INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO RIO GRANDE DO NORTE
IFRN *CAMPUS* SANTA CRUZ
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JOSÉ DANIEL DE LIMA GONÇALVES

RESOLUÇÃO DE TRIÂNGULOS E SUAS CONGRUÊNCIAS: UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO UTILIZANDO O GEOGEBRA

SANTA CRUZ - RN
2023

JOSÉ DANIEL DE LIMA GONÇALVES

RESOLUÇÃO DE TRIÂNGULOS E SUAS CONGRUÊNCIAS: UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO UTILIZANDO O GEOGEBRA

Monografia apresentada à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte, como Trabalho de Conclusão de Curso, em cumprimento às exigências legais e como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Me. Emanuel Adriano Dantas
Coorientadora: Dra. Lenina Lopes Soares Silva

SANTA CRUZ-RN
2023

Gonçalves, José Daniel de Lima
G635 Resolução de triângulos e suas congruências: uma proposta didática para o ensino médio utilizando o geogebra / José Daniel de Lima Gonçalves - 2023.
100 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte.
Orientador: Prof. Me. Emanuel Adriano Dantas.

1. Congruências. 2. Ensino médio. 3. Geogebra. 4. Geometria plana. 5. Triângulos. 6. Proposta didática. I. Dantas, Emanuel Adriano. II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnológica do Rio Grande do Norte. III. Título.

CDU 51

Catalogação da publicação na fonte elaborado pelo Bibliotecário Rubervanio da Silva Mateus - CRB-15/462
Biblioteca Mons. Raimundo Gomes Barbosa - IFRN/SC

JOSÉ DANIEL DE LIMA GONÇALVES

RESOLUÇÃO DE TRIÂNGULOS E SUAS CONGRUÊNCIAS: UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO UTILIZANDO O GEOGEBRA

Monografia apresentada à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte, como Trabalho de Conclusão de Curso, em cumprimento às exigências legais e como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Monografia apresentada e aprovada em 14/02/2023, pela seguinte Banca Examinadora:

BANCA EXAMINADORA

Emanuel Adriano Dantas

Emanuel Adriano Dantas, Me. Orientador
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte

Lenina Lopes Soares Silva

Lenina Lopes Soares Silva, Dra. Coorientadora
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte

. Examinador(a): Me. Jamerson Fernando Confort Martins
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte

Bruna Emanuelly Pereira Lucena

Examinador(a): Ma. Bruna Emanuelly Pereira Lucena
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte

“O homem não é nada além daquilo que a educação faz dele.”

Immanuel Kant

AGRADECIMENTOS

A Deus, soberano em minha vida, por me dar força e discernimento para superar todos os obstáculos, por sua imensa misericórdia e por fazer a mim mais do que mereço.

À minha Família, minha mãe Maria Ivaneide de Lima e meu pai José Adriano Gonçalves que durante os quatro anos de curso me incentivaram a estudar, seja com apoio, seja com esforço para que eu pudesse adquirir livros para estudar. A minha irmã Maysa, que me ajuda com café durante a execução da monografia e dos estudos.

À minha noiva, Maria Eduarda Guedes dos Santos, companheira que me apoiou em momentos que tive que trocar sua presença pelos livros, pelos estudos e os afazeres do curso.

Aos meus irmãos de curso, Luiz Carlos e Maria Francisca, que me ajudaram nesses anos em muitos momentos. Ao lado deles pude crescer, compartilhar a vida, o lado humano, além das grandes contribuições e evolução que tive estudando com eles, que me possibilitaram também conhecer mais dessa rica ciência que é a Matemática

Ao meu orientador, professora Emanuel Adriano Dantas, por toda paciência e comprometimento durante as orientações, por todo zelo e cuidado para que toda ideia fosse realizada da melhor maneira possível, fazendo com que seus alunos busquem sempre aprender melhor.

A minha coorientadora, professora Lenina Lopes, primeira a acreditar em mim durante o curso de Licenciatura em Matemática, que me fez crescer academicamente. Além disso, compartilhou conhecimentos durante as disciplinas em que ministrou para nossa turma.

À CAPES e ao IFRN *Campus* Santa Cruz e a todos os professores e professoras que puderam com uma porção de seus conhecimentos contribuir com minha formação.

A todos vocês, obrigado!

RESUMO

A geometria vem sendo estudada ao longo da história da humanidade por vários povos, cada um deles desenvolveu métodos para resolução de problemas que envolvem áreas das diversas figuras planas como os triângulos. No século XXI já é possível resolver problemas matemáticos e geométricos utilizando tecnologias digitais. Objetiva-se, neste trabalho, realizar uma pesquisa bibliográfica sobre o tema: resolução de problemas com triângulos e suas congruências, em busca de fundamentos teóricos para construir uma proposta didática para o ensino de geometria plana, com o auxílio do *Geogebra* como recurso educacional, visando melhorar a aprendizagem de alunos do Ensino Médio. Aborda-se como importante o uso de tecnologias digitais para o ensino de matemática e suas linguagens conforme as orientações normativas do Brasil, por meio da informática, almejando-se a superação de obstáculos didáticos entre professores e alunos. A metodologia para o alcance do objetivo tem caráter qualitativo e foi desenvolvida através de pesquisa bibliográfica e pesquisa na *internet* para fundamentar a perspectiva aplicada. Os procedimentos se encontram em uma revisão de literatura que abordou três vertentes, a história da geometria plana, a geometria plana e o ensino da geometria plana no Ensino Médio, bem como no estado do conhecimento acerca da produção acadêmica no Brasil sobre a temática, destaca-se nessa produção o uso do *Geogebra*, software que possui ferramentas que permitem abordar diversos conteúdos de matemática, especialmente de geometria, e que será usado na proposta didática. Essa proposta tem na sua composição uma sequência didática de cinco aulas de aproximadamente 45 minutos cada, sobre os conteúdos de lei dos senos, lei dos cossenos e os casos de congruências entre triângulos. Considera-se que, essa monografia poderá contribuir com professores da Educação Básica que queiram aplicar a proposta, pois reúne revisão bibliográfica e outros estudos sobre o tema em um só espaço, além de colaborar para que alunos do Ensino Médio possam melhorar suas aprendizagens sobre geometria plana utilizando o *GeoGebra* em seus estudos sobre resolução de problemas com triângulos.

Palavras-chave: Congruências; Ensino médio; *Geogebra*; Geometria plana; Triângulos; Proposta didática.

ABSTRACT

Geometry has been studied throughout human history by various peoples, each of whom has developed methods for solving problems involving areas of different plane figures such as triangles. In the 21st century it is already possible to solve mathematical and geometric problems using digital technologies. The objective of this work is to carry out a bibliographical research on the subject: solving problems with triangles and their congruences, in search of theoretical foundations to build a didactic proposal for teaching plane geometry, with the help of Geogebra as an educational resource, to improve the learning of high school students. The use of digital technologies for teaching mathematics and its languages according to the normative orientations of Brazil, through information technology, is considered as important, aiming at overcoming didactic obstacles between teachers and students. The methodology for achieving the objective is qualitative and was developed through bibliographic research and internet research to support the applied perspective. The procedures are found in a literature review that addressed three aspects, the history of plane geometry, plane geometry and the teaching of plane geometry in high school, as well as the state of knowledge about academic production in Brazil on the subject, highlights in this production, the use of Geogebra is used, software that has tools that allow approaching various contents of mathematics, especially geometry, and which will be used in the didactic proposal. This proposal has in its composition a didactic sequence of five classes of approximately 45 minutes each, on the contents of law of sines, law of cosines and cases of congruence between triangles. It is considered that this monograph can contribute to Basic Education teachers who want to apply the proposal, as it brings together a bibliographic review and other studies on the subject in a single space, in addition to collaborating so that High School students can improve their learning about geometry flat using GeoGebra in their studies on solving problems with triangles.

Keywords: *Congruences; High school; Geogebra; Plane geometry; Triangles; Didactic proposal.*

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Passos dos procedimentos metodológicos 19
Figura 2: Soma dos ângulos internos 25
Figura 3: Maior ângulo oposto ao maior lado 26
Figura 4: O maior ângulo oposto ao maior lado 27
Figura 5: Desigualdade Triangular 27
Figura 6: Triângulos Congruentes Caso ALA 29
Figura 7: Triângulos Congruentes Caso LLL 30
Figura 8: Caso LAA_0 31
Figura 9: Segunda situação: Demonstração caso LAAo 31
Figura 10: Caso LLA 32
Figura 11: Demonstração Caso LLA 33
Figura 12: Demonstração Caso LLA 33
Figura 13: Lei dos Senos 35
Figura 14: Lei dos Cossenos Caso 1 36
Figura 15: Lei dos Cossenos Caso 2 37
Figura 16: Resolver triângulo caso LLL 39
Figura 17: Resolver triângulo caso ALA 40
Figura 18: Resolver triângulo caso LAL. 41
Figura 19: Resolver triângulo caso LAAo 41
Figura 20: Resolver triângulo – “caso LLA” 42
Figura 21: Triângulo com ângulo oposto ao menor lado 43
Figura 22: Dois triângulos com ângulo oposto ao menor lado 43
Figura 23: Triângulos com ângulo oposto ao menor lado 44
Figura 24: Resolver triângulo - caso LLA 45
Figura 25: Triângulo com ângulo oposto ao maior lado 45
Figura 26: Geogebra no Matemática em Contextos 48
Figura 27: Objetivos do primeiro capítulo 49
Figura 28: Casos de Congruência no Livro Prisma 50
Figura 29: Atividade usando Geogebra 50
Figura 30: Publicações Anuais 53
Figura 31: Graus Acadêmicos das produções 53
Figura 32: Área do Conhecimento das produções acadêmicas sobre geometria plana 54
Figura 33: Janela de Ferramentas 65
Figura 34: Determinar um ponto 65
Figura 35: Círculo com Compasso. 66
Figura 36: Segmento no Geogebra. 66
Figura 37: Comprimento do Segmento 67
Figura 38: Semirreta 67
Figura 39: Reta 68
Figura 40: Círculo com Compasso 68
Figura 41: Ângulo ABC 69
Figura 42: Ângulo CBA 69

Figura 43: Janela de ângulo. 70
Figura 44:Ângulo de amplitude fixa 70
Figura 45: Pontos de Interseção 71
Figura 46: Distância 71
Figura 47: Exercício 1 72
Figura 48: Imagem com três segmentos no Geogebra..73
Figura 49: Círculo de raio 8 74
Figura 50: Círculos Concêntricos Caso LLL 74
Figura 51: Ponto no Círculo Caso LLL 75
Figura 52: Três Círculos Caso LLL 75
Figura 53: Pontos de Interseção Caso LLL 76
Figura 54: Dois triângulos congruentes Caso LLL..76
Figura 55: Ângulo do triângulo 77
Figura 56: Exercício 2..77
Figura 57: Círculos de raios 6 e 7 78
Figura 58: Pontos nos Círculos Caso LAL..79
Figura 59: Ângulo Caso LAL..79
Figura 60: Semirretas Caso LAL 79
Figura 61: Ângulo do exercício 2..80
Figura 62: Triângulo Caso LAL..80
Figura 63: Exercício 3..81
Figura 64: Segmento de Comprimento Fixo..82
Figura 65: Ângulos Caso ALA 82
Figura 66: Semirretas Caso ALA..83
Figura 67: Único ponto de interseção Caso ALA..83
Figura 68: Semirretas paralelas 84
Figura 69: Exercício 4..84
Figura 70: Dois segmentos de comprimento fixo..85
Figura 71: Círculo com ponto na circunferência 86
Figura 72: Ângulo fixo de 30° 87
Figura 73: Semirreta que passa por F’..87
Figura 74: Semirreta e pontos de interseção 88
Figura 75: Dois triângulos possíveis..89
Figura 76: Distâncias dos lados dos triângulos..89
Figura 77: Exercício 5..90
Figura 78: Círculos Concêntricos Caso LLA..91
Figura 79: Ângulo reto 92
Figura 80: Semirreta com origem em G..92
Figura 81: Triângulo Caso LLA..93

LISTA DE SIGLAS

BNCC - Base Nacional Comum Curricular

CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

MEC - Ministério da Educação

TDIC - Tecnologia Digital de Informação e Comunicação

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO **12**

2 PROCEDIMENTOS DE PESQUISA **17**

2.1 PESQUISA BIBLIOGRÁFICA 17

2.2 PESQUISA NA *INTERNET* 18

2.3 PESQUISA EM PERSPECTIVA APLICADA 20

3 REVISÃO DE LITERATURA **22**

3.1 GEOMETRIA PLANA NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA 22

3.2 GEOMETRIA PLANA 25

3.2.1 A soma dos ângulos internos de um triângulo **25**

3.2.2 Desigualdades no triângulo **25**

3.2.3 Desigualdade Triangular **27**

3.2.4 Congruência de Triângulos **28**

3.2.5 Casos de congruência de triângulos **29**

3.2.6 Resolução de Triângulos **34**

3.2.7 Natureza de um triângulo **38**

3.2.8 Resolução de Triângulos e os Casos de Congruências **39**

3.3 ENSINO DE GEOMETRIA PLANA NO ENSINO MÉDIO: ASPECTOS NORMATIVOS E DIDÁTICOS ... 46

4 ESTADO DO CONHECIMENTO SOBRE O ENSINO DE GEOMETRIA PLANA NO ENSINO MÉDIO COM USO DE TECNOLOGIAIS DIGITAIS **51**

4.1 GEOMETRIA PLANA NA PRODUÇÃO ACADÊMICA DO BRASIL (1989-2022) 52

4.3 GEOMETRIA PLANA NO ENSINO MÉDIO COM USO DE TECNOLOGIAIS DIGITAIS NA PRODUÇÃO ACADÊMICA DO BRASIL (2014 - 2021) 57

5 PROPOSTA DIDÁTICA PARA ENSINO DE GEOMETRIA PLANA COM USO DE TECNOLOGIAS DIGITAIS PARA O ENSINO MÉDIO **63**

5.1 APRESENTAÇÃO DA PROPOSTA 63

5.2 *GEOGEBRA* PARA O ENSINO DE GEOMETRIA PLANA 64

5.3 FERRAMENTAS NO GEOGEBRA 65

5.3.1 Determinar um ponto **65**

5.3.2 Determinar um ponto em objeto **65**

5.3.3 Construir um segmento **66**

5.3.4 Construir um segmento de comprimento fixo **66**

5.3.5 Construir uma semirreta **67**

5.3.6 Construir uma reta **67**

5.3.7 Construir um círculo com o Compasso **68**

5.3.8 Determinar a amplitude de um ângulo 68
5.3.9 Construir um ângulo com amplitude fixa 69
5.3.10 Determinar a Interseção de Dois Objetos.. 70
5.3.11 Determinar a distância entre dois pontos 71
5.4 ATIVIDADES SUGERIDAS 71
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS.. 94
REFERÊNCIAS.. 96
APÊNDICES.. 99

1 INTRODUÇÃO

A geometria é uma área do conhecimento da matemática que tem relação direta com o cotidiano de forma expressa e representada em diversos espaços sociais. Esse conhecimento é muito importante, pois mediante ele é possível resolver pequenos problemas, como a área de uma casa e até mesmo o volume de uma caixa d'água. Além de ser relevante para resolver problemas do dia a dia, esse conhecimento também é um facilitador da aprendizagem em outras áreas do conhecimento, por meio do descobrimento, de conjecturas e da construção de novos saberes. Conforme Lorenzato (1995, p.6), "[...] Aqueles que procuram um facilitador de processos mentais, encontrarão na geometria o que precisam: prestigiando o processo de construção do conhecimento, a Geometria valoriza o descobrir, o conjecturar e o experimentar".

A geometria plana foi estudada e desenvolvida por vários povos, cada um deles tinha seus métodos para resolução de problemas envolvendo áreas das diversas figuras planas como os triângulos, círculos e quadrados. A constituição desse conhecimento se deu em sua maior parte pela necessidade das civilizações de terem tal conhecimento para a aplicação no desenvolvimento da sociedade. De acordo com Kaleff (1994, p. 19),"[...] Foi da necessidade do Homem em compreender e descrever o seu meio ambiente (físico e mental), que as imagens, representadas através de desenhos, foram lentamente conceitualizadas até adquirirem um significado matemático, na Geometria e uma forma, nas Artes."

Ainda segundo Kaleff (1994), as necessidades práticas das sociedades que viviam à margem de rios como Eufrates, Nilo e Ganges, de delimitar e quantificar regiões planas alagadas e a área dessas superfícies, deram origem ao pensamento geométrico plano, sendo a partir desse momento que foram formadas as ideias geométricas. Desse modo, se instituiu a geometria que era prática e se utilizava de traçados de formas e cálculos de medidas de comprimento e de área.

Euclides de Alexandria, foi um grande matemático, responsável por várias obras, porém, a de maior destaque e relevância encontra-se no livro: Os Elementos, o mais antigo texto grego a chegar completo no nosso dia a dia. Euclides foi o grande responsável por organizar o conhecimento da matemática grega até o momento, e é referido na literatura porque teve o mérito de fundamentar suas ideias em um método lógico, formulado com argumentos e definições de forma clara, possibilitando, assim, a compreensão dos símbolos e palavras do texto (ALVES, 2017).

De acordo com Alves (2017),

> Euclides foi o primeiro a tornar o estudo sobre geometria como uma ciência dedutiva, onde uma afirmação deve ser deduzida de outras mais simples e assim por diante. Afirmações simples e não demonstradas, que seriam aceitas como verdadeiras pela sua simplicidade, Euclides as chamou de "postulados", onde através destes, ele procurou analisar as propriedades de figuras e assim formular leis mais rigorosas deixando a aproximação de lado focando em demonstrá-las (ALVES, 2017, p.19, grifo do autor).

No Brasil, houve transformações ao longo do tempo no que tange a relevância da geometria. Essas transformações podem ser notadas por um estudo da história do ensino de geometria no país.

No início do século XX o Brasil era um país de essência agrícola que vivia da exportação e da comercialização de seus produtos, apesar de ter uma grande concorrência entre os países que eram mais desenvolvidos nesse período. A maioria da população era analfabeta e não tinha nem mesmo a escolaridade elementar, que era privada apenas para os filhos de latifundiários, sendo esses os que tinham acesso à educação de nível superior. Nesse período, o ensino secundário era geralmente pago e destinava-se à elite para preparação ao nível superior, o conteúdo de matemática era dividido, sendo que na sua maioria, os professores eram engenheiros e militares (PAVANELLO, 1993).

O conhecimento geométrico vem sendo ensinado no Brasil desde muito tempo, porém, historicamente esse ensino mostra que não há regularidade, e perpassa por diversas etapas até chegar a esse momento histórico. Durante uma grande parcela da história do ensino dessa área, houve na verdade um abandono gerado pela dificuldade dos professores para encontrarem meios para ensinar, sentindo-se inseguros para trabalhar com geometria. Por outro lado, havia professores que continuavam a ensinar, porém, o tempo para trabalhar o tópico acabava sendo posto para o fim do ano letivo, talvez numa tentativa, ainda que inconsciente de utilizar a falta de tempo como desculpa pela não realização do trabalho que trata do tópico em questão. Todavia, era notória também a inquietação por parte dos professores, evidenciado pela procura nas universidades de cursos oferecidos sobre a temática (PAVANELLO, 1993). Isso denota outro problema, a falta de conhecimento dos professores.

Dessa constatação de Pavanello (1993) nota-se que houve um período do ensino de matemática, em particular do ensino da geometria, que ficou marcado por um grande abandono, o que acabou sendo amenizado com uma distribuição desses conteúdos de geometria nos livros didáticos de matemática para que os alunos tivessem conhecimento da existência de tal conteúdo. Apesar desse abandono, é possível avaliar a importância da geometria plana para a educação do país, visto que esta é presente no cotidiano da sociedade, direta e indiretamente.

Lorenzato (1995) destaca a relevância do estudo da geometria na escola, partindo da visão de que através dela, os alunos poderão resolver situações problemas geometrizados, sendo que, sem a geometria, outras áreas do conhecimento humano serão afetadas, visto que sem esse conhecimento a leitura e interpretação do mundo fica inviável, a comunicação das ideias se reduz a uma visão da matemática que se torna distorcida, sem enquadre e delimitação espacial.

A geometria plana, é a área da matemática voltada para o estudo de figuras planas. Essa é introduzida pelos conceitos primitivos: pontos, planos, retas, e se expande até o cálculo da área e do perímetro dessas figuras. Ela sempre esteve presente nas construções, seja em prédios, seja em igrejas. Ela é também utilizada para o cálculo das áreas de projetos de prédios e terrenos a serem vendidos.

É possível, dessa forma, notar a relevância desse conhecimento para o crescimento das ornamentações de estruturas de grandes construções, como é o caso dos triângulos, uma das figuras geométricas mais importantes que é um polígono formado por 3 lados e que possui uma propriedade muito utilizada na construção civil que é a rigidez de sua forma, por esse motivo, se for necessário fazer uma estrutura rígida, o triângulo é uma alternativa viável.

Lorenzato (1995) também comenta sobre a presença da geometria na sociedade quando informa que,

> [...] A Geometria está por toda parte", desde antes de Cristo, mas é preciso conseguir enxergá-la ... mesmo não querendo, lidamos em nosso cotidiano com as ideias de paralelismo, perpendicularismo, congruência, semelhança, proporcionalidade, medição (comprimento, área, volume), simetria: seja pelo visual (formas), seja pelo uso no lazer, na profissão, na comunicação oral, cotidianamente estamos envolvidos com a Geometria (LORENZATO, 1995, p.5).

Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018), que é o instrumento normativo norteador dos currículos da Educação Básica do país, e que define os conteúdos que todos os discentes devem aprender na escola, tem objetivos que almejam ser alcançados sobre geometria no Ensino Médio que é a última etapa da Educação Básica (BRASIL, 1996). Na BNCC para o Ensino Médio observa-se,

> [...] Em relação ao pensamento geométrico, eles desenvolvem habilidades para interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano, identificar transformações isométricas e produzir ampliações e reduções de figuras. Além disso, são solicitados a formular e resolver problemas em contextos diversos, aplicando os conceitos de congruência e semelhança (BRASIL, 2018, p.517).

É possível observar que na BNCC há uma preocupação sobre o pensamento geométrico, de resolver problemas em diversos contextos e aplicar conceitos de congruência e geometria.

De acordo com Alves (2017), uma maneira mais lúdica e prazerosa para o ensino de geometria é o uso de tecnologias digitais como recurso didático. Esse recurso é útil ao tentar fugir de metodologias que enfoquem a memorização de conceitos e fórmulas por meio somente da oralidade.

Entre os recursos didáticos disponível há o *Geogebra*, um *software* que tem ferramentas que os demais *softwares* gratuitos não tem, tal como sua visualização, bem como a dinamicidade e a possibilidade de manipulação nas construções. As construções de geometria plana possíveis no *Geogebra* são: pontos, segmentos, retas, ângulos, os polígonos, círculos, além disso, é possível manipular essas figuras de acordo com o que se objetiva em seu uso.

Diante do exposto, questiona-se: quais as dificuldades de aprendizagem sobre geometria plana de alunos do Ensino Médio, e como o ensino de Matemática e o uso de tecnologias digitais pode colaborar para sanar essas dificuldades tendo como público-alvo alunos do Ensino Médio?

