

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO RIO
GRANDE DO NORTE
CAMPUS SANTA CRUZ

LIZANDRA MAGNA DOS SANTOS OLIVEIRA

**UM ESTUDO SOBRE OS PROBLEMAS DO HORIZONTE E DA PLANURA DO
MODELO COSMOLÓGICO PADRÃO**

SANTA CRUZ/RN

2023

LIZANDRA MAGNA DOS SANTOS OLIVEIRA

**UM ESTUDO SOBRE OS PROBLEMAS DO HORIZONTE E DA PLANURA DO
MODELO COSMOLÓGICO PADRÃO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso Superior de Licenciatura em Física do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte – IFRN/Campus Santa Cruz, em cumprimento às exigências legais como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Física.

Orientador: Prof. Me. Jardel Lucena da Silva.

SANTA CRUZ/RN

2023

Oliveira, Lizandra Magna dos Santos

O48u Um estudo sobre os problemas do horizonte e da planura do modelo cosmológico padrão / Lizandra Magna dos Santos Oliveira - 2023.
76 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Física) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte.
Orientador: Prof. Me. Jardel Lucena da Silva.

1. Modelo cosmológico padrão. 2. Ensino de física moderna. 3. Teorias da relatividade. 4. Big Bang. I. Silva, Jardel Lucena da. II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnológica do Rio Grande do Norte. III. Título.

CDU 53

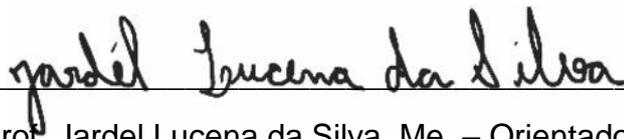
LIZANDRA MAGNA DOS SANTOS OLIVEIRA

**UM ESTUDO SOBRE OS PROBLEMAS DO HORIZONTE E DA PLANURA DO
MODELO COSMOLÓGICO PADRÃO**

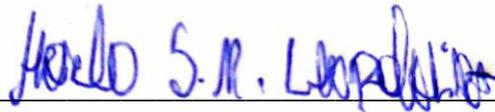
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso Superior de Licenciatura em Física do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte – IFRN/Campus Santa Cruz, em cumprimento às exigências legais como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Física.

Apresentado e aprovado em: 04 / 08 / 2023.

Banca Examinadora



Prof. Jardel Lucena da Silva, Me. – Orientador
IFRN / Campus Santa Cruz



Karlo Sérgio Medeiros Leopoldino, Me. – 1º Examinador
IFRN / Campus Santa Cruz



Raissa Maria Pimentel Neves, Dra. – 2º Examinador
UECE / Campus FECLI

*À minha sobrinha, Haila Gabriele, por
trazer alegria nos momentos obscuros.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Marluce Maria e Edinaldo Cândido, por sempre me incentivarem a estudar e não medirem esforços para me auxiliar e fornecer melhores oportunidades de seguir neste caminho. Além disso, agradeço aos meus irmãos, Paulo Henrique e Eduardo Henrique, pelo apoio e torcida pelo meu sucesso.

Agradeço ao meu noivo, José Genielisson, por todo o apoio, suporte, por ter sido o meu pilar de sustentação durante os anos da graduação e me ajudar a não desistir nos momentos mais difíceis.

Agradeço ao meu orientador, Jardel Lucena, por todo incentivo, empenho e dedicação para tornar esse trabalho possível, e por ter me proporcionado os vários momentos de “desorientações”.

Por fim, agradeço a todos os professores, funcionários e colegas do IFRN – Campus Santa Cruz que, de forma direta ou indireta, contribuíram para a minha formação profissional e pessoal.

“Tudo no mundo começou com um sim. Uma molécula disse sim a outra molécula e nasceu a vida. Mas antes da pré-história havia a pré-história da pré-história e havia o nunca e havia o sim. Sempre houve. Não sei o quê, mas sei que o universo jamais começou”.

(A Hora da Estrela – Clarice Lispector)

RESUMO

Neste trabalho desenvolvemos um estudo sobre alguns problemas do modelo cosmológico padrão, e discutimos como a proposta de um modelo inflacionário pode ser utilizado para contornar estes problemas. Inicialmente é abordada uma contextualização que justifica a importância deste tipo de estudo na perspectiva da formação de professores de Física, com o intuito de contribuir com uma apropriação consistente acerca deste importante tema da Física Moderna e Contemporânea. A metodologia utilizada consiste em uma pesquisa bibliográfica. A fim de subsidiar uma melhor compreensão do tema discutido, abordamos as principais ideias das Teorias da Relatividade Restrita e Geral, e a partir disto, desenvolvemos as principais ideias do modelo cosmológico padrão, e algumas de suas soluções. Finalmente, discutimos alguns problemas associados às referidas soluções e sobre como a consideração de um mecanismo inflacionário na evolução da dinâmica do Universo pode ajudar a resolver estes problemas. Enfatizamos também que esta possibilidade traz à tona outros problemas, que têm sido amplamente pesquisados no âmbito da Cosmologia Moderna, e mencionamos ainda outros problemas vinculados ao contexto, porém, apenas para complementar o tema de maneira informativa. Concluímos com uma breve discussão sobre o cumprimento do objetivo estabelecido neste trabalho, e suas perspectivas futuras.

Palavras-chave: Modelo cosmológico padrão; Ensino de Física Moderna; Teorias da Relatividade; *Big Bang*.

ABSTRACT

In this work we develop a study about some problems of the standard cosmological model, and we discuss how the proposal of an inflationary model can be used to overcome these problems. Initially, a contextualization is approached that justifies the importance of this type of study in the perspective of the formation of Physics teachers, with the intention of contributing with a consistent appropriation about this important theme of Modern and Contemporary Physics. The methodology used consists of bibliographical research. To support a better understanding of the topic discussed, we approach the main ideas of the Special and General Theories of Relativity, and from this, we develop the main ideas of the standard cosmological model, and some of its solutions. Finally, we discuss some problems associated with these solutions and how the consideration of an inflationary mechanism in the evolution of the dynamics of the Universe can help to solve these problems. We also emphasize that this possibility brings up other problems, which have been widely researched in the scope of Modern Cosmology, and we also mention other problems linked to the context, however, only to complement the theme in an informative way. We conclude with a brief discussion about the fulfillment of the objective established in this work, and its future perspectives.

Keywords: Standard cosmological model; Teaching of Modern Physics; Theories of Relativity; Big Bang.

LISTA DE FIGURAS

| | |
|--|----|
| Figura 2.2.1: (a) Observador em uma cabine no espaço sideral; (b) observador em uma cabine acelerada. | 30 |
| Figura 2.2.2: (a) representação da trajetória de um feixe de luz disparado na cabine sem aceleração; (b) representação da trajetória de um feixe de luz disparado na cabine acelerada. | 31 |
| Figura 2.2.3: (a) Transporte paralelo de um vetor, em <i>loop</i> , em um espaço plano; (b) Transporte paralelo de um vetor, em <i>loop</i> , em uma variedade. | 33 |
| Figura 3.1.1: Gráfico das densidades de energia em relação ao fator de escala. | 49 |
| Figura 3.1.2: Modelo Oscilante. | 50 |
| Figura 3.1.3: (a) Modelo para $\Lambda = 0$ e $\kappa = -1$; (b) Modelo para $\Lambda = 0$ e $\kappa = 0$; (c) Modelo para $\Lambda = 0$ e $\kappa = 1$. | 51 |
| Figura 3.1.4: Modelo para $\Lambda > 0$ com $\kappa = -1$ e $\kappa = 0$. | 51 |
| Figura 3.1.5: (a) Modelo para $\kappa = 1$ e $\Lambda > \Lambda_c$; (b) Modelo para $\kappa = 1$ e $\Lambda = \Lambda_c$. | 52 |
| Figura 3.1.6: Modelo para $0 < \Lambda < \Lambda_c$ com $\kappa = 1$. | 52 |
| Figura 4.2.1: Arco da região da superfície do último espalhamento | 66 |

SUMÁRIO

| | |
|---|----|
| INTRODUÇÃO | 10 |
| 1. Uma Breve Contextualização Sobre a Teoria do Big Bang | 13 |
| 2. Fundamentos da Teoria da Relatividade Restrita e da Teoria da Relatividade Geral | 16 |
| 2.1. Breve Resumo Sobre o Desenvolvimento da Teoria da Relatividade Especial | 16 |
| 2.1.1. Postulados da Teoria da Relatividade Especial | 17 |
| 2.1.2. Duas das Consequências Observacionais: Contração do Comprimento e Dilatação do Tempo | 17 |
| 2.1.3. O Quadrado do Intervalo Espaço-temporal ΔS^2 e o Espaço quadridimensional | 19 |
| 2.1.4. Tensor Energia-momentum-tensão..... | 20 |
| 2.2. Teoria da Relatividade Geral (TRG)..... | 26 |
| 2.2.1. Princípio da Equivalência | 26 |
| 2.2.2. Sobre Espaços com Curvatura ou Variedades | 29 |
| 2.3. A Equação de Einstein | 31 |
| 3. A Cosmologia Relativística | 36 |
| 3.1. A Métrica das Hipersuperfícies em que $t = \textit{constante}$ | 36 |
| 3.2. Dinâmica do Universo | 41 |
| 3.3. Parâmetros Observacionais | 50 |
| 4. Problemas do Modelo Cosmológico Padrão..... | 56 |
| 4.1. Uma Breve Digressão Sobre a História Térmica do Universo | 56 |
| 4.2. Problema do Horizonte..... | 58 |
| 4.3. Problema da Planura..... | 64 |
| 4.4. Propostas de Soluções para os Problemas discutidos através do Mecanismo Inflacionário | 66 |
| 4.5. Sobre outros problemas associados ao MCP..... | 70 |
| CONSIDERAÇÕES FINAIS | 74 |
| REFERÊNCIAS..... | 75 |

INTRODUÇÃO

A Física é uma ciência que está em constante evolução no decorrer do tempo. Há exemplos diversos de formulações de novas teorias ou correções em teorias que já estavam bem estabelecidas. Por ser uma área de estudos ampla e estar correlacionada a fenômenos naturais que ocorrem no dia-a-dia, a evolução da Física proporciona o desenvolvimento de outras áreas que se tornaram fundamentais para os dias atuais como, por exemplo, o setor tecnológico.

Entretanto, como afirma Oliveira, Vianna e Gerbassi (2007), é preocupante como o ensino de Física no ensino médio não tem acompanhado esse desenvolvimento e cada vez mais se distancia das necessidades dos alunos no que diz respeito ao estudo de conhecimentos científicos mais atuais. Segundo estes autores, um dos fatores que influenciam esse cenário é o fato de haver uma lacuna entre os conteúdos de Física presentes no currículo escolar e o que os alunos têm acesso via mídias sociais e televisivas dos avanços científicos na área da Física pelo Brasil e pelo mundo.

Além disso, os alunos apresentam pouco interesse pelo componente curricular de física por experienciarem aulas em que são apresentados muitos cálculos que aparentemente não apresentam uma aplicabilidade em relação ao cotidiano (SANTOS; NASCIMENTO; SOUSA, 2016, p.1). Uma das possibilidades de se justificar este desencontro entre os alunos e a ciência Física pode ser atribuída ao aspecto motivacional. Para Bzuneck e Guimarães (2004), a motivação é entendida como um estado psicológico principal que se direciona a uma determinada finalidade; ou seja, é aquilo que faz um sujeito se mobilizar, colocando-o em atuação e podendo fazê-lo mudar de rumo. Nesta perspectiva, em um ambiente de sala de aula, é imprescindível que os alunos tenham esse estado despertado, a fim de participarem ativamente do processo de aprendizagem; e por este motivo, justifica-se a importância de se buscarem elementos que possam contribuir para o estabelecimento desta condição.

Geralmente é comum encontrar na literatura acadêmica trabalhos que ressaltem a importância da utilização de metodologias específicas para alcançar este objetivo, como a utilização de abordagens lúdicas, experimentais, entre outras. No entanto, muitas vezes, a própria escolha do tema a ser explorado em sala de aula pode já constituir um elemento de motivação, se este for condizente com o interesse

dos próprios alunos. Neste sentido, uma possibilidade interessante a ser explorada pode ser a escolha de temas associados à Física Moderna e Contemporânea (FMC). É facilmente verificável (OLIVEIRA; VIANNA; GERBASSI, 2007) que temas relacionados ao *Big Bang*, Buracos Negros, e qualquer coisa precedido com a palavra 'quântico', despertam bastante curiosidade no contexto de muitos alunos, e todos estes temas têm em comum a classificação de FMC.

Temas como esses são bastante abordados em filmes de ficção e em materiais de divulgação científica, entretanto, muitas vezes são tratados sem o rigor científico necessário ou a fiel descrição de acordo com as teorias físicas, o que acaba por induzir noções equivocadas para pessoas que não possuem conhecimento na área e/ou não possuem o devido letramento científico.

Apesar de ser uma possibilidade interessante, estudos mostram que a FMC ainda não é tão explorada no contexto das aulas de Física. Como afirma Santos, Nascimento e Sousa (2016):

No início da década passada Ostermann e Moreira (2000) já traziam a preocupação de ser comum para os estudantes ouvirem falar de Física Quântica, de buraco negro, do big bang, radiação e Física Nuclear nos filmes que assistem, mas nunca em sala de aula. Infelizmente, nos dias atuais a Física Moderna e Contemporânea no Brasil ainda não é tão difundida na escola básica, o conteúdo ensinado continua abordando quase sempre somente a Física Clássica. (SANTOS; NASCIMENTO; SOUSA, 2016, p. 2)

Alguns fatores que contribuem para essa baixa inserção dos conteúdos de FMC nas aulas de Física (no contexto do Ensino Básico) são a ausência de questões dessa área no ENEM, assim como a ausência de materiais didáticos acessíveis para alunos sobre tais temas (SANTOS; NASCIMENTO; SOUSA, 2016, p. 5). Além disso, outro fator que contribui é a falta de preparo dos professores para abordarem esses assuntos em sala de aula.

Como afirmam Machado e Nardi (2003, p. 2), isso se deve ao fato de que quando estavam no processo de formação, durante a graduação, tiveram pouco ou nenhum contato com os temas relacionados à FMC, o que influencia na qualidade da transposição didática sobre tais assuntos. Logo, uma possível solução para amenizar tais problemas pode ser uma das propostas feita por Machado e Nardi (2003, p. 4):

Desenvolvimento de materiais pedagógicos em meios diversos, tais como livros-texto, vídeos, equipamentos de laboratório e sugestões de experimentos, softwares educacionais e outros, considerando tópicos de FMC, fundamentados nas pesquisas de ensino de Ciências e adequados ao ensino médio e à formação de professores para estas séries. Tal medida ajudaria a ampliar os recursos didáticos adequados, à disposição de professores e alunos, contribuindo para a preparação e desenvolvimento das aulas de FMC. (MACHADO; NARDI, 2003, p. 4)

Nesta perspectiva, este trabalho de conclusão de curso se propõe a contribuir com a problemática discutida através da elaboração de um trabalho que aborde um tema da FMC e que possa vir a ser utilizado como uma fonte de estudos para professores de Física em formação, com o intuito de subsidiá-los na apropriação do tema para que a posteriori se possa realizar as devidas transposições didáticas de tais assuntos em seus devidos contextos.

Com isto, devido à amplitude de temas pertencentes à FMC, elegemos neste trabalho realizar um estudo sobre alguns dos problemas do Modelo Cosmológico Padrão (MCP) que subsidia a Teoria do *Big Bang*, propondo uma sistematização dos principais elementos necessários para sua compreensão e baseada numa revisão bibliográfica com o intuito de torná-lo mais acessível. Tal escolha se deve ao fato de esta teoria ser bastante divulgada e comentada nas mídias sociais, mas pouco difundida e abordada no âmbito educacional.

Para isto, delimitaremos a estrutura deste trabalho da seguinte forma: além desta introdução, o trabalho será composto por um capítulo com uma breve contextualização acerca da teoria do *Big Bang*, um segundo capítulo que realce as contribuições da Teoria da Relatividade Restrita (TRR) e sua importância para o contexto do desenvolvimento da Teoria da Relatividade Geral (TRG); um terceiro capítulo sobre os principais elementos do modelo cosmológico padrão com enfoque nas equações de Friedmann, discutindo suas soluções; e um quarto capítulo sobre problemas do MCP, particularmente, os problemas da Planura e do Horizonte de Partículas, e comentários sobre outros problemas para além do MCP. Por último, encerraremos com as considerações finais.

1. Uma Breve Contextualização Sobre a Teoria do Big Bang

Uma das questões que até hoje suscita curiosidade nas pessoas é: como tudo começou? Qual a origem do universo e como ele funciona? A busca por respostas para perguntas como estas vêm sendo pautadas desde as primeiras civilizações. Muitos dos povos antigos associavam a origem do universo à religião: o universo passou a existir devido à presença e ação de deuses ou entidades divinas que ditavam como tudo deveria ocorrer de acordo com o comportamento dos seus adoradores ou de acordo com ciclos de mudanças. A partir disso, surgiram os mitos cosmogônicos que possuíam variações para as diferentes civilizações existentes (MARTINS, 2012).

Com o passar do tempo e avanço no desenvolvimento da humanidade, o conhecimento científico surgiu e passou a trazer benefícios para desvendar e compreender a origem do universo. Isso passou a ocorrer a partir da existência dos filósofos que buscavam entender e explicar os fenômenos naturais e, posteriormente, dos físicos que elaboravam teorias que para serem explicadas e aceitas era necessário criar modelos, fazer observações e, se possível, realizar experimentos que corroborassem a previsão das teorias propostas.

Uma área que se consolidou com o propósito de estudar e resolver os dilemas acerca da origem do universo e sua dinâmica é a Cosmologia. Como consta em Schutz (2009):

Cosmologia é o estudo do universo como um todo: sua história, evolução, composição, dinâmica. O objetivo principal da pesquisa em cosmologia é entender a estrutura em grande escala do universo, mas a cosmologia também fornece a arena e o ponto de partida para o desenvolvimento de toda a estrutura detalhada em pequena escala que surgiu à medida que o universo se expandiu [...]. (SCHUTZ, 2009, p. 335)

A cosmologia moderna surgiu após a publicação da Teoria da Relatividade Geral (TRG) de Albert Einstein, em 1915. Em 1917, Einstein propôs o seu primeiro modelo cosmológico relativístico que tinha por características ser espacialmente homogêneo (equivalente em todos os pontos do espaço), isotrópico (pontos equivalentes em todas as direções), finito e estático (WAGA, 2005). Os modelos cosmológicos relativísticos são baseados nas soluções das equações de campo da TRG.

