-2}) = 0;$
- $\bullet \ \operatorname{Hom}(N^{-3},C_h^{-1}) = \operatorname{Hom}(N^{-3},X^1) \oplus \operatorname{Hom}(N^{-3},Y^0) \oplus \operatorname{Hom}(N^{-3},Z^{-1}) = 0.$

Isso prova a condição (E3) para o diagrama \mathbf{D}'_1 .

Para verificar a condição (**E4**) é suficiente provar que a tripla (C_h, M^{\bullet}, ϕ) tem a propriedade *. Vejamos:

- (*1) M^{\bullet} é indecomponível em $\mathcal{K}^b(\Lambda)$ por hipótese e C_h também é indecomponível em $\mathcal{K}^b(\Lambda)$ pela da Proposição 3.3.7;
- (*2) $\phi \colon C_h \to M^{\bullet}$ é um morfismo não nulo em $\mathcal{K}^b(\Lambda)$. De fato, se existisse uma homotopia de ϕ , digamos $(s^{i+1} \colon C_h^{i+1} \to M^i)_{i \in \mathbb{Z}}$, então existiria $s^{-2} = (s_0^{-2} \ s_1^{-2}) \colon X^0 \oplus Z^{-2} \to M^{-3}$ tal que $s^{-2} \circ c^{-3} = \phi$. Como $\operatorname{Hom}(X^0, M^{-3}) = 0$, então $s_0^{-2} = 0$. Por outro lado, como $c^{-3} = (0 \ -d_Z^{-3})^t$ então o homomorfismo s_1^{-2} , de Z^{-2} em M^{-3} , é tal que $\phi = -s_1^{-2} \circ d_Z^{-3}$, o que é uma contradição, pois $\phi \colon Z^{\bullet} \to M^{\bullet}$ é não nulo em $\mathcal{K}^b(\Lambda)$;



(*3) Segue da Obsevação 3.3.6-(i) que $\phi \colon C_h \to M^{\bullet}$ não é um isomorfismo em $\mathcal{K}^b(\Lambda)$; e

(*4) $\operatorname{Hom}_{\mathcal{K}^b(\Lambda)}(M^{\bullet}, C_h[1]) = 0$. De fato, como $\operatorname{Hom}(M^{-3}, X^0) = 0$ e M^{\bullet} é o complexo concentrado M^{-3} então

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^b(\Lambda)}(M^{\bullet}, C_h[1]) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^b(\Lambda)}(M^{\bullet}, Z^{\bullet}[1]).$$

Por outro lado, como $\text{Hom}(M^{-3}, Z^{-3}) = 0$, temos pela pela Observação 3.3.6-(ii) que

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^b(\Lambda)}(M^{\bullet}, Z^{\bullet}[1]) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{K}^b(\Lambda)}(M^{\bullet}, Z^{\bullet}[1]),$$

que por sua vez é igual a zero pela condição (*4) da tripla $(Z^{\bullet}, M^{\bullet}, \phi)$.

Sejam \mathbf{D}_0 e \mathbf{D}_1 como acima. A partir de agora denotaremos por C_{h_0} o cone indecomponível obtido aplicando a Proposição 3.3.7 em \mathbf{D}_0 , e por C_{h_1} o cone indecomponível obtido pela mesma proposição em \mathbf{D}'_1 .

Corolário 3.3.12 Se os diagramas escada \mathbf{D}_0 e \mathbf{D}_1 na Proposição 3.3.11 são radicais e estão em $C^b(\mathcal{P})$, então \mathbf{D}_1' também é um diagrama escada radical. Em particular, C_{h_1} é indecomponível em $K^b(\mathcal{P})$ cujo comprimento é dado pela soma

$$\ell(X^{\bullet}) + \ell(Z^{\bullet}) + \ell(N^{\bullet}) - 2 \cdot 2.$$

Prova. Já sabemos que C_{h_0} é um complexo radical pelo fato de $\mathbf{D}_0 = X^{\bullet} \xrightarrow{f} Y^{\bullet} \xrightarrow{g} Z^{\bullet}$ ser um diagrama escada radical. Por outro lado, do lema anterior sabemos que $\mathbf{D}_1' = C_{h_0} \xrightarrow{\phi} M^{\bullet} \xrightarrow{\psi} N^{\bullet}$ é um diagrama escada. Além disso, como os homomorfismos radicais ϕ e ψ e o complexo radical N^{\bullet} são os mesmos para os diagramas \mathbf{D}_1 e \mathbf{D}_1' , então \mathbf{D}_1' é um diagrama escada radical. Assim podemos aplicar a fórmula do Corolário 3.3.8 ao diagrama \mathbf{D}_1' :

$$\ell(C_{h_1}) = \ell(C_{h_0}) + \ell(N^{\bullet}) - 2$$

$$= [\ell(X^{\bullet}) + \ell(Z^{\bullet}) - 2] + \ell(N^{\bullet}) - 2$$

$$= \ell(X^{\bullet}) + \ell(Z^{\bullet}) + \ell(N^{\bullet}) - 2 \cdot 2.$$

Teorema 3.3.13 Seja $\mathbf{D}_0, \mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_r$, com $r \geq 1$, uma sequência de diagramas escada radical em $\mathcal{C}^b(\mathcal{P})$, onde cada par ordenado $(\mathbf{D}_i, \mathbf{D}_{i+1})$ é como na Proposição 3.3.11, cada $\mathbf{D}_i = X_i^{\bullet} \xrightarrow{f_i} Y_i^{\bullet} \xrightarrow{g_i} X_{i+1}^{\bullet}$ é um diagrama em grau n_i e, para todo $2 \leq i \leq r$, $\operatorname{Hom}(X_{i+1}^{n_i}, X_{i-2}^{n_{i-2}}) = 0$. Então C_{h_r} é um objeto indecomponível em $\mathcal{K}^b(\mathcal{P})$ cujo comprimento é dado por

$$\ell(C_{h_r}) = \sum_{i=0}^{r+1} \ell(X_i^{\bullet}) - (r+1) \cdot 2 \ge r+4. \tag{3.3}$$

Prova. Dado que cada par ordenado $(\mathbf{D}_i, \mathbf{D}_{i+1})$ é como na Proposição 3.3.11, então $\ell(X_{i+1}^{\bullet}) = 3$, para todo $0 \le i \le r-1$, e $\ell(X_0^{\bullet}), \ell(X_{r+1}^{\bullet}) \ge 3$. De onde segue que

$$\sum_{i=0}^{r+1} \ell(X_i^{\bullet}) - (r+1) \cdot 2 \ge (r+2) \cdot 3 - (r+1) \cdot 2 = r+4.$$

Faremos o restante da prova por indução sobre r.

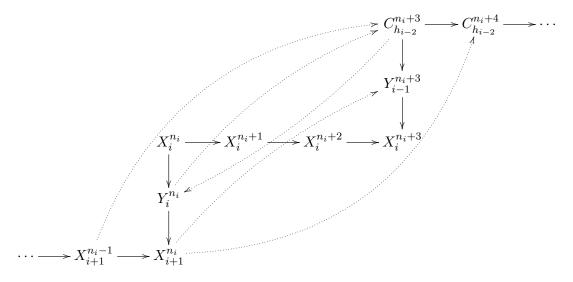
r=1: Temos pelo Corolário 3.3.12 que C_{h_1} é um indecomponível de $\mathcal{K}^b(\mathcal{P})$ cujo comprimento é dado pela soma

$$\ell(C_{h_1}) = \ell(X_0^{\bullet}) + \ell(X_1^{\bullet}) + \ell(X_2^{\bullet}) - 2 \cdot 2.$$

r=i: Suponha que para todo r < i o cone C_{h_r} obtido do diagrama escada radical \mathbf{D}'_r é um indecomponível de $\mathcal{K}^b(\mathcal{P})$ cujo comprimento é dado pela expressão (3.3). Em particular, $\mathbf{D}'_{i-1} = C_{h_{i-2}} \xrightarrow{f_{i-1}} Y_{i-1}^{\bullet} \xrightarrow{g_{i-1}} X_i^{\bullet}$ é um diagrama escada radical, do qual obtemos o indecomponível $C_{h_{i-1}}$ de $\mathcal{K}^b(\mathcal{P})$ cujo comprimento é dado por

$$\ell(C_{h_{i-1}}) = \sum_{j=0}^{i} \ell(X_j^{\bullet}) - i \cdot 2.$$
(3.4)

É claro que o par de diagramas escada $(\mathbf{D}'_{i-1}, \mathbf{D}_i)$ é consecutivo. Vejamos agora que $(\mathbf{D}'_{i-1}, \mathbf{D}_i)$ satisfaz as hipóteses da Proposição 3.3.11. Por hipótese, temos que $\ell(X_i^{\bullet}) = 3$, de modo que falta verificar que cada um dos possíveis homomorfismos ilustrados abaixo é igual a zero.