Desse modo, o objetivo geral dessa pesquisa é realizar uma pesquisa bibliográfica sobre o tema buscando fundamentos teóricos para construir uma proposta didática para o ensino de geometria plana, com o auxílio do *Geogebra* como recurso educacional, visando melhorar a aprendizagem de alunos do Ensino Médio. Para alcançar esse objetivo foram formulados os seguintes objetivos específicos:

a) Realizar uma revisão de literatura sobre geometria plana;

b) Elaborar o estado do conhecimento sobre o ensino de geometria plana no Brasil com uso de tecnologias digitais;

c) Analisar a proposta da BNCC-2018 para o ensino de geometria plana no Ensino Médio;

d) Examinar o conteúdo de geometria plana presente em 2 livros didáticos do Ensino Médio;

e) Elaborar uma proposta com uma sequência didática que poderá ser aplicada no Ensino Médio sobre geometria plana com uso do *Geogebra*.

Considerando-se a importância do conteúdo em tela, cabe à escola e ao professor procurar mecanismos que o auxiliem no ensino desse conteúdo, visto que ele está sendo inserido cada vez mais em nossa sociedade e àqueles que se abstiverem dela, terão um desafio a enfrentar nessa inserção social via conhecimentos matemáticos.

Essa monografia está estruturada em seis capítulos, que se iniciam com essa Introdução – como capítulo introdutório, e se encerram com as Considerações Finais como capítulo de conclusão, além dos elementos obrigatórios pré-textuais e pós-textuais.

No capítulo 2 está descrito os procedimentos metodológicos que basearam a construção dessa monografia, quais sejam: a pesquisa bibliográfica, pesquisa na internet e pesquisa em perspectiva aplicada.

No capítulo 3 descrevemos a revisão de literatura que disserta sobre a história da geometria plana, a geometria plana tanto em seus aspectos normativos como históricos, conhecimentos importantes para o trabalho e o que é abordado em livros didáticos e no currículo da Educação Básica no Brasil.

No capítulo 4 abordamos o estado do conhecimento que objetiva expor sobre o ensino de geometria plana no Brasil, direcionado para o Ensino Médio com uso de tecnologias digitais.

No capítulo 5 apresentamos a proposta para o ensino de geometria plana com o uso do *Geogebra* em uma sequência didática.

Espera-se, portanto, que essa pesquisa possa auxiliar a identificar algumas lacunas advindas da Educação Básica, para de igual modo, contribuir para o ensino de Matemáticavisando facilitar a aprendizagem dos alunos com uso de tecnologias digitais. Além disso, pretende-se também colaborar para que os professores de Matemática tenham mais ferramentas que contribuam para uma aprendizagem mais significativa no ensino de geometria plana, especialmente com uso do *Geogebra* para resolução de problemas.

2 PROCEDIMENTOS DE PESQUISA

Neste capítulo descrevemos como foi realizada a pesquisa em termos metodológicos e procedimentais.

A metodologia utilizada neste trabalho tem caráter bibliográfico e é de cunho qualitativo, pois foram analisados teses, dissertações, artigos, livros e documentos oficiais disponíveis na *internet* tendo em vista fundamentar a proposta didática.

Entende-se, por pesquisa bibliográfica, aquela que é constituída, principalmente em análise e interpretação de "livros, revistas, publicações em periódicos e artigos científicos, jornais, boletins, monografias, dissertações, teses, material cartográfico, internet [...]" (PRODANOV; FREITAS, 2013, p. 54).

Neste trabalho, foi realizada uma revisão bibliográfica com vários autores que fundamentaram a relevância do tema para a humanidade, sua história e o ensino da geometria plana no Brasil.

Para mapear o estado do conhecimento sobre o ensino de geometria plana no Ensino Médio com o uso de tecnologias digitais foi feita uma busca no Catálogo de teses e dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), com o descritor, "Geometria Plana", onde foram verificados os resultados de estudos antecedentes da temática em questão, desenvolvidos para o Ensino Médio com uso de tecnologias, e catalogados para melhor análise.

2.1 PESQUISA BIBLIOGRÁFICA

A pesquisa do tipo bibliográfica é definida segundo Severino (2016) como sendo:

> [..] aquela que se realiza a partir do registro disponível, decorrente de Pesquisas anteriores, em documentos impressos, como livros, artigos, teses etc. Utiliza-se de dados ou de categorias teóricas já trabalhados por outros pesquisadores e devidamente registrados. Os textos tornam-se fontes dos temas a serem pesquisados. O pesquisador trabalha a partir das contribuições dos autores dos estudos analíticos constantes dos textos (SEVERINO, 2016, p.131).

É possível observar que, para Severino esse tipo de pesquisa auxilia em estudos analíticos, ou como fonte para o tema. Desse modo, a pesquisa bibliográfica se torna uma ferramenta que pode ajudar em diversos trabalhos acadêmicos, em especial aqueles que precisam compreender os estudos antecedentes de uma determinada temática como no caso da investigação desenvolvida nessa monografia.

Na construção da história da geometria plana, bem como no desenvolvimento do trabalho monográfico foram utilizados artigos, monografias, teses e dissertações, além do livro: História da matemática' de Boyer (1974).

Na pesquisa bibliográfica inclui-se a análise realizada no documento que norteia o currículo da Educação Básica do país, a BNCC (BRASIL, 2018) sobre a temática, além do uso de artigos e dissertações, foram analisados para fundamentar a elaboração da proposta didática os seguintes livros: Geometria Euclidiana Plana de Barbosa (1995), Geometria Plana e Construções Geométricas de Rezende e Queiroz (2000).

O resultado desta pesquisa bibliográfica foi utilizado como base para a orientação e construção do trabalho, em conjunto com a análise dos livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio, sendo que através deste, foi possível observar e refletir sobre os estudos já realizados acerca do ensino de geometria plana na Educação Básica. Esses resultados estão apresentados no capítulo 4, onde há a exposição do estado do conhecimento e no capítulo 5 que apresenta a proposta do trabalho.

2.2 PESQUISA NA *INTERNET*

A *internet* permite melhor conexão e rapidez no encontro de fontes confiáveis para a pesquisa. Severino (2016) fala sobre o que rede mundial de computadores se tornou para a pesquisa, pois para ele, essa

> [...] tornou-se uma indispensável fonte de pesquisa para os diversos campos de conhecimento. Isso porque representa hoje um extraordinário acervo de dados que está colocado à disposição de todos os interessados, e que pode ser acessado com extrema facilidade por todos eles, graças à sofisticação dos atuais recursos informacionais e comunicacionais acessíveis no mundo inteiro (SEVERINO, 2016, p.145).

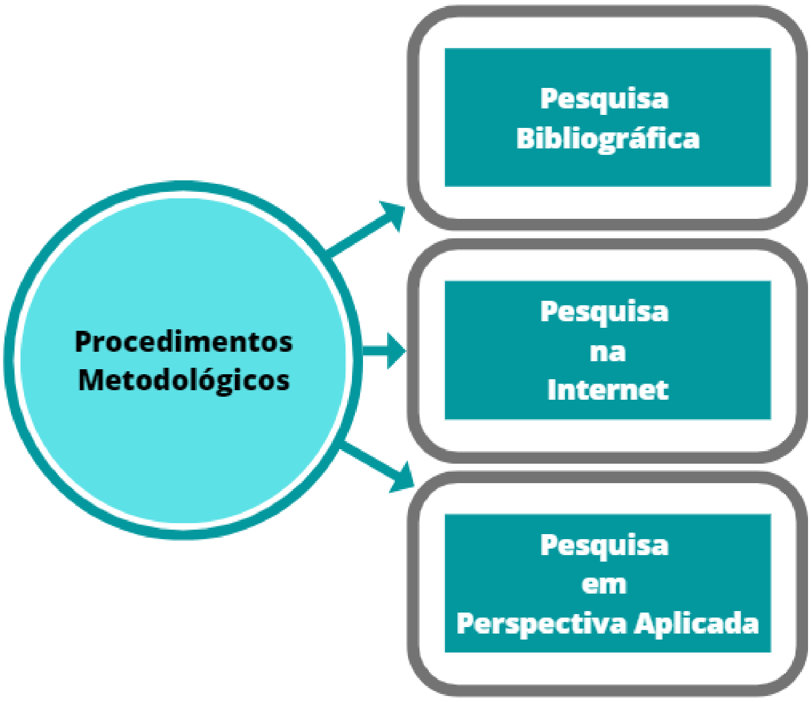
Conforme Severino (2016) a *internet* permite que se encontre com maior facilidade informações que são acessíveis. Vale ressaltar também que é necessário utilizar fontes que sejam confiáveis para o trabalho científico, fontes credenciadas no meio acadêmico.

Para a construção do trabalho foram utilizados artigos, teses e dissertações encontradas na *internet* que auxiliaram a fundamentar o trabalho e compreender a relevância do tema de pesquisa. Esses foram encontrados na busca pelo estado do conhecimento, ou seja, uma pesquisa que visa categorizar e compreender o quantitativo e qualitativo do objeto de pesquisa, permitindo uma melhor análise dos resultados obtidos. A investigação sobre o estado do conhecimento foi realizada no Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), onde foi encontrada a produção acadêmica sobre o tema a qual foi analisada em relação a critérios estabelecidos, posto que esse é conceituado como um estudo quantitativo/qualitativo, descritivo da trajetória e distribuição da produção científica sobre um determinado objeto, estabelecendo relações contextuais com um conjunto de outras variáveis como, por exemplo, data de publicação, temas e periódicos, etc. (UNIVERSITAS, 2004, não paginado).

A pesquisa do tipo estado conhecimento foi utilizada para catalogar os trabalhos de teses e dissertações que se direcionavam a geometria plana no Ensino Médio. Os resultados obtidos serviram para análise do que está sendo proposto para o ensino de geometria, visando localizar lacunas para à área e objetivando construir a proposta didática que é a finalidade desse trabalho monográfico. O estado do conhecimento está apresentado no capítulo 4 dessa monografia.

Em seguida, na Figura 1 mostra-se um infográfico com o passo a passo dos procedimentos metodológicos.

Figura 1: Passos dos procedimentos metodológicos



Fonte: Acervo do autor, 2023.

2.3 PESQUISA EM PERSPECTIVA APLICADA

A aplicação dos resultados que foram obtidos na pesquisa bibliográfica e na *internet* foram fundamentais para a elaboração da proposta didática para o ensino de geometria plana, que tem a perspectiva de ser aplicada, principalmente no Ensino Médio.

Essa proposta utilizará como recurso metodológico o uso de Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC), visando uma participação mais ativa dos discentes. Por meio da utilização da proposta o(a) professor(a) poderá ter a colaboração participativa do alunado, que será orientado a seguir os passos para que alcance o objetivo almejado, que é a aprendizagem.

Para Ponte, mencionado por Mendes, o uso do computador no ensino da matemática contribui para:

> - Uma revitalização da importância das competências de cálculo e de simples manipulação simbólica, que podem ser realizadas de forma mais simples e eficiente;
> - Um reforço do papel da linguagem gráfica e de forma de apresentação, permitindo novas estratégias;
> - Uma atenção redobrada às capacidades intelectuais de ordem mais elevada, que situam para além do cálculo e da simples compreensão de conceitos e relações matemáticas;
> - O crescimento pelo interesse de projetos e atividades de modelagem matemática (MENDES *apud* PONTES, 2009, p.114).

A Organização das Nações Unidas para Educação, a Ciência, e a Cultura (UNESCO) defende que “uma educação de qualidade para todos, hoje em dia, não pode ser obtida sem que se considere a dimensão tecnológica” (UNESCO, 2016, p. 43). Sendo este, para os autores, um dos desafios do ensino de matemática no mundo.

De acordo com Mendes (2009), atualmente a informática é um importante componente para a aprendizagem matemática no mundo, por meio dela almeja-se a superação de obstáculos encontrados entre professores e estudantes no processo de ensino-aprendizagem.

Em contraposição ao que era defendido há alguns anos, Borba e Penteado defendem uma visão diferente sobre o acesso à informática, para esses: “[...] O acesso à informática deve ser visto como um direito e, portanto, nas escolas públicas e particulares o estudante deve poder usufruir de uma educação que no momento atual inclua, no mínimo, uma “alfabetização tecnológica” (BORBA, PENTEADO, 2016, p. 16, grifo do autor).

A tecnologia a ser utilizada na proposta didática é o *Geogebra*[1], um *software* gratuito disponível na *internet*. Esse é capaz de auxiliar, principalmente, nas construções e visualizações de objetos geométricos, além de que, possibilita a manipulação desses objetos para que o aluno desenvolva bem o conteúdo de uma forma mais ativa e atrativa durante a aprendizagem.

A proposta desenvolvida está apresentada no capítulo 6, onde é apresentada uma sequência didática que relaciona resolução de triângulos quaisquer e congruências de triângulos utilizando o *Geogebra* para auxiliar na visualização da resolução de maneira mais clara.

No próximo capítulo está a revisão de literatura, que foi realizado considerando a história da geometria plana, conteúdos necessários para a proposta e análise de livros didáticos do ensino médio, além da BNCC em relação ao conteúdo da proposta.

[1] O *Geogebra* é um software desenvolvido pela tese de Markus Hohenwarter.

3 REVISÃO DE LITERATURA

Objetiva-se verificar como o tema em questão vem sendo discutido e conceituado na literatura específica da área, posto que segundo Severino (2016), a revisão de literatura, é um processo necessário para que se possa avaliar o que já se produziu sobre o assunto em pauta, situando-se, sobre o tema em relação a contribuição que a pesquisa projetada pode dar ao conhecimento do objeto a ser pesquisado.

Desse modo, a revisão de literatura foi feita em três etapas:

a) a primeira sobre a geometria plana na história da matemática;
b) a segunda sobre alguns conceitos e teoremas; e
c) a terceira sobre o ensino de geometria plana no Ensino Médio e os aspectos normativos vigentes para os currículos de matemática no Brasil.

3.1 GEOMETRIA PLANA NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

A geometria surgiu provavelmente das necessidades impostas nos períodos em que civilizações antigas viveram e produziram conhecimentos visando a solução de seus problemas cotidianos. Essas necessidades eram em especial sobre cálculo áreas e volumes, principalmente na repartição de terra e na contagem de volume dos grãos necessários para a sobrevivência.

Entre essas civilizações, estava a babilônica, responsável por grande contribuição à matemática, incluindo-se à geometria plana. Para Eves (2011),

> [...] A geometria babilônica se relaciona intimamente com a mensuração prática. De numerosos exemplos concretos infere-se que os babilônios do período 2000 a.C. a 1600 a.C. de-viam estar familiarizados com as regras gerais da área do retângulo, da área do triângulo retângulo e do triângulo isósceles (e talvez da área de um triângulo genérico), da área de um trapézio retângulo [...] (EVES, 2011, p. 60).

Assim, é possível perceber que os babilônicos tinham nesse período conhecimentos geométricos que permitiam calcular a área de algumas figuras planas. Segundo Eves (2011), eles também tinham uma aproximação para calcular o comprimento da circunferência e área do círculo, e “[...] Considerava-se uma circunferência como o triplo de seu diâmetro e a área do círculo como um duodécimo da área do quadrado de lado igual a circunferência respectiva (regras corretas para π= 3) [...]” (EVES, 2011, p.61).

Os egípcios por exemplo, se utilizavam da matemática para solucionar problemas do cotidiano, esse conhecimento matemático, no entanto não tinha rigor matemático, visto que o intuito da civilização egípcia visava em especial a aplicação dos conhecimentos de modo prático à resolução de situações que eram necessárias, portanto, não havia demonstrações dos conhecimentos utilizados por eles. Na geometria plana, os egípcios calculavam áreas de terreno e do círculo, sendo que para o retângulo tinha como maneira de calcular sua área, ela era obtida pelo produto da medida da base pela medida da altura. O conhecimento matemático dos egípcios está inserido em papiros, que contém soluções matemáticas de problemas que essa civilização enfrentava, bem como sua solução.

Eves (2011) destaca a origem prática dos problemas que estavam contidos nos papiros Rhind e Moscou ao afirmar que,

> [...] Muitos dos 110 problemas dos papiros Rhind e Moscou mostram sua origem prática ao lidar com questões sobre o quão substanciosos eram o pão e a cerveja, sobre balanceamento de rações para gado e aves domésticas e sobre armazenamento de grãos. Para muitos desses problemas a resolução não exigia mais do que uma equação linear simples e o método empregado ficou conhecido mais tarde na Europa como regra de falsa posição (EVES, 2011, p.73).

Percebe-se que, a geometria plana desses povos era utilitária, ou seja, prática. Conforme Kaleff (1994), foi a obra de Euclides que permitiu uma apresentação de forma estruturada dos conhecimentos da geometria,

> [...] Assim, teve origem uma geometria utilitária caracterizada pelo traçado de desenhos de formas, pelo estabelecimento de fórmulas e pelo cálculo de medidas de comprimento de área, de volume, etc. Foi, no entanto, com a compilação desses conhecimentos feitos por Euclides (300 A.C) nos livros “Os elementos” que esses conhecimentos foram apresentados, pela primeira vez, de forma estruturada (KALEFF, 1994, p. 19 – 20, grifo no original).

A contribuição de vários povos enriqueceu a história da geometria plana, porém o trabalho de maior notoriedade é a publicação da obra “Os elementos”, realizada por Euclides de Alexandria que juntou de maneira notável o conhecimento matemático desenvolvido até o período na Grécia, compilando conhecimentos de geometria plana, aritmética, geometria espacial e geometria analítica (KALEFF, 1994). A visibilidade dessa obra se dá pelo rigor matemático desenvolvido e aplicação do método axiomático no conhecimento abordado nos livros que a compõem. Nela as resoluções eram realizadas por meio de construções as quais eram feitas com régua e compasso.

Aragão (2009) também discorre sobre “Os elementos” e sua relevância. Para ele,

> [...] Os Elementos, de Euclides, não só constituem a obra grega mais antiga e importante a chegar ao nosso conhecimento, mas também é o texto mais claro de todos os tempos. Foi composto cerca de 300 anos a.C., foi copiado e reeditado muitas vezes, algumas das quais, com inserção de erros e até variações inevitáveis (ARAGÃO, 2009, p.24).

Já Morgado, Wagner e Jorge (1990) tratam da dimensão dessa obra e como ela repercute até os dias atuais e informam que,

> a Geometria toma dimensão nova com o aparecimento de uma grande obra em 13 volumes chamada os ELEMENTOS de Euclides, com mais de mil edições até os dias de hoje. Nele a Geometria é apresentada de forma lógica e organizada, partindo de algumas suposições simples e desenvolvendo-se por raciocínio lógico (MORGADO, WAGNER, JORGE,1990, p.1).

A visibilidade dessa obra se dá pelo rigor matemático desenvolvido e aplicação do método axiomático no conhecimento abordado. “Os Elementos” de Euclides se compõem dos seguintes livros, conforme Roque (2012):

> a) Livro I: primeiros princípios e geometria plana de figuras retilíneas: construção e propriedades de triângulos, paralelismo, equivalência de áreas e teorema “de Pitágoras”.
> b) Livro II: contém a chamada “álgebra geométrica”, trata de igualdades de áreas de retângulos e quadrados.
> c) Livros III e IV: propriedades de círculos e adição de figuras, como inscrever e circunscrever polígonos em círculos.
> d) Livro V: teoria das proporções de Eudoxo, razões entre grandezas de mesma natureza.
> e) Livro VI: aplicações do livro V à geometria, semelhança de figuras planas, aplicação de áreas.
> f) Livros VII a IX: estudo dos números inteiros - proporções numéricas, números primos, maior divisor comum e progressões geométricas.
> g) Livro X: propriedades e classificação das linhas incomensuráveis.
> h) Livros XI a XIII: geometria sólida em três dimensões, cálculo de volumes e apresentação dos cinco poliedros regulares (ROQUE, 2012, p.163-164).

Portanto, compreende-se que, a geometria plana na história da matemática tem um papel importante, desde as antigas civilizações até Euclides, que com sua sistematização, organizou todo o conhecimento grego em torno do tema em “Os elementos” que se tornaram uma obra matemática clássica para o estudo de geometria plana.

3.2 GEOMETRIA PLANA

Nesta seção, abordaremos os principais conceitos e proposições geométricas a serem utilizados em na proposta didática apresentada no capítulo 5.

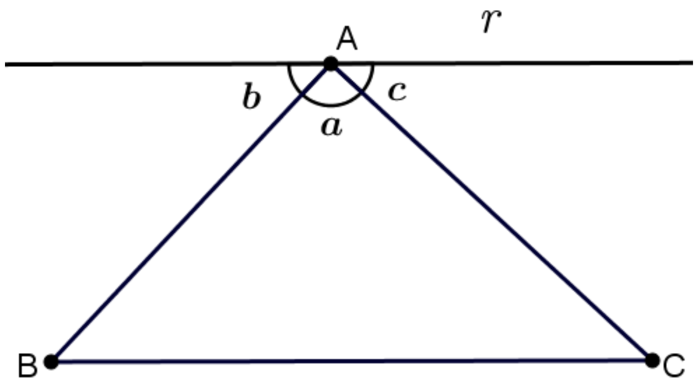
3.2.1 A soma dos ângulos internos de um triângulo

A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

Demonstração:

Dado o triângulo ABC, seja r a reta paralela ao lado $\overline{BC}$ e passando pelo vértice A. Consideremos os ângulos a, b e c, como aparecem na Figura 2.

Figura 2: Soma dos ângulos internos



Fonte: Acervo do autor, 2023.

$$m(\hat{a}) + m(\hat{b}) + m(\hat{c}) = 180°$$

Como $\overleftrightarrow{AB}$ é transversal a $\overleftrightarrow{BC}$ e a r são paralelas, temos que $\hat{b} \cong A\hat{B}C$, analogamente, mostramos que $\hat{c} \cong A\hat{C}B$.

Logo, $m(B\hat{A}C) + m(A\hat{B}C) + m(B\hat{C}A) = 180°$.

3.2.2 Desigualdades no triângulo

Nesta seção, abordaremos as relações de desigualdades entre os lados de um triângulo e seus ângulos opostos.

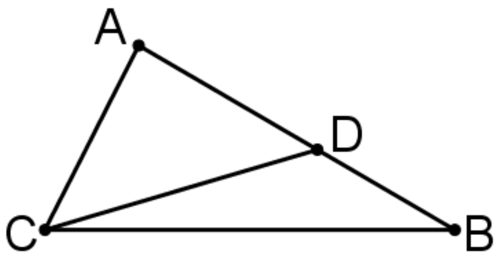
3.2.2.1 Ao maior ângulo opõe-se o maior lado

Se dois lados de um triângulo não são congruentes então o maior ângulo é oposto ao maior lado

Demonstração:

Consideremos um triângulo ABC, como a Figura 3, com $\overline{AB} > \overline{AC}$, e provemos que $m(\widehat{C}) > m(\hat{B})$.

Figura 3: Maior ângulo oposto ao maior lado



Fonte: Acervo do Autor, 2023.

De fato, seja *D* o ponto na semirreta $\overrightarrow{AB}$ tal que $\overline{AD} \cong \overline{AC}$.

Como $\overline{AC} < \overline{AB}$, o ponto D pertence ao segmento $\overline{AB}$ e, assim, a semirreta $\overrightarrow{CD}$ divide o ângulo $\hat{C}$.

Logo, $m(\hat{C}) > m(A\hat{C}D)$:

Por outro lado, como o triângulo *ACD* é isósceles, temos

$$m(A\hat{C}D) = m(A\widehat{D}C)$$

Como $A\widehat{D}C$ é ângulo externo do triângulo *CBD*, tem-se $m(A\widehat{D}C) > m(\hat{B})$.

Portanto, $m(\widehat{C}) > m(\hat{B})$.