Com isso, com o passar do tempo, foram sendo apresentadas outras soluções para as equações de Einstein, como a de De Sitter (semelhante à de Einstein, mas com ausência de matéria), de Friedmann e de Lemaître. As soluções encontradas por Friedmann e Lemaître são as mesmas, porém apresentadas em momentos distintos – o primeiro em 1922 e o segundo em 1927 – e se diferenciam das soluções apresentadas por Einstein e por De Sitter por apresentarem a possibilidade de expansão para o universo.

Foi em 1929, por meio de estudos sobre o desvio para o vermelho (*redshift*) e velocidade de afastamento de algumas galáxias, que Hubble pôde confirmar que o universo estava em expansão, pois:

[...] dados permitiam concluir que havia um aumento sistemático da velocidade de afastamento com a distância, o que sugere a expansão do universo. Em um universo estático deveríamos esperar, estatisticamente, que houvesse tanto velocidades de afastamento como de aproximação, isto é, deveria-se medir desvios para o vermelho com valores negativos e positivos. (WAGA, 2005, p. 161)

Dessa forma, com base nas soluções de Friedmann e Lemaître e na comprovação da expansão do universo, George Gamow e seus colaboradores, buscando descrever os estágios iniciais da evolução do universo, sugeriram um modelo simples – que posteriormente ficou conhecido como Teoria do *Big Bang* – para descrever a constituição e dinâmica do universo. Embora, inicialmente, não tenha sido muito aceita pela comunidade científica, tal teoria possui corroborações observacionais que a validam e fortalecem. Estas são: a radiação cósmica de fundo e a abundância dos elementos hidrogênio e hélio – ambas previsões da teoria – (STEINER, 2006), além da própria expansão do universo.

Embora a teoria do *big bang* tenha se mostrado satisfatória em alguns aspectos, em outros, apresentava alguns problemas, entre os quais estão: o problema da planura, o problema do horizonte e o problema da densidade de energia. O primeiro está relacionado a curvatura espacial do universo. Dados observacionais mostram que desde os instantes iniciais o universo possui uma curvatura nula, o que indica que ele é espacialmente plano. Entender o motivo do universo ter seu início dessa maneira é resolver o problema da planura (WAGA, 2005). O segundo problema está relacionado ao fato de não ter havido tempo suficiente para ocorrer uma conexão

causal entre toda a radiação durante a fase do desacoplamento. Dessa forma, a radiação cósmica de fundo captada atualmente não deveria ter o padrão majoritariamente uniforme de sua temperatura, com apenas pequenas flutuações em algumas regiões do universo. Já o terceiro problema está relacionado a formação das galáxias: o que teria ocasionado uma perturbação gravitacional para que a matéria começasse a convergir e formar tais estruturas gigantescas. Estas são algumas das inconsistências entre a teoria do *big bang* e os dados observacionais que suscitam correções para a teoria.

Foi, então que, em 1982, o físico americano Alan Guth propôs uma teoria para solucionar os problemas existentes na teoria do *big bang*. A teoria proposta por ele, e aperfeiçoada por outros estudiosos como Linde e Starobinsky, foi a Teoria do *Big Bang* Inflacionário. Segundo essa teoria o universo teria passado por uma fase de expansão extraordinária, que pode ter sido causada por uma transição de fase que liberou energia latente (STEINER, 2006). Com isso, os problemas da teoria base seriam solucionados. Mas, assim como as demais teorias, esta necessitava de confirmações observacionais para validá-la. Como consta em Steiner (2006), uma destas evidências foi obtida em 1992:

A inflação propõe que as galáxias teriam sido formadas a partir de sementes geradas no período inflacionário. Flutuações quânticas correspondentes ao Princípio da Incerteza de Heisenberg, amplificadas pelo fator da inflação, teriam dado origem às galáxias. Essa ideia seria testável, pois prevê a existência de pequenas flutuações na temperatura da radiação cósmica de fundo. [...], em 1992, o satélite Cobe determinou não só que essas flutuações existem, mas que elas se comportam exatamente de acordo com o previsto pela teoria inflacionária. (STEINER, 2006, p. 244)

Dessa forma, esta teoria passou a ser considerada importante no cenário da Cosmologia moderna e continua sendo amplamente estudada atualmente, isto porque, apesar de proporcionar possibilidades de soluções interessantes, ainda necessita de evidências contundentes sobre a existência de uma era inflacionária e do que a teria causado.

Após essa breve contextualização sobre o tema deste trabalho, seguiremos para a abordagem da teoria que serve de lastro para a cosmologia moderna: A Teoria da Relatividade Geral de Albert Einstein.

2. Fundamentos da Teoria da Relatividade Restrita e da Teoria da Relatividade Geral

Como mencionado anteriormente, a Cosmologia, de um ponto de vista moderno, foi desenvolvida com base na Teoria da Relatividade Geral (TRG). Com isso, faz-se necessário dedicarmos um capítulo para abordar os principais pontos da TRG que contribuíram para desenvolver os estudos das Teorias do *Big Bang* e, posteriormente, do Período Inflacionário. Mas antes de abordarmos a TRG é necessário introduzirmos o leitor no contexto do espaço quadri-dimensional ou espaço-tempo. Para isso, iremos abordar, inicialmente, a Teoria da Relatividade Restrita (TRR), pois foi a partir desta que o espaço com 4 dimensões passou a ser implementado como sendo o palco para os eventos físicos.

2.1. Breve Resumo Sobre o Desenvolvimento da Teoria da Relatividade Especial

A Teoria da Relatividade Especial foi um grande marco na história e desenvolvimento da física moderna. Ela foi um dos pilares para solucionar problemas que a mecânica clássica e o eletromagnetismo clássico não conseguiram resolver. Tais problemas estavam relacionados ao fato das equações de Maxwell não serem invariantes mediante as transformações de Galileu, o que ocasionava discordâncias entre as previsões do eletromagnetismo e da mecânica Newtoniana no que diz respeito ao comportamento da luz quando avaliado a partir de referenciais inerciais distintos.

Muitos atribuem apenas a Einstein o seu sucesso e desenvolvimento, mas, na verdade, esta foi uma teoria desenvolvida por vários estudiosos ao longo de muitos anos. Dois estudiosos que podem ser citados e que foram fundamentais para o desenvolvimento de tal teoria são Lorentz e Poincaré. O primeiro pelo desenvolvimento das equações de transformação de um sistema de coordenadas para outro, envolvendo coordenadas espaciais e temporais, e das componentes do campo magnético e do campo elétrico; e o segundo, pelo desenvolvimento teórico sobre o movimento relativístico entre os corpos. Dessa forma, Einstein foi aquele que reuniu e sistematizou todas as informações que já haviam sido obtidas por meio dos estudos anteriores e deu sua contribuição preenchendo lacunas e resolvendo alguns

detalhes que não haviam sido solucionados pelas teorias propostas (MARTINS, 2015).

2.1.1. Postulados da Teoria da Relatividade Especial

A Teoria da Relatividade Especial se fundamenta em dois postulados que mudaram a visão clássica em relação ao estudo de corpos quando avaliados através de referenciais em movimento entre si. Como consta em Martins (2015), o primeiro postulado refere-se à invariância das leis físicas para quaisquer referenciais inerciais, ou seja, as leis da física devem ser as mesmas em qualquer referencial inercial. Já o segundo postulado trata sobre a constância da velocidade da luz e seu valor absoluto: a velocidade da luz é a mesma quando medida a partir de qualquer referencial inercial e tal velocidade não depende da velocidade da fonte emissora ou da velocidade do observador.

Um ponto a ser destacado é que a Teoria da Relatividade Especial só apresenta resultados mensuráveis quando aplicada a corpos ou referenciais que se movem com velocidades próximas a velocidade da luz. Em casos de corpos com velocidades muito inferiores à velocidade da luz, a teoria recai nas leis da mecânica clássica e o movimento passa a ser descrito de acordo com estas. É importante destacar isso, pois, devido aos postulados, há consequências observacionais relacionadas ao comportamento das coordenadas espaciais e da medida do tempo para corpos ou referenciais com velocidade próxima à velocidade da luz.

2.1.2. Duas das Consequências Observacionais: Contração do Comprimento e Dilatação do Tempo

Devido aos postulados e ao movimento relativo com velocidade próxima a velocidade da luz, a Teoria da Relatividade Especial apresenta consequências, dentre as quais podemos citar a contração do comprimento e a dilatação do tempo, que são descritas algebricamente pela equação 2.1.1 e pela equação 2.1.2, respectivamente:

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow L = \frac{L_0}{\gamma}, \quad 2.1.1$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \Delta t = \gamma \Delta t_0 . \quad 2.1.2$$

As grandezas L_0 e Δt_0 são, respectivamente, o comprimento próprio e o tempo próprio. Elas indicam que um evento está sendo estudado por um observador em repouso em relação ao evento estudado, e que está acoplado ao mesmo referencial em que o evento ocorre. Entretanto, este referencial está em movimento relativo uniforme com relação a outro referencial no qual se encontra um segundo observador acoplado e estudando os eventos em questão, para os quais mede comprimentos L e intervalos de tempo Δt . Outra grandeza que aparece nas duas equações é o chamado fator de Lorentz (γ). Este fator é obtido por meio das equações de transformação entre as coordenadas de referenciais inerciais distintos e é por meio dele que se dá a contração do comprimento e dilatação do tempo para corpos com velocidades próximas a da luz. Quando os corpos possuem velocidade baixa, esse fator tende a ser igual a 1 e as consequências observacionais não são perceptíveis. Matematicamente, o fator de Lorentz é descrito como:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \quad 2.1.3$$

A partir da equação 2.1.2 é possível perceber que o intervalo de tempo entre dois eventos quando medido pelo observador que se movimenta com velocidade próxima à da luz é maior do que o intervalo de tempo medido pelo observador em repouso, e por isso, a dilatação do tempo é justificada e o tempo deixa de ser considerado uma grandeza absoluta e passa a ser uma grandeza relativa. Da mesma forma, efeito semelhante é descrito pela equação 2.1.1, na qual se percebe que o comprimento medido pelo observador que se movimenta com velocidade próxima à da luz é menor do que o comprimento medido pelo observador em repouso. Este efeito, referido como contração do comprimento, é detectado apenas na direção do movimento entre os observadores. Dessa forma, fica explícito que as medidas de comprimento também passam a ser relativas.

Este efeito, o da relatividade de grandezas físicas quando medidas por observadores que mantêm um movimento uniforme relativo entre si, estende-se para

diversas outras grandezas! Mas será que todas as grandezas físicas analisadas a partir da Teoria da Relatividade Restrita terão esse caráter relativo? Na próxima seção veremos uma das grandezas físicas que se mantém invariante quando analisada a partir de dois referenciais inerciais distintos.

2.1.3. O Quadrado do Intervalo Espaço-temporal (ΔS^2) e o Espaço quadri-dimensional

Como vimos na seção 2.1.2, as grandezas físicas de comprimento e tempo, que eram consideradas absolutas e invariantes pela Mecânica Clássica, agora passam a ser relativas mediante a Teoria da Relatividade Restrita. Entretanto, há grandezas que permanecem sendo invariantes mesmo que estejam sendo estudadas por meio desta Teoria. Uma destas grandezas é o quadrado do intervalo de espaço-tempo:

$$\Delta s^2 = -(c\Delta t)^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 . \quad 2.1.4$$

Antes de ser evidenciada por meio da Teoria da Relatividade Restrita, um dos primeiros estudiosos a citar esta grandeza em seus trabalhos – e que também contribuiu para o desenvolvimento da TRR – foi Henri Poincaré, que a descreve como sendo um vetor com quatro componentes: 3 espaciais e 1 temporal, de modo que o quadrado deste vetor é dado pela Eq. 2.1.4. Ele fez tal descrição devido a equação ser semelhante a equação para obter o módulo de um vetor em 3 dimensões (MARTINS, 2015). Além disso, foi por meio desta grandeza que os físicos e matemáticos passaram a pensar em um espaço com quatro dimensões, ou seja, um espaço quadri-dimensional. Neste espaço, constariam as três componentes espaciais mais uma componente temporal, definida pelo produto do tempo pela velocidade da luz, e que passa a ser uma das componentes deste novo sistema de referência. Logo, para simplificar, podemos dizer que o espaço quadri-dimensional, também conhecido como espaço de Minkowski, é o espaço tridimensional (espaço Euclidiano) acrescido de uma componente temporal, também chamado de espaço-tempo.

Com a inserção do espaço-tempo no desenvolvimento de modelos para descrição de fenômenos físicos, surgiu a necessidade de se redefinir muitas das grandezas físicas para serem descritas matematicamente em quatro dimensões, isto

é, elas passaram a ser descritas pelo formalismo de quadri-vetores¹. Dois dos quadri-vetores que são importantes para o desenvolvimento das ideias discutidas neste trabalho, são: a quadri-velocidade (Eq. 2.1.5) e o quadri-momento (Eq. 2.1.6):

$$U^\mu = (c, v^1, v^2, v^3), \quad 2.1.5$$

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, p^1, p^2, p^3 \right). \quad 2.1.6$$

O formalismo de quadri-vetores não é suficiente para se descrever fenômenos no espaço-tempo. Para isto, temos de utilizar entes matemáticos mais complexos que consigam carregar em si mais informações, e de forma compacta. Para isso, faz-se uso do formalismo tensorial². Os tensores passarão a ser utilizados a partir da próxima seção deste capítulo.

A título de exemplo, descrevemos abaixo o tensor métrico conhecido como métrica de Minkowski, fundamental para descrever a geometria do espaço-tempo:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad 2.1.7$$

2.1.4. Tensor Energia-momentum-tensão

Após vermos os postulados, algumas de suas consequências e as alterações que foram necessárias para adequar as grandezas físicas ao espaço quadri-dimensional, vamos agora analisar o comportamento de um sistema físico mais complexo imerso no espaço-tempo. Esse sistema físico será um fluido ideal relativístico (pois está sendo estudado no âmbito da teoria da relatividade restrita), em que sua dinâmica só pode ser descrita com base em valores médios especificados por grandezas como densidade e pressão, por exemplo. Dessa forma, nosso objetivo

¹ Vetores que possuem quatro componentes. Cada componente associada a uma dimensão do espaço-tempo.

² Para melhor compreensão do leitor acerca desse tema recomendamos a leitura do apêndice do trabalho de Medeiros (2022) cujo link para acesso é: <http://memoria.ifrn.edu.br/handle/1044/2365>.

é determinar quais as grandezas relevantes para descrever o comportamento deste fluido relativístico.

Como um fluido é uma coleção de um grande número de partículas, uma das grandezas necessárias para descrever o seu comportamento é a densidade de número:

$$n \equiv \frac{N}{V} \equiv \frac{N}{\Delta x \Delta y \Delta z}, \quad 2.1.8$$

em que N é o número de partículas e $V = \Delta x \Delta y \Delta z$ é o volume do fluido.

Além disso, todas as partículas deste fluido estão paradas em relação às coordenadas espaciais do referencial inercial no qual se encontra, mas continua evoluindo na coordenada temporal. Como estamos estudando este sistema no âmbito da TRR, necessitamos considerar dois referenciais inerciais. O referencial descrito acima (onde o fluido se encontra) será o referencial inercial S e o referencial inercial que se move relativamente a este na horizontal para a esquerda será o S' . Com isso, vamos analisar o comportamento do fluido a partir de um observador acoplado a S' .