Por hipótese, $\text{Hom}(X_{i+1}^{n_i}, X_{i-2}^{n_{i-2}}) = 0$ e $\text{Hom}(X_{i+1}^{n_i}, X_{i-1}^{n_{i+4}}) = 0$ porque $(\mathbf{D}_{i-1}, \mathbf{D}_i)$ satisfaz as condições da Proposição 3.3.11. De $C_{h_{i-2}}^{n_i+4} = X_{i-2}^{n_{i-2}} \oplus X_{i-1}^{n_{i-1}+1} = X_{i-2}^{n_{i-2}} \oplus X_{i-1}^{n_{i-1}+1}$, segue que $\text{Hom}(X_{i+1}^{n_i}, C_{h_{i-2}}^{n_i+4}) = 0$. Os outros homomorfismos são nulos porque: (i) o par $(\mathbf{D}_{i-1}, \mathbf{D}_i)$ satisfaz as condições da Proposição 3.3.11; (ii) $Y_{i-1}^{\bullet}, X_i^{\bullet}$ e X_{i+1}^{\bullet}

são comuns aos pares $(\mathbf{D}_{i-1}, \mathbf{D}_i)$ e $(\mathbf{D}'_{i-1}, \mathbf{D}_i)$; e (iii) $C_{h_{i-2}}^{n_i+3} = X_{i-1}^{n_i+3}$. Logo, $\mathbf{D}'_i = C_{h_{i-1}} \xrightarrow{f_i} Y_i^{\bullet} \xrightarrow{g_i} X_{i+1}^{\bullet}$ é um diagrama escada radical, do qual obtemos o cone C_{h_i} , indecomponível em $\mathcal{K}^b(\mathcal{P})$, cujo comprimento é dado por

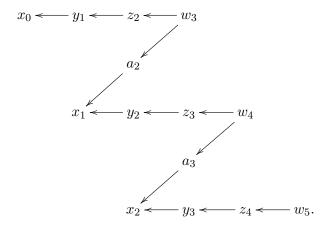
$$\ell(C_{h_i}) = \ell(C_{h_{i-1}}) + \ell(X_{i+1}^{\bullet}) - 2$$
 [Corolário 3.3.8]

$$= \left(\sum_{j=0}^{i} \ell(X_{j}^{\bullet}) - i \cdot 2\right) + \ell(X_{i+1}^{\bullet}) - 2$$
 [Expressão (3.4)]

$$= \sum_{j=0}^{i+1} \ell(X_{j}^{\bullet}) - (i+1) \cdot 2.$$

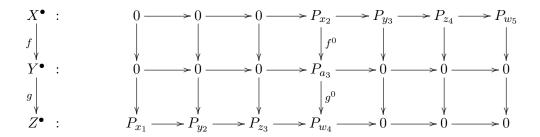
Corolário 3.3.14 Se o comprimento de cada X_i^{\bullet} é igual a 3, então $\ell(C_{h_r}) = r + 4$.

Exemplo 3.3.15 Considere a álgebra Λ com rad $^2\Lambda=0$ cujo carcás ordinário Q é

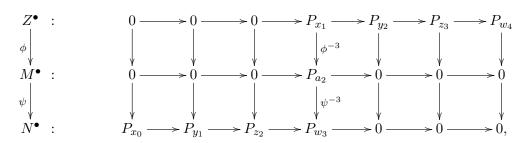


Segue do critério de Bautista-Liu e do Exemplo 3.2.3 que Λ é uma álgebra hereditária por partes com s.gl.dim $\Lambda \leq 5$. Vejamos que vale a igualdade. Para tanto, vamos definir um par de diagramas escada e usar a Proposição 3.3.11.

Sejam \mathbf{D}_0 e \mathbf{D}_1 os dois diagramas comutativos, em $\mathcal{C}^b(\mathcal{P})$, abaixo



e



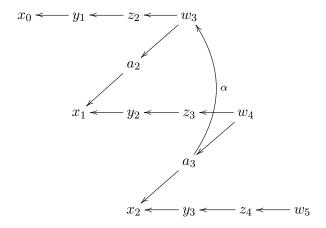
onde os morfismos $f^0, g^0, \phi^{-3}, \psi^{-3}$ e os diferenciais de $X^{\bullet}, Y^{\bullet}, Z^{\bullet}, M^{\bullet}$ e N^{\bullet} são os homomorfismos não nulos induzidos das flechas do carcás Q. Usando os mesmos argumentos do Exemplo 3.3.9, aplicados a cada um destes diagramas, vemos que $\mathbf{D}_0 = X^{\bullet} \xrightarrow{f} Y^{\bullet} = \mathbf{D}_1 = Z^{\bullet} \xrightarrow{\phi} M^{\bullet} \xrightarrow{\psi} N^{\bullet}$ são diagramas escada radicais em $C^b(\mathcal{P})$. Além disso, da forma como escolhemos tais diagramas, eles são consecutivos. Finalmente, note que $\ell(X^{\bullet}) = \ell(Z^{\bullet}) = \ell(N^{\bullet}) = 3$ e, como não existe caminhos em Q de nenhum dos vértices que determinam X^{\bullet} para nenhum dos vértices que determinam N^{\bullet} , então $\mathrm{Hom}(N^i, X^j) = 0$, para todo $i, j \in \mathbb{Z}$. É claro também que $\mathrm{Hom}(P_{a_2}, P_{x_2}) = \mathrm{Hom}(P_{x_2}, P_{a_2}) = 0$. Logo, podemos aplicar a Proposição 3.3.11 ao par de diagramas escada \mathbf{D}_0 e \mathbf{D}_1 para concluir que $\mathbf{D}_1' = C_{h_0} \xrightarrow{\phi} Y^{\bullet} \xrightarrow{\psi} N^{\bullet}$ é um diagrama escada. Além disso, por \mathbf{D}_0 e \mathbf{D}_1 serem radicais, o Corolário 3.3.12 afirma que C_{h_1} é um indecomponível de $\mathcal{K}^b(\mathcal{P})$, com comprimento

$$\ell(C_{h_1}) = \ell(X^{\bullet}) + \ell(Z^{\bullet}) + \ell(N^{\bullet}) - 2 \cdot 2 = 3 + 3 + 3 - 4 = 5.$$

Seguindo a notação que segue o Exemplo 3.3.9, vamos denotar a álgebra do exemplo acima por Λ_5 , indicando que o maior índice de uma fonte 'w' é igual a 5 e que s.gl.dim $\Lambda_5 = 5$.

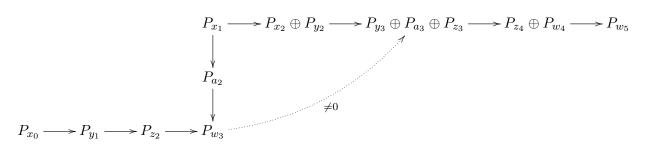
Vimos na Proposição 3.3.11 condições suficientes sobre um par de diagramas escada consecutivos $\mathbf{D}_0 = X^{\bullet} \xrightarrow{f} Y^{\bullet} \xrightarrow{g} Z^{\bullet}$ e $\mathbf{D}_1 = Z^{\bullet} \xrightarrow{\phi} M^{\bullet} \xrightarrow{\psi} N^{\bullet}$ para que o diagrama $\mathbf{D}'_1 = C_{h_0} \xrightarrow{\phi} Y^{\bullet} \xrightarrow{\psi} N^{\bullet}$ seja um diagrama escada. Veremos agora que tais condições são, também, necessárias. Comecemos com a hipótese "Hom $(N^{n_1}, Y^{n_0}) = 0$ ".

Exemplo 3.3.16 Considere a álgebra Λ com rad² $\Lambda = 0$ cujo carcás ordinário Q é



Sejam \mathbf{D}_0 e \mathbf{D}_1 os diagramas definidos no Exemplo 3.3.15. Note que a existência da flecha

 α não muda dos diagramas \mathbf{D}_0 e \mathbf{D}_1 definidos naquele exemplo. Logo, estes são diagramas escada consecutivos de $\mathcal{C}^b(\mathcal{P})$. Porém, como $\operatorname{Hom}(N^{n_1},Y^{n_0})=\operatorname{Hom}(P_{w_3},P_{a_3})\neq 0$, então $\operatorname{Hom}(N^{n_1},C^{n_1+2}_{h_0})=\operatorname{Hom}(P_{w_3},P_{y_3}\oplus P_{a_3}\oplus P_{z_3})\neq 0$, onde $n_0=0$ e $n_1=-3$. Portanto, a segunda hipótese da condição (**E3**), da definição de diagrama escada, não é satisfeita para \mathbf{D}'_1 .