3.2.2.2 Ao maior lado opõe-se o maior ângulo

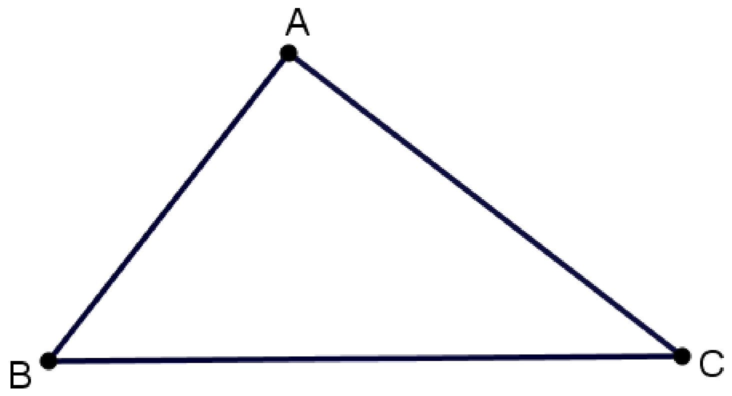
Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então os ângulos opostos a eles não são congruentes e o maior deles está oposto ao maior lado.

Demonstração:

Consideremos um triângulo ABC, como a Figura 4, com $m(\hat{C}) > m(\hat{B})$.

Queremos mostrar que $\overline{AB} > \overline{AC}$.

Figura 4: O maior ângulo oposto ao maior lado



Fonte: Acervo do autor, 2023.

Temos três possibilidades para as medidas $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$: $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, $\overline{AB} < \overline{AC}$ e $\overline{AB} > \overline{AC}$.

Se $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, então temos que $\hat{E} \cong \hat{C}$, o que contradiz a hipótese.

Se $\overline{AB} < \overline{AC},$ então pelo teorema anterior temos $m\hat{C} < m\hat{B}$, o que novamente contradiz a hipótese.

Portanto a única possibilidade verdadeira é $\overline{AB} > \overline{AC}$.

3.2.3 Desigualdade Triangular

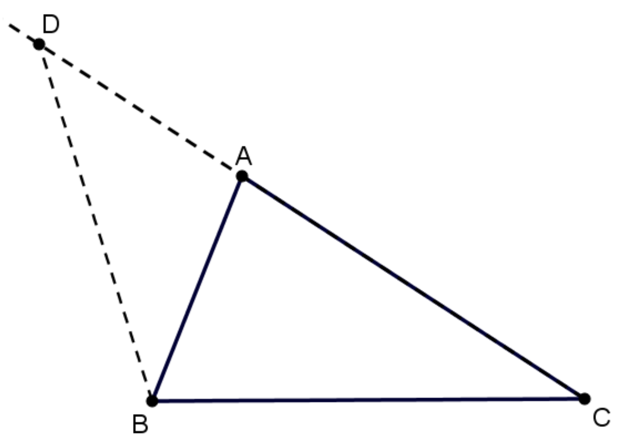
A soma dos comprimentos de dois lados quaisquer de um triângulo é maior que o comprimento do terceiro lado.

Demonstração:

Consideremos ABC um triângulo qualquer, conforme a Figura 5.

Queremos mostrar que $\overline{AB} + \overline{AC} > \overline{BC}.$

Figura 5: Desigualdade Triangular



Fonte: Acervo do Autor, 2023.

Seja *D* um ponto da semirreta oposta a $\overrightarrow{AC}$ tal que $\overline{AD} \cong \overline{AB}$. O triângulo ADB é então isósceles com base $\overline{BD}$.

Como A está entre C e D, temos $\overline{DC} = \overline{DA} + \overline{AC}$, ou seja, $\overline{DC} = \overline{AB} + \overline{AC}$.

Temos, $B\hat{D}C \cong D\hat{B}A < D\hat{B}C$ e, como em um triângulo, o maior ângulo se opõe o maior lado aplicado, então, no $\triangle DBC$ temos $\overline{DC} > \overline{BC}$.

Mas, como $\overline{AD} \cong \overline{AB}$ e que $\overline{DC} = \overline{AD} + \overline{AC}$ segue que $\overline{DC} = \overline{AB} + \overline{AC}$.

Logo $\overline{AB} + \overline{AC} > \overline{BC}$, e a afirmação se verifica.

3.2.4 Congruência de Triângulos

Para iniciar as demonstrações sobre os casos de congruência, primeiro vamos definir o que são segmentos congruentes e ângulos congruentes. Rezende e Queiroz (2016) definem segmentos congruentes e ângulos congruentes:

a) Dois segmentos são congruentes se possuem a mesma medida ou comprimento.

b) Dois ângulos são congruentes quando possuem a mesma medida.

De maneira mais intuitiva, duas figuras planas serão congruentes se puderem ser deslocadas até que coincidam uma com a outra.

> De maneira geral, de um modo intuitivo, duas figuras planas são congruentes se uma delas puder ser deslocada, sem que sejam modificada sua forma nem suas medidas, até que passe a coincidir com a outra. Se duas figuras F_1 e F_2 forem congruentes, isso será denotado por $F_1 \cong F_2$ (REZENDE, QUEIROZ, 2016, p.31).

A seguir, será exposta a definição de triângulos congruentes segundo Rezende e Queiroz (2016):

> Dois triângulos são congruentes se for possível definir uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que sejam congruentes os pares de lados correspondentes e também sejam congruentes os pares de ângulos correspondentes. Assim, definida a correspondência $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow E$ e $C \leftrightarrow F$ entre os triângulos *ABC* e *DEF*, se $\hat{A} \cong \hat{D}$, $\hat{B} \cong \hat{E}$, $\hat{C} \cong \hat{F}$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ e $\overline{CA} \cong \overline{FD}$, dizemos que os dois triângulos são congruentes, o que denotamos por $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (REZENDE, QUEIROZ, 2016, p.32).

É possível observar que para que um triângulo seja congruente é necessário que seis elementos sejam congruentes: os três lados e os três ângulos. Porém, existem os chamados “casos de congruência”, que permitem com apenas três elementos do triângulo, seja possível analisar se dois triângulos são ou não congruentes.

3.2.5 Casos de congruência de triângulos

a) **Dois lados e o ângulo compreendido entre eles respectivamente congruentes (Caso LAL)**

Se dois lados de um triângulo e o ângulo formado por esses dois lados forem respectivamente iguais a dois lados de outro triângulo e ao ângulo formado por esses dois lados, então os dois triângulos são congruentes.

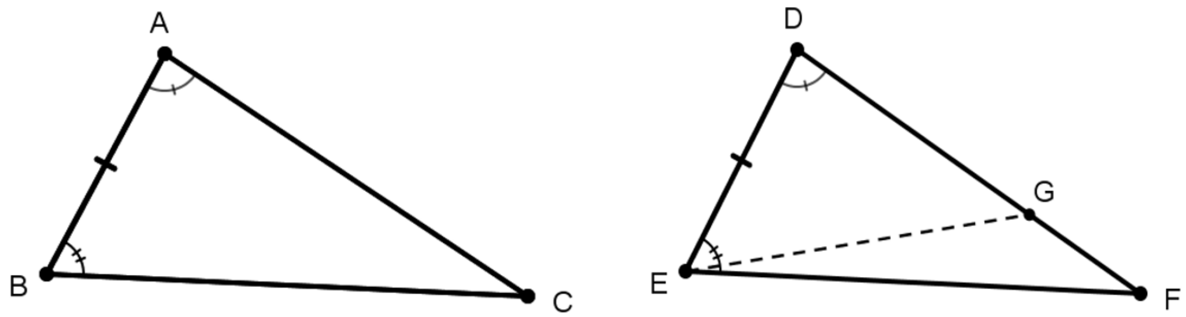
b) **Um lado e dois ângulos adjacentes respectivamente congruentes (Caso ALA)**

Dados dois triângulos ABC e DEF, se $\hat{A} \cong \hat{D}$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ e $\hat{B} \cong \hat{E}$, então os triângulos são congruentes.

Demonstração:

Sejam ABC e DEF dois triângulos, conforme a Figura 6, tais que $\hat{A} \cong \hat{D}$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ e $\hat{B} \cong \hat{E}$. Seja G um ponto pertencente a semirreta $\overrightarrow{DF}$ tal que $\overline{AC} \cong \overline{DG}$.

Figura 6: Triângulos Congruentes Caso ALA



Fonte: Acervo do Autor, 2023.

Como $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\hat{A} \cong \hat{D}$ e $\overline{AC} \cong \overline{DG}$. Pelo caso de congruência LAL, os triângulos ABC e DEG são congruentes. Portanto, concluímos que $D\hat{E}C \cong \hat{B}$, mas, por hipótese $D\hat{E}F \cong \hat{B}$. Logo $\triangle DEF \cong \triangle DEG$.

Consequentemente, as semirretas $\overrightarrow{EG}$ e $\overrightarrow{EF}$ coincidem. Desse modo o ponto G coincide com o ponto F e, portanto, coincidem os triângulos DEF e DEG. Como já provamos, $\triangle ABC \cong \triangle DEG$, então $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

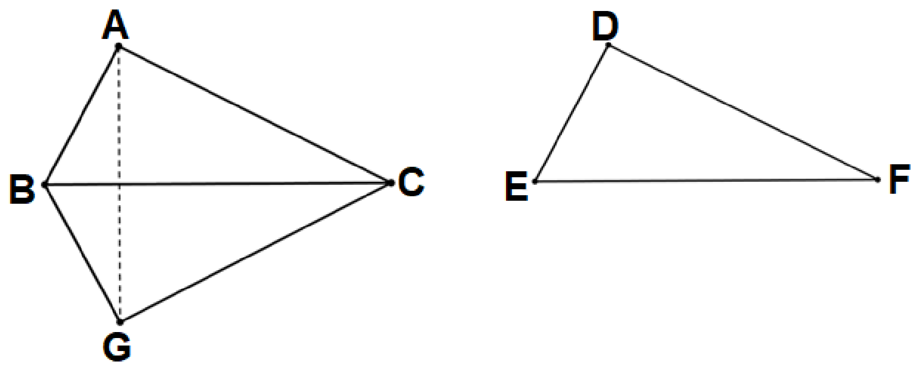
c) Três lados respectivamente congruentes (Caso LLL)

Se dois triângulos ABC e DEF tem os lados correspondentes congruentes então os triângulos são congruentes.

Demonstração:

Sejam ABC e DEF dois triângulos, conforme Figura 7, tais que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BD} \cong \overline{EF}$ e $\overline{CA} \cong \overline{FD}$. Vamos provar que $\triangle ABC = \triangle DEF$.

Figura 7: Triângulos Congruentes Caso LLL



Fonte: Acervo do autor, 2023.

Para isto, construiremos a partir da semirreta $\overrightarrow{BC}$ e no semiplano oposto ao que contém A um ângulo posto ao ângulo $\hat{E}$. No lado do ângulo que não contém o ponto C marcaremos um ponto G tal que $\overline{BG} \cong \overline{ED}$ e ligue G a C.

Como $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ (por hipótese), $\overline{BG} \cong \overline{ED}$ (por construção) e $G\hat{B}C \cong \hat{E}$ (por construção), então $BCG \cong EFD$. Vamos mostrar que os triângulos BCG e BCA são congruentes. Traçaremos $\overline{AG}$. Como $\overline{BG} \cong \overline{ED} \cong \overline{BA}$ e $\overline{GC} \cong \overline{DF} \cong \overline{AC}$, então os triângulos ABG E GCA são isósceles.

Desse modo, $B\hat{G}A \cong B\hat{A}G$ e $A\hat{G}C \cong G\hat{A}C$, logo $B\hat{G}C \cong B\hat{A}C$. Pelo primeiro caso de congruência de triângulos concluímos que $\triangle GBC \cong \triangle DEF$, então $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

d) Um lado, um ângulo adjacente e um ângulo oposto respectivamente congruentes (Caso LAA$_O$)

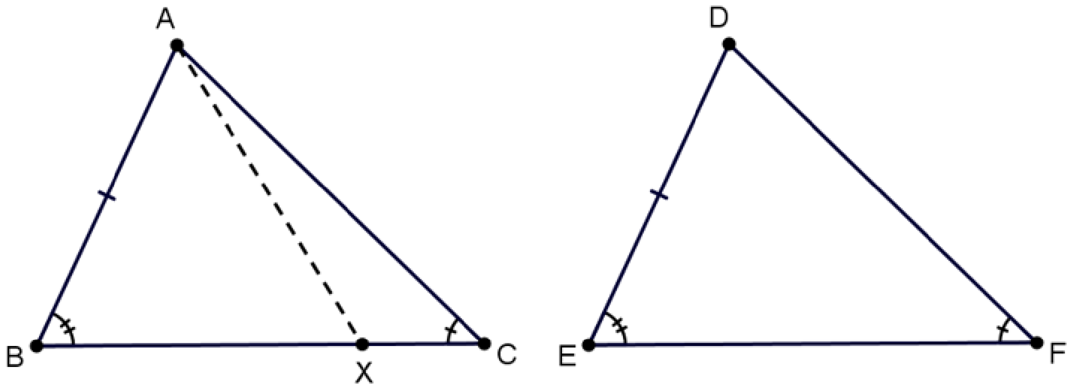
Se dois triângulos ABC e DEF, são tais que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ e $\hat{B} \cong \hat{E}$ e $\hat{C} \cong \hat{F}$, então os dois triângulos são congruentes.

Demonstração:

Consideremos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ e X um ponto da semirreta $\overrightarrow{BC}$ tal que $\overline{BX} \cong \overline{EF}$.

Consideremos inicialmente o ponto X entre B e C, conforme a Figura 8.

Figura 8: Caso LAA$_o$



Fonte: Acervo do Autor, 2023.

Pelo Caso L.A.L. obtemos $\triangle ABX \cong \triangle DEF$. Disto, portanto, obtemos

$$A\hat{X}B \cong D\hat{F}E \ (*)$$

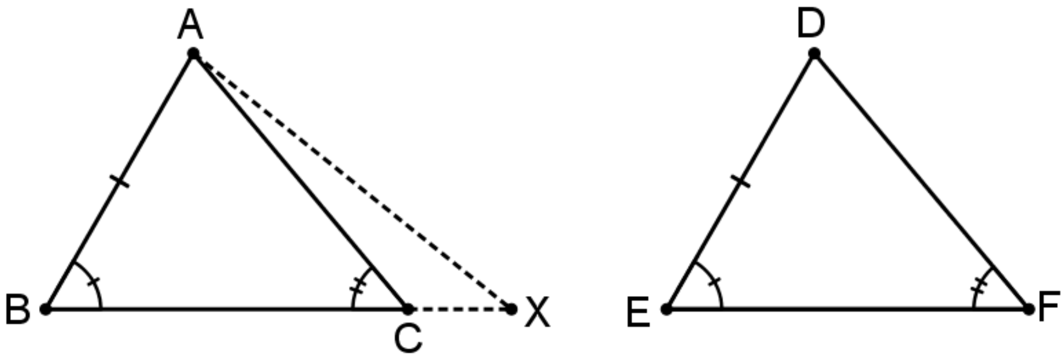
Mas, $A\hat{X}B$ é um ângulo externo do $\triangle AXC$, do qual $A\hat{C}X$ é ângulo interno não adjacente.

Logo, pelo Teorema do Ângulo Externo, $A\hat{X}B > A\hat{C}X$ e, portanto, pela hipótese, $A\hat{X}B > D\hat{F}E$, o que contradiz $(*)$.

Logo o ponto *X* coincide com *C*, e, portanto, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Consideremos agora o ponto C entre B e X, , conforme a Figura 9.

Figura 9: Segunda situação: Demonstração caso LAAo



Fonte: Acervo do Autor, 2023

Pelo Caso LAL obtemos $\triangle ABX \cong \triangle DEF$.

Disto, portanto, obtemos $A\hat{X}B \cong D\hat{F}E$.

Mas, $A\hat{C}B$ é um ângulo externo do $\triangle AXC$, do qual $A\hat{X}C$ é ângulo interno não adjacente.

Logo, pelo Teorema do Ângulo Externo, $A\hat{C}B > A\hat{X}C$. Como, por construção, $A\hat{X}B \cong A\hat{X}C \cong D\hat{F}E$, podemos concluir que $A\hat{C}B > D\hat{F}E$, o que contradiz a hipótese inicial.

Logo, o ponto *X* coincide com *C*, e, portanto, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Observação: Podemos mostrar que esse é um caso de congruência sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Descobrimos o terceiro ângulo e retornamos ao caso ALA.

e) Dois lados e o ângulo não compreendido entre eles respectivamente congruente (Caso LLA)

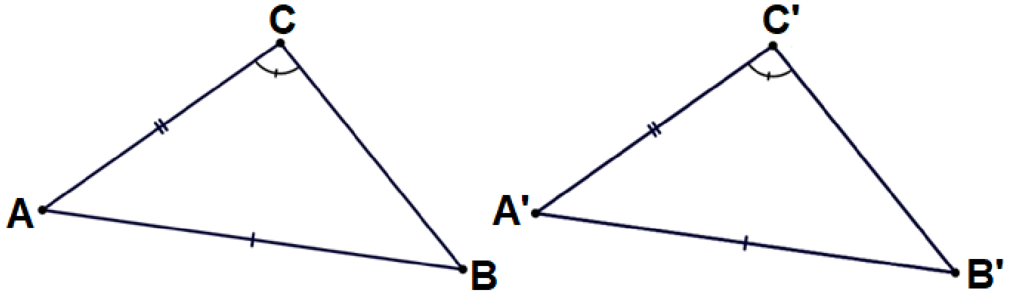
O caso de congruência a seguir não é apresentado no ensino de geometria no Brasil, é usado um caso especial dele, que é no triângulo retângulo, onde temos um cateto e a hipotenusa, respectivamente, congruentes (Caso CH).

Esse termo se dá pelo fato de que para que haja uma congruência de triângulos por meio do caso LLA, o ângulo dado deve estar oposto ao lado de maior medida, caso contrário, não haverá congruência.

Se dois triângulos têm dois lados homólogos congruentes e o ângulo oposto ao maior lado são congruentes, então os triângulos são congruentes (ver Figura 10).

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \overline{AC} \cong \overline{A'C'}, \hat{C} \cong \widehat{C'}, \text{com } \overline{AB} > \overline{AC}$$

Figura 10: Caso LLA



Fonte: Acervo do autor, 2023.

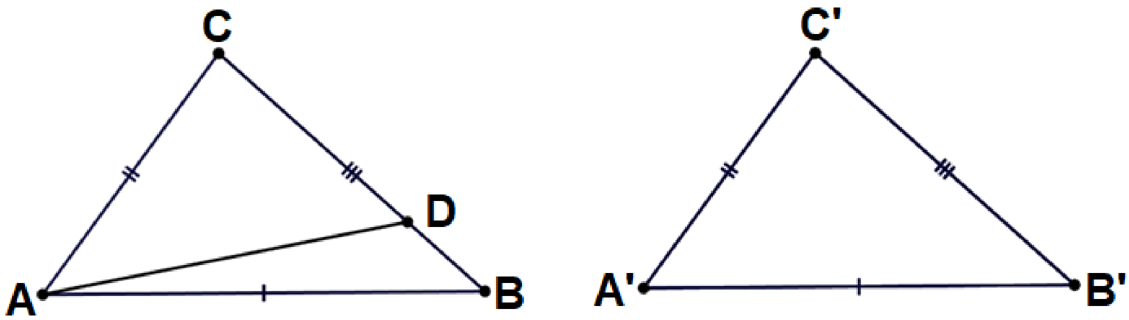
Demonstração:

Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos, como na Figura 10, tais que $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ e $\overline{AB} > \overline{AC}$ e $\hat{C} \cong \widehat{C'}$. Supondo que $\overline{BC} \neq \overline{B'C'}$ então $\overline{BC} > \overline{B'C'}$ ou $\overline{B'C'} > \overline{BC}$.

<u>1ª situação:</u> $\overline{BC} > \overline{B'C'}$

Se $\overline{BC} > \overline{B'C'}$ então existe um ponto D pertencente a $\overline{BC}$ tal que $\overline{CD} \cong \overline{B'C'}$, conforme a Figura 11.

Figura 11: Demonstração Caso LLA



Fonte: Acervo do autor, 2023.

Os triângulos ADC e $A'B'C'$ são congruentes, pelo caso LAL, pois, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, $\hat{C} \cong \widehat{C'}$ e por hipótese $\overline{CD} \cong \overline{C'B'}$. Logo $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$.

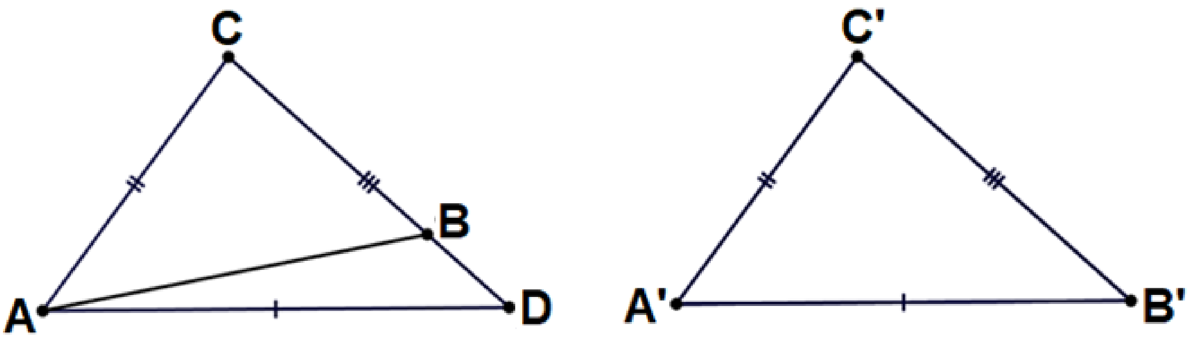
Porém, como $A'B' \cong AB$, o triângulo ADB é isóscele e $\hat{B} \cong B\hat{D}A$. Pelo Teorema do Ângulo Externo, $B\hat{D}A = D\hat{A}C + \hat{C} > \hat{C}$.

Dessa forma, temos que $\hat{B} > \hat{C}$, ou seja, temos um absurdo, pois $\overline{AB} > \overline{AC}$ e o maior lado deve estar oposto ao maior ângulo.

<u>2ª situação:</u> $\overline{BC} < \overline{B'C'}$

Se $\overline{BC} < \overline{B'C'}$ então existe um ponto D pertencente a $\overrightarrow{BC}$ tal que $\overline{CD} \cong \overline{B'C'}$, conforme a Figura 12.

Figura 12: Demonstração Caso LLA



Fonte: Acervo do autor, 2023.

Os triângulos ADC e $A'B'C'$ são congruentes, pelo caso LAL, pois, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, $\hat{C} \cong \widehat{C'}$ e por hipótese $\overline{CD} \cong \overline{C'B'}$. Logo $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$.

Porém, como $\overline{A'B'} \cong \overline{AB}$, o triângulo ADB é isósceles e $\widehat{D} \cong D\hat{B}A$.

Pelo Teorema do Ângulo Externo, $D\hat{B}A = B\hat{A}C + \hat{C} > \hat{C}$ e $C\hat{B}A > \widehat{D}$.

Dessa forma, temos que $C\hat{B}A > \hat{C}$, ou seja, temos um absurdo, pois $AB > AC$ e o maior lado deve estar oposto ao maior ângulo.

Portanto, $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ e que $\triangle\, ABC$ e $\triangle\, A'B'C'$ são congruentes.

3.2.6 Resolução de Triângulos

Em um triângulo qualquer podemos considerar como elementos principais os seus três lados e os três ângulos internos e todos os outros elementos como elementos secundários, como por exemplo, as alturas, as medianas, o raio do círculo inscrito ou circunscrito, etc.