Para o observador em S' o fluido está com movimento relativo uniforme em relação a ele na horizontal e para a direita. Dessa forma, a componente no qual está ocorrendo o movimento (componente x) sofre uma contração e a densidade de número neste referencial pode ser descrita como:

$$n' \equiv \frac{N}{\Delta V} \equiv \frac{N}{\left(\frac{\Delta x}{\gamma}\right) \Delta y \Delta z}. \quad 2.1.9$$

Com isso, podemos definir que:

$$n' \equiv \gamma n. \quad 2.1.10$$

Dessa forma, podemos reescrever a Eq. 2.1.10 como sendo:

$$n' \equiv \frac{n}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad 2.1.11$$

Outra grandeza relevante para descrever o comportamento do fluido é o fluxo de partículas. No referencial S , o fluxo, em relação às coordenadas espaciais, é nulo, pois as partículas estão paradas. Mas com relação ao referencial S' o fluxo pode ser descrito como:

$$\Phi' \equiv \frac{N}{\Delta t' \Delta A'}. \quad 2.1.12$$

Da definição de densidade de número, podemos escrever $N = n'V'$. Aplicando a Eq. 2.1.11 nesta equação, teremos que:

$$N = \frac{n}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Delta x' \Delta y' \Delta z'. \quad 2.1.13$$

O $\Delta x'$ pode ser escrito como $\Delta x' = v^{x'} \Delta t'$. Logo, a Eq. 2.1.13 pode ser reescrita como:

$$N = \frac{n}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v \Delta t' \Delta y' \Delta z'. \quad 2.1.14$$

Aplicando a Eq. 2.1.14 na Eq. 2.1.12, teremos:

$$\Phi^{x'} = \frac{\frac{n}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v \Delta t' \Delta y' \Delta z'}{\Delta t' \Delta A'} \Rightarrow \Phi^{x'} = \frac{nv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad 2.1.15$$

A Eq. 2.1.15 representa o fluxo de partículas quando as partículas atravessam a área de forma perpendicular e que estão com movimento na direção do eixo x' do sistema de coordenadas S' , por isso temos a velocidade v do referencial S em relação ao S' . Caso o movimento de um referencial em relação ao outro ocorresse na direção do eixo y' ou z' , teríamos fluxo de partículas em relação a estes eixos, também. Com isso, se analisarmos o fluxo de partículas das partículas que atravessam a área de forma oblíqua ao eixo x' , ou y' , ou z' , teremos:

$$\Phi^{x'} = \frac{nv^x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad 2.1.16$$

$$\Phi^{y'} = \frac{nv^y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad 2.1.17$$

$$\Phi^{z'} = \frac{nv^z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad 2.1.18$$

Outra grandeza útil para descrever o comportamento do fluido no espaço-tempo é a quadri-velocidade. No referencial S , como as partículas só se movimentam na direção da coordenada temporal, a quadri-velocidade será dada por:

$$U^\mu = (c, 0, 0, 0). \quad 2.1.19$$

Já, para o referencial S' , teremos:

$$U^{\mu'} = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{v^x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{v^y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{v^z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right). \quad 2.1.20$$

Reparem que as componentes da quadri-velocidade de referencial S' se assemelham com as Equações 2.1.16, 2.1.17 e 2.1.18, diferenciando-se apenas por não terem em seus termos a densidade de número. Se multiplicarmos a Eq. 2.1.20 por n , teremos:

$$nU^{\mu'} = \left(\frac{nc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{nv^x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{nv^y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{nv^z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right), \quad 2.1.21$$

$$N^{\mu'} = \left(\frac{nc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{nv^x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{nv^y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{nv^z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right). \quad 2.1.22$$

Com isso, na Eq. 2.1.22 descrevemos o quadrifluxo ($N^{\mu'}$), que é um quadrivetor que carrega consigo informações sobre o fluxo de partículas em relação às quatro coordenadas do espaço-tempo. Então, o quadrifluxo é uma grandeza necessária para descrever o comportamento de um fluido ideal imerso no espaço quadri-dimensional. Ainda é necessário analisar mais algumas grandezas que caracterizam este fluido. Agora, vamos analisar a sua energia no referencial S . Inicialmente, iremos assumir que toda partícula do fluido possui a mesma massa de repouso (m). No contexto da TRR, a energia é dada por $E = mc^2$ (já para o referencial S' a energia é dada por $E' = m'c^2 = \gamma mc^2$). A partir disso, podemos definir a densidade de energia, que é dada por:

$$\rho = \frac{E}{V}. \quad 2.1.23$$

Para o caso do fluido relativístico, teremos:

$$\rho = \frac{Nmc^2}{V} \Rightarrow \rho = nmc^2. \quad 2.1.24$$

Para o referencial S' a densidade de energia será dada por:

$$\rho' = n'm'c^2 \Rightarrow \rho' = \frac{nc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad 2.1.25$$

$$\rho' = \frac{\rho}{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad 2.1.26$$

Na Eq. 2.1.25, podemos observar que a densidade de energia no referencial S' é dada por meio da presença de 2 fatores de Lorentz, ou seja, por meio de duas transformações entre os sistemas de referência. Com base nisso, podemos concluir que a densidade de energia se comporta como uma componente de um tensor de segunda ordem. Mas de qual tensor? Por meio da Eq. 2.1.25, vemos que o primeiro termo, à direita da igualdade, é equivalente a componente $N^{0'}$ do quadrifluxo, e que o segundo termo, à direita da igualdade, é equivalente a componente p^0 do quadrimomento. Por meio dessas informações, podemos tentar construir um tensor

de 2ª ordem através do produto tensorial entre o quadri-momento (\vec{p}) e o quadri-fluxo (\vec{N}). Dessa forma, vamos ter que:

$$T = \vec{p} \otimes \vec{N}, \quad 2.1.27$$

$$T = mn\vec{U} \otimes \vec{U}. \quad 2.1.28$$

Na Eq. 2.1.28 é apresentado o Tensor Energia-momentum-tensão, que no formalismo matricial pode ser representado por:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix}. \quad 2.1.29$$

O tensor recebe este nome devido suas componentes carregarem informações, de forma distinta, sobre a energia, momento linear e tensão do objeto estudado no espaço-tempo. A interpretação física para este ente matemático é que $T^{\mu\nu}$ significa o fluxo da componente μ do quadri-momento através da hipersuperfície de constante x^ν , que representa as coordenadas do espaço quadri-dimensional. Além disso, uma das propriedades deste tensor que merece destaque, por sua importância e pela sua utilidade nos capítulos posteriores, é que ele obedece a uma lei de conservação em que ao tomarmos a derivada parcial das suas componentes em relação às coordenadas do espaço-tempo, obtemos zero como resultado, o que indica que este ente é uma quantidade constante:

$$\frac{\partial(T^{\mu\nu})}{\partial x^\mu} = T^{\mu\nu}_{,\mu} = 0. \quad 2.1.30^3$$

Dessa forma, concluímos o estudo descritivo sobre um fluido ideal no espaço-tempo e, a partir disso, percebemos que para fazer descrições de eventos que ocorrem no espaço-tempo é necessário utilizarmos entes matemáticos mais sofisticados chamados tensores. Com o leitor já familiarizado com a ideia de espaço-

³ Os tensores são representados por uma letra maiúscula seguidos pelos seus índices subscritos ou sobrescritos. Além disso essa letra pode aparecer em negrito. Outro detalhe é que a derivada de um tensor – como aparece no termo a direita da primeira igualdade – pode ser representada como uma vírgula seguida da variável a qual está derivando.

tempo e de como são descritos fenômenos físicos que nele ocorrem, adentraremos na próxima seção aos fundamentos da TRG.

2.2. Teoria da Relatividade Geral (TRG)

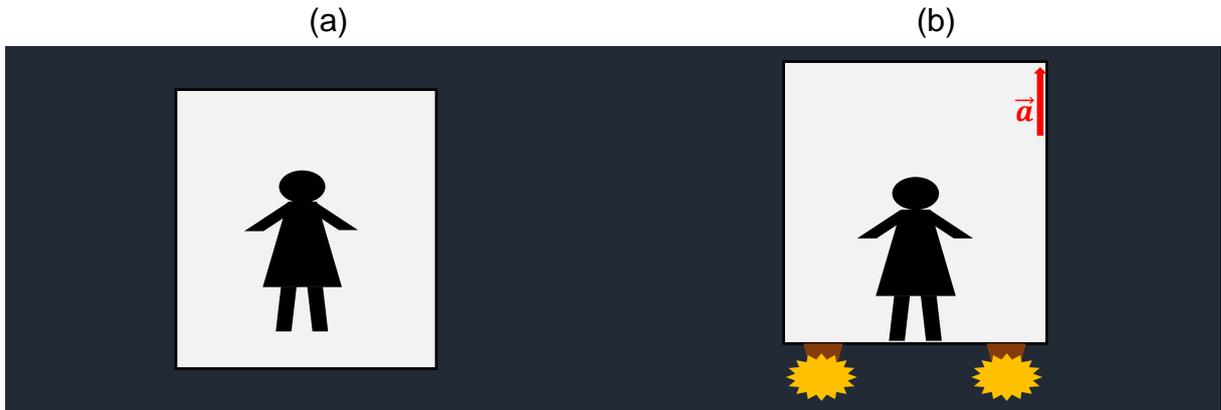
Como descrito na seção anterior, a TRR tornou-se uma solução para os problemas encontrados pela mecânica clássica quando esta tentava descrever os movimentos de corpos com velocidades próximas a velocidade da luz. Com isso, essa teoria se tornou uma generalização da mecânica clássica com a implementação do espaço-tempo e de grandezas físicas relativas. Além disso, a TRR se aplica a referenciais inerciais, isto é, referenciais que estão em movimento retilíneo uniforme – ou seja, com velocidade constante e sem aceleração. Contudo, sentiu-se a necessidade de generalizar tal teoria para referenciais não inerciais – referenciais acelerados. Dessa forma, em 1915, Einstein publica a Teoria da Relatividade Geral, sendo esta a generalização da Teoria da Relatividade Restrita para aplicação em referenciais não inerciais. Um dos pontos que contribuiu para a generalização da TRR e a origem da TRG foi o Princípio da Equivalência.

2.2.1. Princípio da Equivalência

O Princípio da Equivalência surgiu a partir de um experimento mental proposto por Einstein. Este experimento pode ser descrito da seguinte forma:

- Imagine, inicialmente, que há um observador dentro de uma cabine pequena e fechada (em que não é possível obter nenhuma informação visual do ambiente externo). Tal cabine está no espaço sideral longe de qualquer planeta ou corpo que possa exercer uma atração gravitacional sobre ela (Figura 2.2.1a). Além disso, acoplado à cabine há um propulsor que, quando acionado, imprime uma aceleração de módulo igual a aceleração do campo gravitacional terrestre com sentido para cima. Dessa forma, considerando ser possível, a cabine se moveria para cima provocando uma compressão nos pés do observador dentro da mesma, causando neste a sensação de peso (Figura 2.2.1b).

Figura 2.2.1: (a) Observador em uma cabine no espaço sideral; (b) observador em uma cabine acelerada



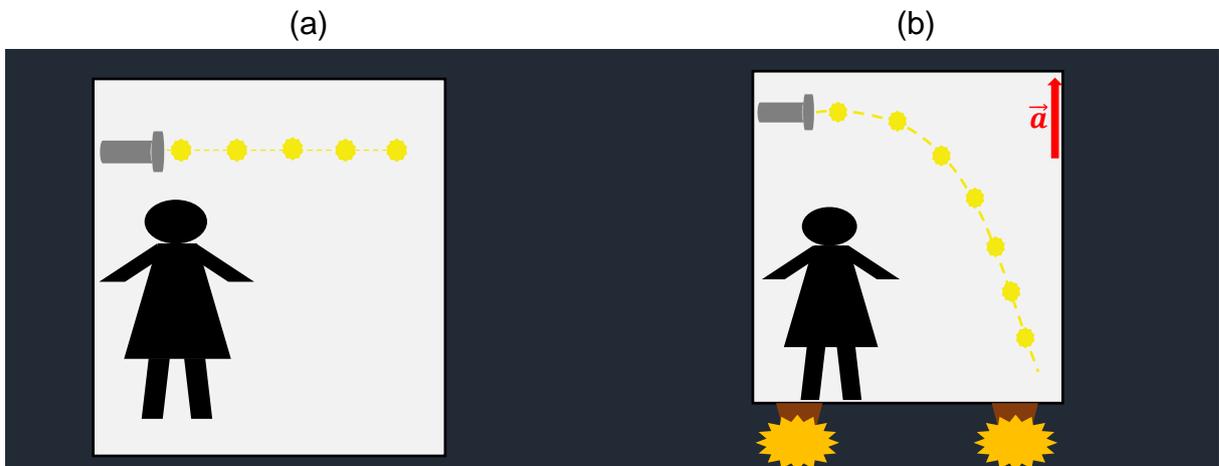
Fonte: Oliveira (2023)

- Considere, agora, a mesma cabine com o mesmo observador em seu interior, imersa no campo gravitacional terrestre. Nesta situação, o observador sente uma compressão nos seus pés proveniente da interação gravitacional que o puxa para baixo e a sensação experimentada por ele é a mesma no caso em que a cabine estivesse com uma aceleração de mesmo módulo e sentido para cima, como descrito na situação anterior.

Dessa forma, como a cabine é suficientemente pequena e não há como obter informações do ambiente externo, o observador não consegue distinguir se está sob a ação de um campo gravitacional ou se é a sua cabine que está acelerada. Logo, é possível dizer que há uma equivalência entre um referencial não-inercial e um referencial inercial que está sob a ação de um campo gravitacional. Com isso, surge o Princípio da Equivalência de Einstein e, a partir dele, foi possível generalizar a TRR para a TRG.

Além disso, outra análise pode ser feita a partir deste princípio. Consideremos a mesma situação descrita anteriormente com o acréscimo de um evento: um feixe de luz sendo disparado dentro da cabine. Quando a cabine está como ilustrada na figura 2.2.1a, ou seja, sem aceleração, o observador dentro da cabine vê o feixe de luz percorrendo uma trajetória retilínea para a direita (Figura 2.2.2a). Entretanto, quando a cabine está em um movimento acelerado, o observador percebe que o feixe de luz percorre uma trajetória parabólica em direção ao piso da cabine (Figura 2.2.2b).

Figura 2.2.2: (a) representação da trajetória de um feixe de luz disparado na cabine sem aceleração; (b) representação da trajetória de um feixe de luz disparado na cabine acelerada.



Fonte: Oliveira (2023)

Pelo Princípio da Equivalência, referenciais não inerciais são equivalentes a referenciais inerciais em um campo gravitacional e uma justificativa para a trajetória parabólica da figura 2.2.2b seria dada pela Teoria da Gravitação de Newton, em que corpos massivos se atraem mutuamente e, dessa forma, corpos que estivessem imersos em um campo gravitacional e fossem lançados horizontalmente iriam assumir tal trajetória em direção ao solo. Entretanto, os fótons que compõem o feixe de luz não possuem massa e não apresentariam efeitos da atração gravitacional. Logo, foi possível concluir que a trajetória adotada pelo feixe de luz no referencial não inercial devia-se a uma curvatura existente no próprio espaço-tempo. Essa curvatura seria causada pela distribuição de matéria – que no contexto relativístico está relacionado com a energia – de grandes corpos massivos (fontes dos campos gravitacionais) como, por exemplo, o planeta Terra. Dessa forma, além de se obter uma generalização da TRR para a TRG também foi possível obter uma nova teoria da gravitação universal.

A partir deste lastro teórico, podemos ir em busca de uma forma de relacionar a curvatura do espaço-tempo com a distribuição de energia. Todavia, para conseguirmos isso é necessário sabermos como descrever matematicamente o espaço-tempo curvado. E este será o objetivo da próxima seção.

2.2.2. Sobre Espaços com Curvatura ou Variedades

Ao se generalizar a TRR para TRG foi possível observar que uma distribuição de matéria/energia no espaço-tempo provoca uma curvatura neste. Com isso, no contexto da TRG, descrevemos este espaço-tempo como uma Variedade, cuja curvatura é descrita pelo tensor de Riemann ($R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}$):

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} \equiv \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu} \Gamma^{\sigma}_{\beta\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu} \Gamma^{\sigma}_{\beta\nu}. \quad 2.2.1$$

Em que $\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}$ (ou com outros índices acompanhando a letra grega gamma maiúscula) são os Símbolos da Conexão de Christoffel⁴. Dessa forma, o tensor de Riemann nos diz, por meio dos valores de suas componentes, se o espaço-tempo possui curvatura ou não: se uma das componentes deste tensor apresentar valor diferente de zero, então este é um indicativo de que a variedade possui curvatura.

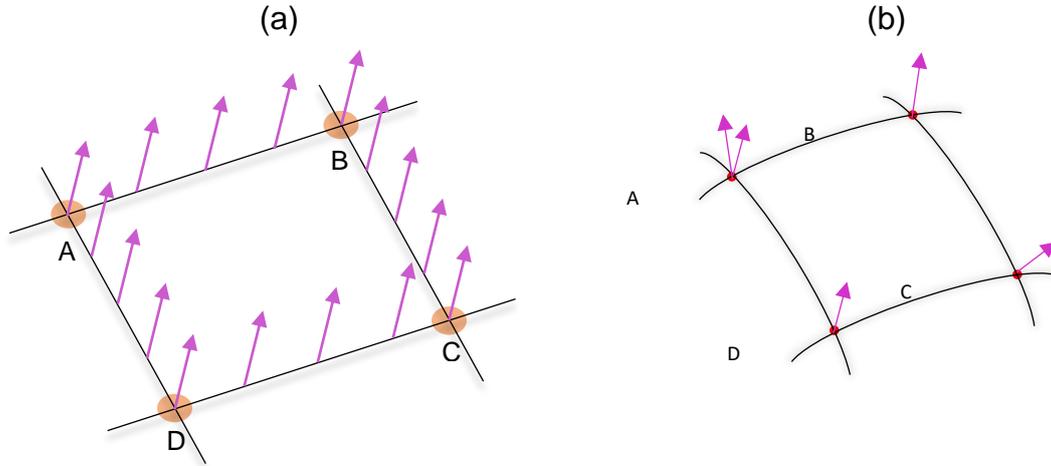
O tensor de Riemann pode ser obtido por meio da análise do transporte paralelo de um vetor ao longo de uma trajetória fechada⁵. Com isso, considere a situação em que se realiza o transporte paralelo, em *loop*, de um vetor perpendicular⁶ às curvas da trajetória fechada em um espaço plano (Figura 2.2.3a). Como pode ser visto, o vetor permanece o mesmo, ou seja, com mesmo módulo, direção e sentido do início ao fim do percurso. Agora, vamos analisar a situação em que é feito o transporte paralelo, em *loop*, em uma trajetória fechada de um vetor em um espaço dotado de curvatura (Figura 2.2.3b). A cada vértice alcançado, nota-se que o vetor sofreu variações em sua direção e se torna diferente do vetor que deu início a trajetória. Dessa forma, ao chegar ao ponto A, novamente, é possível ver a diferença entre o vetor da saída e o vetor da chegada.

⁴ Mais detalhes sobre eles podem ser vistos no trabalho de Medeiros (2022) cujo link para acesso é: <http://memoria.ifrn.edu.br/handle/1044/2365>.

⁵ Para uma demonstração detalhada do Tensor de Riemann recomendamos a leitura do capítulo 2, seção 2.3 do trabalho de Medeiros (2022) disponível em: <http://memoria.ifrn.edu.br/handle/1044/2365>.

⁶ É feita a representação com um vetor perpendicular às curvas da trajetória para uma melhor visualização do leitor. Entretanto, tais vetores devem ser tangentes às curvas da trajetória.

Figura 2.2.3: (a) Transporte paralelo de um vetor, em *loop*, em um espaço plano; (b) Transporte paralelo de um vetor, em *loop*, em uma variedade.