É fácil produzir exemplos semelhantes que mostram a necessidade das outras hipóteses na Proposição 3.3.11.

3.4 Dimensão global forte de álgebras shod

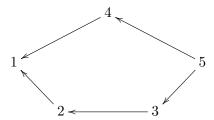
Veremos agora o principal resultado do capítulo, onde mostramos que para cada inteiro $d \ge 3$ existe uma álgebra shod estrita cuja dimensão global forte é igual a d (vide Teorema 3.4.4).

Começaremos a seção com dois exemplos. No primeiro deles, veremos um exemplo de uma álgebra shod estrita que não é hereditária por partes, ou seja, cuja dimensão global forte é infinita. Já no segundo, daremos um exemplo de uma álgebra Λ que não é shod estrita e que vale a relação gl.dim $\Lambda=3=\mathrm{s.gl.dim}\,\Lambda$. Estes dois exemplos, juntamente com o resultado principal do capítulo, mostram que não existe uma caracterização para a classe das álgebras shod estritas aos moldes do Teorema 1 ([HZ08]), discutido na Introdução.

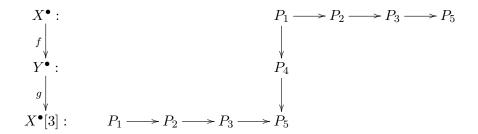
Lema 3.4.1 ([HZ10], Prop. 2.13) As seguintes proposições são equivalentes para uma álgebra Λ de dimensão finita.

- (i) s.gl.dim $\Lambda < \infty$.
- (ii) Para todo P[•] ∈ K^b(P) indecomponível e para todos Λ-módulos simples S, existe no máximo dois graus i e j tais que a cobertura projetiva P(S) de S é um somando direto de Pⁱ e P^j; e se i ≠ j, então |i j| = 1.

Exemplo 3.4.2 Seja Λ a álgebra com rad² $\Lambda = 0$ cujo carcás ordinário Q é dado abaixo.



Considere o diagrama escada $\mathbf{D} = X^{\bullet} \xrightarrow{f} Y^{\bullet} \xrightarrow{g} X^{\bullet}[3]$ em $\mathcal{C}^{b}(\mathcal{P})$, dado abaixo,



onde os morfismos entre os módulos projetivos são os homomorfismos não nulos induzidos das flechas de Q. Denotando por $\mathbf{D}[3]$ o diagrama escada

$$X^{\bullet}[3] \xrightarrow{f[3]} Y^{\bullet}[3] \xrightarrow{g[3]} X^{\bullet}[6],$$

temos que **D** e **D**[3] são consecutivos e o diagrama obtido deles,

$$\mathbf{D}' = C_h \xrightarrow{f[3]} Y^{\bullet}[3] \xrightarrow{g[3]} X^{\bullet}[6],$$

tamb'em 'eum diagrama escada, mesmo não satisfazendo uma das condições da Proposição 3.3.11, a saber

$$0 = \operatorname{Hom}(X^{n_0}, M^{n_1}) := \operatorname{Hom}(P_1, P_4) \neq 0.$$

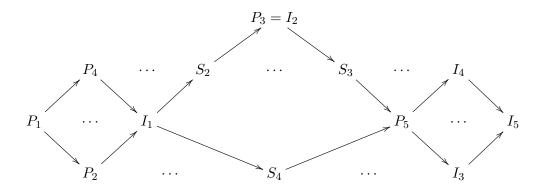
De fato, basta observar que esta condição é usada na prova da proposição supracitada apenas para verificar que $f[3]: C_h \to Y^{\bullet}[3]$ é um morfismo não nulo em $\mathcal{K}^b(\mathcal{P})$, condição esta desnecessária no caso em que rad $^2\Lambda = 0$. Em particular, o objeto C_{h_1} de $\mathcal{K}^b(\mathcal{P})$, obtido do diagrama escada \mathbf{D}' ,

$$C_{h_1} = P_1 \rightarrow P_1 \oplus P_2 \rightarrow P_1 \oplus P_2 \oplus P_4 \oplus P_3 \rightarrow P_2 \oplus P_4 \oplus P_3 \oplus P_5 \rightarrow P_3 \oplus P_5 \rightarrow P_5,$$

é indecomponível em $K^b(\mathcal{P})$ que não satisfaz a condição (ii) do Lema 3.4.1. Portanto, s.gl.dim $\Lambda = \infty$ ou, equivalentemente, Λ não é hereditária por partes.

98

Vejamos agora que Λ é uma álgebra shod estrita. Para tanto, note que o carcás de Auslander-Reiten de Λ é dado por:



Neste caso, $\mathcal{L}_{\Lambda} = \{P_1, P_2, P_4, I_1, S_2, P_3, S_4\}$, $\mathcal{R}_{\Lambda} = \{P_3, S_4, S_3, P_5, I_4, I_3, I_5\}$ e, portanto, $\mathcal{L}_{\Lambda} \cup \mathcal{R}_{\Lambda} = \text{ind } \Lambda$. Logo, pelo Teorema 3.1.4, Λ é uma álgebra shod. Além disso, como $P_5 \in \mathcal{R}_{\Lambda} \setminus \mathcal{L}_{\Lambda}$ então segue do Teorema 3.1.5 que Λ é shod estrita, como queríamos verificar.

Exemplo 3.4.3 Considere Λ a álgebra com rad $^2\Lambda = 0$ cujo carcás ordinário é dado abaixo.

$$1 \stackrel{\checkmark}{\rightleftharpoons} 2 \stackrel{\checkmark}{\rightleftharpoons} 3 \stackrel{\checkmark}{\rightleftharpoons} 4$$

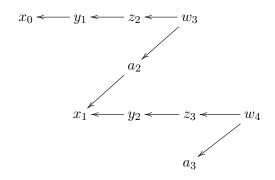
Temos, pelo critério de Bautista-Liu, que Λ é hereditária por partes e que s.gl.dim $\Lambda \leq 3$. Mas como gl.dim $\Lambda = 3$ e gl.dim $\Lambda \leq$ s.gl.dim Λ , então

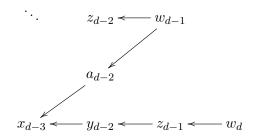
$$\operatorname{gl.dim} \Lambda = 3 = \operatorname{s.gl.dim} \Lambda.$$

Para ver que Λ não é shod, basta notar que o Λ -módulo $\tau^-S_2 = {3 \atop 2} {3 \atop 2}$ tem dimensão projetiva e injetiva igual a 2.

Teorema 3.4.4 Para cada $d \geq 3$ existe uma álgebra shod estrita Λ_d , hereditária por partes, tal que s.gl.dim $\Lambda = d$.

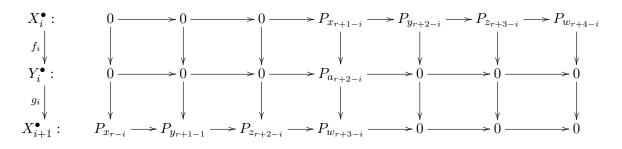
Prova. Se d=3, o resultado segue do Exemplo 3.2.7(b). Suponha que $d\geq 4$ e considere a álgebra Λ_d com rad $^2\Lambda_d=0$ cujo carcás ordinário Q é dado abaixo.





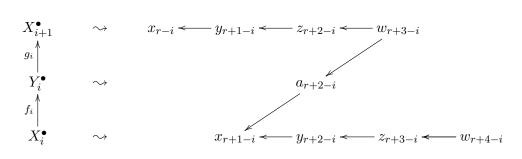
(1) s.gl.dim $\Lambda_d = d$.

Vimos no Lema 3.2.4 que o carcás Q possui d+1 classes de graduação. Logo, como consequência do critério de Bautista-Liu, Λ_d é uma álgebra hereditária por partes com s.gl.dim $\Lambda_d \leq d$. Para verificar que vale a igualdade, é suficiente econtrar um indecomponível em $\mathcal{K}^b(\mathcal{P})$ cujo comprimento é igual a d. Considere a sequência de diagramas $\mathbf{D}_0, \ldots, \mathbf{D}_r$, onde r = d-4 e, para todo $0 \leq i \leq r$, $\mathbf{D}_i = X_i^{\bullet} \xrightarrow{f_i} Y_i^{\bullet} \xrightarrow{g_i} X_{i+1}^{\bullet}$ é o diagrama



cujas componentes homogêneas $P_{x_{r+1-i}}$, $P_{a_{r+2-i}}$ e $P_{w_{r+3-i}}$ de X_i^{\bullet} , Y_i^{\bullet} e X_{i+1}^{\bullet} , respectivamente, estão no mesmo grau $n_i = -3i$. Logo, a condição (E1) da Definição 3.3.5 (diagrama escada) é trivialmente satisfeita para cada \mathbf{D}_i . Quanto aos morfismos f_i e g_i e aos diferenciais de X_i^{\bullet} e X_{i+1}^{\bullet} , eles são definidos, naturalmente, pelos homomorfismos não nulos induzidos das

flechas de Q, ou ainda, das flechas do subcarcás pleno, Q^i , de Q dado abaixo.