A resolução de triângulos consiste em determinar alguns elementos do triângulo a partir de elementos já conhecidos. Quando se diz determinar os elementos entenda-se determinar a medida desses elementos.

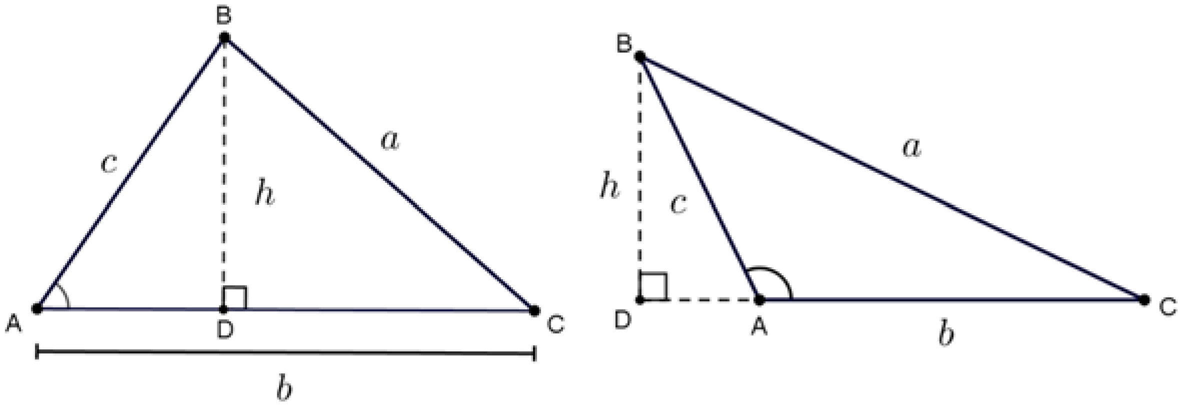
Assim, consideramos apenas os elementos principais (lados e ângulos) e se tivermos três desses elementos conhecidos, podemos determinar os outros três usando a Lei dos Senos e dos Cossenos, que será apresentado a seguir.

a. Lei dos Senos

Em um triângulo qualquer, os comprimentos dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos.

Demonstração:

Figura 13: Lei dos Senos



Fonte: Acervo do autor, 2023.

Para demonstrarmos o que pretendemos, usaremos a Figura 13 e a fórmula do cálculo de área conhecendo dois lados e o ângulo compreendido entre eles, que é dada, no triângulo ABC acima, por:

$$S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \operatorname{sen} \hat{A}. \text{ (1)}$$

a) Se $\hat{A}$ é agudo, temos:

A área do triângulo ABC é $S = b \cdot h$. Como $h = c \cdot sen\, \hat{A}$, então

$$S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot sen\, \hat{A}.$$

b) Se $\hat{A}$ é obtuso então:

A área do triângulo ABC é $S = b \cdot h$. Como $h = c \cdot \operatorname{sen}(\pi - \hat{A})$, então

$$S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin(\pi - \hat{A}) = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \hat{A}$$

c) Se $\hat{A}$ é reto, então:

$$S = \frac{1}{2} b \cdot c = b \cdot c \cdot 1 = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \operatorname{sen} \hat{A}$$

Desse modo fica provado que em qualquer caso $S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \operatorname{sen} \hat{A}$.

Multiplicando por a a relação (1), obtemos

$$aS = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot c \cdot \operatorname{sen} \hat{A}$$

ou

$$\frac{a}{sen\, \hat{A}} = \frac{abc}{2S}$$

Utilizaremos raciocínio análogo para a área do triângulo ABC as expressões

$$S = \frac{1}{2} ac\, sen\, \hat{B} \text{ (2)}$$

$$S = \frac{1}{2} ab \, sen \, \hat{C} \text{ (3)}$$

Permitindo escrever:

$$\frac{b}{sen \, \hat{B}} = \frac{abc}{2S}$$

$$\frac{c}{sen \, \hat{C}} = \frac{abc}{2S}$$

Logo, em qualquer triângulo ABC é válida a relação

$$\frac{a}{sen \, \hat{A}} = \frac{b}{sen \, \hat{B}} = \frac{c}{sen \, \hat{C}}$$

b. Lei dos Cossenos

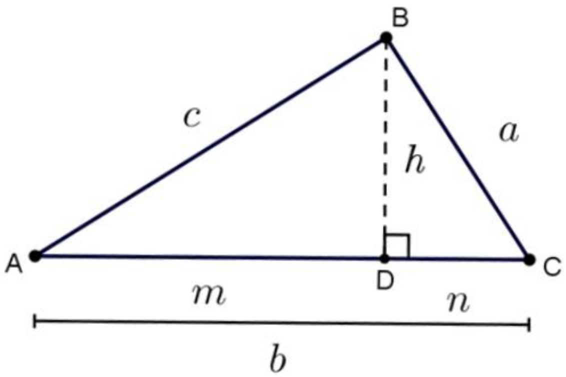
Em um triângulo qualquer, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados menos o dobro do produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.

Demonstração:

<u>1° caso:</u>

Seja ABC um triângulo, conforme a Figura 14, tal que $\hat{A} < 90°$.

Figura 14: Lei dos Cossenos Caso 1



Fonte: Acervo do Autor, 2023.

No triângulo retângulo BCD:

$$a^2 = n^2 + h^2 \text{ (1)}$$

No triângulo retângulo BAD:

$$h^2 = c^2 - m^2 \text{ (2)}$$

Temos também:

$$n = b - m \text{ (3)}$$

Substituindo (3) e (2) em (1):

$$a^2 = (b - m)^2 + (c^2 - m^2) \Longrightarrow$$

$$a^2 = b^2 - 2bm + m^2 + c^2 - m^2 \Longrightarrow$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bm$$

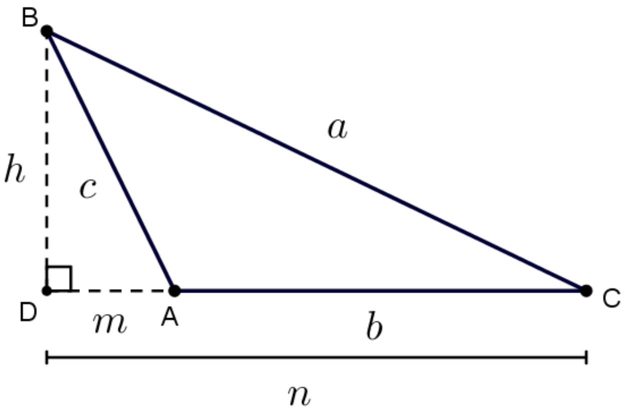
Note que $m = \mathrm{c} \cdot \cos \hat{\mathrm{A}}$, desse modo:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{\mathrm{A}}$$

<u>2° Caso</u>:

Seja ABC um triângulo, conforme a Figura 15, com $90° < \hat{\mathrm{A}} < 180°$.

Figura 15: Lei dos Cossenos Caso 2



Fonte: Acervo do Autor, 2023.

No triângulo retângulo BCD:

$$a^2 = n^2 + h^2 \text{ (1)}$$

No triângulo retângulo BAD:

$$h^2 = c^2 - m^2 \text{ (2)}$$

Temos também:

$$n = b + m \text{ (3)}$$

Substituindo (3) e (2) em (1):

$$a^2 = (b+m)^2 + c^2 - m^2 \Longrightarrow$$
$$a^2 = b^2 + 2bm + m^2 + c^2 - m^2 \Longrightarrow$$
$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bm$$

Note que $m = c \cdot \cos\left(180° - \hat{\mathrm{A}}\right) \Longrightarrow m = -c \cdot \cos \hat{\mathrm{A}}$.

Logo:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{\mathrm{A}}$$

Vale a observação que o Teorema de Pitágoras, nada mais é que um caso em que o ângulo Â seja reto, ou seja, sua medida em graus é de 90°.

Sabendo que o $\cos 90° = 0$, temos que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos 90°$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot 0$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

3.2.7 Natureza de um triângulo

Com a Lei dos Cossenos, podemos determinar a natureza de um triângulo, ou seja, classificá-lo como sendo: retângulo, obtusângulo ou acutângulo.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$
$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Consideremos $a > b$ e $a > c$, isto é, a seja a maior medida do lado do triângulo.

Como $2bc$ é sempre positivo, precisamos apenas analisar apenas o sinal de $b^2 + c^2 - a^2$

1ª Situação: Se $b^2 + c^2 - a^2 = 0$, então

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = 0$$

Como $\cos 90° = 0$, temos que $\alpha = 90°$. Mas, se $b^2 + c^2 - a^2 = 0$, então $a^2 = b^2 + c^2$.

Assim, se $a^2 = b^2 + c^2$, o triângulo é retângulo.

2ª Situação: Se $b^2 + c^2 - a^2 > 0$, então

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} > 0$$

Como o cosseno de um ângulo agudo é positivo, temos que $\alpha < 90°$: Mas, $b^2 + c^2 - a^2 > 0$, então $a^2 < b^2 + c^2$.

Assim, se $a^2 < b^2 + c^2$, o triângulo é acutângulo.

3ª Situação: Se $b^2 + c^2 - a^2 < 0$, então

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} < 0$$

Como o cosseno de um ângulo obtuso é negativo, temos que $\alpha > 90°$: Mas, $b^2 + c^2 - a^2 < 0$, então $a^2 > b^2 + c^2$.

Assim, se $a^2 > b^2 + c^2$, o triângulo é obtustângulo.

3.2.8 Resolução de Triângulos e os Casos de Congruências

A resolução de triângulos e os casos de congruências tem uma relação ao que se refere a possibilidade de resolver ou não um triângulo. Com resolver um triângulo, entende-se encontrar os lados ou ângulos não dados.

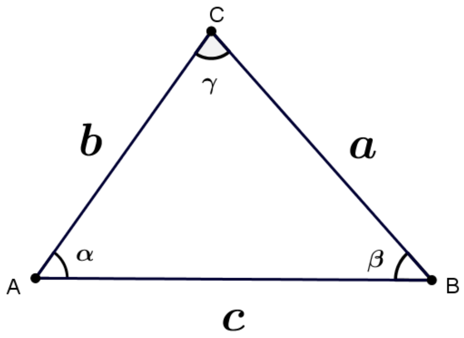
3.2.8.1 Resolvendo Triângulos com o Caso LLL

Primeiro, mostraremos a resolução de um triângulo dado seus três lados, ou seja, estamos nos referindo ao caso LLL.

Consideremos o triângulo ABC, onde os valores $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ (lados do triângulo) são conhecidos e os ângulos α, β e γ são desconhecidos, conforme Figura 16.

,

Figura 16: Resolver triângulo caso LLL



Fonte: Acervo do Autor, 2023.

Como no triângulo nos é dado os três lados, por ser um caso de congruência conseguiremos encontrar os três ângulos desse triângulo. Para encontrar os três ângulos com valores desconhecidos, utilizaremos a Lei dos Cossenos. Por exemplo, para calcular α vamos usar a lei dos cossenos,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

Isolando $\cos\alpha$, teremos:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\alpha = arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$$

De maneira análoga, encontramos:

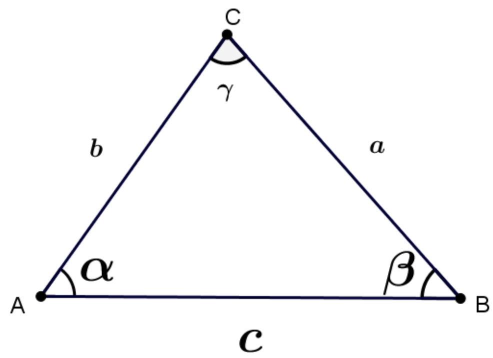
$$\beta = arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right) \quad e \quad \gamma = arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)$$

3.2.8.2 Resolvendo Triângulos com o Caso ALA

A seguir, será mostrado como podemos resolver triângulos sendo dado um ângulo, um lado e um segundo ângulo. Nessa parte, veremos que é possível resolver um triângulo, dado que atenda ao caso ALA.

Consideremos o triângulo ABC, onde o lado $\overline{AB}$, de medida c, e os ângulos α e β, conhecidos; mas, com o ângulo γ e os lados $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, com medidas, respectivas, a e b, desconhecidos, conforme Figura 17.

Figura 17: Resolver triângulo caso ALA



Fonte: Acervo do Autor, 2023.

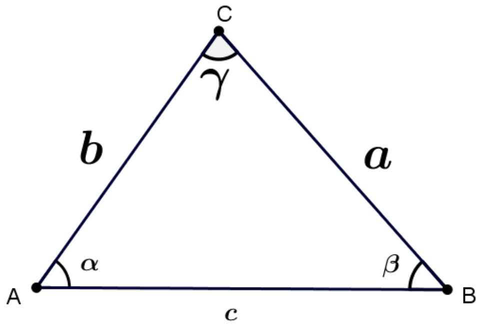
Do triângulo, temos o caso de congruência ALA, o que nos permite saber que os outros dois lados e o terceiro ângulo tem valores únicos. Podemos encontrar o ângulo γ usando o fato de que a soma dos ângulos interno de um triângulo é 180°, assim, $\gamma = 180° - \alpha - \beta$, o que nos permite usar a Lei dos Senos e descobrir os outros dois lados desconhecidos.

3.2.8.3 Resolvendo Triângulos com o Caso LAL

A resolução seguinte será quando tivermos dois lados e um ângulo entre eles, ou seja, nos referimos há um triângulo definido pelo caso LAL.

Consideremos o triângulo ABC, onde o lado $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ com medidas respetivas a e b e o ângulo γ conhecidos, mas, com os ângulos α e β e o lado $\overline{AB}$, com medida c, desconhecidos (Ver Figura 18).

Figura 18: Resolver triângulo caso LAL.



Fonte: Acervo do Autor, 2023.

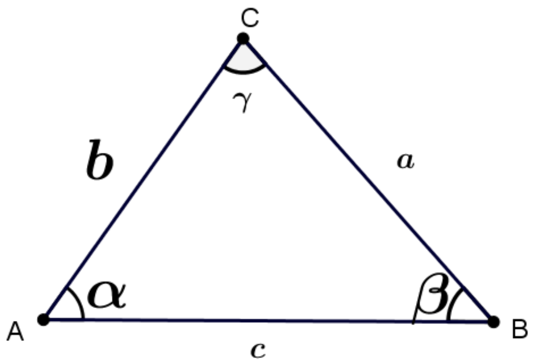
Deste triângulo, sabemos que os valores desconhecidos só podem ter uma única solução, pois é um caso de congruência de triângulos. Utilizando a Lei dos Cossenos que nos permite encontrar o valor de $\boldsymbol{c}$, depois, observa a natureza do triângulo ou as desigualdades no triângulo envolvendo lados e ângulos opostos para encontrar os ângulos $\alpha\ e\beta,$ com a Lei dos Senos ou dos Cossenos.

3.2.8.4 Resolvendo Triângulos com o Caso LAA$_o$

Nesse caso, veremos como é possível resolver um triângulo definido pelo caso LAA, ou seja, quando temos um lado e dois ângulos consecutivos.

Consideremos o triângulo ABC, conforme a Figura 19, onde o lado $\overline{AC}$, de medida b, e os ângulos α e β, conhecidos; mas, com o ângulo γ e os lados $\overline{BC}$ e $\overline{AB}$, com medidas, respectivas, a e c, desconhecidos.

Figura 19: Resolver triângulo caso LAAo



Fonte: Acervo do Autor, 2023.

Sabemos os valores de b, α e $\beta,$ logo, usando a Lei dos Senos, podemos encontrar o valor de $\boldsymbol{a}$ e o valor de γ é possível descobrir sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é $180°$. Em seguida podemos encontrar o valor de c com a Lei dos Senos.

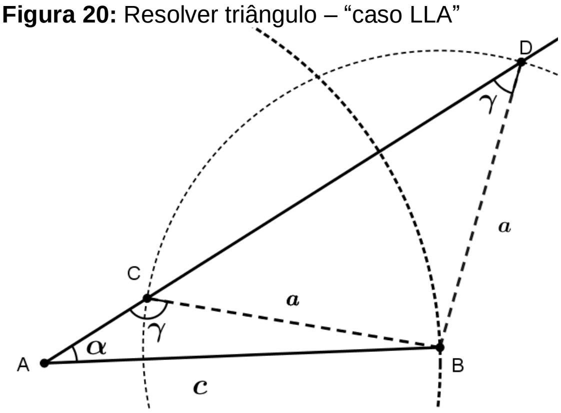
3.2.8.5 Resolvendo Triângulos com o Caso LLA

Nessa resolução, veremos o caso em que é possível resolver triângulos quando nos é dado dois lados e um ângulo. No primeiro caso, veremos o caso LLA do qual não é possível resolver triângulos, em seguida, veremos quando é possível resolvê-lo.

I.Ângulo oposto ao menor lado dado

Nessa primeira parte, nos será dado um seguinte caso: são dados dois lados e um ângulo, entretanto esse ângulo será oposto ao menor dos lados dado, veremos com a Figura 20 que esse não é um caso de congruência.

Figura 20: Resolver triângulo – "caso LLA"

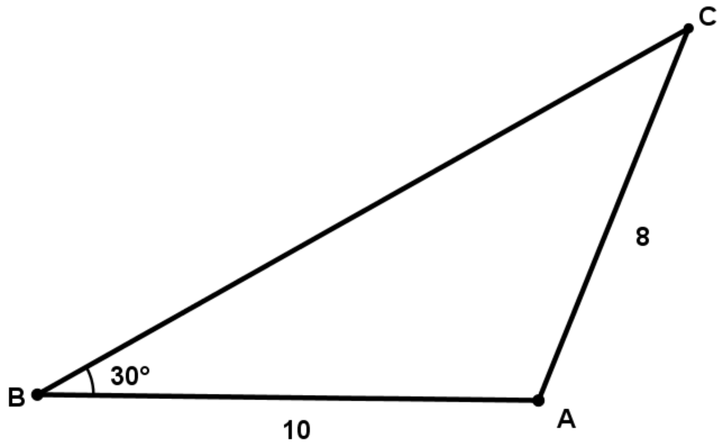


Fonte: Acervo do Autor, 2023.

É possível ter dois valores para o terceiro lado $\boldsymbol{b}$**,** e para o ângulo γ teremos dois possíveis valores. Os possíveis valores de γ se dá pelo fato de que o seno de um ângulo ser positivo no primeiro e no segundo quadrante.

Em seguida, será dado um exemplo, conforme a Figura 21:

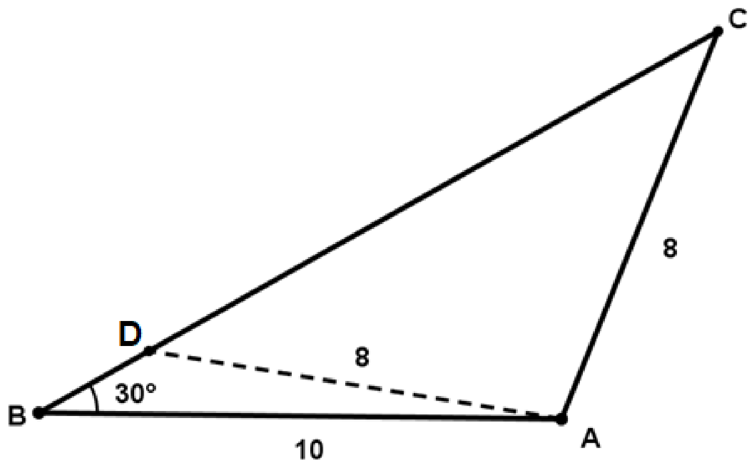
Figura 21: Triângulo com ângulo oposto ao menor lado



Fonte: Acervo do Autor, 2023.

Neste exemplo, nos é dado a medida de dois lados e um ângulo oposto ao menor lado. No entanto é possível também outro triângulo, o triângulo ABD, que atende essas condições, conforme a Figura 22.

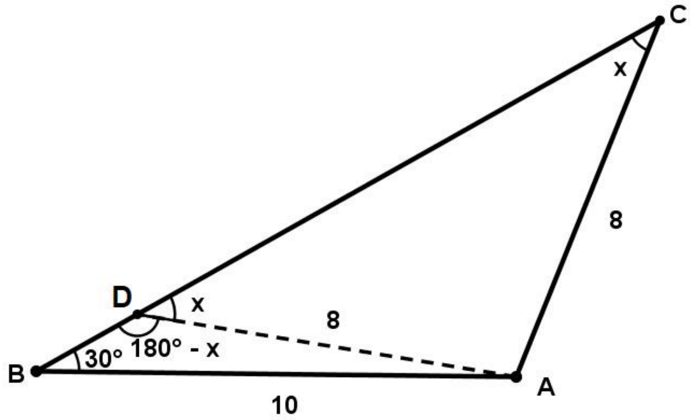
Figura 22: Dois triângulos com ângulo oposto ao menor lado



Fonte: Acervo do Autor, 2023.

Agora, é possível notar um triângulo isósceles com dois lados medindo 8, formando dois ângulos de mesma medida que chamaremos de x, como mostra a Figura 23.

Figura 23: Triângulos com ângulo oposto ao menor lado



Fonte: Acervo do Autor, 2023.

Do triângulo ABC temos que $x > 30°$ e, como $B\widehat{D}A$ é externo a ADC, então $B\widehat{D}A > D\widehat{C}A$ ou $180° - x > x$, o que nos leva a $x < 90°$. Com isso, concluímos que $A\widehat{C}B$ é agudo, pois $30° < x < 90°$ e que $B\widehat{D}A$ é obtuso, pois, como $x < 90°$. , então, $180° - x$ será maior que 90°.

Assim, há dois possíveis ângulos, um agudo e outro obtuso, para esse triângulo que satisfazem a condição do maior ângulo estar oposto ao maior lado.

Usando a Lei dos Senos no triângulo ABC, temos:

$$\frac{8}{sen\,30°} = \frac{10}{sen\,x}$$

$$\frac{8}{\frac{1}{2}} = \frac{10}{sen\,x}$$

$$sen\,x = \frac{10}{16}$$

Usando a Lei dos Senos no triângulo ABD, temos:

$$\frac{8}{sen\,30°} = \frac{10}{sen\,(180° - x)}$$

$$\frac{8}{\frac{1}{2}} = \frac{10}{sen\,(180° - x)}$$

$$sen\,(180° - x) = \frac{10}{16}$$

Assim, $sen\,x = sen\,(180° - x)$.

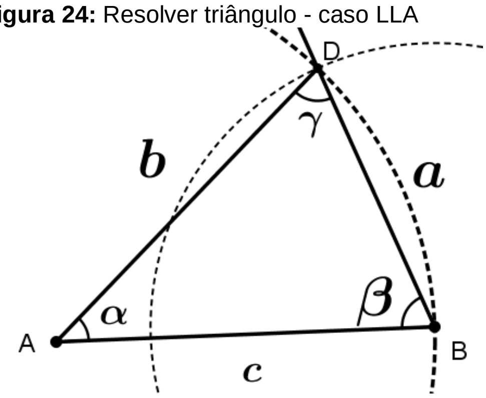
De fato, o seno de um ângulo é positivo no primeiro e no segundo quadrante, então há dois possíveis valores para o ângulo oposto ao maior lado, e os dois satisfazem a desigualdade no triângulo, ou seja, os dois possíveis valores são maiores que 30°.

- **Observação:** O segmento $\overline{AD}$ traçado no triângulo ABC, como na Figura 22, só é possível se considerarmos o ângulo $B\hat{A}C$ maior que 90°.

II.Ângulo oposto ao maior lado

Nessa primeira parte, nos será dado um seguinte caso: são dados dois lados e um ângulo, entretanto esse ângulo será oposto ao menor dos lados dado, veremos com a Figura 24 que esse não é um caso de congruência.