Fonte: Oliveira (2023)

Dessa forma, calculando a variação entre os dois vetores que estão no ponto A da Figura 2.2.3b, iremos obter:

$$\delta V^\alpha = \left[\frac{\partial \Gamma_{\beta\nu}^\alpha}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma_{\beta\mu}^\alpha}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha \Gamma_{\beta\mu}^\sigma + \Gamma_{\sigma\mu}^\alpha \Gamma_{\beta\nu}^\sigma \right] V^\beta \delta x^\mu \delta x^\nu. \quad 2.2.2$$

Em que δV^α corresponde à variação dos vetores, V^β é um vetor, δx^μ e δx^ν são as variações ao longo das curvas da trajetória, e o termo entre colchetes é o tensor de Riemann da Eq. 2.2.1. Este tensor possui algumas propriedades que estão relacionadas com a simetria e antissimetria ao realizar a permutação dos seus índices (Eqs. 2.2.3, 2.2.4, 2.2.5, 2.2.6), a sua multiplicação pela métrica covariante e contravariante (Eq. 2.2.4) e a Identidade de Bianchi em que a soma de três derivadas covariantes do tensor de Riemann é igual a zero (Eq. 2.2.8):

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = -R^\alpha_{\beta\nu\mu}, \quad 2.2.3$$

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = g^{\alpha\lambda} R_{\lambda\beta\mu\nu}, \quad 2.2.4$$

$$R_{\lambda\beta\mu\nu} = -R_{\beta\lambda\mu\nu}, \quad 2.2.5$$

$$R_{\lambda\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\lambda\beta}, \quad 2.2.6$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0, \quad 2.2.7$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} = 0. \quad 2.2.8^7$$

⁷ A notação do ponto e vírgula seguida de um índice denota a derivada covariante de um tensor

Dessa forma, encontramos o ente matemático capaz de descrever a curvatura em uma variedade. Na próxima seção buscaremos estabelecer uma relação entre a curvatura do espaço-tempo e a distribuição de matéria/energia.

2.3. A Equação de Einstein

Com o advento da TRG e do Princípio da Equivalência foi possível estabelecer uma relação entre os referenciais inerciais sob a ação de um campo gravitacional e os referenciais não inerciais, e, a partir disso, surge uma nova teoria da gravitação em que a distribuição de matéria/energia deforma o espaço-tempo, deixando-o dotado de curvatura. Com isso, sabendo que o Tensor Energia-Momentum-Tensão ($T^{\mu\nu}$) é o portador das informações referentes à distribuição de matéria/energia e que o Tensor de Riemann ($R^\alpha_{\beta\mu\nu}$) é o responsável por conter as informações sobre a curvatura da variedade, podemos buscar estabelecer uma relação entre estes dois entes matemáticos para obter uma equação que consiga descrever de que forma o espaço-tempo se comporta em torno de uma distribuição de matéria/energia. Todavia, não podemos estabelecer uma relação direta entre $T^{\mu\nu}$ e $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$ pois eles são de ordens diferentes: o primeiro é de ordem 2 e o segundo é de ordem 4. Dessa forma, é necessário reescrevermos o tensor de Riemann em termos de um tensor de ordem 2 que contenha as informações acerca da geometria da variedade. Além disso, é preciso encontrar alguma propriedade deste que permita estabelecer uma relação com alguma propriedade do tensor energia-momentum-tensão.

Uma propriedade de $T^{\mu\nu}$ que se mostra valiosa nesse propósito, é o fato deste obedecer à leis de conservação, como mencionado na equação 2.1.30. Ao utilizarmos este tensor no contexto de uma variedade, devemos generalizar tal propriedade para expressá-la em termos de uma derivada covariante:

$$T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0. \quad 2.3.1$$

Para obtermos o tensor de ordem 2 que contenha as informações da geometria do espaço-tempo iremos manipular algebricamente o Tensor de Riemann. Para isso,

multiplicaremos a sua forma covariante ($R_{\alpha\beta\mu\nu}$) pela métrica contravariante ($g^{\alpha\mu}$) em que iremos obter:

$$g^{\alpha\mu}R_{\alpha\beta\mu\nu} = R^{\mu}_{\beta\mu\nu}. \quad 2.3.2$$

Podemos realizar a contração⁸ do tensor obtido na Eq. 2.3.2, o que irá reduzi-lo para um tensor de ordem 2, e dessa forma:

$$R^{\mu}_{\beta\mu\nu} = R_{\beta\nu}. \quad 2.3.3$$

Em que $R_{\beta\nu}$ é o Tensor de Ricci – um tensor de ordem 2 que contém as informações da geometria da variedade. Um outro tensor que se mostra útil é obtido se multiplicarmos o Tensor de Ricci pela métrica contravariante $g^{\beta\nu}$, chamado de escalar de Ricci (R):

$$g^{\beta\nu}R_{\beta\nu} = R^{\nu}_{\nu} = R. \quad 2.3.4$$

Com os passos anteriores conseguimos encontrar o tensor de ordem 2 que contém as informações da geometria do espaço-tempo e, também, o escalar de curvatura. Para se estabelecer uma conexão com o tensor energia-momento-tensão, o caminho mais intuitivo seria verificar se a derivada covariante do tensor de Ricci é nula. Para isso, consideraremos algumas manipulações algébricas na Identidade de Bianchi (Eq. 2.2.8). Inicialmente, multiplicaremos a Eq. 2.2.8 por $g^{\alpha\mu}$ para obtermos:

$$g^{\alpha\mu}(R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu}) = 0, \quad 2.3.5$$

$$R^{\mu}_{\beta\mu\nu;\lambda} + R^{\mu}_{\beta\lambda\mu;\nu} + R^{\mu}_{\beta\nu\lambda;\mu} = 0. \quad 2.3.6$$

Realizando a permutação do terceiro e quarto índice do segundo termo da soma – lembrando da propriedade antissimétrica da permutação entre esses dois índices – da Eq. 2.3.6 e, em seguida, realizando as contrações possíveis, teremos:

⁸ Para o caso do Tensor de Riemann essa contração só é possível de ser realizada entre o primeiro e o terceiro índice, devido a uma relação de antissimetria deste tensor.

$$R^\mu_{\beta\mu\nu;\lambda} + R^\mu_{\beta\mu\lambda;\nu} + R^\mu_{\beta\nu\lambda;\mu} = 0, \quad 2.3.7$$

$$R_{\beta\nu;\lambda} - R_{\beta\lambda;\nu} + R^\mu_{\beta\nu\lambda;\mu} = 0. \quad 2.3.8$$

Multiplicando a Eq. 2.3.8 pela métrica $g^{\beta\nu}$, vamos obter:

$$g^{\beta\nu} (R_{\beta\nu;\lambda} - R_{\beta\lambda;\nu} + R^\mu_{\beta\nu\lambda;\mu}) = 0, \quad 2.3.9$$

$$R^\nu_{\nu;\lambda} - R^\nu_{\lambda;\nu} + R^{\mu\nu}_{\nu\lambda;\mu} = 0. \quad 2.3.10$$

Realizando a permutação entre o primeiro e o segundo índice do terceiro termo da Eq. 2.3.10 e as contrações possíveis, teremos:

$$R^\nu_{\nu;\lambda} - R^\nu_{\lambda;\nu} - R^{\nu\mu}_{\nu\lambda;\mu} = 0, \quad 2.3.11$$

$$R_{;\lambda} - R^\nu_{\lambda;\nu} - R^\mu_{\lambda;\mu} = 0. \quad 2.3.12$$

Como o índice ν que aparece no segundo termo da Eq. 2.3.12 é repetido e está indicando a somatória, podemos substituí-lo por μ . Com isso:

$$R_{;\lambda} - R^\mu_{\lambda;\mu} - R^\mu_{\lambda;\mu} = 0, \quad 2.3.13$$

$$R_{;\lambda} - 2R^\mu_{\lambda;\mu} = 0. \quad 2.3.14$$

Dividindo a Eq. 2.3.14 por (-2) , iremos obter:

$$R^\mu_{\lambda;\mu} - \frac{1}{2}R_{;\lambda} = 0. \quad 2.3.15$$

Multiplicando o segundo termo da Eq. 2.3.15 por g^μ_λ ⁹ podemos escrever:

$$R^\mu_{\lambda;\mu} - \frac{1}{2}g^\mu_\lambda R_{;\mu} = 0. \quad 2.3.16$$

⁹ Este é o Delta de Kronecker. Este ente matemático possui dois valores possíveis: 1 quando $\mu = \lambda$ e 0 quando $\mu \neq \lambda$. Além disso, ele também tem a capacidade de trocar o índice, que seja igual ao seu, pelo outro.

Para trabalharmos com os tensores contravariantes iremos multiplicar a Eq. 2.3.16 por $g^{\nu\lambda}$ e, em seguida, colocaremos a derivada covariante em evidência. Com isso:

$$g^{\nu\lambda} \left(R^{\mu}_{\lambda;\mu} - \frac{1}{2} g^{\mu}_{\lambda} R_{;\mu} \right) = 0, \quad 2.3.17$$

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right)_{;\mu} = 0. \quad 2.3.18$$

Com isto, vemos que não é a derivada do tensor de Ricci que é nula, mas todo o termo entre parênteses da Eq. 2.3.18. Por conveniências, definimos tal termo como Tensor de Einstein ($G^{\mu\nu}$). Dessa forma, podemos escrever:

$$G^{\mu\nu}_{;\mu} = 0. \quad 2.3.19$$

Logo, encontramos o tensor de ordem 2 e que, assim como o Tensor Energia-Momentum-Tensão, tem a sua derivada covariante igual a zero. Portanto, a relação entre matéria/energia e a curvatura do espaço-tempo pode se dar por meio de:

$$G^{\mu\nu} \propto T^{\mu\nu}, \quad 2.3.20$$

$$G^{\mu\nu} = k T^{\mu\nu}. \quad 2.3.21$$

Em que k é uma constante de proporcionalidade igual a $\frac{8\pi G}{c^4}$. Dessa forma, a Eq. 2.3.21 pode ser escrita na forma explícita:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}. \quad 2.3.22$$

Esta é a Equação de Einstein para a TRG. É por meio dela que conseguimos obter as informações de como a geometria do espaço-tempo é afetada pela distribuição de matéria/energia.

É importante mencionar que esta equação pode ser apresentada de formas ligeiramente diferentes a partir de convenções associadas às unidades de medidas

das constantes nelas presentes. Em alguns contextos toma-se $G = 1$, em outros $c = 1$. No contexto de aplicações voltadas para Cosmologia, encontra-se mais frequentemente a equação escrita com $c = 1$, de modo que, denotamos:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = 8\pi G T^{\mu\nu} . \quad 2.3.23$$

Outro adendo importante sobre a equação de Einstein, é que ela pode também ser encontrada com a adição de outro termo, conhecido como constante cosmológica (Λ):

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R + \Lambda g^{\mu\nu} = 8\pi G T^{\mu\nu} . \quad 2.3.24$$

Este termo foi sugerido por Einstein para que, quando aplicada com um fim de obter uma solução que descrevesse um universo estático no contexto da cosmologia, desempenhasse a função análoga a de um fluido com pressão negativa, para equilibrar o efeito gravitacional proveniente da matéria e radiação.

Com isso, chegamos ao fim deste capítulo. No próximo capítulo, daremos início ao estudo sobre Cosmologia e a dinâmica do universo.

3. A Cosmologia Relativística

Após fornecer base para o leitor sobre as Teorias da Relatividade, podemos adentrar no estudo da Cosmologia. Esta passou a ter destaque a partir do advento da Teoria Relatividade Geral e é responsável pelo estudo da dinâmica da estrutura de larga escala¹⁰ do universo. Além disso, a Cosmologia é fundamentada em três pressupostos: a TRG, o Princípio Cosmológico e o Postulado de Weyl. O Princípio Cosmológico se refere a existência de um tempo cosmológico t (correspondente ao tempo próprio de observadores que veem o universo isotropicamente), tal que $t = \text{constante}$ corresponde à hipersuperfícies (espaços tridimensionais) homogêneas e isotrópicas. Por hipersuperfícies homogêneas entende-se como sendo espaços na qual a métrica é invariante por translação; e por hipersuperfícies isotrópicas entendem-se espaços em que a métrica é invariante por rotação, em cada ponto do espaço. Já o Postulado de Weyl diz que o espaço-tempo é permeado por um substrato e que as galáxias se movem nesse espaço-tempo como se fossem partículas. Tal postulado requer que as geodésicas do substrato sejam ortogonais a uma família de hipersuperfícies do tipo espaço.

A partir destes pressupostos, podemos iniciar a busca pelas grandezas que serão úteis para determinar a dinâmica da estrutura em larga escala do universo. A primeira delas será a métrica das hipersuperfícies espaciais nas quais o tempo é constante.

3.1. A Métrica das Hipersuperfícies em que $t = \text{constante}$

Podemos escrever a métrica da hipersuperfície como sendo:

$$dl^2 = \gamma dx^i dx^j . \quad 3.1.1$$

Com $i = 1, 2, 3$; e $j = 1, 2, 3$.

Para determinar a métrica do espaço em que o tempo é constante, precisaremos fazer algumas considerações sobre espaços maximalmente simétricos. Tal espaço é aquele que possui o número máximo de vetores de Killing linearmente

¹⁰ Por larga escala entende-se ser uma escala maior que 100 Mpc , em que $1 \text{ pc} \cong 3,26 \text{ anos} - \text{luz} \cong 3 \times 10^{13} \text{ km}$.

independentes. Dessa forma, sabe-se que o espaço tridimensional, homogêneo e isotrópico possui 6 vetores de Killing linearmente independentes e, com isso, este espaço é um espaço com máxima simetria (D'INVERNO, 1992).

$${}^{(3)}R_{ijkl} = K(\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}). \quad 3.1.2$$

Onde K é chamado de constante de curvatura. Tais espaços também são chamados de espaços de curvatura constante.

Como o espaço é homogêneo, é possível escolher um ponto qualquer para servir de origem do sistema de coordenadas. Além do mais, em consequência da isotropia, sabe-se que a métrica possui simetria esférica em torno deste ponto. Dessa forma, podemos utilizar um sistema de coordenadas adaptado à simetria em que a métrica pode ser escrita como:

$$dl^2 = e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad 3.1.3$$

Considerando esta métrica, segundo Silva (2018), podemos calcular as componentes do tensor de Ricci, dadas por:

$$R_{11} = \frac{\lambda'}{r} = \frac{1}{r} \frac{d\lambda}{dr}. \quad 3.1.4$$

$$R_{22} = 1 + \frac{1}{2} r e^{-\lambda} \lambda' - e^{-\lambda}. \quad 3.1.5$$

$$R_{33} = \sin^2 \theta R_{22}. \quad 3.1.6$$

Por outro lado, sabemos que num espaço de curvatura constante a Eq. 3.1.2 é satisfeita. Com isso, temos:

$${}^{(3)}R^i_{jkl} = K(\gamma^i_k \gamma_{jl} - \gamma^i_l \gamma_{jk}). \quad 3.1.7$$

Contraindo-se o 1° e o 3° índices da Eq. 3.1.7 iremos obter o tensor de Ricci:

$$R_{jl} = K(3\gamma_{jl} - \gamma_{jl}) = 2K\gamma_{jl}. \quad 3.1.8$$

Ao calcularmos as componentes 1,1 e 2,2 do tensor de Ricci, teremos:

$$R_{11} = 2K\gamma_{11} = 2Ke^{\lambda(r)}. \quad 3.1.9$$

$$R_{22} = 2K\gamma_{22} = 2Kr^2. \quad 3.1.10$$

Agora, ao compararmos as Eqs. 3.1.9 e 3.1.10 com as Eqs. 3.1.4 e 3.1.5, respectivamente, vamos ter que:

$$2Ke^{\lambda(r)} = \frac{\lambda'}{r}. \quad 3.1.11$$

$$2Kr^2 = 1 + \frac{1}{2}re^{-\lambda}\lambda' - e^{-\lambda(r)}. \quad 3.1.12$$

Resolvendo a Eq. 3.1.11:

$$2Ke^{\lambda(r)} = \frac{\lambda'}{r}$$

$$\lambda'e^{-\lambda(r)} = 2Kr$$

$$\frac{d}{dr}(e^{-\lambda(r)}) = -2Kr \quad 3.1.13$$

$$e^{-\lambda(r)} = -Kr^2 + A.$$

Substituindo a Eq. 3.1.13 na Eq. 3.1.12:

$$2Kr^2 = 1 + \frac{r}{2}[2Kr] - (-Kr^2 + A)$$

$$2Kr^2 = 1 + Kr^2 + Kr^2 - A$$

$$2Kr^2 = 1 + 2Kr^2 - A \quad 3.1.14$$

$$A = 1.$$

Com isso, temos que:

$$e^{-\lambda(r)} = -Kr^2 + 1 = 1 - Kr^2$$

$$e^{\lambda(r)} = \frac{1}{1 - Kr^2}. \quad 3.1.15$$

Dessa forma, a métrica de um espaço tridimensional homogêneo e isotrópico é:

$$dl^2 = \left(\frac{1}{1 - Kr^2} \right) dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2). \quad 3.1.16$$

Após termos obtido esta métrica, vamos, agora, reescrevê-la em outro sistema de coordenadas. Para isso, vamos utilizar as seguintes transformações:

$$r' = |K|^{\frac{1}{2}} r. \quad 3.1.17$$

$$dr' = |K|^{\frac{1}{2}} dr. \quad 3.1.18$$

Tais transformações valem para $K \neq 0$.

Aplicando estas transformações na Eq. 3.1.16, vamos ter:

$$dl^2 = \frac{\frac{dr'^2}{|K|}}{1 - \frac{K}{|K|} r'^2} + \frac{r'^2}{|K|} (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2). \quad 3.1.19$$

Para simplificar a Eq. 3.1.19 podemos levar em consideração que:

$$\kappa = \frac{K}{|K|} = \begin{cases} +1 & K > 0 \\ -1 & K < 0 \end{cases}. \quad 3.1.20$$

Aplicando a Eq. 3.1.20 em 3.1.19 e reorganizando os termos, teremos:

$$dl^2 = \frac{1}{|K|} \left(\frac{1}{1 - \kappa r'^2} dr'^2 + r'^2(d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2) \right). \quad 3.1.21$$

Agora, fazendo a mudança de notação $r' \rightarrow r$, podemos escrever:

$$dl^2 = \begin{cases} \frac{1}{|K|} \left(\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2) \right) & \kappa \neq 0 \\ \frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2) & \kappa = 0 \end{cases}. \quad 3.1.22$$

Logo, a Eq. 3.1.22 mostra a métrica de um espaço tridimensional homogêneo e isotrópico escrita em termos de κ , que assume valores de $+1, 0, -1$.