Assim, por $\operatorname{rad}^2\Lambda_d=0$, X_i^{\bullet} e X_{i+1}^{\bullet} são complexos limitados – ambos de comprimento igual 3 – e os homomorfismos não nulos $f_i\colon P_{x_{r+1-i}}\longrightarrow P_{a_{r+2-i}}$ e $g_i\colon P_{a_{r+2-i}}\longrightarrow P_{w_{r+3-i}}$ são tais que $g_i\circ f_i=0$. Em particular, cada diagrama \mathbf{D}_i satisfaz a condição (**E2**) da Definição 3.3.5. A verificação das condições (**E3**) e (**E4**) para \mathbf{D}_i é igual à dada no Exemplo 3.3.9, a menos de uma mudança na numeração dos vértices do subcarcás Q^i . É fácil ver que X_i^{\bullet} e X_{i+1}^{\bullet} são complexos radicais e que f_i e g_i são morfismos radicais. Portanto, cada \mathbf{D}_i é um diagrama escada radical.

Segue dos exemplos 3.3.9 e 3.3.15 que podemos supor que $d \ge 6$ ou, equivalentemente, que $r \ge 2$. Vejamos que, neste caso, a sequência $\mathbf{D}_0, \mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_r$ de diagramas escada (radicais) satisfaz as hipóteses do Teorema 3.3.13. Para tanto, basta observar que:

- $n_{i+1} = -3(i+1) = -3i 3 = n_i \ell(X_i^{\bullet})$, para todo $0 \le i \le r$. Logo, cada par de diagramas $(\mathbf{D}_i, \mathbf{D}_{i+1})$ é consecutivo;
- como não existem caminhos de nenhum dos vértices que determinam X_i^{\bullet} para nenhum dos vértices que determinam as componentes de X_j^{\bullet} , para todo $i \neq j$, então $\operatorname{Hom}(X_i^m, X_j^n) = 0$, para todo $m, n \in \mathbb{Z}$ e para todo $0 \leq i \neq j \leq r$;
- como $\operatorname{Hom}(P_{a_i}, \Lambda_{\Lambda}) = \operatorname{Hom}(P_{a_i}, P_{w_{i+1}})$, para todo $2 \le i \le r+2$, então $\operatorname{Hom}(Y_i^m, X_j^n) = 0$, para todo $j \ne i+1$ e para todo $m, n \in \mathbb{Z}$;
- como $\operatorname{Hom}(\Lambda_{\Lambda}, P_{a_i}) = \operatorname{Hom}(P_{x_{i-1}}, P_{a_i})$, para todo $2 \le i \le r+2$, então $\operatorname{Hom}(X_j^n, Y_i^m) = 0$, para todo $j \ne i-1$ e para todo $m, n \in \mathbb{Z}$.

Portanto, C_{h_r} é um objeto indecomponível em $\mathcal{K}^b(\mathcal{P})$ que, pelo Corolário 3.3.14, tem comprimento igual a r+4=d.

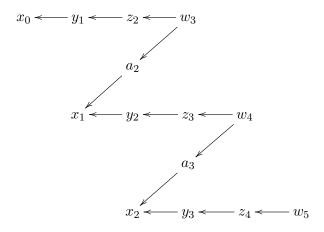
(2) Λ_d é shod estrita.

Note que cada vértice do carcás ordinário Q de Λ_d é início de no máximo duas flechas e final de no máximo duas flechas. E no caso de duas, estes vértices ou são fontes ou são poços. Juntando isto ao fato de que $\Lambda_d = kQ/J^2$, onde J é o ideal das flechas de Q, temos que Λ_d é string.

Segue da Observação 3.1.11 que cada um dos zeros consecutivos de Q possui exatamente duas relações zero, as quais se sobreponhem e cada caminho contendo estas (duas) relações

zero é start-tight e end-tight. Em particular, o carcás com relações (Q, J^2) satisfaz a condição (1) do Teorema 3.1.13. Além disso, dado que o comprimento dos caminhos em Q têm comprimento no máximo 3, então é claro que (Q, J^2) não contém subcategorias plenas nas formas dos itens (i) e (ii) (e seus duais) da condição (2) desse mesmo teorema. Também é claro que (Q, J^2) não contém uma subcategoria plena na forma do item (iii). Portanto, pelo Teorema 3.1.13, Λ_d é shod. Finalmente, para ver que Λ_d é shod estrita, basta usar que s.gl.dim $\Lambda_d = d \geq 3$ e lembrar que uma ágebra quase inclinada tem dimensão global forte menor ou igual a 2 (vide Teorema 1 da Introdução).

Exemplo 3.4.5 Considere a álgebra Λ_5 com rad² $\Lambda_5 = 0$ cujo carcás ordinário é



Neste caso, \mathcal{L}_{Λ_5} e \mathcal{R}_{Λ_5} são dadas, respectivamente, pelos predecessores e sucessores dos indecomponíveis

$$P_{z_2} = I_{z_2}, S_{a_2}, P_{z_3} = I_{z_3}, S_{a_3} \ e \ P_{z_4} = I_{z_4}.$$

Além disso,

$$P_{x_0} \to P_{x_1} \oplus P_{y_1} \to P_{x_2} \oplus P_{y_2} \oplus P_{a_2} \oplus P_{z_2} \to P_{y_3} \oplus P_{a_3} \oplus P_{z_3} \oplus P_{w_3} \to P_{z_4} \oplus P_{w_4} \to P_{w_5}$$

são as componentes homogêneas não nulas do indecomponível C_{h_1} de $\mathcal{K}^b(\mathcal{P})$, obtido no Exemplo 3.3.15, cujo comprimento é maximal.

Agora estamos interessados em pesquisar o que acontece em outras classes de álgebras. Por exemplo, para a classe das álgebras ada, introduzidas em [ACLV12], que incluem a classe das álgebras shods, podemos construir com ideias semelhantes as aqui apresentadas uma álgebra ada com dimensão global 4 e dimensão global forte n, para cada $n \geq 4$. É sabido também que todo módulo indecomponível X sobre uma álgebra ada Λ também satisfaz pd X + id X $\leq d$ + 1, onde d = gl.dim Λ (vide Corollary 2.6 e Remark 2.7 de [ACLV12]). Também estamos interessados em caracterizar as álgebras shod estritas com dimensão global forte igual a 3.

Capítulo 4

Dimensão global forte e complexidade

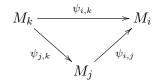
Vimos no Capítulo 2 que a complexidade de objetos indecomponíveis na categoria derivada está, de certa forma, relacionada com a noção de dimensão global forte. Mais especificamente, vimos no Teorema 2.4.13 que a existência de um indecomponível $M^{\bullet} \in \mathcal{D}^{-}(\Lambda)$ cuja complexidade é maior do que zero é condição suficiente para que s.gl.dim $\Lambda = \infty$. O objetivo principal deste capítulo é mostrar que, ao contrário do que ocorre na categoria de módulos, a recíproca deste resultado não é falsa, em geral, no caso em que gl.dim $\Lambda < \infty$ (vide Seção 4.2). Na verdade, acreditamos que vale a recíproca no caso em que rad $^{2}\Lambda = 0$. Mostraremos aqui um esboço de como estamos trabalhando neste problema.

Vamos precisar de três resultados que foram bastante utilizados no capítulo anterior. A saber: (i) a propriedade * (vide Lema 3.3.1); (ii) o critério de Bautista-Liu (vide Teorema 3.2.5); e (iii) o Teorema de D. Happel e D. Zacharia ([HZ08]) que caracteriza, homologicamente, as álgebras hereditárias por partes como sendo aquelas que têm dimensão global forte finita.

4.1 Limite inverso na categoria de complexos

Para que possamos mostrar de forma clara nossas ideias vamos precisar também de noções básicas do conceito de limite inverso, em especial na categoria de complexos. Os detalhes podem ser encontrados em [Rot09].