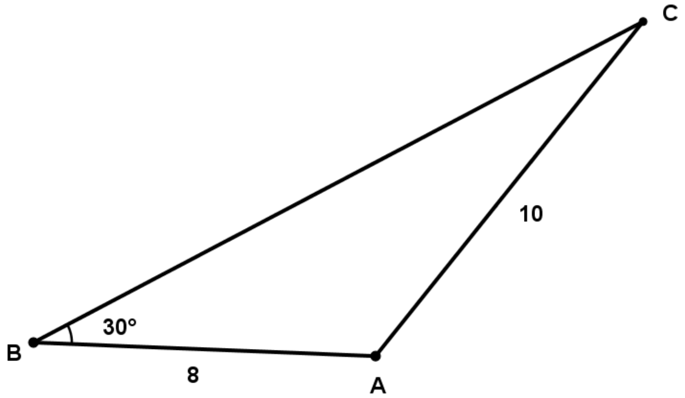
Figura 24: Resolver triângulo - caso LLA



Fonte: Acervo do Autor, 2023.

Nesse caso, temos apenas uma possibilidade para o lado c e os ângulos α e γ, desse modo existe um único triângulo quando for dado dois lados consecutivos e um lado oposto ao maior lado dado. Um exemplo será dado na Figura 25:

Figura 25: Triângulo com ângulo oposto ao maior lado



Fonte: Acervo do Autor, 2023.

Como o maior lado está oposto ao maior ângulo, então, $A\hat{B}C > A\hat{C}B$ Como o maior lado está oposto ao maior ângulo, temos que $\hat{C} < 30°$.De fato, pela Lei dos Senos:

$$\frac{10}{sen\,30°} = \frac{8}{sen\,\hat{C}}$$

$$\frac{10}{\frac{1}{2}} = \frac{8}{sen\,\hat{C}}$$

$$sen\,\hat{C} = \frac{8}{20}$$

$$sen\,\hat{C} = \frac{1}{5}$$

Como o seno de um ângulo é positivo, ele pode estar no primeiro e no segundo quadrante, mas, o maior ângulo tem que estar oposto ao maior lado, portanto, a situação em que $\hat{C}$ > 30° não pode ser considerada, restando apenas uma opção para o ângulo $\hat{C}$.

3.3 ENSINO DE GEOMETRIA PLANA NO ENSINO MÉDIO: ASPECTOS NORMATIVOS E DIDÁTICOS

A congruência de triângulos, bem como conteúdos necessários para resolver um triângulo qualquer[2] são habilidades que estão presentes no currículo que é base para a Educação Básica no Brasil normatizado pela BNCC/2018. A congruência é estudada de maneira mais aprofundada nos anos finais do Ensino Fundamental, sendo que no Ensino Médio é recomendado em uma das habilidades sua aplicação em diversas situações (BRASIL, 2018).

Um caso de congruência pode ser abordado interagindo com métodos de resolução de triângulo, ou seja, com as chamadas lei dos senos e a lei dos cossenos. Gomes (2021) reflete sobre a resolução de triângulo e sua participação na BNCC/2018 com o objetivo de: “[...] Resolver um triângulo nada mais é que determinar os lados e ângulos desconhecidos com o emprego da lei dos senos e da lei dos cossenos. Na BNCC, isso é apresentado como a habilidade EM13MAT308 do Ensino Médio (EM)” (GOMES, 2021, p.37).

[2] Resolver um triângulo é determinar lados e ângulos desconhecidos empregando a Lei dos Senos e Lei dos Cossenos.

Na habilidade EM13MAT308 do Ensino Médio verifica-se como objetivo: “Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos” (BRASIL, 2018, p.536).

Parte-se do entendimento de que o livro didático é um instrumento importante para o ensino e a aprendizagem na educação formal, esse auxilia o professor durante a mediação e construção da atividade didática.

Desde 1997 que os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental (PCN), já mencionavam a relevância da utilização de livro didático pelas escolas brasileiras, considerando que esse é um dos recursos de ensino que faz parte da realidade educacional do país. O PCN informa que:

> O livro didático é um material de forte influência na prática de ensino brasileira. É preciso que os professores estejam atentos à qualidade, à coerência e a eventuais restrições que apresentem em relação aos objetivos educacionais propostos. Além disso, é importante considerar que o livro didático não deve ser o único material a ser utilizado, pois a variedade de fontes de informação é que contribuirá para o aluno ter uma visão ampla do conhecimento (BRASIL, 1998, p. 67).

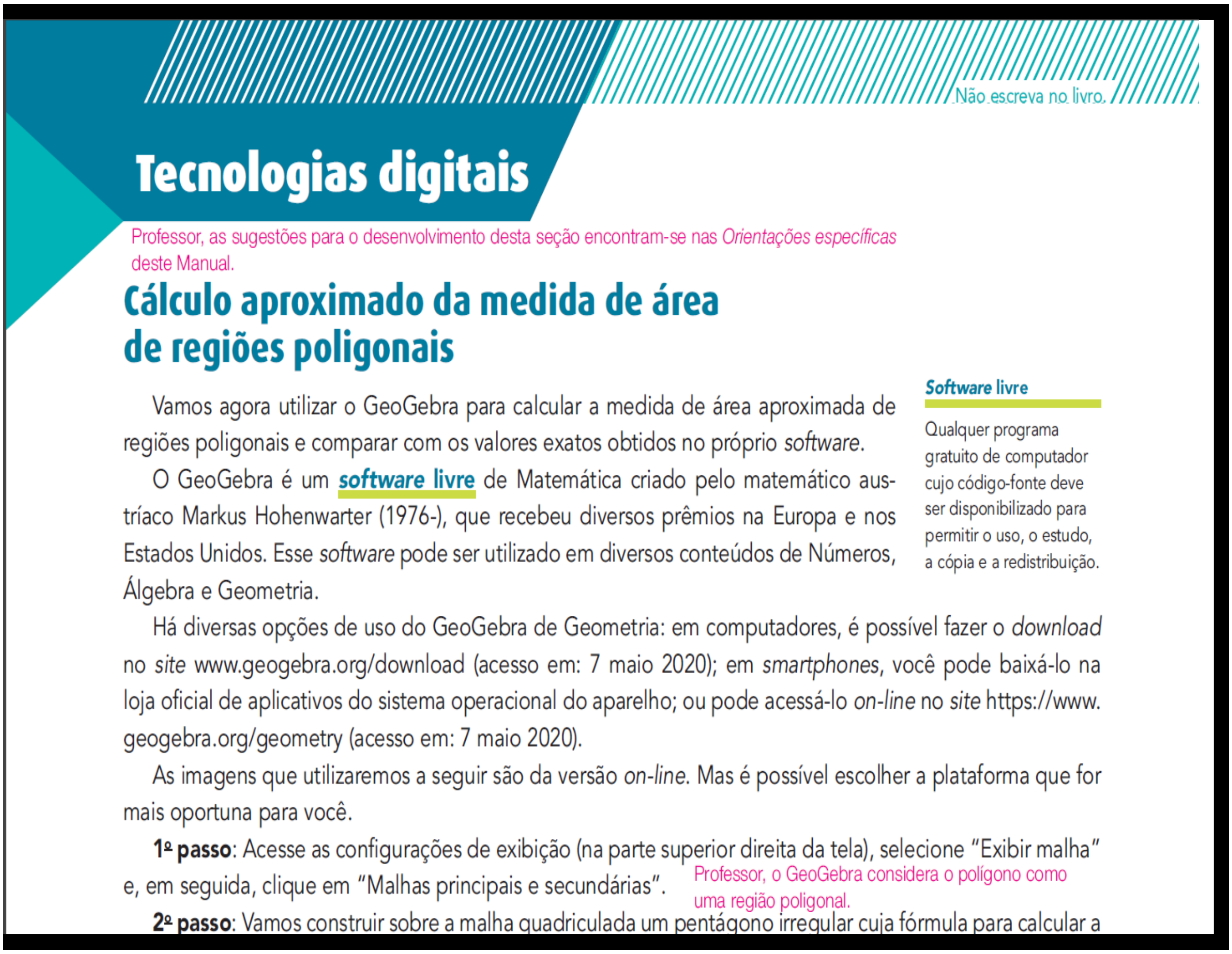
Sendo assim, considerando a importância do livro didático, serão analisados o livro Matemática em Contextos de Dante e Viana (2020) e o livro Prisma de Bonjorno, Giovanni Jr. e Câmara (2020), levando em consideração, se de fato trabalham os casos de congruência em interação com a Lei dos Senos e dos Cossenos. Esses livros já são adequados a BNCC/2018, ou seja, os conteúdos vêm com abordagem em que se trabalha as habilidades que o currículo direcionada para cada conteúdo.

a) Matemática em Contextos: Geometria Plana e Geometria Espacial – Dante e Viana (2020a)

No livro Matemática em Contextos volume 3 dos autores Dante e Viana (2020), a congruência de triângulos é utilizada para mostrar que podemos encontrar a área de uma superfície triangular como sendo metade da área de um paralelogramo que pode ser encontrado na página 16. Nesse livro os autores relembram os casos de congruência para os alunos de maneira sucinta, mas, no livro só há menções ao conteúdo. Sendo que, nesse livro é predominante o conteúdo de áreas de regiões planas.

Há também algumas propostas de utilização de tecnologias digitais para cada um dos capítulos, porém de maneira sucinta e sem propostas que possam ser aplicadas com o conteúdo de congruência de triângulos. Na Figura 26 apresentam uma imagem, no livro do professor, sobre uma das propostas utilizando o *Geogebra* para o ensino de áreas.

Figura 26: Geogebra no Matemática em Contextos



Não escreva no livro.

Tecnologias digitais

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Cálculo aproximado da medida de área de regiões poligonais

Vamos agora utilizar o GeoGebra para calcular a medida de área aproximada de regiões poligonais e comparar com os valores exatos obtidos no próprio *software*.

O GeoGebra é um ***software* livre** de Matemática criado pelo matemático austríaco Markus Hohenwarter (1976-), que recebeu diversos prêmios na Europa e nos Estados Unidos. Esse *software* pode ser utilizado em diversos conteúdos de Números, Álgebra e Geometria.

***Software* livre**

Qualquer programa gratuito de computador cujo código-fonte deve ser disponibilizado para permitir o uso, o estudo, a cópia e a redistribuição.

Há diversas opções de uso do GeoGebra de Geometria: em computadores, é possível fazer o *download* no *site* www.geogebra.org/download (acesso em: 7 maio 2020); em *smartphones*, você pode baixá-lo na loja oficial de aplicativos do sistema operacional do aparelho; ou pode acessá-lo *on-line* no *site* https://www.geogebra.org/geometry (acesso em: 7 maio 2020).

As imagens que utilizaremos a seguir são da versão *on-line*. Mas é possível escolher a plataforma que for mais oportuna para você.

1º passo: Acesse as configurações de exibição (na parte superior direita da tela), selecione "Exibir malha" e, em seguida, clique em "Malhas principais e secundárias".

Professor, o GeoGebra considera o polígono como uma região poligonal.

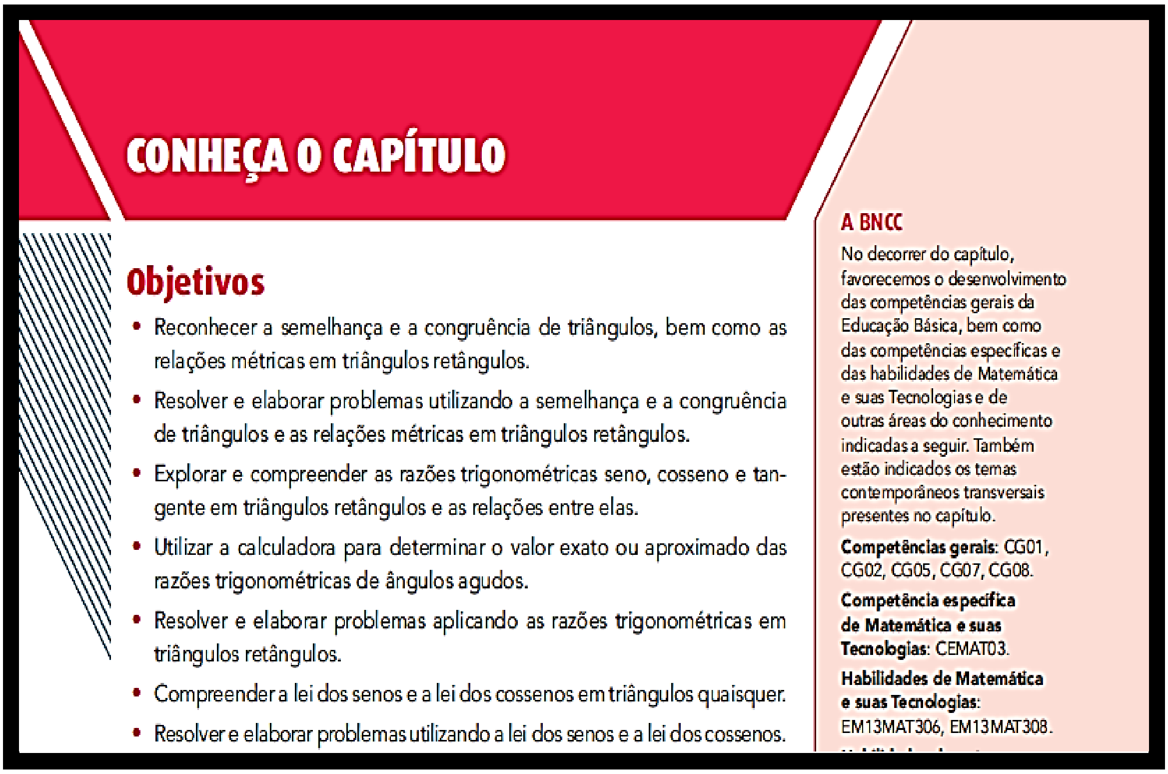
2º passo: Vamos construir sobre a malha quadriculada um pentágono irregular cuja fórmula para calcular a

Fonte: Dante e Viana (2020a).

b) Matemática em Contextos: Trigonometria e Sistemas Lineares - Dante e Viana (2020b)

No volume 4, os autores abordam o conteúdo de trigonometria, incluindo lei dos senos e dos cossenos, porém, é utilizado de maneira direta e sem propostas de utilização de tecnologias digitais para ajudar na resolução de exercícios. No capítulo 1, o autor coloca entre os objetivos: "reconhecer congruência de triângulos, passando a utilizar de maneira sucinta em poucas situações", conforme Figura 27.

Figura 27: Objetivos do primeiro capítulo



CONHEÇA O CAPÍTULO

Objetivos

- Reconhecer a semelhança e a congruência de triângulos, bem como as relações métricas em triângulos retângulos.
- Resolver e elaborar problemas utilizando a semelhança e a congruência de triângulos e as relações métricas em triângulos retângulos.
- Explorar e compreender as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente em triângulos retângulos e as relações entre elas.
- Utilizar a calculadora para determinar o valor exato ou aproximado das razões trigonométricas de ângulos agudos.
- Resolver e elaborar problemas aplicando as razões trigonométricas em triângulos retângulos.
- Compreender a lei dos senos e a lei dos cossenos em triângulos quaisquer.
- Resolver e elaborar problemas utilizando a lei dos senos e a lei dos cossenos.

A BNCC

No decorrer do capítulo, favorecemos o desenvolvimento das competências gerais da Educação Básica, bem como das competências específicas e das habilidades de Matemática e suas Tecnologias e de outras áreas do conhecimento indicadas a seguir. Também estão indicados os temas contemporâneos transversais presentes no capítulo.

Competências gerais: CG01, CG02, CG05, CG07, CG08.

Competência específica de Matemática e suas Tecnologias: CEMAT03.

Habilidades de Matemática e suas Tecnologias: EM13MAT306, EM13MAT308.

Fonte: Dante e Viana (2020b)

O conteúdo de lei dos senos e dos cossenos é abordado, e logo em seguida tem alguns exercícios resolvidos, porém sem conexão com congruência de triângulos.

c) **Prisma: Geometria e Trigonometria – Bonjorno, Giovanni Jr. e Câmara (2020)**

No livro, os autores deixam uma parte para falarem de todos os casos de congruência, seguido de uma quantidade considerável de exercícios para os alunos fixarem os casos, conforme Figura 28.

Figura 28: Casos de Congruência no Livro Prisma

Casos de congruência de triângulos

Vimos que, para determinar se dois triângulos são congruentes, verificamos se os seus lados e os seus ângulos correspondentes são congruentes.

No entanto, existem algumas condições que, quando satisfeitas, nos garantem que dois triângulos são congruentes sem precisar verificar os três lados e os três ângulos. Essas condições são chamadas de **casos de congruência de triângulos** e podem ser demonstradas. Apresentaremos, a seguir, esses casos

1º caso: Lado, Lado, Lado (LLL)

Dois triângulos são congruentes quando possuem os três lados respectivamente congruentes.

Fonte: Bonjorno, Giovanni Jr. e Câmara (2020)

A lei dos senos e lei dos cossenos é estudado nesse volume, além disso o livro demonstra cada um deles. Em seguida, o conteúdo fica por conta de exercícios para os alunos resolverem, porém sem nenhuma conexão com os casos de congruências. Além disso, o uso de tecnologias digitais é mencionado no livro como proposta à abordagem de algumas atividades presentes no livro, conforme Figura 29.

Figura 29: Atividade usando Geogebra

> ATIVIDADE RESOLVIDA E ATIVIDADES

A atividade resolvida apresenta uma situação de aplicação da expressão da lei dos cossenos.

As atividades propostas oferecem uma grande diversidade de aplicações da lei dos cossenos e devem ser exploradas para sistematização do conteúdo.

Atenção especial deve ser dada aos estudantes no momento da resolução da atividade **30**, que é irresolúvel por falta de um dado. Observar se os estudantes estão atentos a isso. É interessante verificar esse fato utilizando o GeoGebra. Ao construir um paralelogramo $ACDC'$, tal que $AC = DC'$ e $AD = 37^{\left(\frac{1}{2}\right)}$ e movimentar o ponto D, observa-se que os ângulos mudam.

Fonte: Prisma (2020).

No capítulo seguinte, será exposto o estado do conhecimento sobre geometria plana que visou encontrar trabalhos acadêmicos que contribuíram sobre a temática. Nessa etapa será discutido sobre a produção no Brasil e posteriormente haverá uma análise sobre o cenário envolvendo publicações que se dirigiam ao ensino médio.

4 ESTADO DO CONHECIMENTO SOBRE O ENSINO DE GEOMETRIA PLANA NO ENSINO MÉDIO COM USO DE TECNOLOGIAIS DIGITAIS

No presente capítulo têm-se como objetivo elaborar o estado do conhecimento sobre o ensino de geometria plana no Brasil com uso de tecnologias digitais.

Tecnologias digitais têm sido um tema recorrente em debates no Brasil e em outros países. Seja no mercado de trabalho, seja nas escolas ou em uma mera atividade de construção de texto, a informática está cada vez mais inserida no cotidiano da sociedade.

Borba e Penteado (2016, p. 16) destacam que esse tema foi amplamente rejeitado no processo de ensino, havendo até alertas sobre os perigos de seu uso. Esse discurso vem ligado ao pensamento de que com a informática a aprendizagem dos alunos seria afetada, visto que, os esses apenas iriam clicar em uma tecla que o professor solicitasse e o computador faria o resto, dando a ideia de que o aluno seria apenas um repetidor de tarefas.

Em contraposição ao que era defendido há alguns anos, Borba e Penteado (2016, p. 16) defendem uma visão diferente sobre o acesso à informática quando informam que: “[...] O acesso à informática deve ser visto como um direito e, portanto, nas escolas públicas e particulares o estudante deve poder usufruir de uma educação que no momento atual inclua, no mínimo, uma “alfabetização tecnológica” (BORBA; PENTEADO, 2016, p. 16).

De acordo com Mendes (2009), atualmente a informática é um importante componente para a aprendizagem matemática no mundo, por meio dela almeja-se a superação de obstáculos encontrados entre professores e estudantes no processo de ensino-aprendizagem.

Vale destacar que, há um entendimento de que o uso de tecnologias digitais possibilita aos estudantes alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens e que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações. Além disso, seu no estudo de geometria facilita a aprendizagem em outras áreas, sendo, então, uma área de alta relevância para a leitura e interpretação do mundo.

4.1 GEOMETRIA PLANA NA PRODUÇÃO ACADÊMICA DO BRASIL (1989-2022)

Para a necessária compreensão dos principais estudos da produção acadêmica sobre o uso de tecnologias digitais como ferramenta metodológica no ensino de geometria plana na sala de aula, com ênfase no Ensino Médio, foi realizado um estudo do tipo estado do conhecimento. Assim sendo, salienta-se que o estado do conhecimento pode ser entendido como: “identificação, registro, categorização que levem à reflexão e síntese sobre a produção cientifica de uma determinada área, em um determinado espaço de tempo, congregando periódicos, teses, dissertações e livros sobre uma temática específica” (MOROSINI e FERNANDES, 2015, p. 102).

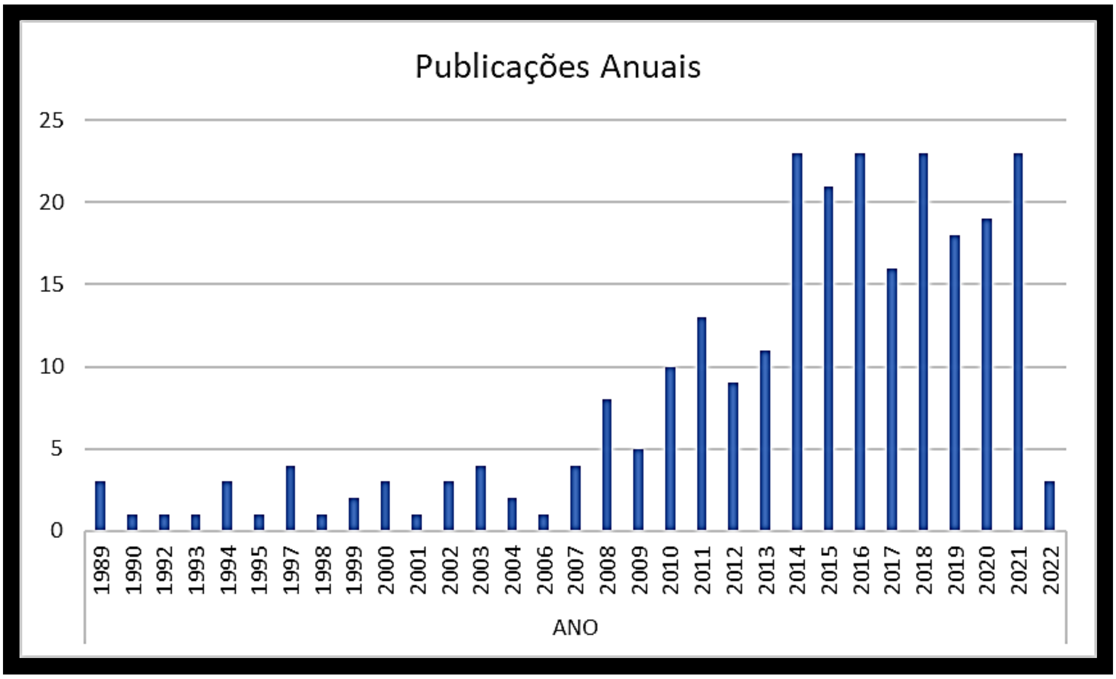
O estado do conhecimento foi desenvolvido como uma pesquisa quantitativa e qualitativa tendo como fonte o Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), sendo este um repositório de acesso a teses e dissertações defendidas na pós-graduação *stricto sensu* do Brasil.