A partir da obtenção da métrica do espaço tridimensional, homogêneo e isotrópico, podemos obter a métrica do espaço-tempo. Para isso, levaremos em consideração as coordenadas co-móveis e o Postulado de Weyl. Como tal postulado requer que as geodésicas do substrato sejam ortogonais a uma família de hipersuperfícies do tipo espaço, as coordenadas (x^0, x^1, x^2, x^3) são introduzidas de modo que as hipersuperfícies do tipo espaço são dadas por $x^0 = t = constante$ e as coordenadas (x^1, x^2, x^3) são constantes ao longo das geodésicas e, por isso, tais coordenadas são chamadas de co-móveis. Por outro lado, a condição de ortogonalidade significa que t pode ser escolhido de modo que o elemento de linha é da forma:

$$ds^2 = -dt^2 + h_{ij}dx^i dx^j . \quad 3.1.23$$

Onde $i = 1 \dots 3$ e $j = 1 \dots 3$ e $h_{ij} = h_{ij}(t, x)$.

Além disso, como o princípio cosmológico requer que o espaço tridimensional seja homogêneo e isotrópico, e considerando que o fator de ampliação deve ser independente de onde ocorre na hipersuperfície, então o tempo só pode entrar em h_{ij} através de um fator comum de modo que as proporções das correspondentes distâncias para pequenos deslocamentos possam ser as mesmas em todos os instantes. Logo, a dependência temporal de h_{ij} tem que ser da forma:

$$h_{ij} = [S(t)]^2 \gamma_{ij}(x^i) . \quad 3.1.24$$

Deste modo, podemos escrever o elemento de linha do espaço-tempo nas coordenadas co-móveis como sendo:

$$ds^2 = -dt^2 + [S(t)]^2 \gamma_{ij} dx^i dx^j \quad 3.1.25$$

$$ds^2 = -dt^2 + S^2(t) dl^2 .$$

Como dl é o elemento de linha do espaço tridimensional homogêneo e isotrópico, podemos reescrever a Eq. 3.1.25 como:

$$ds^2 = -dt^2 + S^2(t) \begin{cases} \frac{1}{|K|} \left(\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2) \right) & \kappa \neq 0 \\ \frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2) & \kappa = 0 \end{cases} . \quad 3.1.26$$

Da Eq. 3.1.26 podemos definir que:

$$a(t) = \begin{cases} \frac{S(t)}{|K|^{\frac{1}{2}}} & \kappa \neq 0 \\ S(t) & \kappa = 0 \end{cases} . \quad 3.1.27$$

Com isso, podemos escrever:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi) \right]. \quad 3.1.28$$

Em que $a(t)$ é chamado de Fator de Escala e κ é a constante de curvatura que pode assumir os valores -1 , 0 ou $+1$.

Este elemento de linha é uma consequência do princípio cosmológico e define a chamada Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) e ela será fundamental para determinarmos qual a dinâmica do universo.

3.2. Dinâmica do Universo

Na seção anterior vimos quais os três pressupostos em que a Cosmologia Relativística se baseia, vimos qual a métrica do espaço tridimensional homogêneo e isotrópico e chegamos à métrica FLRW, que possui o fator $a(t)$, que será útil para determinar a dinâmica do universo. Tal relevância se dá pelo fato deste fator multiplicar todos os termos espaciais da métrica, e com isto, influenciar justamente em como a parte espacial do universo evolui com relação ao tempo. Neste caso, a determinação deste fator de escala se torna essencial.

Para determiná-lo, será necessário utilizarmos a métrica FLRW juntamente com a equação de Einstein. Iniciemos este processo multiplicando a Equação de Einstein pela métrica inversa:

$$g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}R = 8\pi G g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} . \quad 3.2.1$$

Com isso, teremos:

$$R^\mu{}_\mu - 2R = 8\pi G T^\mu{}_\mu \Rightarrow R - 2R = 8\pi G T . \quad 3.2.2$$

$$R = -8\pi G T . \quad 3.2.3$$

Substituindo a Eq. 3.2.3 na equação de Einstein, teremos:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(-8\pi G T) = 8\pi G T_{\mu\nu} \Rightarrow R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(8\pi G T) = 8\pi G T_{\mu\nu} . \quad 3.2.4$$

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right) . \quad 3.2.5$$

O traço do Tensor Energia-momentum-tensão, que aparece na Eq. 3.2.5, pode ser obtido a partir de manipulações algébricas na sua forma covariante dada pela Equação:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + p g_{\mu\nu} . \quad 3.2.6$$

Ao multiplicarmos a Eq. 3.2.6 por $g^{\mu\sigma}$, obtemos:

$$\begin{aligned} g^{\mu\sigma}T_{\sigma\nu} &= g^{\mu\sigma}[(\rho + p)U_\sigma U_\nu + p g_{\sigma\nu}] \Rightarrow \\ &\Rightarrow T^\mu{}_\nu = (\rho + p)U^\mu U_\nu + p \delta^\mu{}_\nu . \end{aligned} \quad 3.2.7$$

Escrevendo a Eq. 3.2.7 em sua forma matricial, teremos:

$$\begin{aligned} T^\mu{}_\nu &= \begin{pmatrix} -(\rho + p) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow T^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad 3.2.8$$

Em que, para o caso em que $\mu = \nu$, o traço T é dado por:

$$T^\mu{}_\mu = T = -\rho + 3p . \quad 3.2.9$$

Fazendo uso da Métrica FLRW sabemos que as únicas componentes não nulas do Tensor de Ricci, dado pela Eq. 3.2.5, são:

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} , \quad 3.2.10$$

$$R_{ii} = \frac{g_{ii}}{a^2} (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\kappa). \quad 3.2.11$$

Em que $i = 1, 2, 3$.¹¹

Para o caso em que temos R_{00} , podemos reescrever a Eq. 3.2.5 da seguinte forma:

$$R_{00} = 8\pi G \left(T_{00} - \frac{1}{2} g_{00} T \right). \quad 3.2.12$$

Igualando a Eq. 3.2.10 à Eq. 3.2.12, teremos:

$$\begin{aligned} -3\frac{\ddot{a}}{a} &= 8\pi G \left(T_{00} - \frac{1}{2} g_{00} T \right) \Rightarrow \\ -3\frac{\ddot{a}}{a} &= 8\pi G \left(\rho + \frac{1}{2} (-\rho + 3p) \right) \Rightarrow \\ -3\frac{\ddot{a}}{a} &= \frac{8\pi G}{2} (\rho + 3p) \Rightarrow \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p). \end{aligned} \quad 3.2.13$$

De forma análoga, vamos igualar a Eq. 3.2.11 à equação 3.2.5 em que $\mu = \nu = i$ para obtermos:

$$R_{ii} = \frac{g_{ii}}{a^2} (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\kappa) = 8\pi G \left(T_{ii} - \frac{1}{2} g_{ii} T \right). \quad 3.2.14$$

Sabemos que $T_{ii} = g_{ii}p$ e, dessa forma, podemos reescrever a Eq. 3.2.14 da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \frac{g_{ii}}{a^2} (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\kappa) &= 8\pi G \left(g_{ii}p - \frac{1}{2} g_{ii} T \right) \Rightarrow \\ \frac{\ddot{a}}{a} + 2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{2\kappa}{a^2} &= 8\pi G \left(\frac{\rho}{2} - \frac{p}{2} \right) \Rightarrow \\ \frac{\ddot{a}}{a} + 2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{2\kappa}{a^2} &= 4\pi G (\rho - p). \end{aligned} \quad 3.2.15$$

Substituindo o resultado obtido na Eq. 3.2.13 na Eq. 3.2.15, teremos:

¹¹ Para abrir a soma com os índices, inicialmente selecionamos um valor para o primeiro índice e em seguida vamos variando o valor do segundo índice, um por vez, de acordo com os valores da somatória. Por exemplo, abrindo a soma com o primeiro índice sendo igual a 1, teremos R_{11} , R_{12} e R_{13} .

$$\begin{aligned}
-\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{2\kappa}{a^2} &= 4\pi G(\rho - p) \Rightarrow \\
2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{2\kappa}{a^2} &= 4\pi G\left(\rho - p + \frac{\rho}{3} + p\right) \Rightarrow \\
2\left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\kappa}{a^2}\right] &= 4\pi G\left(\frac{4}{3}\rho\right) \Rightarrow \tag{3.2.16} \\
\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\kappa}{a^2} &= \frac{8\pi G}{3}\rho \Rightarrow \\
\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\kappa}{a^2}.
\end{aligned}$$

A Eq. 3.2.16 é a Equação de Friedmann. Ela, uma vez resolvida, nos permite descrever a evolução do fator de escala $a(t)$.

Após termos conhecido a Equação de Friedmann, faz-se necessário resolvê-la para termos mais informações acerca da dinâmica do universo. Para isso, precisamos compreender como a densidade de energia se comporta com relação ao fator de escala. É possível mostrar que a partir da equação de conservação do Tensor energia-momentum-tensão ($T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0$), podemos obter a relação desejada (CARROLL, 2003):

$$\begin{aligned}
0 = T^{0\mu}_{;\mu} &= \frac{\partial T^{0\mu}}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\nu}^0 T^{\nu\mu} + \Gamma_{\mu\nu}^\mu T^{0\nu}, \\
0 = T^{00}_{;0} &= \frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \Gamma_{ij}^0 T^{ij} + \Gamma_{i0}^i T^{00},
\end{aligned}$$

e, portanto:

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p). \tag{3.2.17}$$

Além disso, vamos considerar que as três principais fontes de energia do universo se comportam como fluidos perfeitos, e que por isto, possuem propriedades descritas a partir de equações de estado; sendo tais constituintes: matéria, radiação e a constante cosmológica. Deste modo, para cada uma destas fontes, podemos denotar suas equações de estado $p = p(\rho)$, por:

$$p = \omega\rho. \tag{3.2.18}$$

Em que ω é uma constante para cada tipo de fluido (CARROLL, 2003):

- Matéria: $\omega = 0 \Rightarrow p = 0$;
- Radiação Eletromagnética: $\omega = \frac{1}{3} \Rightarrow p = \frac{1}{3}\rho$;
- Constante Cosmológica: $\omega = -1 \Rightarrow p = -\rho$.

Dessa forma, podemos reescrever a Eq. 3.2.17 como sendo:

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + \omega\rho). \quad 3.2.19$$

E realizando algumas manipulações algébricas na Eq. 3.2.19, teremos:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(1 + \omega). \quad 3.2.20$$

Integrando a Eq. 3.2.20 em um intervalo de t_0 à t , teremos:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \frac{\dot{\rho}}{\rho} dt &= -3(1 + \omega) \int_{t_0}^t \frac{\dot{a}}{a} dt \Rightarrow \\ \int_{t_0}^t \frac{d\rho}{\rho} &= -3(1 + \omega) \int_{t_0}^t \frac{da}{a} \Rightarrow \\ \ln\left(\frac{\rho(t)}{\rho_0}\right) &= -3(1 + \omega) \ln\left(\frac{a(t)}{a_0}\right). \end{aligned} \quad 3.2.21$$

Considerando que t_0 corresponde ao tempo atual e que $a_0 = 1$, temos que:

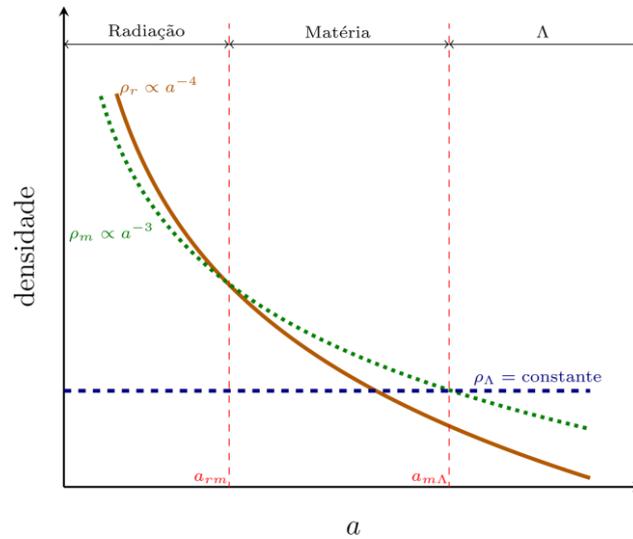
$$\rho(t) = \rho_0 a^{-3(1+\omega)}. \quad 3.2.22$$

Na Eq. 3.2.22 fica evidente que a densidade de energia varia de acordo com o fator de escala e, também, de acordo com cada tipo de fluido:

- Para a matéria: $\omega = 0 \Rightarrow \rho_M(t) = \frac{\rho_{0M}}{a^3}$;
- Para a radiação: $\omega = \frac{1}{3} \Rightarrow \rho_R(t) = \frac{\rho_{0R}}{a^4}$;
- Para a constante cosmológica (Λ): $\omega = -1 \Rightarrow \rho_\Lambda(t) = \rho_{0\Lambda} = \frac{\Lambda}{8\pi G}$.

A partir disso, é possível plotar um gráfico da densidade de energia de cada tipo de fonte em relação ao fator de escala, como pode ser visto na Figura 3.1.1 a seguir:

Figura 3.1.1: Gráfico das densidades de energia em relação ao fator de escala



Fonte: Aderaldo e Gonçalves (2020)

Com isso, podemos concluir que a evolução do universo se deu em três eras distintas: a dominada pela radiação (1ª parte do gráfico), a dominada pela matéria (2ª parte do gráfico) e a dominada pela constante cosmológica (3ª parte do gráfico).

Para a solução da equação de Friedmann é necessário considerar as três fontes de energia e, com isso, a densidade de energia que aparece na equação deve ser escrita como:

$$\rho = \rho_M + \rho_R + \rho_\Lambda . \quad 3.2.23$$

Aplicando a Eq. 3.2.23 na Eq. 3.2.16 vamos ter:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3}(\rho_M + \rho_R + \rho_\Lambda) - \frac{\kappa}{a^2} \Rightarrow \\ & \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\rho_{0M}}{a^3} + \frac{\rho_{0R}}{a^4} + \frac{\Lambda}{8\pi G} \right) - \frac{\kappa}{a^2} . \end{aligned} \quad 3.2.24$$

Se considerarmos a curvatura κ como sendo uma fonte de energia também, teremos:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\rho_{0M}}{a^3} + \frac{\rho_{0R}}{a^4} + \frac{\Lambda}{8\pi G} - \frac{3\kappa}{8\pi G a^2} \right) . \quad 3.2.25$$

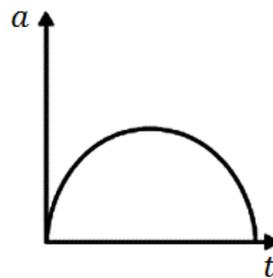
Ou ainda:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\Lambda}{3} + \frac{8\pi G \rho_{0M}}{3 a^3} + \frac{8\pi G \rho_{0R}}{3 a^4} - \frac{\kappa}{a^2}. \quad 3.2.26$$

Logo, as soluções fornecidas pela equação de Friedmann dependerão dos valores assumidos pela constante de curvatura κ (que pode assumir os valores -1 ou 0 ou 1) e pela constante cosmológica Λ (que pode ser $\Lambda < 0$ ou $\Lambda = 0$ ou $\Lambda > 0$). A seguir são abordados, superficialmente, os modelos resultantes para cada valor assumido por κ e Λ :

I. Modelos para $\Lambda < 0$ (Figura 3.1.2)

Figura 3.1.2: Modelo Oscilante



Fonte: Silva (2011)

O modelo para $\Lambda < 0$ será o mesmo independentemente do valor de κ . Ele é o modelo chamado de Modelo Oscilante em que a força cosmológica é atrativa e eventualmente faz parar a expansão e força o modelo a colapsar ocasionando um evento apocalíptico chamado *Big Crunch*.

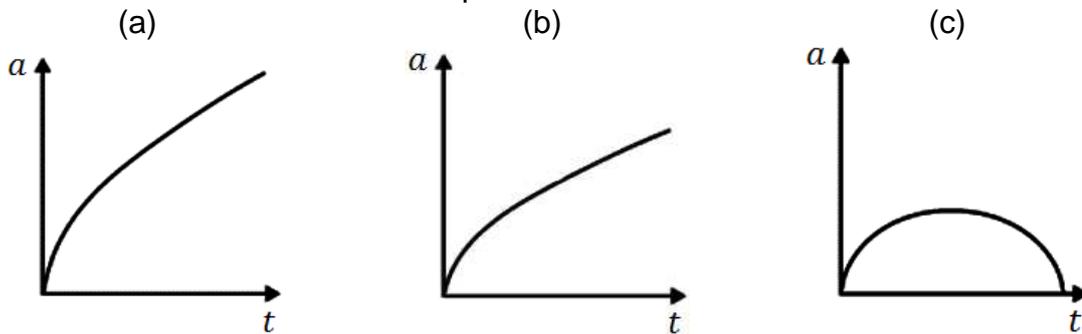
II. Modelos para $\Lambda = 0$

Temos três modelos para o caso de $\Lambda = 0$:

- Para o valor de $\kappa = -1$, temos o modelo que se expande indefinidamente sem “*Kink*”¹² (Figura 3.1.3(a)).
- Para o valor de $\kappa = 0$, temos o modelo que corresponde ao modelo de Einstein-De Sitter, em que $a \propto t^{\frac{2}{3}}$ (Figura 3.1.3(b)).
- Para o valor de $\kappa = 1$, temos o modelo oscilante (Figura 3.1.3(c)).

¹² A curva do gráfico que apresenta um movimento de crescimento de forma acelerada, sofre uma desaceleração momentânea e, posteriormente, volta a crescer de forma acelerada novamente.

Figura 3.1.3: (a) Modelo para $\Lambda = 0$ e $\kappa = -1$; (b) Modelo para $\Lambda = 0$ e $\kappa = 0$; (c) Modelo para $\Lambda = 0$ e $\kappa = 1$.