Definição 4.1.1 Dado um conjunto parcialmente ordenado (I,\succeq) e uma categoria \mathcal{C} , um sistema inverso em \mathcal{C} é um par ordenado $((M_i)_{i\in I}, (\psi_{i,j})_{j\succeq i})$, ou simplesmente $\{M_i, \psi_{i,j}\}$, onde $(M_i)_{i\in I}$ é uma família de objetos em \mathcal{C} e $(\psi_{i,j}\colon M_j\to M_i)_{j\succeq i}$ é uma família de morfismos em \mathcal{C} para os quais $\psi_{i,i}=1_{M_i}$, para todo $i\in I$, e tal que o diagrama seguinte é comutativo sempre que $k\succeq j\succeq i$.



Nos será útil, particularmente, o conjunto dos números naturais $\mathbb N$ com sua ordem parcial usual. Isto é, sistemas inversos sobre $\mathbb N$ em uma categoria $\mathcal C$ da forma

$$M_0 \leftarrow M_1 \leftarrow M_2 \leftarrow \cdots$$

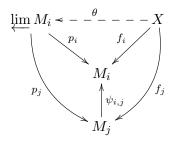
onde $M_n \to M_n$ é o morfismo identidade e $M_{n+k} \to M_n$ é a composição em \mathcal{C} , para todo $n, k \in \mathbb{N}$.

Definição 4.1.2 Seja $\{M_i, \psi_{i,j}\}$ um sistema inverso sobre (I, \succeq) em uma categoria \mathcal{C} . O limite inverso (também chamado de limite projetivo ou limite) é um objeto $\varprojlim M_i$ e uma família de morfismos $(p_i : \varprojlim M_i \to M_i)_{i \in I}$, chamados de projeções, satisfazendo:

(L1) $\psi_{i,j} \circ p_j = p_i$, sempre que $j \succeq i$; e

104

(L2) para todo objeto $X \in \mathcal{C}$ e toda família de morfismos $(f_i: X \to M_i)_{i \in I}$ satisfazendo (L1), existe um único morfismo $\theta: X \to \varprojlim M_i$ fazendo o diagrama abaixo comutativo.



Como quase todo objeto definido como uma solução de uma determinada propriedade universal, o limite inverso de um sistema inverso, se ele existe, é único a menos de isomorfismos. É também bem conhecido que existe o limite inverso para qualquer sistema inverso $\{M_i, \psi_{i,j}\}$ em Mod R (vide, por exemplo, Proposição 5.17 de [Rot09]) e, por conseguinte, para qualquer sistema inverso na categoria de complexos $\mathcal{C}(R)$ sobre Mod R (vide, por exemplo, Exercício 6.9 de [Rot09]). Como vamos precisar calcular o limite inverso na categoria de complexos, achamos conveniente mostrar como ele pode ser obtido.

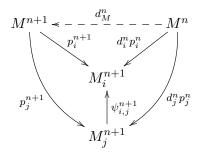
Seja $\{M_i^{\bullet}, \psi_{i,j}\}$ um sistema inverso sobre (I, \succeq) em $\mathcal{C}(R)$. Como $\psi_{i,j} \circ \psi_{j,k} = \psi_{i,k}$, para todo $k \succeq j \succeq i$, e para cada $j \succeq i$ o morfismo de complexos $\psi_{i,j} \colon M_j^{\bullet} \to M_i^{\bullet}$ é uma família de homomorfismos de R-módulos $(\psi_{i,j}^n \colon M_j^n \to M_i^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ tal que

$$\psi_{i,j}^{n+1}\circ d_j^n=d_i^n\circ \psi_{i,j}^n,$$
 para todo $n\in\mathbb{Z},$

onde os d_i^n são os diferenciais do complexo M_i^{\bullet} , então, fixado $n \in \mathbb{Z}$, $\{M_i^n, \psi_{i,j}^n\}$ é um sistema inverso sobre (I, \succeq) em Mod R. Dado que em Mod R existe limite inverso para todo sistema inverso, segue-se que para cada $n \in \mathbb{Z}$ existe um R-módulo $\varprojlim M_i^n$ e uma família de homomorfismos $(p_i^n : \varprojlim M_i^n \to M_i^n)_{i \in I}$ satisfazendo as condições (L1) e (L2) acima. Denotando $\varprojlim M_i^n$ por M^n , para cada $n \in \mathbb{Z}$, e definindo $M^{\bullet} := (M^n, d_M^n)_{n \in \mathbb{Z}}$, onde

105

 $d_M^n\colon M^n\to M^{n+1}$ é o único homomorfismo fazendo o diagrama



comutativo, temos que M^{\bullet} é um complexo sobre Mod R. Finalmente, se para cada $i \in I$ definimos $p_i := (p_i^n \colon M^n \to M_i^n)_{n \in \mathbb{Z}}$, temos que $(p_i \colon M^{\bullet} \to M_i^{\bullet})_{i \in I}$ é uma família de morfismos de complexos que satisfaz a condição (L1). Não é difícil verificar que o par ordenado $(M^{\bullet} := (\varprojlim M_i^n, d_M^n)_n, (p_i)_{i \in I})$ também satisfaz a condição (L2).

Os seguintes fatos sobre limite inverso também serão úteis na resolução do exemplo que segue.

Proposição 4.1.3 (a) Seja $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de R-módulos isomorfos entre si, digamos, $M_n \cong M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se

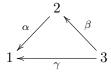
$$M_0 \stackrel{\psi_{0,1}}{\longleftarrow} M_1 \stackrel{\psi_{1,2}}{\longleftarrow} M_2 \leftarrow \cdots$$

é um sistema inverso sobre \mathbb{N} onde cada $\psi_{n,n+1} \colon M_{n+1} \to M_n$ é um isomorfismo, então $\varprojlim M_n = M$.

(b) Seja J um subconjunto cofinal de um conjunto parcialmente ordenado (I, ≥) – isto é, para cada i ∈ I, existe j ∈ J com j ≥ i. Sejam {M_i, ψ_{i,k}} um sistema inverso sobre (I, ≥) e {M_j, ψ_{j,l}} um subsistema inverso cujos índices estão em J. Então, o limite inverso sobre I é isomorfo ao limite inverso sobre J.

4.2 Exemplo

Seja Λ a álgebra com rad $^2\Lambda = 0$ cujo carcás ordinário é dado abaixo.



É fácil ver que Λ é uma álgebra com dimensão global finita, a saber gl.dim $\Lambda=2$, e é conhecido que s.gl.dim $\Lambda=\infty$ (vide [Sko87], Example 4.2).

Vamos construir uma sequência de morfismos de complexos, cada qual satisfazendo a

propriedade *, e daí obteremos um sistema inverso sobre $\mathbb N$ em $\mathcal C^b(\mathcal P)$

$$P_0^{\bullet} \stackrel{\psi_{0,1}}{\leftarrow} P_1^{\bullet} \stackrel{\psi_{1,2}}{\leftarrow} P_2^{\bullet} \leftarrow \cdots \tag{4.1}$$

tal que:

- (SI1) Cada P_n^{\bullet} é radical e indecomponível em $\mathcal{K}^b(\mathcal{P})$ e, em particular, indecomponível em $\mathcal{C}^b(\mathcal{P})$;
- (SI2) $\ell(P_n^{\bullet}) = n + 3$, para todo $n \in \mathbb{N}; 1$ e
- (SI3) $\varprojlim P_n^{\bullet}$ é um complexo radical indecomponível em $\mathcal{C}^-(\mathcal{P})$ e, em particular, indecomponível em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$ –, cuja complexidade é igual a 1.

Seja P_i o projetivo (indecomponível) associado ao vértice i, com $i \in \{1, 2, 3\}$, e considere o complexo em $C^b(\mathcal{P})$

$$X^{\bullet} = \cdots \to 0 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\alpha} P_2 \xrightarrow{\beta} P_3 \longrightarrow 0 \to \cdots$$

onde P_3 é a componente homogênea de grau zero de X^{\bullet} . Então, segue do Corolário 3.3.3 que X^{\bullet} é indecomponível em $\mathcal{K}^b(\mathcal{P})$. Pela mesma razão, o complexo

$$\cdots \to 0 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{x} P_2 \xrightarrow{y} P_3 \longrightarrow 0 \to \cdots$$

onde $x \in \{\alpha, -\alpha\}$ e $y \in \{\beta, -\beta\}$, é indecomponível em $\mathcal{K}^b(\mathcal{P})$. Quando $x = -\alpha$ e $y = -\beta$, denotamos o complexo acima por " $-X^{\bullet}$ ".