A busca foi realizada no Catálogo com o descritor: “Geometria Plana” grafado entre aspas duplas, no dia 28 de julho de 2022, às 17 horas 09 minutos, e foram selecionadas as produções acadêmicas sobre o tema em questão, desenvolvidas para o Ensino Médio com o uso de tecnologias digitais. Dessa busca retornaram 259 (duzentos e cinquenta e nove) trabalhos sobre a temática.

Os trabalhos foram sistematizados considerando aspectos como: grau acadêmico e área do conhecimento.

As publicações datam do período de 1989 a 2022 com publicações sobre geometria plana, e as maiores concentrações de trabalhos encontram-se nos anos de 2014, 2016, 2018 e 2021, totalizando com 23 (vinte e três) trabalhos anuais. Os anos com menor número de resultados tiveram apenas uma divulgação anual. Na Figura 30 apresenta-se um gráfico por ano de publicações.

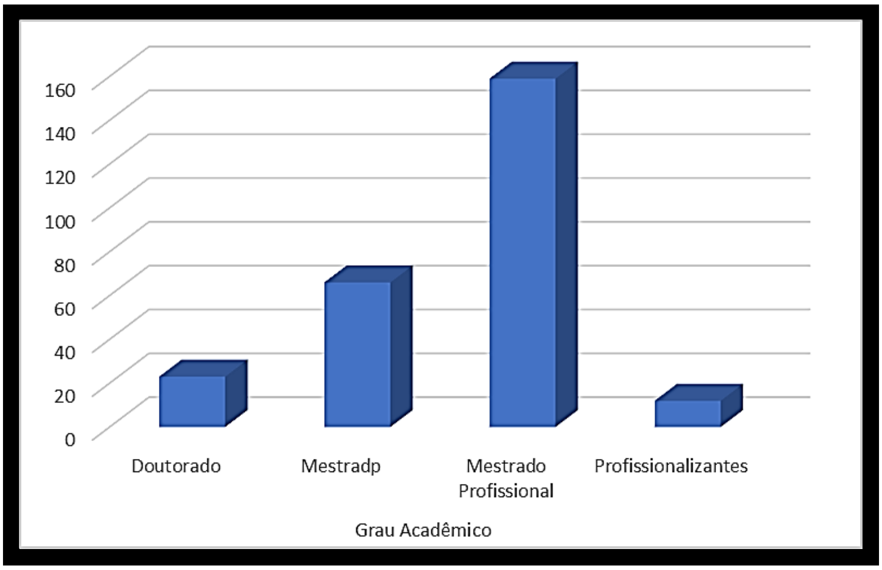
Figura 30: Publicações Anuais



Fonte: Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES (2022).

Os resultados obtidos na pesquisa aplicando o primeiro filtro (Grau Acadêmico), resultaram em quatro graus acadêmicos, sejam eles: Doutorado, Mestrado, Mestrado Profissional e Profissionalizante. Os resultados do Grau de Doutorado foram 23 (vinte e três), de Mestrado 66 (sessenta e seis), de mestrado Profissional 159 (cento e cinquenta e nove), e de Mestrado Profissionalizante 12 (doze) resultados constatados. Na Figura 31, um gráfico que representa os trabalhos resultantes da pesquisa em grau acadêmico.

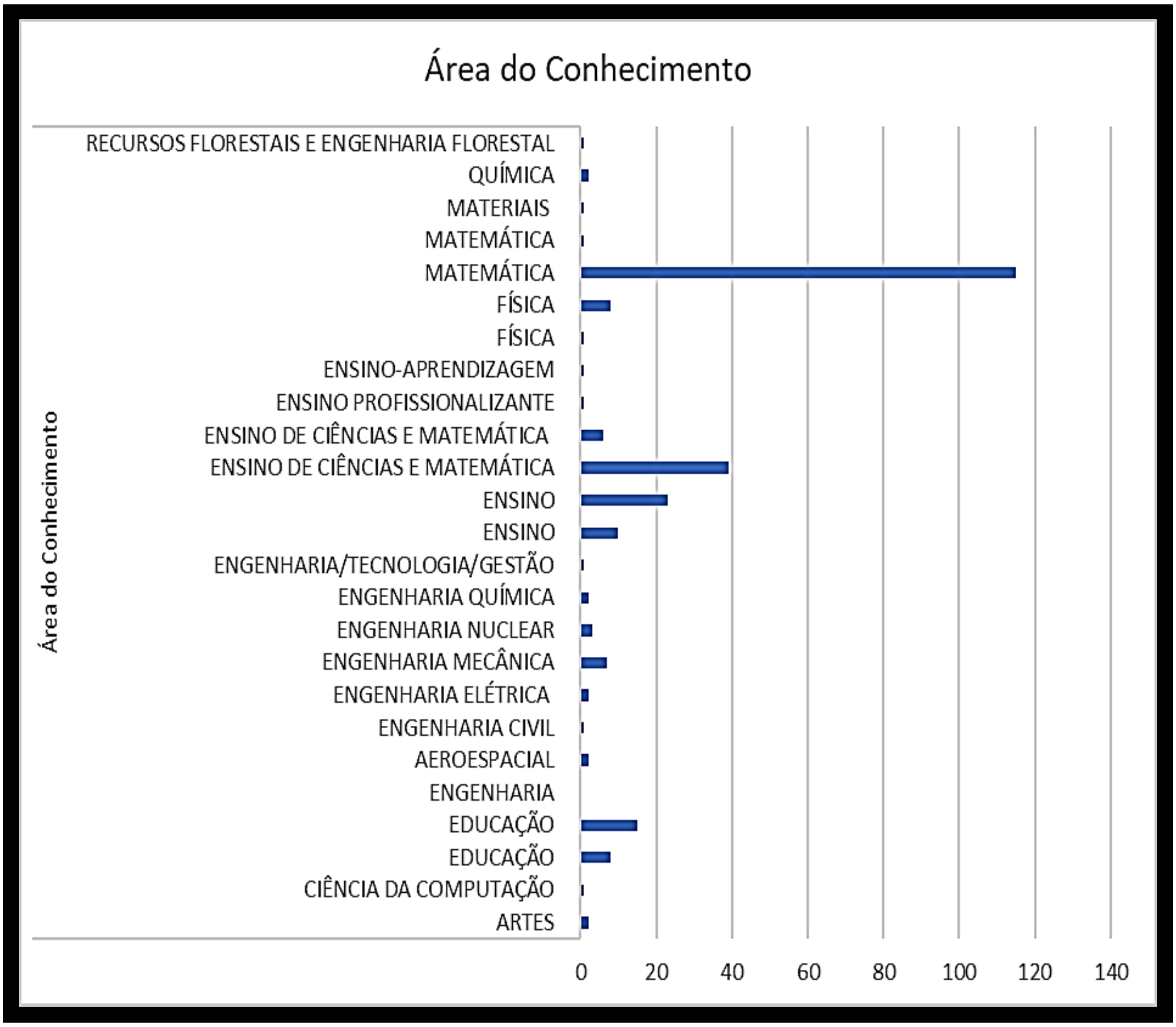
Figura 31: Graus Acadêmicos das produções



Fonte: Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES (2022).

No segundo filtro (Área do Conhecimento) foram encontrados 25 divisões do conhecimento. É possível notar que entre as áreas encontradas, havia algumas repetições, que são advindas de trabalhos anteriores à Plataforma Sucupira. A Figura 32 é representativa das áreas do conhecimento das produções catalogadas na Capes.

Figura 32: Área do Conhecimento das produções acadêmicas sobre geometria plana



Fonte: Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES (2022).

Há uma grande quantidade de trabalhos publicados sobre o tema, porém, ao aplicar os filtros relacionados a ensino, sejam esses: “ensino, ensino de ciências e matemática, ensino profissionalizante e ensino-aprendizagem”, apenas 80 resultados foram encontrados. Todavia, dos resultados referentes ao ensino, 29 (vinte e nove) eram anteriores à Plataforma Sucupira e 12 (doze) não estavam com autorização para divulgação, e esses não poderão ser analisados de maneira mais rigorosa. Dessa forma, apenas 39 (trinta e nove) trabalhos estão disponíveis para uma análise com mais rigor e reflexão acerca das publicações.

Em busca de um recorte mais próximo do tema, esses 39 trabalhos foram analisados tendo como parâmetros de seleção: a metodologia de pesquisa com o objetivo de averiguar quantos desses resultados encontrados tem como foco temático metodologia de ensino com o uso de tecnologias digitais, bem como a etapa de ensino, com intuito de encontrar quais tratam da etapa do Ensino Médio.

Em busca de um recorte mais próximo do tema, esses 39 trabalhos serão analisados em categorias, avaliando as propostas de ensino, com o objetivo de averiguar quantos desses resultados encontrados tem como metodologia de ensino o uso das TDICs, bem como sua etapa de ensino, com intuito de encontrar os quais se referem a etapa do ensino médio.

Sendo assim, a análise foi realizada nos 39 resultados obtidos, buscando compreender o que vem sendo proposto e discutido pelos autores acerca da aplicação de tecnologias digitais para o ensino de geometria plana, o que resultou em 17 trabalhos que se relacionavam com o ensino com o uso das TDICs. O Quadro 1 expõe e categoriza a produção analisada nessa pesquisa.

Quadro 1: Trabalhos relacionados a geometria plana

ANO	TÍTULO	AUTOR	GRAU	DISPONÍVEL	ETAPA DE ENSINO - ESTUDADA
2021	USO DO SOFTWARE SKETCHUP FOR SCHOOLS PARA O ENSINO DE GEOMETRIA PLANA EM AULAS ONLINE'	JOÃO RICARDO CHIODI	Mestrado	Sim	Ensino Médio
2020	INTERFACES DA ROBÓTICA EDUCATIVA NA ENSINAGEM DE ALGUNS ELEMENTOS DE GEOMETRIA PLANA NO ENSINO FUNDAMENTAL	SARA PROVIN	Mestrado	Sim	Ensino Fundamental
2019	SITUAÇÕES DIDÁTICAS OLÍMPICAS (SDO) PARA O ENSINO DE GEOMETRIA PLANA: UM CONTRIBUTO DA ENGENHARIA DIDÁTICA'	JOSÉ EDNALDO DE ARAÚJO FILHO	Mestrado	Sim	Ensino Médio
2019	AULAS DE GEOMETRIA COM AUXÍLIO DO SOFTWARE SKETCHUP'	GREICE DANIELA WILGES	Mestrado	Sim	Ensino Fundamental
2019	SITUAÇÕES DIDÁTICAS OLÍMPICAS APLICADAS A PROBLEMAS DE	JOÃO EVANGELISTA	Mestrado	Sim	Ensino Médio

	GEOMETRIA PLANA DA OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS (OBMEP)	DE OLIVEIRA NETO			
2018	FORMAÇÃO DE CONCEITOS DE GEOMETRIA PLANA NA EJA COM O *SOFTWARE* GEOGEBRA	TAIANE DE OLIVEIRA ROCHA ARAÚJO	Mestrado	Sim	EJA/Ensino Médio
2018	SEQUÊNCIA DIDÁTICA INTERATIVA COM COMPILADOR DE PROGRAMAÇÃO SCRATCH E SEUS BENEFÍCIOS PARA O DESENVOLVIMENTO DA GEOMETRIA PLANA'	DÉLCIO RÉGIS HAUBERT	Mestrado	Sim	Ensino Fundamental
2017	FÁBRICA DE MATEMÁTICA: APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA VIA CONFECÇÃO E MANIPULAÇÃO DE OBJETOS DIGITAIS E NÃO-DIGITAIS'	CAMILA ALIATTI	Mestrado	Sim	Ensino Fundamental
2017	OBJETO DE APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA PLANA E SÓLIDA PARA O ENSINO MÉDIO E TÉCNICO PROFISSIONALIZANTE DE MECÂNICA	AUGUSTO CESAR MACHADO RAMOS.	Mestrado	Sim	Ensino Médio
2017	O USO DO AUTOCAD NO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA PLANA E ESPACIAL NAS AULAS DE MATEMÁTICA DO SEGUNDO ANO DO CURSO TÉCNICO DO IFMG-SJE	FERNANDO HENRIQUES MAFRA	Mestrado	Sim	Ensino Médio
2016	GEOMETRIA SINTÉTICA: INVESTIGAÇÃO SOBRE O USO DE UM SOFTWARE DE GEOMETRIA DINÂMICA COMO MEIO PARA DEMONSTRAÇÕES VISUAIS	NADIA ROBERTA QUAINI BRESOLIN	Mestrado	Sim	Ensino Médio
2016	A INTEGRAÇÃO DAS TECNOLOGIAS DIGITAIS AO ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL – ANOS FINAIS: UMA PROPOSTA COM FOCO NO ESTUDO DE PERÍMETRO E ÁREA DE FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS	ESMÊNIA FURTADO PARREIRA FERREIRA	Mestrado	Sim	Ensino Fundamental
2016	A GEOMETRIA NO ENSINO MÉDIO: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA UTILIZANDO A FOTOGRAFIA, OS AMBIENTE NÃO FORMAIS DE ENSINO E OS OBJETOS VIRTUAIS DE APRENDIZAGEM'	LUCIANA CRISTINA DE MELO TAVARES	Mestrado	Sim	Ensino Médio

2016	EXPLORANDO A INFORMÁTICA EDUCATIVA COMO ALTERNATIVA DE ENSINO DA GEOMETRIA PLANA NA EDUCAÇÃO BÁSICA	CAROLINE SAÚGO	Mestrado	Sim	Ensino Fundamental
2015	O USO DO GEOGEBRA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS A PARTIR DA TEORIA DE GALPERIN'	ANGELO AUGUSTO COÊLHO FREIRE	Mestrado	Sim	Ensino Médio
2014	AS CONTRIBUIÇÕES DO SOFTWARE GEOGEBRA COMO UM MEDIADOR DO PROCESSO DE APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA PLANA NA EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA (EAD) EM UM CURSO DE LICENCIATURA EM PEDAGOGIA.	DÉBORA PELLI	Mestrado	Sim	Superior
2014	FORMAÇÃO DE PROFESSORES DOS ANOS INICIAIS PARA O ENSINO DE GEOMETRIA PLANA: UMA EXPERIÊNCIA COM O USO DO *SOFTWARE KLOGO'*	LUANA QUADRINI DA SILVA	Mestrado	Sim	Ensino Fundamental

Fonte: Catálogo de Teses e Dissertações, 2022.

As produções que serão analisados quanto ao tipo de tecnologia usada no ensino são as destinados ao Ensino Médio e datam de 2014 a 2021, assim os trabalhos de: Provin (2020); Wilges (2019); Haubert (2018); Ferreira (2016); Saúgo (2016); Pelli (2014); Silva (2014) não estarão dentro do conjunto levado em consideração para reflexão e síntese, restando assim, 9 (nove) trabalhos para análise.

4.3 GEOMETRIA PLANA NO ENSINO MÉDIO COM USO DE TECNOLOGIAIS DIGITAIS NA PRODUÇÃO ACADÊMICA DO BRASIL (2014 - 2021)

As produções analisadas totalizam 9 (nove) dissertações sobre geometria plana com o uso de tecnologias digitais no Ensino Médio dos autores: Chiodi (2021); Filho (2019); Neto (2019); Araújo (2018); Ramos (2017); Mafra (2017); Bresolin(2016); Tavares (2016) e Freire(2015) que constam no Quadro 1.

Chiodi (2021) em sua dissertação busca identificar as contribuições que o *software* SketchUp pode ter para o ensino de geometria plana, utilizando como fundamento a Zona de Desenvolvimento Proximal, teoria desenvolvida por Vygotsky[3]. A sua pesquisa ocorreu durante o ensino remoto em decorrência da pandemia da Covid-19, no ano letivo de 2020. Dessa pesquisa, participaram cinco alunos do

[3] Vygotsky é um psicólogo que defendeu que a aprendizagem se dá pela interação social.

segundo ano do Ensino Médio, e os alunos desenvolveram a planta baixa de suas respectivas residências, primeiro com papel e lápis, em seguida, com a utilização do SketchUp. Essa pesquisa mostra que o SketchUp pode ser utilizada como *software* educacional, além de ampliar a Zona de Desenvolvimento Proximal.

Chiodi expõe em seu texto que:

> Esta pesquisa buscou inteirar-se das publicações referentes ao uso do software *SketchUp* como recurso metodológico que auxilia no processo ensino aprendizagem. As publicações com esta temática foram localizadas na internet, através de pesquisas no Google Scholar, a partir de termos como: uso do *sketchup* na escola, *sketchup* como software educacional e ensino de geometria com uso do *software SketchUp*. (CHIODI, 2020, p.18)

Filho (2019) em seu trabalho trata das Olimpíadas de Matemática em uma proposta de Situações Didáticas Olímpicas com o uso do *Geogebra*, como utilização das duas primeiras fases da engenharia didática para o ensino de geometria plana no Ensino Médio. Em sua produção propôs o uso de Problemas Olímpicos (POs), dividido em quatro fases: ação, formulação, validação e institucionalização. Filho discorre sobre o que se pretende em sua pesquisa:

> Por meio dessa pesquisa, buscamos entender a semântica dos conteúdos de Geometria Plana na situação da Matemática olímpica, da mesma forma que procuramos distinguir questões olímpicas que são capazes de expandir potenciais do processo de aprendizagem com a ajuda do programa GeoGebra (FILHO, 2019, p.38).

Na produção de Neto (2019), a proposta se assemelha à de Filho (2019), apresentando a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e de forma a complementar uma metodologia utiliza como situação didática olímpica (SDO), fundamentada na matemática francesa e alicerçada na engenharia didática de Michèle Artigue[4]. Nesse trabalho, ele propõe Problemas Olímpicos (POs) com o uso do *software Geogebra*, para o ensino de geometria na OBMEP em uma escola de tempo integral com alunos do Ensino Médio. O trabalho visa contribuir não apenas para as olimpíadas, mas, para a didática do ensino da matemática, visto que os SDOs objetivam desenvolver o raciocínio dos alunos através do processo de medicação didática. Neto (2019) comenta as possibilidades de ensino com o *Geogebra:*

---

[4] Michèle Artigue é uma pesquisadora matemática francesa e um dos responsáveis pelo estabelecimento pelo método e teoria da engenharia didática.

> [...] o Geogebra possibilita aos usuários realizarem as construções passo a passo, refletindo sobre cada ação realizada com o auxílio do *software*. A partir dessa perspectiva, com o uso deste *software*, podemos, individualmente ou em grupo, nos tornarmos autores do processo de construção do conhecimento matemático, redescobrindo conceitos importantes para a compreensão dos conteúdos estudados em sala de aula (NETO, 2019, p.23).

Araújo (2018) em seu trabalho discorre sobre a educação de jovens e adultos com o uso de tecnologias digitais, em especial o *Geogebra*. No texto é relatado intervenções realizadas em uma escola estadual, buscando entender a interação dos alunos com as tecnologias digitais. Nas intervenções são feitas perguntas aos discentes de modo que associe o cotidiano com forma das figuras planas. Araújo (2018) destaca

> que queremos entender como os alunos conseguem formar os conceitos, o modo de interação deles com a tecnologia, a experiência em utilizar um software para aprender matemática. Além disso, para nós, o importante são as respostas fornecidas pelo grupo pesquisado, e não a quantidade de respostas, ou seja, nossos resultados não podem ser representados em dados estatísticos (ARAÚJO, 2018, p.75).

Ramos (2017) propõe em sua produção um Objeto de Aprendizagem para auxiliar professores no ensino de geometria plana no Ensino Médio com o uso de *softwares* de geometria dinâmica. Em seu trabalho o foco é para alunos do Ensino Médio Técnico nas áreas de Mecânica. Na sua proposta o autor propõe a utilização de dois *softwares*: o *eXeLearning*[5] e o *Geogebra*. Ele inicia com a identificação de polígonos, em seguida, vai para: identificação e determinação de áreas de figuras planas; identificação e determinação de áreas e volumes de sólidos; e projeções ortogonais e aplicações. O passo a passo da atividade é bem claro, além disso, ele usa um alto grau de detalhamento e ilustrações para melhorar a compreensão das atividades.

Ramos (2017) detalha como foi o uso dos *softwares* na sequência didática proposta em seu trabalho no qual

> [...] utilizou-se o *software* de Geometria dinâmica (*GeoGebra*) e o editor de código aberto de conteúdos didáticos em suporte digitais (*eXeLearning*), com o propósito de dinamizar o processo de ensino e aprendizagem de Geometria, combinando um misto de textos introdutórios e explicativos, vídeos e animações, dispostos de maneira a atender os mais diversos estilos

[5] *eXeLearning* é um *software* que permite a professores e a acadêmicos a publicação de conteúdos didáticos em suportes digitais.

> de aprendizagem, dentre eles o visual, auditivo e cinestésico (RAMOS, 2017, p. 127).

Mafra (2017) em sua proposta, cita a Teoria das Inteligências Múltiplas, de Gardner, em especial a inteligência espacial. A pesquisa abrangeu as duas turmas de alunos matriculados no segundo ano do Ensino Médio do curso técnico em Agropecuária e utiliza o *AutoCad*[6], um programa que é utilizado, principalmente por arquitetos para a visualização e classificação dos polígonos. Embora seja um *software* menos convencional, este trabalho em relação a geometria plana consiste apenas em desenhar as figuras planas, o que não difere muito em relação ao desenho no quadro e ou no papel. Mafra (2017) discorre sobre o *software* e informa que é

> [...] Muito utilizado por engenheiros e arquitetos o AutoCAD é utilizado para desenhos técnicos de plantas e objetos bidimensionais e tridimensionais com incrível perfeição e exatidão de medidas, o que o torna perfeito para desenhos técnicos. Suas ferramentas são variadas e permitem realizar qualquer tipo de traço nas mais várias situações (MAFRA, 2017, p.28).

Bresolin (2016) em sua produção traz como atividade para o ensino de geometria sintética o uso do *Geogebra*, essa proposta traz investigações de teoremas da geometria plana, com intuito de potencializar e desenvolver a criatividade, além do uso do pensamento intuitivo como forma de analisar e estimular formulação de conjecturas. Na sua proposta, há enunciados e ilustrações do passo a passo de como encontrar o resultado que se almeja, além disso, há demonstração do teorema de estudo. Bresolin (2016) comenta sobre o *software Geogebra* e sobre sua utilização em demonstrações matemáticas

> por meio do software livre GeoGebra, de fácil compreensão e aplicabilidade, acredita-se que, para aquelas demonstrações eminentemente teóricas de teoremas, centradas na axiomática euclidiana, os alunos poderão realizá-las na escola básica, explorando, particularmente, a argumentação e despertando o estudante para investigações futuras realizando conjecturas (BRESOLIN, 2016, p.15).

Tavares (2016) apresenta uma proposta que utiliza a Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel [7]como forma de sequência didática, utilizando para isso fotografias, trena, fita métrica em uma trilha ecológica do Cerrado. Além disso, há o

---

[6] *AutoCad* é um *software* de desenho técnico utilizado principalmente em áreas como engenharia mecânica e civil.
[7] David Ausubel foi um psicólogo da educação estadunidense que desenvolveu a Teoria da Aprendizagem Significativa.

uso de objetos virtuais de aprendizagem como metodologia de ensino, e a partir de um Objeto Virtual de Aprendizagem (OVA) foram discutidos conceitos e elementos que estavam presentes nas fotografias nele dispostas. Tavares (2016) objetiva em sua dissertação:

> desenvolver, aplicar e avaliar os resultados de uma Sequência Didática, composta por 31 aulas que trabalharam a Geometria Plana e Espacial, fundamentando-se nos princípios da Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel. Na Sequência Didática são explorados os elementos da Natureza, utilizando-se para isso de uma trilha ecológica em ambiente não formal de educação (TAVARES, 2016, p. 14).