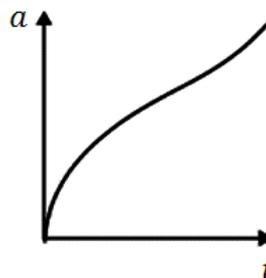


Fonte: Silva (2011)

III. Modelos para $\Lambda > 0$

Para $\kappa = -1$ e $\kappa = 0$ temos o modelo que se expande indefinidamente, mas possui um “*kink*” em que a taxa de expansão diminui por um período e depois volta a crescer, e assintoticamente se aproxima de $e^{(\frac{1}{3}\Lambda)^{1/2} t}$ (Figura 3.1.4).

Figura 3.1.4: Modelo para $\Lambda > 0$ com $\kappa = -1$ e $\kappa = 0$.



Fonte: Silva (2011)

Para $\kappa = 1$ há mais possibilidades que uma, pois existe um valor crítico positivo da constante cosmológica (Λ_c) associado a um valor crítico do fator de escala (a_c). Com isso, teremos:

- Para $\Lambda > \Lambda_c$ o modelo é chamado de Modelo de Lemaître e é equivalente ao modelo que se expande indefinidamente com um “*kink*” mais pronunciado (Figura 3.1.5(a)).
- Para $\Lambda = \Lambda_c$ existem três subcasos que dependem do valor da constante de integração (Figura 3.1.5(b)): o Modelo Estático de Einstein no qual a atração gravitacional é exatamente contrabalanceada pela repulsão cósmica; o Modelo de *Big-Bang* que assintoticamente se

aproxima do modelo estático de Einstein; o Modelo de Eddington-Lemaître no qual voltando no eixo do tempo ele tende ao modelo estático de Einstein, e indo no sentido de crescimento do eixo do tempo ele se expande assintoticamente se aproximando de $e^{\left(\frac{1}{3}\Lambda\right)^{1/2}t}$.

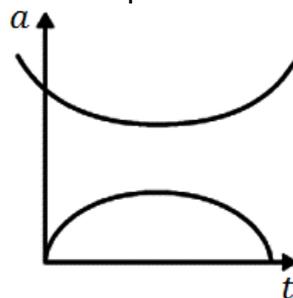
Figura 3.1.5: (a) Modelo para $\kappa = 1$ e $\Lambda > \Lambda_c$; (b) Modelo para $\kappa = 1$ e $\Lambda = \Lambda_c$.



Fonte: Silva (2011)

- Para $0 < \Lambda < \Lambda_c$ temos duas possibilidades que dependem das constantes de integração: um Modelo Oscilante ou um modelo que passa inicialmente por uma fase de contração seguido de uma fase de expansão na qual o fator de escala permanece positivo (Figura 3.1.6).

Figura 3.1.6: Modelo para $0 < \Lambda < \Lambda_c$ com $\kappa = 1$.



Fonte: Silva (2011)

Dessa forma, por meio das soluções da Equação de Friedmann podemos obter vários modelos para descrever a dinâmica de evolução do universo. Além disso, é possível perceber que a maioria dos modelos são do tipo *Big-Bang*, que se baseiam

na perspectiva de o universo ter se originado a partir de uma singularidade¹³. Entretanto, para que tais modelos sejam úteis para descrever a realidade se faz necessário a corroboração por meio de evidências observacionais que validem tais modelos ou mostrem discrepâncias entre o modelo e a realidade. Com isso, na próxima seção, trataremos sobre os parâmetros cosmológicos que possibilitam a realização de medidas e, conseqüentemente, a obtenção das evidências observacionais.

3.3. Parâmetros Observacionais

Para verificar se um dos modelos obtidos pelas soluções da equação de Friedmann são condizentes para descrever o nosso universo, faz-se necessário que ele seja corroborado a partir de evidências observacionais. Com isso, para obter tais evidências, são utilizados os parâmetros cosmológicos citados a seguir:

- Parâmetro de Hubble ($H(t)$);
- Parâmetro de Densidade (Ω);
- Desvio Para o Vermelho (z);
- Parâmetro de Desaceleração (q).

O primeiro parâmetro, o Parâmetro de Hubble, é definido como:

$$H = \frac{\dot{a}}{a}. \quad 3.2.27$$

Este é um parâmetro cosmológico observável diretamente a partir da lei de Hubble (LIMA, 2008). O seu inverso, ou seja, H^{-1} , tem dimensão de tempo.

O segundo parâmetro, o Parâmetro de Densidade, é dado por:

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}. \quad 3.2.28$$

Em que ρ é a densidade do universo e ρ_c é a densidade crítica. A densidade crítica seria a densidade que o universo teria se fosse espacialmente plano, tomando $\kappa = 0$ na equação de Friedmann (SILVA, 2011). Dessa forma, temos que:

¹³ Região do espaço em que a métrica não é bem definida. No referido caso, trata-se da situação em que o fator de escala é nulo quanto $t = 0$, ocasionando que toda a parte espacial da métrica deixe de existir, comprometendo a descrição de fenômenos físicos nesta região.

$$\rho_c = \frac{3}{8\pi G} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \Rightarrow \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad 3.2.29$$

Além disso, por meio do Parâmetro de Densidade é possível inferir as seguintes consequências:

- Para $\rho > \rho_c$, temos que $\Omega > 1$ e $\kappa = +1$, o que caracteriza uma geometria espacial esférica;
- Para $\rho = \rho_c$, temos que $\Omega = 1$ e $\kappa = 0$, o que caracteriza uma geometria espacial plana;
- Para $\rho < \rho_c$, temos que $\Omega < 1$ e $\kappa = -1$, o que caracteriza uma geometria espacial hiperbólica.

Já o terceiro parâmetro, o Desvio Para o Vermelho, é obtido quando se consideram sinais que partem de uma fonte emissora e são recebidos por um receptor em um dado ponto. A partir disso, nota-se a ocorrência de um fenômeno em que o observador recebe os raios luminosos com uma frequência menor do que quando os raios foram emitidos. A este fenômeno se dá o nome de *Redshift* (Desvio para o vermelho) e é dado por:

$$z = \frac{\nu_e - \nu_o}{\nu_o} \Rightarrow z = \frac{\nu_e}{\nu_o} - 1. \quad 3.2.30$$

Em que $\nu_e \equiv$ frequência da luz emitida e $\nu_o \equiv$ frequência da luz observada.

O Desvio para o Vermelho nos indica o afastamento ou aproximação entre galáxias ou outros objetos com escala cosmológica por meio da diferença entre a frequência da luz emitida e a frequência da luz recebida, uma vez que se um objeto está se afastando de nosso referencial, sua luz terá uma frequência menor ao chegar até nós, pois ela teve que percorrer uma “distância” maior quando comparada ao caso em que não houvesse tal expansão. Para o caso em que há aproximação, percebe-se uma frequência maior. Além disso, com algumas manipulações algébricas, podemos mostrar que existe uma relação entre a razão das frequências e a razão dos fatores de escala nos instantes em que o sinal luminoso é emitido e observado:

$$\frac{\nu_e}{\nu_o} = \frac{a(t_o)}{a(t_e)}. \quad 3.2.31$$

Com isso, é possível estabelecer uma relação entre o fator de escala $a(t)$ e o Desvio para o Vermelho:

$$z = \frac{v_e}{v_o} - 1 \Rightarrow z = \frac{a(t_o)}{a(t_e)} - 1. \quad 3.2.32$$

Considerando $a(t_o) = 1$ como sendo o fator de escala nos dias atuais e $a(t_e) = a(t)$ como sendo o fator de escala em um instante qualquer do universo, podemos escrever (SILVA, 2011):

$$a(t) = \frac{1}{z + 1}. \quad 3.2.33$$

A partir da Eq. 3.2.33 podemos determinar o fator de escala a partir de um parâmetro observável, que é o Desvio para o Vermelho.

Outro fato sobre este parâmetro observacional é que o Desvio para o Vermelho é frequentemente associado ao efeito Doppler e, a partir disso, ele pode ser interpretado como um afastamento efetivo entre fonte emissora e receptor com $z = v/c$, sendo v a velocidade relativa da fonte em relação ao receptor e c a velocidade da onda emitida, ou seja, da luz (LIMA, 2008). É por meio dessa associação que podemos obter a Lei de Hubble:

$$v = H_0 d_p. \quad 3.2.34$$

Em que $d_p = a(t)f(r)$ é chamada de Distância Própria, isto é, a distância entre emissor e observador ($f(r)$) corrigida pelo fator de escala $a(t)$. A Lei de Hubble só é válida para galáxias que não estão muito distantes e se deve ter o cuidado de não superestimar o valor de tal analogia, já que, segundo a TRG, o desvio se dá em função da expansão do espaço e não do movimento relativo como no efeito Doppler (LIMA, 2008).

Por fim, há o Parâmetro de Desaceleração que pode ser obtido a partir de medições de *Red Shifts* elevados, fora do regime linear da Lei de Hubble (LIMA, 2008). Ele é descrito como sendo:

$$q = -\frac{\ddot{a}}{aH^2}. \quad 3.2.35$$

Este é um parâmetro adimensional. Além disso, temos que para $q > 0$ há uma aceleração negativa, o que indica que o universo está em uma expansão desacelerada; e para $q < 0$ há uma aceleração positiva, o que indica que o universo está em uma expansão acelerada (SILVA, 2011).

Os Parâmetros Observacionais citados acima são úteis para que sejam feitas medidas de distância a nível da escala cosmológica. Uma das formas de realizar tal medida é por meio da Distância Própria, que aparece na Lei de Hubble (Eq. 3.2.34) e foi comentada acima. Outras alternativas para realizar as medidas de distâncias são a Distância de Luminosidade (d_L) e a Distância de Diâmetro Angular (d_A). A primeira diz respeito ao fluxo de luminosidade sobre a área de uma esfera centrada em torno da fonte que emite ondas eletromagnéticas. Em um espaço Euclidiano d_L é dado pela Eq. 3.2.36, mas para o espaço-tempo regido pela métrica FLRW d_L é dado pela Eq. 3.2.37.

$$d_L^2 = \frac{1}{4\pi} \frac{P_e}{A}, \quad 3.2.36$$

$$d_L^2 = (1+z) \frac{1}{H_0 |\kappa \Omega_{o\kappa}|^{\frac{1}{2}}} S_\kappa \left(|\kappa \Omega_{o\kappa}|^{\frac{1}{2}} \int_0^z \frac{1}{E(z)} dz \right). \quad 3.2.37$$

Na Eq. 3.2.36, P_e é a potência medida pelo emissor e A é a área da esfera, e na Eq. 3.2.37, $E(z) = [\sum \Omega_{oi} (1+z)^{n_i}]^{\frac{1}{2}}$ (CARROLL, 2003).

Já a segunda, a Distância de Diâmetro Angular (d_A), refere-se a distância que se pode inferir do tamanho observado e do tamanho intrínseco da fonte. Matematicamente, ela é dada por:

$$d_A = \frac{D}{\delta}. \quad 3.2.38$$

Em que D é o tamanho intrínseco da fonte e δ é o ângulo sob o qual a observamos.

É possível mostrar que a relação entre a distância de luminosidade e a distância de diâmetro angular é dada por:

$$d_A = \frac{d_L}{(1+z)^2}. \quad 3.2.39$$

Tais maneiras de se estimar distâncias desempenham um papel fundamental na cosmologia, além de, como já mencionado, permitirem avaliar melhor as soluções obtidas das equações de Friedmann. Inclusive, a própria equação de Friedmann pode ser reescrita em termos de parâmetros cosmológicos!

Reescrevendo a equação de Friedmann em termos do parâmetro de Hubble, temos:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\kappa}{a^2}. \quad 3.2.40$$

Considerando as principais fontes de energia como matéria, radiação e constante cosmológica, podemos escrever $\rho = \rho_M + \rho_R + \rho_\Lambda$, e com isto:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_M + \rho_R + \rho_\Lambda) - \frac{\kappa}{a^2}. \quad 3.2.41$$

Definindo $-\kappa/a^2 = 8\pi G\rho_\kappa/3$, onde ρ_κ simula uma fonte de energia associada à curvatura, temos:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_M + \rho_R + \rho_\Lambda + \rho_\kappa). \quad 3.2.42$$

Da equação 3.2.22, podemos denotar todas as densidades de energia como:

$$\rho_i = \rho_{0i} \left(\frac{a_0}{a}\right)^{n_i}, \quad 3.2.43$$

onde:

$$n_i = \begin{cases} 0, & \text{para constante cosmológica} \\ 2, & \text{para curvatura} \\ 3, & \text{para matéria} \\ 4, & \text{para radiação} \end{cases}. \quad 3.2.44$$

Deste modo, reescrevemos a equação 3.2.42 como:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\sum_i \rho_{0i} \left(\frac{a_0}{a}\right)^{n_i} \right). \quad 3.2.45$$

Dividindo por H_0^2 , sendo este o parâmetro de Hubble atual, utilizando a definição de densidade crítica (Eq. 3.2.29), e a definição do parâmetro de densidade (Eq. 3.2.28) escrevemos:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \left(\sum_i \rho_{0i} \left(\frac{a_0}{a} \right)^{n_i} \right). \quad 3.2.46$$

$$H^2 = H_0^2 \left(\sum_i \frac{\rho_{0i}}{\rho_c} \left(\frac{a_0}{a} \right)^{n_i} \right). \quad 3.2.47$$

$$H = H_0 \left(\sum_i \Omega_{0i} \left(\frac{a_0}{a} \right)^{n_i} \right)^{1/2}. \quad 3.2.48$$

Finalmente, utilizando a eq. 3.2.32, obtemos:

$$H = H_0 \left(\sum_i \Omega_{0i} (1+z)^{n_i} \right)^{1/2}. \quad 3.2.49$$

É importante enfatizar que toda e qualquer teoria física deve fornecer meios de se verificar as consequências de suas previsões em termos de parâmetros mensuráveis, por isso a relevância destas equações.

No próximo capítulo veremos como através destes conceitos podemos localizar problemas acerca das soluções e exploraremos uma possibilidade de solução para eles.

4. Problemas do Modelo Cosmológico Padrão

Vimos no capítulo anterior que as soluções para a equação de Friedmann fornecem modelos do tipo *Big Bang* para descrever a evolução do universo. Mas qual daqueles modelos é o responsável pela descrição do universo em que vivemos? A resposta é que nenhum daqueles modelos descreve a dinâmica desse universo, pois não são suficientes para explicar alguns problemas cosmológicos, entre os quais estão: o Problema do Horizonte e o Problema da Planura. Neste capítulo iremos tratar sobre estes dois problemas cosmológicos e, em seguida, iremos abordar como a consideração de uma era inflacionária na fase primordial do universo pode ser utilizada para solucionar estes problemas. Para uma melhor compreensão dos problemas, faremos uma breve digressão sobre a história térmica do universo.

4.1. Uma Breve Digressão Sobre a História Térmica do Universo

Conforme já discutimos neste texto, o modelo cosmológico padrão consiste em um modelo que pretende descrever a dinâmica do universo a partir de alguns pressupostos. Desse contexto, surgiram propostas de soluções em que o universo está se expandindo, e tal expansão está associada ao fator de escalar $a(t)$, que por sua vez, condiciona a forma como toda a parte espacial do universo evolui. Uma vez que a maioria das soluções implicam que quando $t \rightarrow 0$, $a(t) \rightarrow 0$, e com isto, podemos extrapolar que ao retroceder no tempo, deveríamos encontrar o universo cada vez menor e com uma densidade de energia cada vez mais concentrada, permitindo que se afirme que este evoluiu de uma região extremamente quente e densa.

Costuma-se descrever os principais acontecimentos da evolução do universo classificando-os em termos de eras nas quais determinadas fontes de energia exerciam uma influência mais significativa do que outras. Segundo Henriques (2009), as épocas iniciais estão longe de ser compreendidas, por requererem uma teoria quântica da gravidade que ainda não existe, tornando essa descrição nos primeiros instantes muito especulativa. No entanto, é possível estabelecer um roteiro do comportamento da evolução do universo a partir de $10^{-43}s$, conhecido como tempo de Planck. Vejamos alguns dos principais eventos descritos neste contexto.

A Era da Inflação ocorreu por volta do instante $10^{-33} s$ e é caracterizada por ser uma fase de grande expansão do universo, capaz de justificar os indícios que indicam que o universo possui estrutura espacial plana desde os instantes iniciais e a homogeneidade da radiação cósmica de fundo. Após este período, segue-se a Era da Bariogênese em que, segundo Damini et al (2011), os quarks passaram a se juntar e formar as partículas chamadas de Bárions. Os bárions mais conhecidos são o próton e o nêutron. Durante esta era as energias das partículas eram da ordem de 10^{14} ou $10^{15} GeV$ e temperaturas da ordem de 10^{27} ou $10^{28} K$ (HENRIQUES, 2009).

Após estes dois períodos, vem a nucleossíntese primordial que é um dos pilares que sustentam a teoria do *Big Bang*. Nesse período, a temperatura era da ordem de $10^9 K$ e passam a surgir os primeiros núcleos de elementos químicos mais leves, como o hidrogênio e hélio. O universo continua a expandir e esfriar e quando ele tinha cerca de $3,8 \times 10^5$ anos e a temperatura era de $3,0 \times 10^3 K$, houve condições que permitiram a recombinação de elétrons e núcleos, dando origem à matéria na forma em que a conhecemos hoje. Este período é denominado de época de desacoplamento entre a radiação e a matéria, ou época da recombinação. Este evento demarca a transição do que se chama de era da radiação e era da matéria.

Uma importante consequência disto está relacionada ao surgimento do que chamamos de radiação cósmica de fundo (RCF), que consiste na radiação resultante deste desacoplamento, em que os fótons passaram a percorrer grandes distâncias sem interagir com qualquer elétron (SOBRINHO, 2012). Posteriormente passam a surgir as estruturas de grande escala como as galáxias por meio da condensação gravitacional (HENRIQUES, 2009).

Após a era da matéria, considera-se que a dinâmica da evolução do universo deveria ser regida pela constante cosmológica, que desempenha um papel análogo a um fluido com pressão negativa, no entanto, a partir de descobertas recentes, verificou-se que nosso universo está em uma fase de expansão acelerada. Para justificar esta expansão, considera-se a possibilidade de que exista outra fonte de energia, denominada energia escura, que tem um papel análogo ao da constante cosmológica, mas que possui uma dinâmica variável.