Note que todos estes complexos são radicais. Além disso, do homomorfismo não nulo de P_1 em P_3 , induzido pela flecha $\gamma \colon 3 \to 1$, existe um morfismo não nulo de complexos

$$-X^{\bullet}: \qquad P_{1} \xrightarrow{-\alpha} P_{2} \xrightarrow{-\beta} P_{3}$$

$$\downarrow^{\gamma}$$

$$X^{\bullet}[2]: \qquad P_{1} \xrightarrow{\alpha} P_{2} \xrightarrow{\beta} P_{3}$$

tal que:

(i) γ_0 é não nulo em $\mathcal{K}^b(\mathcal{P})$. De fato, se existe uma homotopia $s=(s^n)_n$ de γ_0 , então existem escalares a e b tais que $s^{-1}=a\cdot\beta\colon P_2\to P_3$ e $s^{-2}=b\cdot\alpha\colon P_1\to P_2$ e, portanto,

$$\gamma = a \cdot \beta(-\alpha) + \beta(b \cdot \alpha) = 0 + 0 = 0,$$

o que é uma contradição.

(ii) γ_0 não é um isomorfismo em $\mathcal{K}^b(\mathcal{P})$ (vide Lema 3.3.4).

¹Note que com isto temos, em particular, que s.gl.dim $\Lambda = \infty$.

(iii) $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^b(\mathcal{P})}(X^{\bullet}[2], -X^{\bullet}[1]) = 0$. Em particular, $\operatorname{Hom}_{\mathcal{K}^b(\mathcal{P})}(X^{\bullet}[2], -X^{\bullet}[1]) = 0$.

$$X^{\bullet}[2]: \qquad P_{1} \xrightarrow{\alpha} P_{2} \xrightarrow{\beta} P_{3}$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad$$

Logo, a tripla $(\gamma_0, -X^{\bullet}, X^{\bullet}[2])$ satisfaz a propriedade * e, portanto, o cone $C_{\gamma_0} \doteq P_0^{\bullet}$ é um indecomponível de $\mathcal{K}^b(\mathcal{P})$.

$$P_{0}^{\bullet} = P_{1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}} P_{1} \oplus P_{2} \xrightarrow{\langle \alpha \rangle} P_{2} \oplus P_{3} \xrightarrow{(\beta \ 0)} P_{3}$$

Analogamente, existe um morfismo não nulo γ_1 de $-P_0^{\bullet}$ em $X^{\bullet}[4]$, induzido da flecha γ ,

$$-P_0^{\bullet}: \qquad P_1 \xrightarrow{-d_{P_0}^{-4}} P_1 \oplus P_2 \xrightarrow{-d_{P_0}^{-3}} P_2 \oplus P_3 \xrightarrow{-d_{P_0}^{-2}} P_3$$

$$\downarrow^{\gamma} \qquad \qquad \downarrow^{\gamma} \qquad \qquad \downarrow^{\gamma} \qquad \qquad X^{\bullet}[4]: \qquad P_1 \xrightarrow{\alpha} P_2 \xrightarrow{\beta} P_3$$

satisfazendo as condições (i), (ii) e (iii) acima. De modo que a tripla $(\gamma_1, -P_0^{\bullet}, X^{\bullet}[4])$ também satisfaz a propriedade * e, portanto, o cone $C_{\gamma_1} \doteq P_1^{\bullet}$ é um indecomponível de $\mathcal{K}^b(\mathcal{P})$.

$$P_{1}^{\bullet} = P_{1} \xrightarrow{\left(\begin{array}{c} 0\\ \alpha \end{array}\right)} P_{1} \oplus P_{2} \xrightarrow{\left(\begin{array}{cc} \alpha & 0\\ \gamma & \beta \end{array}\right)} P_{1} \oplus P_{2} \oplus P_{3} \xrightarrow{\left(\begin{array}{cc} \alpha & 0 & 0\\ \gamma & \beta & 0 \end{array}\right)} P_{2} \oplus P_{3} \xrightarrow{\left(\begin{array}{cc} \beta & 0 \end{array}\right)} P_{3}$$

Continuando este processo obtemos um indecomponível em $\mathcal{K}^b(\mathcal{P})$ da forma

$$P_n^{\bullet} = P_1 \xrightarrow{(0 \ \alpha)^t} P_1 \oplus P_2 \longrightarrow P_1 \oplus P_2 \oplus P_3 \longrightarrow P_1 \oplus P_2 \oplus P_3 \longrightarrow P_2 \oplus P_3 \xrightarrow{(\beta \ 0)} P_3,$$

onde a componente homogênea P_3 está no grau -n-1; possui exatamente n+4 termos não nulos, sendo que cada uma das n componentes homogêneas do "meio" do complexo igual a $P_1 \oplus P_2 \oplus P_3$ e cada um dos diferenciais entre tais componentes dado pela matriz abaixo.

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 \\
\alpha & 0 & 0 \\
\gamma & \beta & 0
\end{pmatrix}$$
(4.2)

Além disso, dado que o complexo X^{\bullet} é radical e a componente não nula de cada γ_n , a saber a multiplicação pela flecha γ , é um morfismo radical, então cada P_n^{\bullet} é um complexo radical. Em particular, $\ell(P_n^{\bullet}) = n + 3$, para todo $n \geq 0$. Usando a sequência de objetos e morfismos

108

em
$$C^b(\mathcal{P})$$

$$M^{\bullet} \xrightarrow{f} N^{\bullet} \xrightarrow{\mu_f} C_f \xrightarrow{\pi_f} M^{\bullet}[1],$$

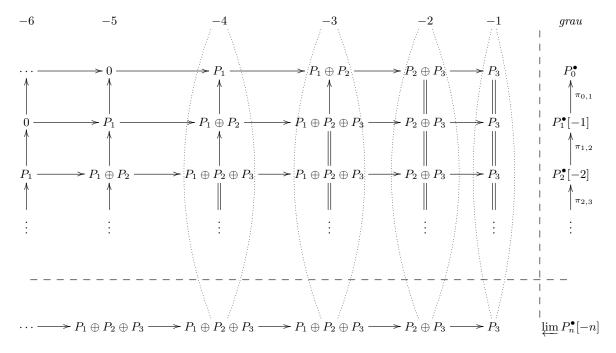
para cada um dos morfismos $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$, obtemos um sistema inverso sobre \mathbb{N} em $\mathcal{C}^b(\mathcal{P})$ da forma

$$P_0^{\bullet} \stackrel{\pi_{0,1}}{\longleftarrow} P_1^{\bullet}[-1] \stackrel{\pi_{1,2}}{\longleftarrow} P_2^{\bullet}[-2] \longleftarrow \cdots, \tag{4.3}$$

satisfazendo as condições (SI1) e (SI2) dadas acima. Finalmente, usando que o complementar de qualquer subconjunto finito de \mathbb{N} é um subconjunto cofinal de \mathbb{N} e aplicando a Proposição 4.1.3 ao sistema inverso (4.3), temos que o limite inverso $\varprojlim P_n^{\bullet}[-n]$ é dado pelo complexo ilimitado

$$\cdots \longrightarrow P_1 \oplus P_2 \oplus P_3 \xrightarrow{d^{-5}} P_1 \oplus P_2 \oplus P_3 \xrightarrow{d^{-4}} P_1 \oplus P_2 \oplus P_3 \xrightarrow{d^{-3}} P_2 \oplus P_3 \xrightarrow{(\beta \ 0)} P_3, \ (4.4)$$

onde a componente homogênea P_3 está no grau -1; $d^{-3} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \gamma & \beta & 0 \end{pmatrix}$; e para todo $i \leq -4$ o diferencial d^i é dado pela matriz (4.2).



Procedendo como no Exemplo 2.4.5, mostra-se que o complexo dado em (4.4), $\varprojlim P_n^{\bullet}[-n]$, é indecomponível em $\mathcal{C}^-(\mathcal{P})$. Em particular, por ser um complexo radical, também é indecomponível em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$. E, finalmente, é fácil ver que $\operatorname{cx}(\varprojlim P_n^{\bullet}[-n]) = 1$. Isto conclui a verificação do item (SI3).

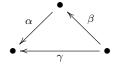
Observação 4.2.1 O complexo $\varprojlim P_n^{\bullet}[-n]$ obtido acima é outro exemplo de um indecomponível em $C^-(\mathcal{P})$ tal que todo truncamento bruto de comprimento maior do que zero é decomponível em $C^b(\mathcal{P})$. De fato, basta observar que o módulo P_3 está contido em $\operatorname{Nuc}(d^i)$,

PLO 109

para todo $i \leq -2$, e aplicar o Lema 2.4.4.