Freire (2015) apresenta em sua produção o uso do *Geogebra* e tem como premissa a teoria histórico-cultural. Em sua obra o principal teórico é Piotr Yakovlevich Galperin, que fundamenta seu trabalho na transformação de uma atividade externa em atividade interna. Sua proposta foi desenvolvida com atividades sequenciadas e por meio da Base Orientadora da Ação (BOA). Em seguida, os alunos foram postos em desenvolvimento de operações/situações nos três níveis: materializado, verbal e mental. Com isso, os estudos de Freire (2015) apontam que as etapas defendidas por Galperin são adequadas para conteúdos conceituais e evidenciam a necessidade de seguir as orientações da BOA. Freire (2015) comenta sobre as contribuições do Geogebra quando salienta que,

> [...] O GeoGebra é um software de matemática dinâmica para ser utilizado no ensino de Matemática nas modalidades de Ensino Fundamental, Médio e Superior que reúne geometria, álgebra e cálculo. O uso pedagógico deste programa pode trazer importantes contribuições para que as aulas de matemática tenham um complemento do trabalho realizado em sala de aula (FREIRE, 2015, p.38).

Conclui-se, portanto, que os trabalhos usam *softwares* para diferentes atividades e com diferentes objetivos, além disso, apesar da área ser geometria plana, há uma grande diversidade de abordagens de conteúdos distintos por meio desses trabalhos.

Dos *softwares* apresentados pelos autores, o mais usado foi o *Geogebra*, que é convencionalmente utilizado por ter ferramentas que os demais programas não têm. As propostas em sua maioria focam em apresentar os polígonos, além de mostrar algumas propriedades, porém, nenhum focou em uma parte específica da geometria plana, como por exemplo, apenas áreas, ou apenas triângulos. Desse modo, considera-se que, embora, seja uma área de grande utilização no cotidiano poucos trabalhos foram encontrados sobre o tema, e em relação a trabalhos com o uso de tecnologias digitais, apenas 8 (oito) contemplavam os pré-requisitos de análise, ora seja: propostas de ensino de geometria plana com o uso tecnologias digitais para o Ensino Médio.

Desse modo, percebe-se que não há trabalhos envolvendo a resolução de triângulos ou congruências e que os aborde de maneira que interajam entre si. Assim, percebe-se que, há uma lacuna a ser discutida em relação a geometria plana que pode ser estudada de modo a utilizar o *Geogebra* para o Ensino Médio. Sendo assim, no próximo capítulo apresenta-se a proposta didática.

5 PROPOSTA DIDÁTICA PARA ENSINO DE GEOMETRIA PLANA COM USO DE TECNOLOGIAS DIGITAIS PARA O ENSINO MÉDIO

É possível encontrar na *internet* várias opções de *softwares* que podem ser utilizados como recursos para o ensino de matemática tais como: *Geogebra*, Geoplano Virtual, Geospace, MathGV, Régua e Compasso, Tabulae, entre outros. Entre esses *softwares* há os de geometria dinâmica que permitem a construção e manipulação das figuras construídas, sendo assim, são ferramentas que contribuem para os alunos aprenderem mais sobre o tema, visto que participam ativamente das construções das figuras.

Sendo assim, os *softwares* de geometria dinâmica permitem uma aula mais atrativa, sendo que por meio deles é possível mostrar propriedades geométricas que se tornam difíceis, utilizando apenas o quadro e o lápis em sala de aula. Alves (2017) discorre sobre o uso de tecnologias nas aulas e indica que,

> [...] Os professores e educadores em geral podem usar as novas tecnologias no processo de ensino e aprendizagem como ferramentas tecnológicas, sendo que os softwares educacionais são uma destas ferramentas, onde, através dele, o professor poderá tornar suas aulas em um ambiente em que o aluno torna um ser ativo no processo de aprendizagem e o professor passa a ter o papel de orientador e motivador (ALVES, 2017, p.27).

Portanto, os utilizar tecnologias digitais em sala de aula o professor poderá facilitar sua vida do profissional, principalmente por ser uma ferramenta que coloca o aluno em uma situação mais ativa da aprendizagem. É importante salientar que o uso das tecnologias digitais deve ter objetivo claro e planejamento e não apenas a colocação de alunos no laboratório de informática para esperar que o conhecimento ocorra.

Essa proposta tem como objetivo a utilização do software *Geogebra* para o ensino médio, como recurso didático para a resolução de triângulos e os casos de congruências.

5.1 APRESENTAÇÃO DA PROPOSTA

A proposta segue como uma sequência didática composta por cinco atividades que devem ser feitas no laboratório de informática utilizando o *Geogebra*.

O conteúdo a ser exposto é uma interação entre lei dos senos, dos cossenos e congruência de triângulos para alunos do Ensino Médio. Esse é um *software* que o professor pode utilizar pra dinamizar e auxiliar na compreensão de conteúdos que podem se tornar difíceis ou inviáveis de lecionar sem uma tecnologia.

É possível baixar o *Geogebra* gratuitamente acessando a página na *interne*t: http://www.GeoGebra.org/cms/, e seguir os passos para a instalação. Ele pode também ser acessado pela interface online.

Para esse *software*, há um curso que abre anualmente as inscrições, denominado “O Geogebra”, em parceria com a Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR), esse curso é gratuito e na modalidade a distância, o que permite a participação nacional e pode ser acessado na *internet*. É possível se inscrever quando for lançado um edital no site: www.ogeogebra.com.br, e para ter acesso às edições anteriores do curso, o interessado pode acessar o *youtube* e assistir as aulas sem receber o certificado.

5.2 *GEOGEBRA* PARA O ENSINO DE GEOMETRIA PLANA

O *Geogebra* é um *software* de geometria dinâmica e é o mais popular entre os professores de matemática. A popularidade desse recurso se dá pelas inúmeras ferramentas e recursos que possibilitam uma aula mais atrativa e a construção do conhecimento por parte dos alunos. Além disso, o *softwar*e tem uma interface simples e intuitiva, o que permite até pessoas que não tem grande domínio em informática utilizarem para ensino e aprendizagem (ALVES, 2017, p.27).

Além disso, essa tecnologia permite que os alunos assimilem de maneira mais eficaz conceitos que não são tão usuais em seu dia a dia. Ademais,

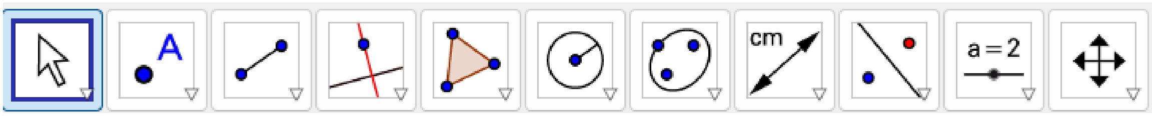
> [...] Quando se vai ensinar geometria plana, alguns conceitos possuem noções primitivas, como, por exemplo, o ponto, a reta e o segmento de reta. Estes, a grande maioria dos alunos consegue compreender mais facilmente, ou pelo menos aceita, pois fazem parte do cotidiano dos mesmos. Entretanto, existem outros conceitos que não são bem aceitos pelo alunado, exemplo: algumas operações com ângulos, pontos notáveis de triângulos, algumas figuras geométricas, sendo estes necessários para a vida acadêmica dos discentes (SANTOS; TRINDADE; JUNIOR, 2020, p.3).

Portanto, além de ser um *softwar*e dinâmico, permite que os alunos consigam compreender de maneira mais fácil conceitos que não são tão intuitivos, inicialmente, para eles. Serão trabalhos com essa ferramenta a resolução de triângulos quaisquer com a Lei dos Senos e dos Cossenos articulada com os casos de congruências.

5.3 FERRAMENTAS NO GEOGEBRA

As ferramentas do *Geogebra* são categorizadas em 12 janelas, como na Figura 32 a seguir:

Figura 33: Janela de Ferramentas



Fonte: *Geogebra, 2023*

Será mostrado a seguir como determinar alguns objetos matemáticos utilizando essas ferramentas disponíveis pelo software.

5.3.1 Determinar um ponto

Um ponto pode ser marcado no *Geogebra,* na 2ª janela de ferramenta, clicando em Ponto . O passo seguinte é clicar no plano do software e será fornecido o ponto, conforme a Figura 34.

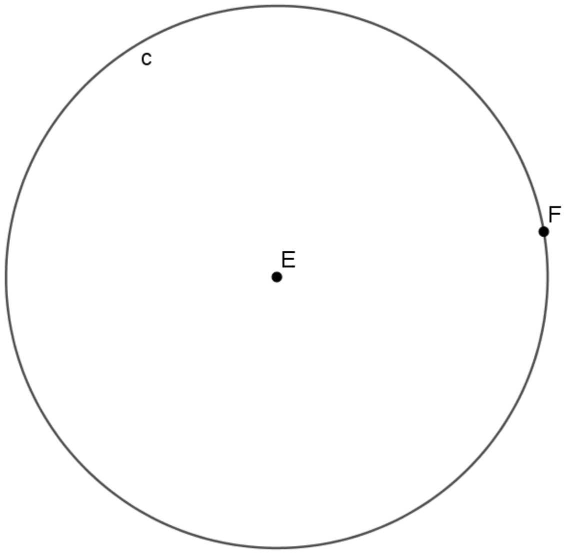
Figura 34: Determinar um ponto

Fonte: Acervo do Autor (2023).

5.3.2 Determinar um ponto em objeto

Um ponto pode ser fixado em um objeto com a ferramenta Ponto em Objeto , obtida na 2ª janela de ferramenta. O seguinte passo é clicar em um objeto, como por exemplo no círculo c, e será construído um ponto que seja fixo ao objeto, como na Figura 35.

Figura 35: Círculo com Compasso.

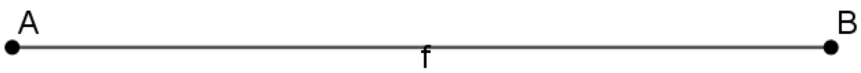


Fonte: Acervo do Autor, 2023.

5.3.3 Construir um segmento

Na 3ª janela de ferramenta, clique em Segmento . Posteriormente clique nos pontos que o segmento irá ligar. A Figura 36, apresenta um segmento ligando os pontos A e B.

Figura 36: Segmento no Geogebra.



Fonte: Acervo do Autor, 2023.

5.3.4 Construir um segmento de comprimento fixo

Na 3ª janela de ferramenta, clique em Segmento de Comprimento Fixo . Em seguida clique no plano do *Geogebra* e abrirá uma janela automática onde será possível colocar a medida do segmento, conforme a Figura 37.

Figura 37: Comprimento do Segmento

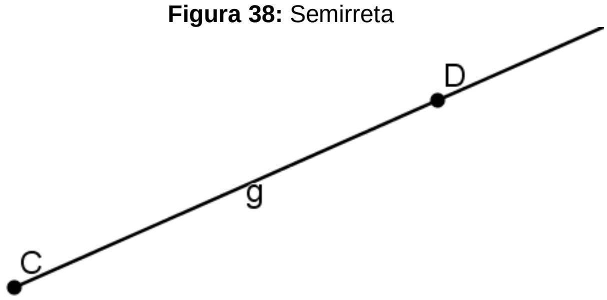
Fonte: Acervo do Autor, 2023.

Clicando em OK, será fornecido o segmento com o comprimento posto na janela.

5.3.5 Construir uma semirreta

Na 3ª janela de ferramenta, clique em Semirreta . Em seguida clique no ponto de origem C e no ponto D por onde passará a Semirreta, conforme a Figura 39.

Figura 38: Semirreta



Fonte: Acervo do Autor, 2023.

5.3.6 Construir uma reta

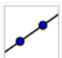
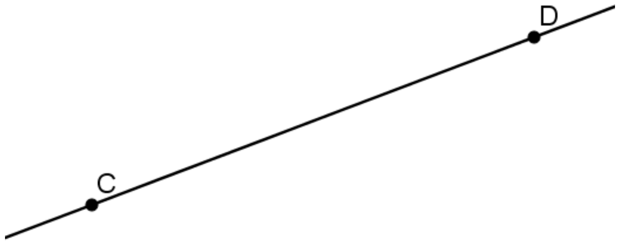
Na 3ª janela de ferramenta, clique em Semirreta . Em seguida clique nos pontos C e D por onde passará a reta, como ilustra a Figura 40.

Figura 39: Reta



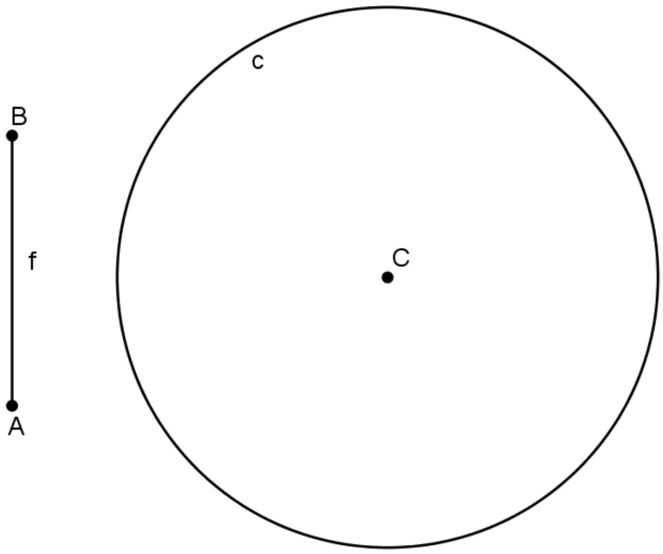
Fonte: Acervo do Autor (2023).

5.3.7 Construir um círculo com o Compasso

Se o objetivo é um círculo de raio fixo, é necessário que anteriormente seja construído um segmento, como no tópico 5.3.4. Mas, se o objetivo for manipular o raio do círculo, será necessário a construção de um segmento, como no item 5.3.3.

Na 6ª janela de ferramenta, clique em compasso . Em seguida clique no segmento. Posteriormente clique no plano do *Geogebra* e será construído o círculo, conforme a Figura 40.

Figura 40: Círculo com Compasso



Fonte: Acervo do Autor (2023)

5.3.8 Determinar a amplitude de um ângulo

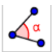
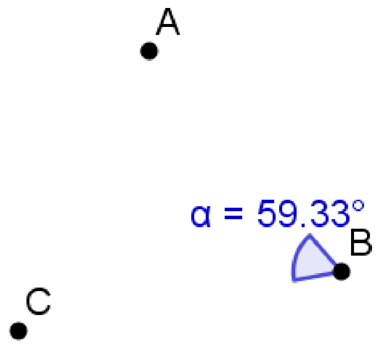
Na 8ª janela de ferramenta , clicando em Ângulo  e selecionando três pontos A,B e C, nessa ordem, e será construído um ângulo no vértice B, como na Figura 41 a seguir.

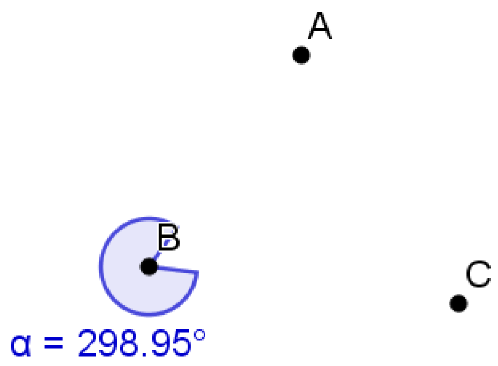
Figura 41: Ângulo ABC



Fonte: Acervo do Autor (2023)

Caso construa na ordem C,B e A, o ângulo construído será externo (Ver Figura 42).

Figura 42: Ângulo CBA

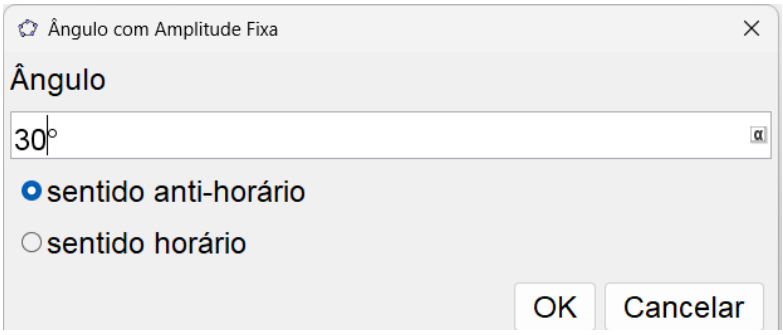


Fonte: Acervo do Autor (2023).

5.3.9 Construir um ângulo com amplitude fixa

Na 8ª janela de ferramenta, clicaremos em Ângulo com Amplitude Fixa . Essa ferramenta permite construir um ângulo de medida fixa, você clica em dois pontos e insere a medida desejada em uma janela que se abre automaticamente, conforme a Figura 43.

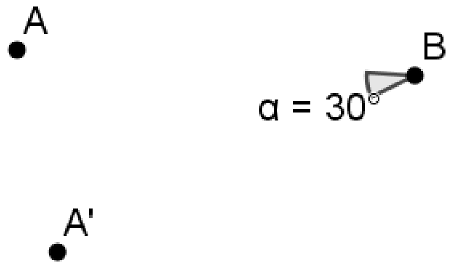
Figura 43: Janela de ângulo.



Fonte: Acervo do Autor (2020)

Você pode selecionar também o sentido do ângulo, e ao clicar em OK será fornecido o ângulo de amplitude fixa, como ilustra a Figura 44.

Figura 44:Ângulo de amplitude fixa



Fonte: Acervo do Autor (2020).

5.3.10 Determinar a Interseção de Dois Objetos

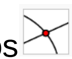
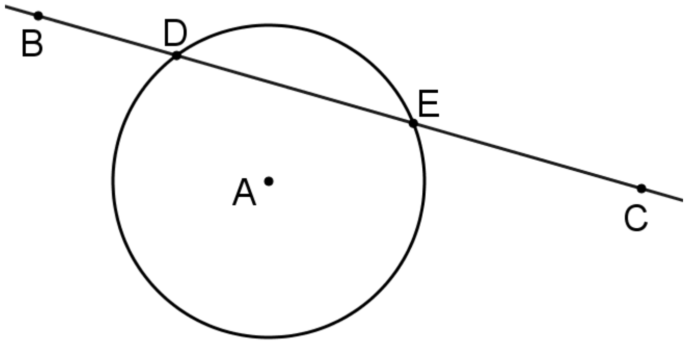
O ponto de interseção entre dois objetos pode ser criado selecionando os objetos, dessa forma todas as interseções existentes são marcadas. Primeiro selecione a 2ª janela de ferramenta e clique em Interseção de Dois Objetos , clique nos objetos e será fornecido as interseções. Por exemplo, o ponto de interseção entre a reta $\overleftrightarrow{BC}$ e a circunferência com centro em A são os pontos D e E. A seguir, a Figura 45 ilustra a construção.

Figura 45: Pontos de Interseção

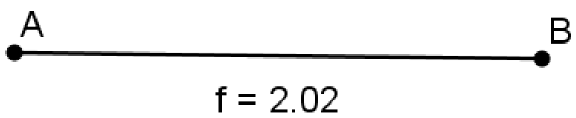


Fonte: Acervo do Autor (2023).

5.3.11 Determinar a distância entre dois pontos

Na 8ª janela de ferramenta, selecione a ferramenta Distância, Comprimento ou Perímetro. Clique no objeto do qual quer saber a distância e será fornecido a informação, como é ilustrado na Figura 46.

Figura 46: Distância



Fonte: Acervo do Autor (2023).

5.4 ATIVIDADES SUGERIDAS

a) **Tema: Resolução de Triângulos e Casos de Congruências**

b) **Público-alvo:** Alunos do 2º ano do Ensino Médio.

c) **Objetivo Geral:**

Resolução de problemas que envolvem triângulos utilizando lei dos senos e dos cossenos de forma articulada com os casos de congruências de triângulos com o uso do *Geogebra*.

d) **A sequência didática tem por objetivos específicos:**

1. Aplicar lei dos senos;
2. Aplicar lei dos cossenos;

3. Relembrar e aplicar os casos de congruências;
4. Conhecer o caso de congruência Lado, Lado, Ângulo (LLA);
5. Analisar situações em que não há caso de congruência.

e) Recursos utilizados para o desenvolvimento da sequência didática:

1. Apagador;
2. Lápis de quadro branco;
3. Projetor;
4. Laboratório de informática;
5. Computadores;
6. *Software Geogebra*.

f) Duração: Aconselha-se que que a sequência tenha sua aplicação com duração de 5 aulas de 45 minutos.

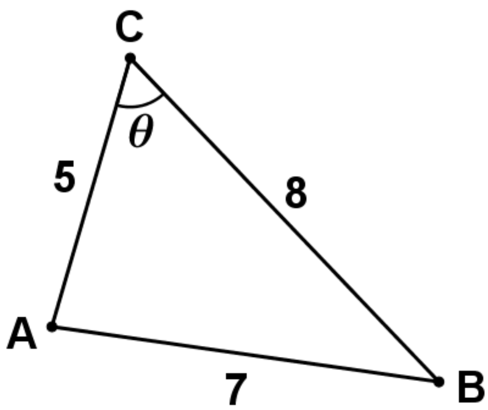
ATIVIDADE 1 (45 minutos)

Essa primeira atividade será para resolver um triângulo quando é dado seus três lados, ou seja, trabalharemos no caso LLL. Para isso, iremos resolver o exercício a seguir, onde é dado três lados, sendo solicitado encontrar um dos ângulos.

- **Exercício**

Dado o triângulo ABC na Figura 47, determine a medida, em graus, do ângulo θ

Figura 47: Exercício 1



Fonte: Acervo do Autor (2023).

➢ **Resolução:**

$$7^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot cos\ \theta$$

$$49 = 25 + 64 - 80 \cdot cos\ \theta$$

$$49 - 89 = -80 \cdot cos\ \theta$$

$$-40 = -80 \cdot \cos\theta$$

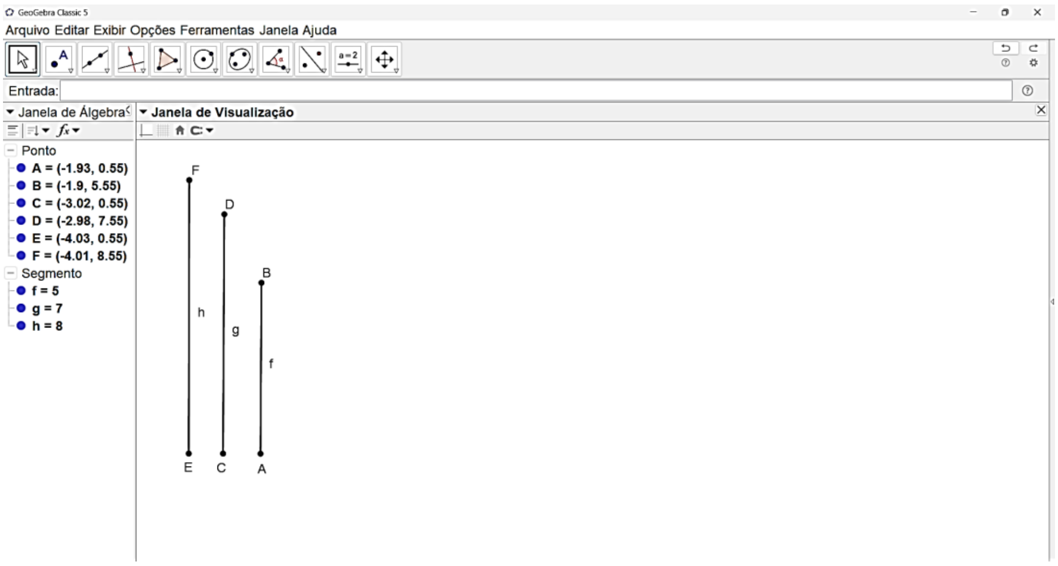
$$\frac{1}{2} = cos\ \theta$$

$$\therefore cos\ \theta = 60°$$

➢ **Orientações de construção com o *Geogebra***

Agora resolveremos esse exercício com o *Geogebra*. Inicie levando os discentes ao laboratório de informática para conhecer o software *Geogebra*. Em seguida, com o *software* já aberto, direciona os alunos para criar três segmentos de reta com comprimento fixo (conforme as instruções 5.3.4), medindo 5, 7 e 8 unidades (ver Figura 48). É importante salientar que os três segmentos serão lados de um triângulo, portanto, é necessário lembrar da desigualdade triangular para a existência de um triângulo.