4.2. Problema do Horizonte

Consideremos um evento P que acontece em um determinado ponto do espaço-tempo. Para descrever tal evento, iremos utilizar o sistema de coordenadas co-móveis. O evento P ocorre em uma região que é delimitada por uma superfície denominada Horizonte de Partículas, isto é, um limite para o qual eventos além desse horizonte não podem estar causalmente conectados (NÓBREGA, 2021). Vamos, agora, calcular a distância de tal horizonte para o evento P e, para isso, iremos considerar a equação de movimento do sinal luminoso, em que $ds^2 = 0$, e que se propaga apenas na direção radial, de modo que $d\theta = d\phi = 0$. Com isto, utilizando o elemento de linha da métrica de FLRW, podemos escrever:

$$\int_0^{t_P} \frac{dt}{a(t)} = \int_{r_H}^{r_P} \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa r^2}} dr. \quad 4.2.1$$

Em que os índices dos limites de integração denotam que o sinal luminoso parte da borda do horizonte de eventos (r_H) para o evento P (r_P).

Fazendo uma mudança de coordenadas:

$$d\chi = \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa r^2}} dr, \quad 4.2.2a$$

$$\chi = S_\kappa(x), \quad 4.2.2b$$

vamos ter:

$$\Delta\chi_P = \int_0^{t_P} \frac{dt}{a(t)}. \quad 4.2.3$$

A Eq. 4.2.3 mostra a distância co-móvel entre o evento P e o Horizonte de Partículas.

A partir disso, podemos determinar o raio do Horizonte de Partículas relativo ao evento P – ou seja, a distância própria – corrigindo-o pelo fator de escala:

$$d_{hor}(t_P) = a(t_P) \int_0^{t_P} \frac{dt}{a(t)}. \quad 4.2.4$$

Em que $d_{hor}(t_P)$ é a distância própria no instante do evento P. Além disso, sendo $a(t)$ uma função monotônica, podemos escrever que:

$$da = \frac{da}{dt} dt, \quad 4.2.5a$$

$$da = \dot{a} dt, \quad 4.2.5b$$

$$da = \dot{a} \frac{a}{a} dt, \quad 4.2.5c$$

$$da = Ha dt, \quad 4.2.5d$$

$$dt = \frac{1}{aH} da. \quad 4.2.5e$$

Logo, a Eq. 4.2.4 pode ser reescrita como:

$$d_{hor}(t_P) = a(t_P) \int_0^{a(t_P)} \frac{1}{a^2 H} da. \quad 4.2.6$$

Em que estamos integrando de um instante onde $a(t) = 0$ até um instante em que $a(t) = a(t_P)$.

Sendo

$$H = H_0 \left[\sum_i \Omega_{0i} \left(\frac{a_0}{a} \right)^{n_i} \right]^{1/2}, \quad 4.2.7$$

podemos escrevê-lo em função do fator de escala. Dessa forma, obtemos o raio do Horizonte de Partículas, explícito na Eq. 4.2.8, em relação ao evento P:

$$d_{hor}(t_P) = a(t_P) \int_0^{a(t_P)} \frac{1}{a^2 H(a)} da. \quad 4.2.8$$

Podemos utilizar a Eq. 4.2.8 para realizar uma estimativa de qual seria o raio do Horizonte de Partículas para dois períodos distintos do universo, um em que a

matéria é dominante e outro em que a radiação domina. Para o período em que a matéria é dominante, temos que a densidade total do universo (ρ) será igual a densidade de matéria (ρ_m). Além disso, na Eq. 4.2.7 teremos que $\Omega_{m0} = 1$ (WEINBERG, 2008) e $n_m = 3$, e dessa forma:

$$H = H_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3/2}. \quad 4.2.9$$

Substituindo esse resultado na Eq. 4.2.8, teremos:

$$d_{hor}(t_P) = a(t_P) \int_0^{a(t_P)} \frac{1}{a^2 \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3/2} H_0} da. \quad 4.2.10$$

Resolvendo a integral, aplicando os limites de integração e reorganizando os termos, vamos ter que o raio do Horizonte de Partículas, para um universo dominado pela matéria, será:

$$d_{hor}(t_P) = 2H_0^{-1} \left(\frac{a_P}{a_0} \right)^{3/2}. \quad 4.2.11$$

Realizando o mesmo processo para o universo dominado pela radiação, teremos que a densidade total (ρ) será igual a densidade de radiação (ρ_r), $\Omega_{r0} = 1$ e $n = 4$. Com isso, vamos ter:

$$H = H_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^2. \quad 4.2.12$$

Após substituir esse resultado na Eq. 4.2.8 e resolvermos a integral, teremos que o raio do Horizonte de Partículas para o universo dominado pela radiação será dado por:

$$d_{hor}(t_P) = H_0^{-1} \left(\frac{a_P}{a_0} \right)^2. \quad 4.2.13$$

A partir desses dois resultados, podemos calcular qual o raio do Horizonte de Partículas na época da recombinação (cujas grandezas físicas serão sinalizadas com o símbolo (*)), ou seja, na época em que matéria e energia se desacoplaram. Para isso, levemos em consideração que (WEINBERG, 2008):

$$t = t^*, \quad a^* = a(t^*), \quad z = z^* \cong 1100. \quad 4.2.14$$

Dessa forma, vamos ter que:

$$d_{\text{hor}}^{\text{m}}(t^*) = 2H_0^{-1} \left(\frac{a^*}{a_0} \right)^{3/2} = 2H_0^{-1} (1 + z^*)^{-3/2}, \quad 4.2.15a$$

$$d_{\text{hor}}^{\text{r}}(t^*) = H_0^{-1} \left(\frac{a^*}{a_0} \right)^2 = H_0^{-1} (1 + z^*)^{-2}. \quad 4.2.15b$$

Com isto, podemos estabelecer uma estimativa de limite superior do raio do horizonte de partículas, uma vez que:

$$d_{\text{hor}}^{\text{m}}(t^*) > d_{\text{hor}}^{\text{r}}(t^*), \quad 4.2.16$$

e com isto, no período da recombinação, podemos dizer que:

$$d_{\text{hor}}(t^*) \leq 2H_0^{-1} (1 + z^*)^{-3/2}. \quad 4.2.17$$

Após obtermos este limite superior para o Horizonte de Partículas no período da recombinação, vamos, agora, calcular qual o raio da superfície do último espalhamento. Para isso, faremos os mesmos procedimentos feitos para obter os outros raios, mas para este caso teremos que $t_p = t^*$. Com isso, o raio da superfície do último espalhamento será dado por:

$$L = a^* \int_{a^*}^{a_0} \frac{1}{a^2 H} da. \quad 4.2.18$$

A partir de t^* a expansão é dominada pela matéria e dessa forma, teremos que a Equação de Friedmann (H) será igual a Eq. 4.2.9 e ao substituirmos na Eq. 4.2.18 iremos obter:

$$L = a^* \int_{a^*}^{a_0} \frac{1}{a^2 H_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3/2}} da. \quad 4.2.19$$

Ao resolvermos a integral e aplicarmos os limites de integração teremos:

$$L = \frac{2a^*}{H_0 a_0^{3/2}} (a_0^{1/2} - a^{*1/2}), \quad 4.2.20a$$

$$L = \frac{2}{H_0} \left(\frac{a^*}{a_0} \right) \left[1 - \left(\frac{a^*}{a_0} \right)^{1/2} \right]. \quad 4.2.20b$$

Reescrevendo a Eq. 4.2.20b em função do desvio para o vermelho (z), teremos:

$$L = 2H_0^{-1}(1+z^*)^{-1} \left[1 - (1+z^*)^{-1/2} \right]. \quad 4.2.21$$

Como estamos adotando $z^* \cong 1100$, o segundo termo dentro dos colchetes pode ser considerado desprezível. Com isso, obtemos que:

$$L = 2H_0^{-1}(1+z^*)^{-1}. \quad 4.2.22$$

A Eq. 4.2.22 explicita o raio da última superfície de espalhamento para um universo dominado pela matéria.

Segundo Weinberg (2008), pode-se mostrar que ao se levar em conta a constante cosmológica (Λ), obtém-se:

$$L > 2H_0^{-1}(1+z^*)^{-1}. \quad 4.2.23$$

O valor da eq. 4.2.22 é, portanto, um limite inferior para a superfície do último espalhamento.

Com os resultados obtidos para o raio do Horizonte de Partículas da época da recombinação e do raio da superfície do último espalhamento podemos estabelecer uma estimativa da razão $d_{hor}(t^*)/L$:

$$\frac{d_{hor}(t^*)}{L} < \frac{2H_0^{-1}(1+z^*)^{-3/2}}{2H_0^{-1}(1+z^*)^{-1}}, \quad 4.2.24a$$

$$\frac{d_{hor}(t^*)}{L} < (1+z^*)^{-1/2}. \quad 4.2.24b$$

Como $z^* \cong 1100$, teremos:

$$\frac{d_{hor}(t^*)}{L} < 3 \times 10^{-2}. \quad 4.2.25$$

A partir da Eq. 4.2.25 podemos escrever:

$$\frac{L}{d_{hor}(t^*)} > \frac{1}{3} \times 10^2. \quad 4.2.26$$

Como estamos lidando com raios dos Horizontes de Partículas, podemos elevar ao cubo toda a inequação 4.2.26 para analisarmos a razão dos volumes dessas regiões:

$$\left(\frac{L}{d_{hor}(t^*)}\right)^3 > \left(\frac{1}{3} \times 10^2\right)^3 \approx 4 \times 10^4. \quad 4.2.27$$

A Eq. 4.2.27 nos mostra que em um volume interior à superfície do último espalhamento há, aproximadamente, 4×10^4 regiões sem conexão causal (SILVA, 2011). É a partir desta constatação que se formula o problema do horizonte: Apesar dos fótons virem de regiões sem conexão causal, eles se encontram praticamente à mesma temperatura (como evidencia a radiação cósmica de fundo).

É possível ilustrar facilmente este problema se considerar o raio do horizonte de partículas de uma região como um arco da região da superfície do último espalhamento, conforme a Figura 4.2.1. Neste caso, podemos afirmar que

$$\delta = \frac{d_H}{L}. \quad 4.2.28$$

Conforme o dado da inequação 4.2.25, temos que $\delta = 0,03 \text{ rad}$, ou $\delta \approx 1,8^\circ$. O que indica que dois fótons que incidem formando um ângulo maior do que este valor, eles não deveriam estar causalmente conectados.

Figura 4.2.1: Arco da região da superfície do último espalhamento.



Fonte: Oliveira (2023)

4.3. Problema da Planura

Segundo o Modelo Cosmológico Padrão, o universo possui curvatura espacial constante que pode ser positiva, negativa ou nula. Essa curvatura é obtida quando se analisa o parâmetro de densidade (Ω) que pode assumir as características citadas no capítulo anterior (WAGA, 2005).

Para entendermos como o parâmetro de densidade evolui no tempo, vamos partir da equação de Friedmann e realizar algumas manipulações algébricas nesta:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\kappa}{a^2}. \quad 4.3.1$$

Dividindo toda a Eq. 4.3.1 por H^2 , teremos:

$$\frac{H^2}{H^2} = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho - \frac{\kappa}{a^2H^2}, \quad 4.3.2a$$

$$1 = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho - \frac{\kappa}{a^2H^2}. \quad 4.3.2b$$

O primeiro termo à direita da igualdade é o parâmetro de densidade e, com isso, podemos reescrever:

$$1 = \Omega - \frac{\kappa}{a^2H^2}. \quad 4.3.3$$

Reorganizando os termos, teremos:

$$\Omega_\kappa = \Omega - 1 = \frac{\kappa}{a^2H^2}. \quad 4.3.4$$

Em que Ω_κ é o parâmetro de curvatura. Logo, por meio da Eq. 4.3.4 podemos ver que o parâmetro de densidade – e, conseqüentemente, o parâmetro de curvatura – possui uma variação no tempo, pois ele depende do fator de escala $a(t)$.

A partir disso, podemos estimar alguns valores assumidos pelo parâmetro de curvatura de acordo com as temperaturas durante a evolução do universo. Isso é possível, pois há uma relação entre a temperatura e o fator de escala dada por (WEINBERG, 2008):

$$T = T_0(1 + z) = \frac{T_0}{a}. \quad 4.3.5$$

Em que T é a temperatura do universo em um instante qualquer e T_0 é a temperatura do universo atualmente.

A Eq. 4.3.5 implica que $a \propto T^{-1}$. Considerando que H , desde o desacoplamento, tem evoluído de acordo com $H^2 = H_0^2 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3$ até hoje, podemos estimar pela equação 4.3.4 que $\Omega_\kappa \propto a$, e com isto, temos que $\Omega_\kappa \propto T^{-1}$.

Deste modo, para uma temperatura de $10^4 K$, o parâmetro de curvatura não poderia ter sido maior que 10^{-4} . Dessa forma, vemos que para temperaturas maiores que $10^4 K$ o parâmetro de curvatura fica cada vez menor e mais próximo de zero, o que indica que no início do universo a curvatura espacial deveria ser muito pequena e o espaço seria aproximadamente plano (SILVA, 2011).

De acordo com a Eq. 4.3.4, o fato de $\Omega_\kappa = 0$ implica que $\Omega = 1$ e este representa um estado de equilíbrio instável, já que a existência de qualquer pequeno desvio do valor unitário tende a aumentar, em valor absoluto, com o tempo (WAGA, 2005). Neste caso, o valor do parâmetro Ω_κ não deveria ser nulo atualmente. Este é o chamado Problema da Planura, também previsto pelo MCP.

Uma vez identificado problemas no modelo cosmológico padrão, deve-se questionar sobre as possibilidades se vale a pena ou não procurar soluções para estes problemas, ou se mais vale descartar o modelo e buscar outros que possam ser mais bem-sucedidos no aspecto de descrição da dinâmica do universo. Para este caso, apesar de estar aberta a possibilidade da implementação de novos modelos, existe um consenso bastante forte de se buscar soluções que procurem resolver os problemas existentes sem desconsiderar os avanços consolidados pelo MCP. Isto se deve ao fato deste modelo, apesar dos problemas, ser bem-sucedido na descrição de vários aspectos conhecidos sobre a evolução do nosso universo, os quais constituem os pilares da cosmologia observacional: a expansão do universo, a radiação cósmica de fundo em micro-ondas (RCFM) e a abundância de elementos leves (WAGA, 2005). Tais evidências serão comentadas ao final do trabalho deste capítulo.

Nesta perspectiva, vamos, na próxima seção, discutir como a implementação de um mecanismo inflacionário ocorrido antes da era da radiação pode ajudar a contornar os problemas acima mencionados. Este mecanismo foi proposto por Alan

Guth, em 1979, e implica que o universo teve uma era inflacionária em que aumentou de tamanho rapidamente. Posteriormente, outros colaboradores complementaram as ideias vinculadas ao mecanismo inflacionário.

4.4. Propostas de Soluções para os Problemas discutidos através do Mecanismo Inflacionário

Vejamos, agora, como é possível obter a solução para os problemas cosmológicos do Horizonte de Partículas e da Planura por meio do mecanismo inflacionário. Vamos iniciar pelo problema da planura.

Consideremos que o universo, no seu início, teve um período de inflação em que $a(t)$ cresce exponencialmente de acordo com um grande fator $e^{\mathcal{N}}$:

$$a(t) = a_i e^{\mathcal{N}}, \quad 4.4.1$$

sendo $a_i \equiv$ fator de escala no início da inflação, e $\mathcal{N} = \mathcal{N}(t) \equiv$ número de dobras.

Se considerarmos que no início do período inflacionário o parâmetro de curvatura era da ordem da unidade, conforme a Eq. 4.1.4, no fim do período inflacionário, no instante t_I , o parâmetro de curvatura terá de ser da ordem de $e^{-2\mathcal{N}}$, uma vez que tal parâmetro é proporcional à a^{-2} . Com isto, escreveremos:

$$\Omega_{\kappa i} = \frac{|\kappa|_i}{a_i^2 H_i^2} = 1, \quad 4.4.2$$

em que o índice i denota o instante inicial da inflação. E

$$\Omega_{\kappa I} = \frac{|\kappa|_I}{a_I^2 H_I^2} = e^{-2\mathcal{N}}, \quad 4.4.3$$

em que a_I é o fator de escala e H_I é a taxa de expansão, ambos, ao fim do período inflacionário. Para sabermos qual a ordem do parâmetro de curvatura atualmente precisamos relacioná-lo com o parâmetro de curvatura do fim da inflação e para isso, levamos em consideração que $|\kappa|_I$ não variou do fim deste período até os dias atuais, denotando-o por $|\kappa|$. Dessa forma, vamos ter:

$$\Omega_{\kappa I} = \frac{|\kappa|_I}{a_I^2 H_I^2} = e^{-2\mathcal{N}} \implies |\kappa|_I = a_I^2 H_I^2 e^{-2\mathcal{N}} = |\kappa|. \quad 4.4.4$$

Considerando o parâmetro de curvatura atualmente:

$$\Omega_{\kappa 0} = \frac{|\kappa|}{a_0^2 H_0^2}, \quad 4.4.5$$

e substituindo a Eq. 4.4.4 na Eq. 4.4.5 teremos:

$$\Omega_{\kappa 0} = \frac{a_I^2 H_I^2 e^{-2\mathcal{N}}}{a_0^2 H_0^2} = e^{-2\mathcal{N}} \left(\frac{a_I H_I}{a_0 H_0} \right)^2. \quad 4.4.6.a$$

$$\Omega_{\kappa 0} = \left(\frac{\left(\frac{a_I H_I}{a_0 H_0} \right)}{e^{\mathcal{N}}} \right)^2. \quad 4.4.6.b$$

Portanto, para que o parâmetro de curvatura tenda a ser nulo atualmente, deve-se ter:

$$e^{\mathcal{N}} > \left(\frac{a_I H_I}{a_0 H_0} \right). \quad 4.4.7$$

Para fazer esta análise, vamos supor que $a_I H_I \cong a_1 H_1$, em que a_1 e H_1 são, respectivamente, o fator de escala e a taxa de expansão no início da era dominada pela radiação e pela matéria em equilíbrio. Considerando que a taxa de expansão do fator de escala não tenha uma variação apreciável do período da inflação até o período dominado pela radiação, podemos escrever a taxa de expansão (H) como sendo (WEINBERG, 2008):

$$H = \frac{H_{eq}}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{a_{eq}}{a} \right)^3 + \left(\frac{a_{eq}}{a} \right)^4}, \quad 4.4.8$$

em que $a_{eq} = a_0 \Omega_r / \Omega_m$ e $H_{eq} = \sqrt{2\Omega_m} H_0 (a_0 / a_{eq})^{3/2}$ são, respectivamente, o fator de escala e a taxa de expansão quando a distribuição das densidades de energia da radiação e da matéria são iguais, ou seja, equilibradas. Admitindo que $a = a_1 \ll a_{eq}$, temos que o primeiro termo da soma dentro da raiz quadrada será desprezível em relação ao segundo e, dessa forma, podemos reescrever a Eq. 4.4.8 como:

$$H_1 = \frac{H_{eq}}{\sqrt{2}} \left(\frac{a_{eq}}{a_1} \right)^2. \quad 4.4.9$$

Usando esta relação para eliminar a_1 , podemos reescrever a Eq. 4.4.7 em termos dos parâmetros observáveis e, com isso (WEINBERG, 2008):

$$e^{\mathcal{N}} > \left(\frac{\Omega_m a_{eq}}{a_0} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{H_1}{H_0}}, \quad 4.4.10a$$

$$e^{\mathcal{N}} > (\Omega_r)^{1/4} \sqrt{\frac{H_1}{H_0}}, \quad 4.4.10b$$

$$e^{\mathcal{N}} > \left(\Omega_r \frac{\rho_1}{\rho_{0,crit}} \right)^{1/4}, \quad 4.4.10c$$

$$e^{\mathcal{N}} > \frac{[\rho_1]^{1/4}}{0.037 h eV}. \quad 4.4.10d$$

Em que ρ_1 é a densidade de energia do período dominado pela radiação, $\rho_{0,crit} = 3H_0^2/8\pi G$ é a densidade crítica e h é a constante de Hubble em unidades de $100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Deste modo, temos a inequação parametrizada em termos de valores mensuráveis.