Seja Λ uma k-álgebra de dimensão finita satisfazendo as condições:

- (a) $\operatorname{rad}^2 \Lambda = 0$;
- **(b)** gl.dim $\Lambda < \infty$; e
- (c) o carcás ordinário de Λ contém um passeio fechado ω da forma abaixo.



Pelas condições (a) e (b), temos que o carcás ordinário de Λ é acíclico (vide, por exemplo, [Far12], Corollary 3). Isto é suficiente para que possamos replicar a construção do exemplo anterior ao passeio $\omega = \alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma$ e construir um sistema inverso da forma (4.1) satisfazendo as condições (SI1), (SI2) e (SI3). Em particular, s.gl.dim $\Lambda = \infty$.

É importante observar que o fato do carcás ordinário de Λ conter um passeio fechado cujo grau é diferente de zero, não significa, em princípio, pelo critério de Bautista-Liu, que s.gl.dim $\Lambda = \infty$. De fato, o critério de Bautista-Liu assegura, neste caso, que Λ não é derivadamente equivalente a uma álgebra hereditária de dimensão finita, o que não significa que Λ não é uma álgebra hereditária por partes. No entanto, D. Happel mostrou que uma álgebra hereditária por partes do tipo canônica, que não é derivadamente equivalente a uma álgebra hereditária de dimensão finita, tem o primeiro grupo de cohomologia de Hochschild igual a zero (vide Theorem 2.4 de [Hap98]). Juntando este fato ao critério de Bautista-Liu e ao resultado de M. J. Bardzell e E. N. Marcos que diz que o primeiro grupo de cohomologia de Hochschild de uma álgebra monomial $\Lambda \cong kQ/I$ é igual a zero se e somente se o grafo subjacente ao carcás ordinário Q é uma árvore (vide Theorem 2.2 de [BM98]), temos o seguinte resultado.

Teorema 4.2.2 Seja Λ é uma k-álgebra de dimensão finita com radical quadrado zero cujo carcás ordinário contém um passeio fechado com grau diferente de zero. Então, Λ não é hereditária por partes (ou, equivalentemente, s.gl.dim $\Lambda = \infty$).

Note que com este teorema pode-se concluir diretamente que a álgebra do exemplo acima tem dimensão global forte infinita. O mesmo para as álgebras satisfazendo as condições (a) e (c) acima e para a álgebra do Exemplo 3.4.2.

Feitas estas considerações, temos as seguintes conjecturas.

Conjectura 1: Seja Λ uma k-álgebra de dimensão finita satisfazendo as condições:

- (a) $\operatorname{rad}^2 \Lambda = 0$;
- **(b)** gl.dim $\Lambda < \infty$; e
- (c) o carcás ordinário de Λ contém um passeio fechado cujo grau é diferente de zero.

Então, existe um objeto indecomponível em $\mathcal{D}^-(\Lambda)$ cuja complexidade é maior do que zero.

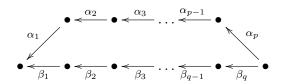
Conjectura 2: Seja Λ uma k-álgebra de dimensão finita satisfazendo as condições:

- (a) $\operatorname{rad}^2 \Lambda = 0$;
- **(b)** gl.dim $\Lambda < \infty$; e
- (c) s.gl.dim $\Lambda = \infty$.

Então, existe um objeto indecomponível em $\mathcal{D}^-(\Lambda)$ cuja complexidade é maior do que zero.

Note que pelo critério de Bautista-Liu e pelos comentários do parágrafo precedente, as condições (a) e (c) das conjecturas 1 e 2 são equivalentes.

Dada a dificuldade na construção de um sistema inverso da forma (4.1) satisfazendo as condições (SI1), (SI2) e (SI3), estamos verificando se é possível reduzir o problema ao caso de um passeio fechado da forma



onde $p \neq q$; e se existe condições suficientes para que um sistema inverso da forma (4.1), satisfazendo a consições (SI1) e uma condição similar à (SI2), tenha limite inverso indecomponível. É importante salientar que já temos alguns exemplos de sistemas de objetos indecomponíveis em que seu limite inverso é um objeto decomponível; inclusive na categoria de complexos. Mas nenhum destes exemplos serve como contraexemplo para o nosso caso.

Referências Bibliográficas

- [ACLV12] I. Assem, D. Castonguay, M. A. Lanzilotta e R. R. S. Vargas. Algebras determined by their supports. *J. Pure Appl. Algebra*, 216(5):1134–1145, 2012. 101
 - [AF92] F. W. Anderson e K. R. Fuller. Rings and categories of modules, volume 13 of Graduate Text in Mathematics. Springer-Verlag, 2 edição, 1992. 5, 20, 32
 - [AH81] I. Assem e D. Happel. Generalized tilted algebras of type A_n . Comm. Algebra, 9(20):2101-2125, 1981. 1
 - [Alp77] J. L. Alperin. Periodicity in groups. Illinois J. Math., 21(4):776–783, 1977. 1
 - [Alv14] E. R. Alvares. A course on derived categories. Mini-course notes, July 2014. Escola de Álgebra 2014. 38, 42, 43
 - [ARS97] M. Auslander, I. Reiten e S. O. Smalø. Representation theory of Artin algebras, volume 36 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. Corrected reprint of the 1995 original. 5, 26
 - [Ass97] I. Assem. Algèbres et modules: Cours et exercices. Enseignement des Mathématiques. Masson; Les Presses de l'Université d'Ottawa, 1997. 5
 - [ASS06] I. Assem, D. Simson e A. Skowroński. Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1, volume 65 of London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, Cambridge, 2006. Techniques of representation theory. 5, 13, 23, 25, 26
 - [Avr89] L. L. Avramov. Homological asymptotics of modules over local rings. Em *Commutative algebra (Berkeley, CA, 1987)*, volume 15 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, páginas 33–62. Springer, New York, 1989. 1
 - [Avr10] L. L. Avramov. Infinite free resolutions [mr1648664]. Em Six lectures on commutative algebra, Mod. Birkhäuser Class., páginas 1–118. Birkhäuser Verlag, Basel, 2010. 1
 - [BL13] R. Bautista e S. Liu. The bounded derived category with radical squared zero. Preprint, 2013. 4, 48, 71, 77
 - [BM98] M. J. Bardzell e E. N. Marcos. Induced boundary maps for the cohomology of monomial and Auslander algebras. Em Algebras and modules, II (Geiranger, 1996), volume 24 of CMS Conf. Proc., páginas 47–54. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998. 109
 - [BT05] J. Bélanger e C. Tosar. Shod string algebras. Comm. Algebra, 33(8):2465–2487, 2005. 4, 71, 72, 74, 75, 76

- [Car83] J. F. Carlson. The varieties and the cohomology ring of a module. *J. Algebra*, 85(1):104–143, 1983. 1
- [CL99] F. U. Coelho e M. A. Lanzilotta. Algebras with small homological dimensions. Manuscripta Math., 100(1):1–11, 1999. iii, v, 3, 71, 72, 73
 - [CW] F. U. Coelho e H. Wagner. On linearly oriented pullback and classes of algebras. *Preprint.* 4
- [DS85] P. Dowbor e A. Skowroński. On Galois coverings of tame algebras. *Arch. Math.* (Basel), 44(6):522–529, 1985. 2
- [EHT⁺04] K. Erdmann, M. Holloway, R. Taillefer, N. Snashall e Ø. Solberg. Support varieties for selfinjective algebras. K-Theory, 33(1):67–87, 2004. 1
 - [Far12] R. Farnsteiner. Algebras of finite global dimension: acyclic quivers. Electronic notes, http://www.math.uni-bielefeld.de/~sek/select/Acyclic.pdf, 2012. 109
 - [Gab72] P. Gabriel. Unzerlegbare Darstellungen. I. Manuscripta Math., 6:71–103; correction, ibid. 6 (1972), 309, 1972. 24
 - [GM03] S. I. Gelfand e Y. I. Manin. Methods of homological algebra. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, second edição, 2003. 44, 50, 52
 - [GZ09] E. L. Green e D. Zacharia. Auslander-Reiten components containing modules with bounded Betti numbers. Trans. Amer. Math. Soc., 361(8):4195–4214, 2009.
 - [GZ11] E. L. Green e D. Zacharia. On modules of finite complexity over selfinjective Artin algebras. *Algebr. Represent. Theory*, 14(5):857–868, 2011. 1
 - [Hap87] D. Happel. Iterated tilted algebras of affine type. Comm. Algebra, 15(1-2):29–45, 1987. 1
 - [Hap88] D. Happel. Triangulated categories in the representation theory of finitedimensional algebras, volume 119 of London Mathematical Society Lecture Notes. University Press, Cambridge, 1988. 1, 37, 38, 40, 56
 - [Hap91] D. Happel. Auslander-Reiten triangles in derived categories of finite-dimensional algebras. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 112(3):641–648, July 1991. 1, 56
 - [Hap98] D. Happel. Hochschild cohomology of piecewise hereditary algebras. Colloq. Math., 78(2):261–266, 1998. 109
 - [Hap01] D. Happel. A characterization of hereditary categories with tilting object. *Invent. Math.*, 144(2):381–398, 2001. 1, 2
 - [Har66] R. Hartshorne. Residues and duality. Lecture notes of a seminar on the work of A. Grothendieck, given at Harvard 1963/64. With an appendix by P. Deligne. Lecture Notes in Mathematics, No. 20. Springer-Verlag, Berlin, 1966. 42
 - [HJ10] T. Holm e P. Jørgensen. Triangulated categories: definitions, properties, and examples. Em *Triangulated categories*, volume 375 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, páginas 1–51. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010. 34, 38, 42, 43, 44

- [HR82] D. Happel e C. M. Ringel. Tilted algebras. Trans. Amer. Math. Soc., 274(2):399–443, 1982. 1, 72
- [HR98] D. Happel e I. Reiten. Directing objects in hereditary categories. Em Trends in the representation theory of finite-dimensional algebras (Seattle, WA, 1997), volume 229 of Contemp. Math., páginas 169–179. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998. 2
- [HRS88] D. Happel, J. Rickard e A. Schofield. Piecewise hereditary algebras. Bull. London Math. Soc., 20(1):23–28, 1988. 1
- [HRS96a] D. Happel, I. Reiten e S. Smalø. Piecewise hereditary algebras. Arch. Math. (Basel), 66(3):182–186, 1996. 1
- [HRS96b] D. Happel, I. Reiten e S. Smalø. Tilting in abelian categories and quasitilted algebras. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 120(575):viii+ 88, 1996. iii, v, 1, 72, 73
 - [HW83] D. Hughes e J. Waschbüsch. Trivial extensions of tilted algebras. *Proc. London Math. Soc.* (3), 46(2):347–364, 1983. 2
 - [HZ08] D. Happel e D. Zacharia. A homological characterization of piecewise hereditary algebras. *Math. Z.*, 260(1):177–185, 2008. iii, v, 2, 4, 71, 82, 96, 103
 - [HZ10] D. Happel e D. Zacharia. Homological properties of piecewise hereditary algebras. J. Algebra, 323(4):1139–1154, 2010. 2, 3, 71, 96
 - [Kra05] H. Krause. The stable derived category of a Noetherian scheme. *Compos. Math.*, 141(5):1128–1162, 2005. 4, 46, 47, 48
 - [Kra12] H. Krause. Krull-Remak-Schmidt categories and projective covers. Electronic notes, http://www.math.uni-bielefeld.de/~hkrause/krs.pdf, may 2012. 19, 20
- [KSYZ04] O. Kerner, A. Skowroński, K. Yamagata e D. Zacharia. Finiteness of the strong global dimension of radical square zero algebras. Cent. Eur. J. Math., 2(1):103– 111 (electronic), 2004. 2
 - [KZ11] O. Kerner e D. Zacharia. Auslander-Reiten theory for modules of finite complexity over self-injective algebras. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 43(1):44–56, 2011. 1
 - [Liu10] S. Liu. Auslander-Reiten theory in a Krull-Schmidt category. São Paulo J. Math. Sci., 4(3):425–472, 2010. 22
 - [Nee01] A. Neeman. Triangulated categories, volume 148 of Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001. 38
 - [Pop73] N. Popescu. Abelian categories with applications to rings and modules, volume 3 of L.M.S. Monographs. Academic Press, 1973. 13
 - [Pur12] M. Purin. Complexity of trivial extensions of iterated tilted algebras. J. Algebra Appl., 11(4):1250067, 15, 2012. 1
 - [Rin90] C. M. Ringel. The canonical algebras. Em Topics in algebra, Part 1 (Warsaw, 1988), volume 26 of Banach Center Publ., páginas 407–432. PWN, Warsaw, 1990. With an appendix by William Crawley-Boevey. 1

- [Rot09] J. J. Rotman. An introduction to homological algebra. Universitext. Springer, New York, second edição, 2009. 34, 103, 104
- [Sko87] A. Skowroński. On algebras with finite strong global dimension. Bull. Polish Acad. Sci. Math., 35(9-10):539–547, 1987. 2, 3, 71, 105
- [Ver77] J. L. Verdier. Catégories dérivées, état 0, volume 569 of Lecture Notes in Math., páginas 262–311. Springer, Berlin, 1977. 42
- [Wei08] C. A. Weibel. An introduction to homological algebra. Cambridge studies in advanced mathematics. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008. 32, 34, 42, 43

Índice Remissivo

k-categoria, 20	com relações, 25
álgebra	derivada, 42
de caminhos, 23	equivalência de, 12
hereditária por partes, 1	estável, 22
quase inclinada, 72	hereditária, 72
shod, 73	Hom-finita, 20
shod estrita, 73	ideal de uma, 22
string, 75	Krull-Schmidt, 19
	quociente, 22
anel semiperfeito, 20	triangulada, 38, 39
(00	complexidade
carcás, 23	de uma sequência de inteiros, 45
acíclico, 23	na categoria de módulos, 46
caminho em um, 23	na categoria derivada, 53
caminho nulo em um, 74	complexo(s), 27
caminho trivial em um, 23	categoria de homotopia de, 30
ciclo em um, 77	cohomologia de, 31
ciclo orientado em um, 23	componente homogênea de um, 27
com relações, 24	comprimento de um, 59
conexo, 23	diferenciais de um, 27
de Aulander-Reiten, 26	homotopicamente minimal, 46
finito, 23	- · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
flechas de um, 23	homotopicamente nulo, 31, 67
graduável, 77	limitado, 28
grafo subjacente, 23	limitado inferiormente, 28
ordinário, 24	limitado superiormente, 28
passeio em um, 74	morfismo de, 27
passeio fechado em um, 74	radical, 32
passeio reduzido em um, 74	translação de um, 29
relação zero em um, 74	truncamento bruto de um, 28
representação de um, 25	critério de Bautista-Liu, 81
vértices de um, 23	diagrama escada, 84
categoria, 7	,
k-, 20	consecutivos, 89
de homotopia de complexos, 30	radical, 87
abeliana, 18	dimensão global forte, 59
aditiva, 15	epimorfismo, 9
com triângulos de Auslander-Reiten, 56	•
de complexos, 27, 28	funtor, 11
de representações de um carcás, 25	aditivo, 18
de representações de um carcas, 20	composição, 12

denso, 13	indecomponível, 17
equivalência de categorias trianguladas,	suplementar, 16
40	zero, 14
exato, 40	,
fiel, 13	passeio(s), 74
identidade, 12	composta de, 74
inclusão, 12	fechado, 74
localização, 42	grau de um, 77
pleno, 13	que apontam na mesma direção, 74
quase inverso, 12	reduzido, 74
translação, 29	projeções canônicas, 15
truncamento, 28	propriedade *, 82
homotopia, 30	quase isomorfismo, 32
	resolução em $\mathcal{K}^-(\mathcal{P}), 52$
inclusão canônica, 13	retração, 9
isomorfismo, 9	retração, 9
funtorial, 12	seção, 9
limita invarga 104	sequência
limite inverso, 104	de Auslander-Reiten, 26
monomorfismo, 9	quase cindida, 26
morfismo, 7	sistema inverso, 103
conúcleo de um, 14	soma direta, 13
cone de um, 29	inclusões canônicas, 13
de complexos, 27	projeções canônicas, 15
funtorial, 12	somando direto, 17
funtorial composição, 12	sub-objeto, 16
funtorial identidade, 12	inclusão, 16
homotópico a zero, 30	subcategoria, 8
idempotente, 17	plena, 8
idempotente que cinde, 17	pronta, o
imagem de um, 18	transformação natural, 12
inversa de um, 9	triângulo(s), 38
irredutível, 26	de Auslander-Reiten, 56
núcleo de um, 14	distinguidos, 39
radical, 32	distinguidos em $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, 44
soma, 16	distinguidos em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, 41
zero, 14	isomorfismo de, 39
morfismos	morfismo de, 39
homotópicos, 30	padrão em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, 41
pullback de, 10	_
pushout de, 10	zero consecutivo, 75
número de Betti	
em mod Λ , 46	
em $\mathcal{D}^-(\Lambda)$, 50	
em $\mathcal{K}^{-}(\mathcal{P})$, 49	
objeto, 7	
inclinante, 72	
,	