Para sabermos qual a ordem do fator de expansão, precisamos conhecer qual a densidade de energia no fim do período inflacionário. Levando em conta a teoria da nucleossíntese primordial¹⁴, espera-se que ρ_1 não possa ser menor que a densidade de energia de aproximadamente $(1 \text{ MeV})^4$, como também, não se espera que seja maior que a densidade de energia de Planck $(1,22 \times 10^{19} \text{ GeV})^4$ (WEINBERG, 2008). Dessa forma, considerando $h = 0,7$, teremos para o primeiro caso que $\mathcal{N} = 17$ e para o segundo caso que $\mathcal{N} = 68$. E isso implica que:

$$e^{17} < e^{\mathcal{N}} < e^{68}. \quad 4.4.11$$

Dessa forma, o fato de $a(t)$ expandir de acordo com o fator $e^{\mathcal{N}}$ antes do universo atingir o período dominado pela radiação, ou seja, que ele tivesse tido um período inflacionário inicialmente, seria o motivo de obtermos dados que indicam que o universo possui uma geometria praticamente plana.

¹⁴ Teoria que trata sobre as características do universo nos instantes iniciais e sobre a formação das estruturas atômicas.

O outro problema que o mecanismo inflacionário se propõe a resolver é o Problema do Horizonte de Partículas. A solução inicia por meio da obtenção do raio do horizonte durante o período inflacionário. Isso é possível por meio da seguinte equação:

$$d_H(t_L) = a(t_L) \int_{t_i}^{t_L} \frac{dt}{a(t)}. \quad 4.4.12$$

Com t_i sendo o instante do início do período inflacionário e t_L o instante da superfície do último espalhamento. Como vimos na seção 4.2, o raio do horizonte de partículas do período dominado pela radiação e o dominado pela matéria são muito pequenos quando comparados com o raio da superfície do último espalhamento. Dessa forma, vamos considerar que a integral da Eq. 4.4.12 é dominada pela inflação. Além disso, vamos assumir que durante a inflação $a(t)$ cresce exponencialmente com a taxa de expansão $H_I = H_i$, isto é, sem variar, e dessa forma:

$$a(t) = a(t_i) e^{H_i(t-t_i)} = a_I e^{H_I(t-t_I)}. \quad 4.4.13$$

Em que t_I é o instante do fim do período inflacionário, H_I é a taxa de expansão do fator de escala no instante t_I , e $a_I = a(t_I)$.

Como estamos lidando com um período dominado pela inflação, os limites de integração da Eq. 4.4.12 serão de t_i à t_I e levaremos em conta o termo da segunda igualdade da Eq. 4.4.13 como sendo o fator de escala do período inflacionário, pois estamos interessados em obter o raio do horizonte durante tal período. Dessa forma teremos:

$$d_H(t_L) = a(t_L) \int_{t_i}^{t_I} \frac{1}{a_I e^{H_I(t-t_I)}} dt. \quad 4.4.14$$

Após resolvermos a integral e aplicarmos os limites de integração, iremos obter a seguinte equação:

$$d_H(t_L) = \frac{a(t_L)}{a_I H_I} [e^{\mathcal{N}} - 1]. \quad 4.4.15$$

Em que $\mathcal{N} \equiv H_I(t_I - t_i)$ é o número de dobras da expansão durante a inflação.

Para que a solução do problema do horizonte seja viável através do mecanismo inflacionário, é necessário que $e^{\mathcal{N}} \gg 1$ e, então, podemos desconsiderar o -1 dentro dos colchetes da Eq. 4.4.15 (WEINBERG, 2008), obtendo:

$$d_H(t_L) = \frac{a(t_L)}{a_I H_I} e^{\mathcal{N}}. \quad 4.4.16$$

Este é o raio do horizonte de partículas durante o período inflacionário.

Para que o alto grau de isotropia da radiação cósmica de fundo seja explicado é necessário que $d_H(t_L) > d_A(t_L)$, ou seja, que o raio do horizonte de partículas no período inflacionário seja maior do que o raio da última superfície de espalhamento, que podemos estimar numa aproximação como a distância do diâmetro angular dada pela equação 4.1.22. Com isso, vamos ter:

$$\frac{a(t_L)}{a_I H_I} e^{\mathcal{N}} > \frac{a(t_L)}{H_0 a_0}, \quad 4.4.17a$$

$$e^{\mathcal{N}} > \frac{a_I H_I}{a_0 H_0}. \quad 4.4.17b$$

Com a Eq. 4.4.17b, recaímos na mesma condição obtida para o problema da planura. Dessa forma, se levarmos em conta as considerações feitas no problema anterior, teremos que $e^{\mathcal{N}}$ deve estar no intervalo indicado pela Eq. 4.4.11.

Logo, considerando que houve um período inflacionário, a homogeneidade da radiação cósmica de fundo é explicada pelo fato de as regiões não conectadas causalmente que observamos hoje no universo, estiveram confinadas em uma região pequena e que houve tempo suficiente para que houvesse o estabelecimento do equilíbrio térmico em tal radiação.

4.5. Sobre outros problemas associados ao MCP

Uma vez que o mecanismo inflacionário pode se mostrar plausível para resolver o problema do horizonte e o problema da planura, ele tem sido discutido com bastante entusiasmo no contexto da Cosmologia. No entanto, essa consideração traz um outro problema: qual o tipo de fonte que é responsável por gerar a inflação?

Apesar de existirem diversas propostas, ainda não se verificou de um ponto de vista observacional a presença de elementos suficientes que possam ser utilizados para corroborar a existência de uma era inflacionária na evolução do nosso universo. Uma situação semelhante ocorre com a constante cosmológica. Tais temas consistem em um intenso objeto de estudos da Cosmologia atual. Além destes, outros problemas existem no cenário da Cosmologia Moderna. Entre eles, estão o da necessidade de se considerar a presença do que é conhecido como matéria escura e energia escura. Ambos necessários para sustentação dos modelos, e ainda não evidenciados na natureza.

Nesta perspectiva, pode-se questionar qual a valia de se considerar um modelo com tantos problemas. A natureza da resposta para essa indagação consiste no fato de que este modelo é também bastante bem-sucedido ao fornecer explicações para outros elementos já conhecidos do nosso universo. As principais evidências observacionais que ajudam a corroborar características do modelo cosmológico padrão são: a expansão do universo, a abundância de elementos leves e a radiação cósmica de fundo. Apesar de já mencionadas, revisitemos com mais alguns detalhes cada uma destas.

O primeiro modelo cosmológico proposto por Einstein possuía a característica de ser espacialmente homogêneo, isotrópico, finito e estático (WAGA, 2005). Foi a partir das soluções desenvolvidas por Friedmann, para a Equação de Campo da TRG, que a possibilidade de o universo estar espacialmente em expansão adquiriu notoriedade. Essa característica do universo foi confirmada por meio de estudos realizados por pesquisadores, como Edwin P. Hubble. Foi em 1929 que Hubble analisou as medidas de *redshifts* de galáxias realizadas por Milton Humason e percebeu que havia, para pequenos *redshifts*, uma relação de linearidade entre o desvio para o vermelho e a distância (WAGA, 2005) e, a partir disso, foi formulada a Lei de Hubble, responsável por corroborar a expansão espacial do universo.

Por volta da década de 20, um dos dilemas da astrofísica era compreender como ocorreu a formação dos elementos químicos. Foi então que, posteriormente, um grupo de físicos – como Gamow, Alpher e Herman – centraram sua pesquisa em como descrever os estágios iniciais de evolução do universo e propuseram um modelo para descrever o universo primordial e a formação dos primeiros elementos (WAGA, 2005). Entretanto, tal modelo apresentou lacunas que os autores não conseguiram preencher. Com isso, outros físicos realizaram novos estudos que contribuíram,

juntamente com o trabalho pioneiro de Gamow e seus colaboradores, para explicar a nucleossíntese primordial, ou seja, a formação dos primeiros elementos químicos.

Segundo Waga (2005), a ideia de que o universo primordial foi dominado pela radiação implica que este era quente e que esfriou devido à expansão e que a densidade de energia da radiação é proporcional a temperatura elevada à quarta potência. Dessa forma, com a expansão do universo a temperatura deste foi diminuindo e os primeiros elementos passaram a surgir, pois os fótons, ao interagir com eles, não tinham a energia necessária para desassociá-los.

Os núcleos produzidos durante a nucleossíntese primordial foram os dos elementos: Hidrogênio, Deutério, Trítio, Hélio e Lítio. Os elementos químicos mais pesados são produzidos nos processos de reações nucleares estelares ou em explosões de supernovas. Segundo Villela, Wuensche e Leonardi (2004) a composição química do universo consiste principalmente de hidrogênio (75%) e hélio (24%), com quantidades muito pequenas de todos os outros elementos químicos conhecidos (1%). Estes dados estão de acordo com as previsões do modelo.

Ainda de acordo com esse modelo, quando a temperatura do universo atingiu cerca de 3000 K os fótons já não possuíam mais energia suficiente para manter o hidrogênio ionizado e, com isso, formaram-se os átomos neutros de hidrogênio e os fótons não interagiram mais tão fortemente com a matéria. Essa época é chamada de recombinação, e a região a partir da qual os fótons seguiram livres é chamada de superfície de último espalhamento (WAGA, 2005). Os fótons que seguiram praticamente livres após a recombinação, constituem a chamada Radiação Cósmica de Fundo (WAGA, 2005). Esta é uma radiação eletromagnética distribuída de forma homogênea e isotrópica, cuja característica principal é que ela apresenta uma concordância com a distribuição de um corpo negro, em que sua temperatura é de $2,725\text{ K}$ (SILVA, 2011; WAGA, 2005).

A RCF foi prevista por Gamow e seus colaboradores, no final da década de 40, e em 1964 ela foi confirmada acidentalmente pelos radio-astrônomos americanos Arno Allan Penzias e Robert Woodrow Wilson. Além disso, apesar de ser altamente isotrópica, a RCF possui algumas anisotropias intrínsecas que podem fornecer informações sobre parâmetros cosmológicos como, por exemplo, a curvatura espacial do universo (WAGA, 2005).

Estas três evidências constituem os pilares fundamentais da Cosmologia Moderna, e contribuem para a consideração deste modelo cosmológico padrão como

um modelo fundamental para a descrição da dinâmica do nosso universo. Além disto, modificações e complementos deste modelo têm sido muito satisfatórios no que diz respeito à superação de vários problemas, conforme pode ser verificado na literatura acadêmica.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Visto que neste trabalho nos propomos a realizar uma pesquisa bibliográfica acerca de um tema de FMC a fim de torná-lo mais acessível para professores em formação, julgamos que o trabalho está parcialmente satisfatório. Isso, porque reconhecemos que durante a elaboração deste, não foi possível trazer todas as informações necessárias para uma compreensão efetiva destinada a leitores que ainda não possuem um conhecimento prévio sobre o tema. Atribuímos esta impossibilidade ao fato de se tratar de um assunto bastante complexo e extenso. No entanto, apesar disto, temos convicção de que este material pode ser ainda aproveitado pelo público-alvo em questão.

É evidente que para uma compreensão mais efetiva dos assuntos abordados neste trabalho, é desejável que seus leitores tenham a oportunidade de complementar as discussões aqui realizadas a partir de uma diversificação de fontes, e/ou através de um acompanhamento de profissionais que possam esclarecer eventuais passagens que não tenham ficado claras no texto. A fim de contribuir neste sentido, estabelecemos como uma perspectiva futura, o desenvolvimento e implementação de um minicurso acerca do referido tema. Outra perspectiva que pode ser considerada, é a de buscarmos ampliar este trabalho, tornando-o um material didático mais detalhado.

Além disso, é preciso realçar a satisfação que a autora deste trabalho obteve ao longo da jornada de sua composição, na qual foi possível se apropriar, pelo menos um pouco, de um tema tão encantador quanto a Cosmologia, que apesar de tão interessante, atualmente não se encontra devidamente inserido no currículo de formação de professores de Física.

REFERÊNCIAS

- ADERALDO , Vinicios S.; GONÇALVES, Victor P. Uma introdução à evolução do Universo segundo sua geometria e composição. **Revista Brasileira de Ensino de Física** , [s. l.], 2020.
- BZUNECK, J. A.; GUIMARAES, S. E. R. **Aprendizagem escolar em contextos competitivos**. Em BORUCHOVITCH, E. & BZUNECK, J. A (Orgs). **Aprendizagem: processos psicológicos e o contexto social**. 1ª ed. Petrópolis RJ: Ed. Vozes Ltda., 2004, v.1, p 251-277.
- CARROLL, S. (2003). **Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity**. 2003.
- DAMINELI, Augusto et al. **O céu que nos envolve: Introdução à astronomia para educadores e iniciantes**. 1.ed. São Paulo: Odysseus Editora Ltda., 2011.
- D'INVERNO. R. **Introducing Einstein's Relativity**. Oxford University Press, New York, 1992.
- HENRIQUES , Alfredo Barbosa. **Teoria da Relatividade Geral: Uma Introdução**. [S. l.: s. n.], 2009.
- LIMA, M. C. **Notas de aula do minicurso "Cosmologia"**. PPGF/UFPA. Belém – PA, 2008.
- MACHADO, Daniel Iria; NARDI, Roberto. AVALIAÇÃO DO ENSINO E APRENDIZAGEM DE FÍSICA MODERNA E CONTEMPORÂNEA NO ENSINO MÉDIO. **IV ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS**, Toledo - PR, 2003.
- MARTINS, R. A. **A Origem Histórica da Relatividade Especial**. Editora Livraria da Física, 2015.
- MARTINS, R. A. **O Universo: teorias sobre sua origem e evolução**. 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2012. 228 p.
- MEDEIROS, Marcos Genilson da Silva. **UM ESTUDO SOBRE A SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD**. Orientador: Jardel Lucena da Silva. 2022. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Física) - IFRN - Campus Santa Cruz, Santa Cruz - RN, 2022. Disponível em: <http://memoria.ifrn.edu.br/handle/1044/2365>. Acesso em: 28 ago. 2023.
- NÓBREGA , João Victor Jordão. **Uma introdução à cosmologia inflacionária**. 2021. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) - Universidade Federal da Paraíba - Centro de Ciências Exatas e da Natureza, [S. l.], 2021.
- OLIVEIRA, Fabio Ferreira de; VIANNA , Deise Miranda; GERBASSI, Reuber Scofano. Física moderna no ensino médio: o que dizem os professores. **Revista Brasileira de Ensino de Física** , Rio de Janeiro, v. 29, n. 3, p. 447 - 454, 2007.

SANTOS, A. C.; NASCIMENTO, S. D.; SOUZA, D. N. Ensino de Física Moderna: perspectivas e desafios sob o olhar de alguns professores de Física do Ensino Médio. **Scientia Plena**, Sergipe, v. 12, n. 11, 2016.

SCHUTZ , Bernard. **A First Course in General Relativity**. 2. ed. New York: Cambridge University Press, 2009.

SILVA, Ione Almeida. **UM ESTUDO INTRODUTÓRIO À COSMOLOGIA RELATIVÍSTICA**. 2018. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Física) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte - Campus Caicó, [S. l.], 2018.

SILVA, Jardél Lucena da. **Soluções escalares em cosmologia de branas**. 2011. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal de Campina Grande - Centro de Ciências e Tecnologia, [S. l.], 2011.

SOBRINHO, Laurindo. **O Big Bang e a evolução do universo**. Disponível em: <<http://www3.uma.pt/Investigacao/Astro/Grupo/Publicacoes/Pub/Modulos/modulo9.pdf>>. Acesso em: 30 jul. 2023.

STEINER , João E. A Origem do Universo. **Estudos Avançados**, São Paulo, v. 20, n. 58, p. 232 - 248, 2006.

VILLELA, Thyrso; WUENSCHÉ, Carlos Alexandre; LEONARDI, Rodrigo. Cosmologia Observacional. **V Escola do CBPF**, [s. l.], 2004.

WAGA, Ioav. Cem anos de descobertas em cosmologia e novos desafios para o século XXI. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, Brasil, v. 27, n. 1, p. 157 - 173, 2005.

WEINBERG, S. **Cosmology**. Oxford University Press: 2008.