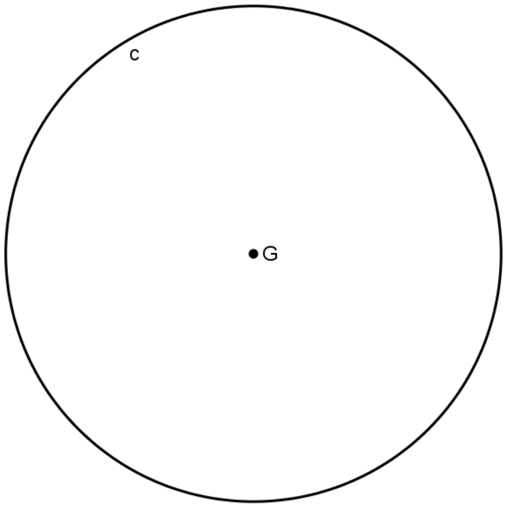
Figura 48: Imagem com três segmentos no Geogebra



Fonte: Acervo do Autor (2023).

Em seguida, será construído um círculo (conforme as instruções 5.3.7) cujo comprimento do raio seja de mesma medida do comprimento do maior segmento, ou seja, o segmento EF que mede 8 unidades (ver Figura 49).

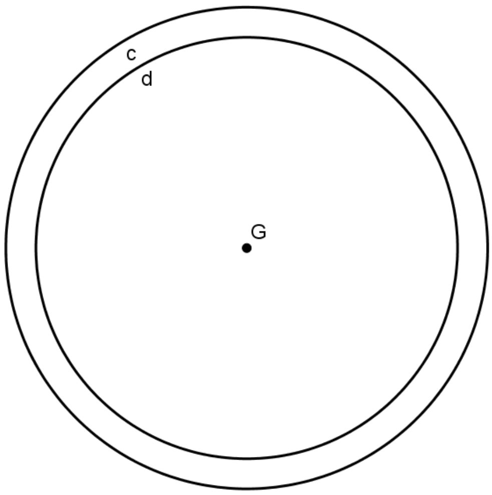
Figura 49: Círculo de raio 8



Fonte: Acervo do Autor (2023).

Posteriormente, será construído um segundo círculo com raio de medida igual ao do segmento AB que mede 5 unidades, de tal modo que as circunferências c e d sejam concêntricas (ver Figura 50).

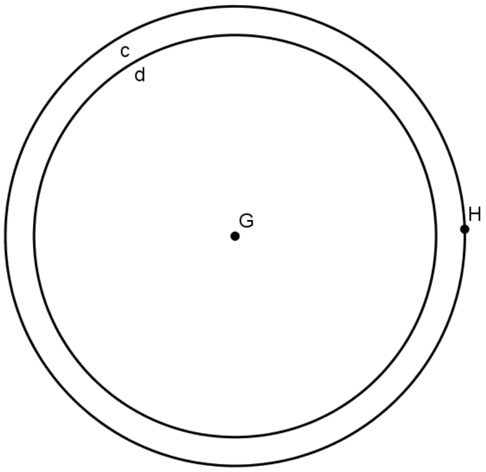
Figura 50: Círculos Concêntricos Caso LLL



Fonte: Acervo do Autor (2023)

Será determinado o ponto H na circunferência c (ver Figura 51).

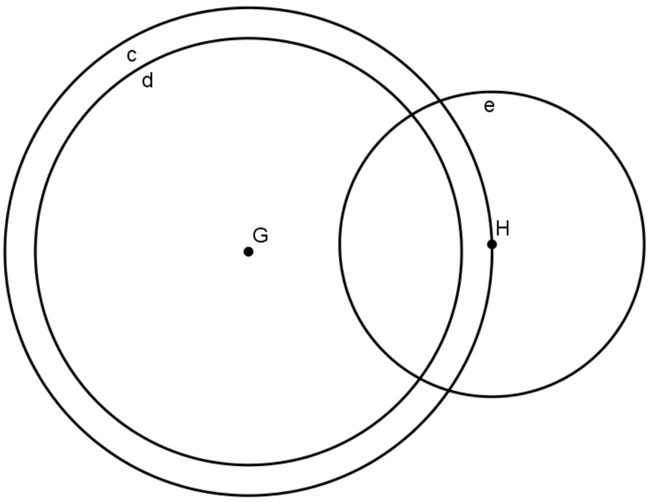
Figura 51: Ponto no Círculo Caso LLL



Fonte: Acervo do Autor (2023).

No ponto H, deverá ser construído a circunferência e com raio medindo 5. (ver Figura 52).

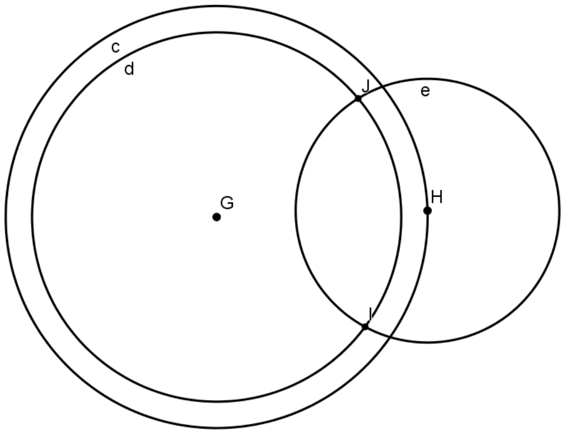
Figura 52: Três Círculos Caso LLL



Fonte: Acervo do Autor (2023).

Deverão ser construídos os pontos de interseção entre o círculo d e o círculo e. No *Geogebra* aparecerá dois pontos, é importante deixar claro aos alunos que os triângulos GJH e GIH são congruentes (ver Figura 53).

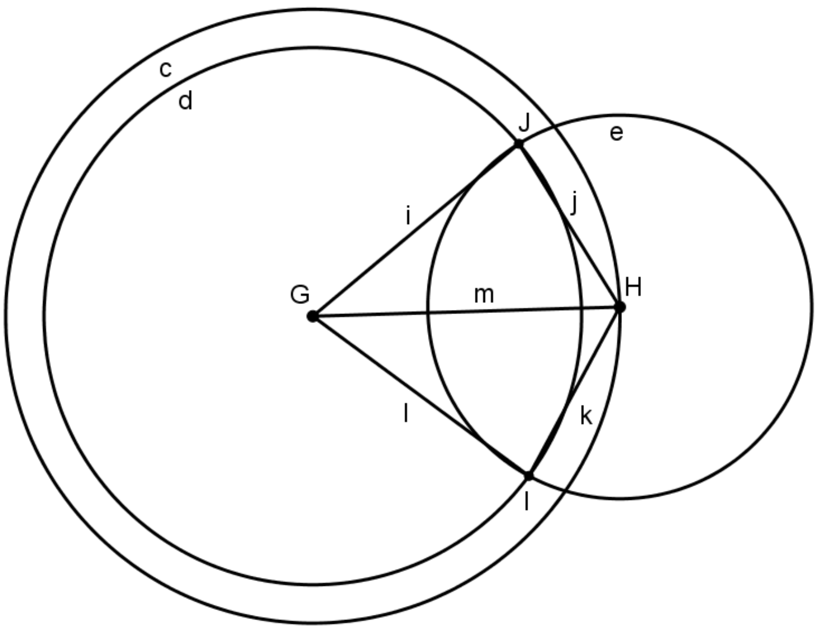
Figura 53: Pontos de Interseção Caso LLL



Fonte: Acervo do Autor (2023).

Em seguida, deverão ser construídos os segmentos GJ, JH, HG, HI e IG (conforme instrução 5.3.3) com os pontos correspondentes que formam os dois triângulos. É importante salientar aos alunos que os dois triângulos são congruentes, ou seja, tem os três lados e os três lados de mesma medida (ver Figura 54).

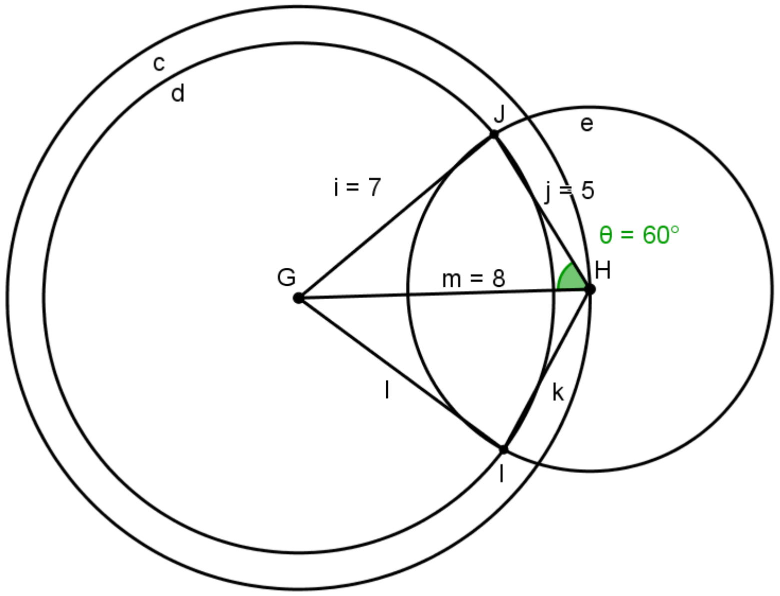
Figura 54: Dois triângulos congruentes Caso LLL



Fonte: Acervo do Autor, 2023.

Agora com a ferramenta ângulo (conforme intruções 5.3.8), encontraremos a medida do ângulo θ que está oposto ao segmento GJ, como na Figura 55 a seguir.

Figura 55: Ângulo do triângulo



Fonte: Acervo do Autor, 2023.

Dessa forma, construímos um triângulo dados apenas três lados, ou seja, com um caso de congruência e descobrimos o valor do ângulo do qual o exercício solicitou.

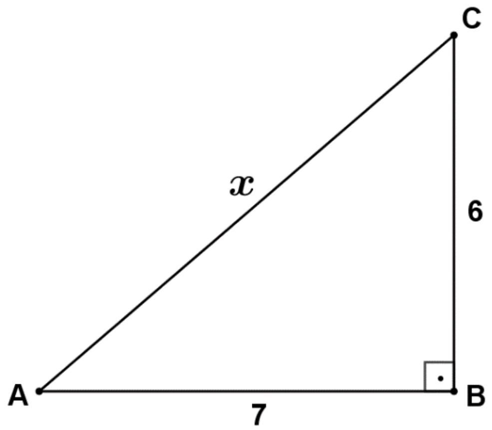
ATIVIDADE 2 (45 minutos)

Nessa atividade, trabalharemos o caso LAL, no entanto iremos solicitar aos alunos a resolução do exercício a seguir.

- **Exercício**

Determine o valor de x nos triângulos (ver Figura 56).

Figura 56: Exercício 2



Fonte: Acervo do Autor, 2022.

- **Resolução:**

$$x^2 = 7^2 + 6^2$$

$$x^2 = 49 + 36$$

$$x^2 = 85$$

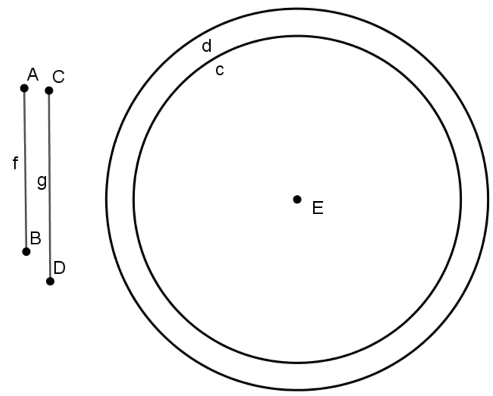
$$x = \sqrt{85} \approx 9{,}22$$

- **Orientações de construção com o *Geogebra***

Utilizaremos para isso ferramentas do *Geogebra*, como Segmentos de comprimento fixo, Compasso, Ponto em Objeto, Ângulo e Semirretas para a elaboração das figuras.

Em seguida haverá a construção de segmentos de comprimento fixo. Depois será realizada a construção de dois círculos concêntrico, com o compasso (conforme instruções 5.3.7), sendo que os círculos terão raios de medidas iguais as dos segmentos AB e CD (ver Figura 57).

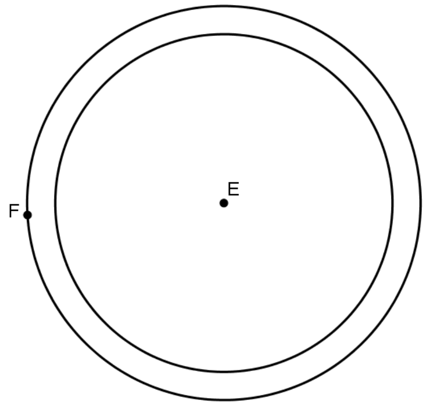
Figura 57: Círculos de raios 6 e 7



Fonte: Acervo do Autor, 2023.

O próximo passo será fazer um ponto F na circunferência d com a ferramenta (ver Figura 58).

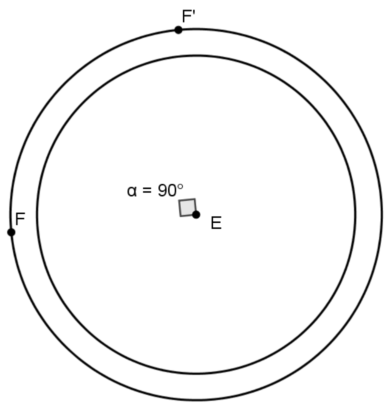
Figura 58: Pontos nos Círculos Caso LAL



Fonte: Acervo do Autor, 2023.

Com os pontos construídos, será determinado um ângulo medindo 90° com vértice em E. (ver Figura 59).

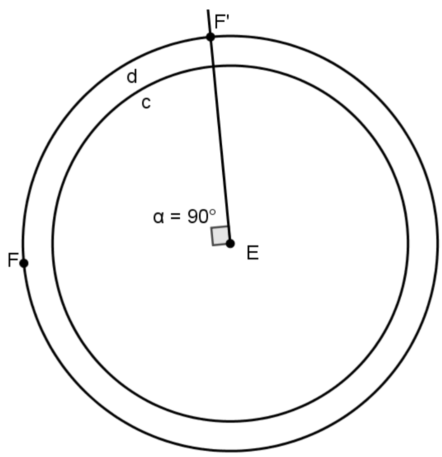
Figura 59: Ângulo Caso LAL



Fonte: Acervo do Autor, 2023.

O passo seguinte será construir uma semirreta com origem no ponto E, passando pelo ponto F’ (ver Figura 60).

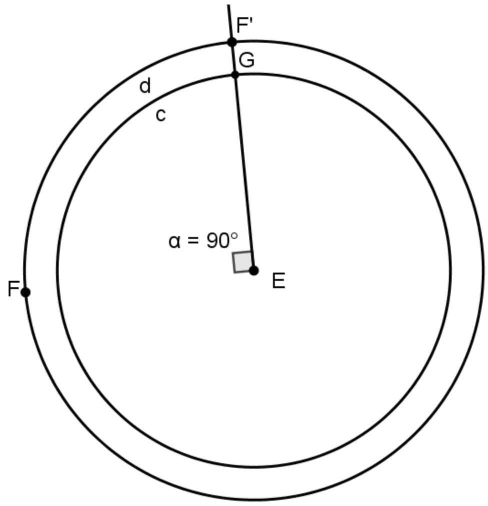
Figura 60: Semirretas Caso LAL



Fonte: Acervo do Autor (2023).

Com a ferramenta Interseção de Dois Objetos (conforme instruções 5.3.10), clique no círculo c, e na semirreta formada, e veremos que há somente o ponto G, conforme a Figura 61.

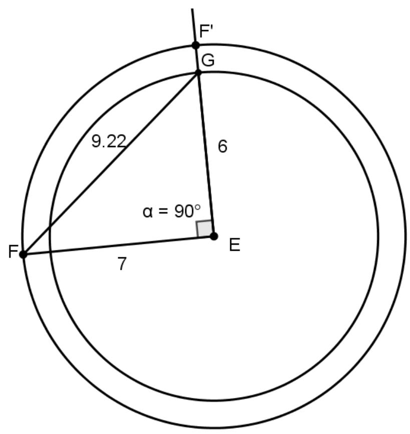
Figura 61: Ângulo do exercício 2



Fonte: Acervo do Autor, 2023.

Analise a Figura 62 e veja com os alunos que para formar o triângulo há somente uma possibilidade para a construção do terceiro lado, ou seja, esse triângulo é único. Para saber o tamanho do lado que mede x, utilize a ferramenta distância (conforme instruções 5.3.11).

Figura 62: Triângulo Caso LAL



Fonte: Acervo do Autor, 2023.

Nesse caso vemos a construção de um triângulo com o caso de congruência LAL e determinamos o único valor possível para x, segmento GF.

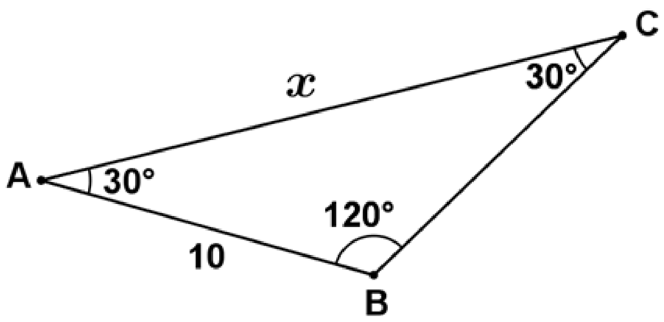
ATIVIDADE 3 (45 minutos)

Essa atividade servirá para mostramos uma situação do qual está presente o caso de congruência ALA. Responderemos primeiro um exercício e mostraremos a abordagem utilizando o *geogebra*, objetivando mostrar que há um caso de congruência quando nos for dado dois ângulos e um lado entre eles. No exercício abaixo não faz diferença dar ou não o terceiro ângulo.

- **Exercício**

Determine o valor de x no triângulo (ver Figura 63).

Figura 63: Exercício 3



Fonte: Acervo do Autor, 2023.

Esse exercício pode ser resolvido utilizando a lei dos senos, é importante que o professor faça a solução após tentativa dos alunos.

- **Resolução:**

$$\frac{10}{sen\ 30°} = \frac{x}{sen\ 120°}$$

$$\frac{10}{\frac{1}{2}} = \frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$x = 10\sqrt{3}$$

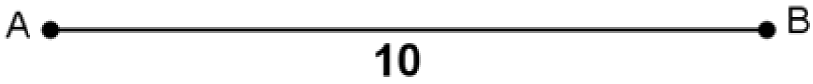
$$x \cong 17{,}32$$

- **Orientações de construção com o *Geogebra***

Agora mostraremos esse exercício no *Geogebra*, focando principalmente na ideia da congruência.

Nessa atividade, iremos construir um triângulo dados dois ângulos e um lado entre eles. Inicialmente será construído um segmento de comprimento fixo (conforme instruções 5.3.4) medindo 10 unidades, conforme a Figura 64.

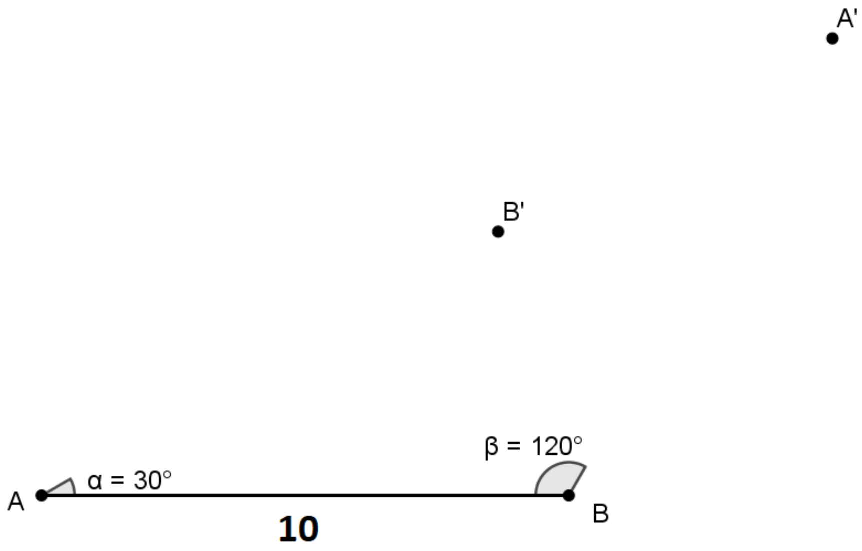
Figura 64: Segmento de Comprimento Fixo



Fonte: Acervo do Autor, 2023.

No passo seguinte, construa dois ângulos com amplitude fixa (conforme instruções 5.3.9), no vértice A, o ângulo medindo 30°, no sentido anti-horário e no vértice B, o ângulo medindo 120° no sentido horário, como na Figura 65.

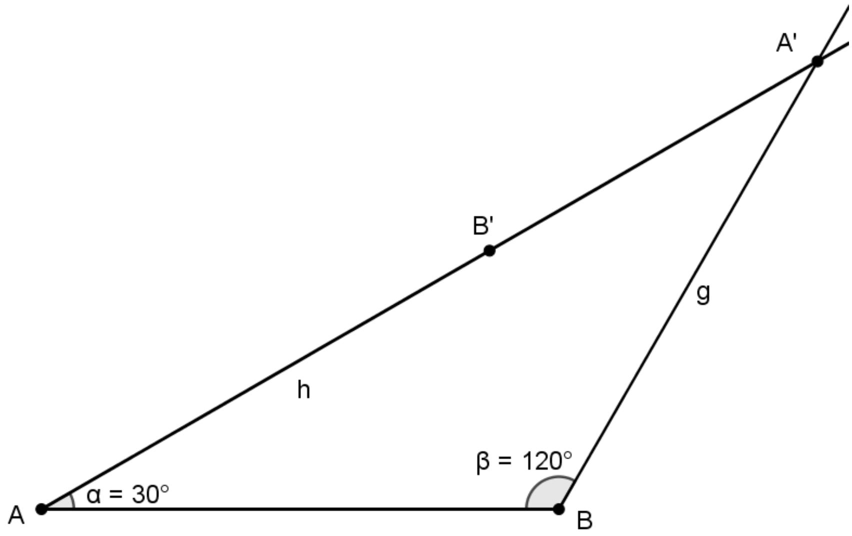
Figura 65: Ângulos Caso ALA



Fonte: Acervo do Autor, 2023.

Depois, construiremos semirretas (conforme instruções 5.3.5) com origens em A e em B, que passem pelos pontos A' e B' respectivamente. Nesse caso, a interseção entre as duas semirretas coincide com o ponto A', conforme a Figura 66.

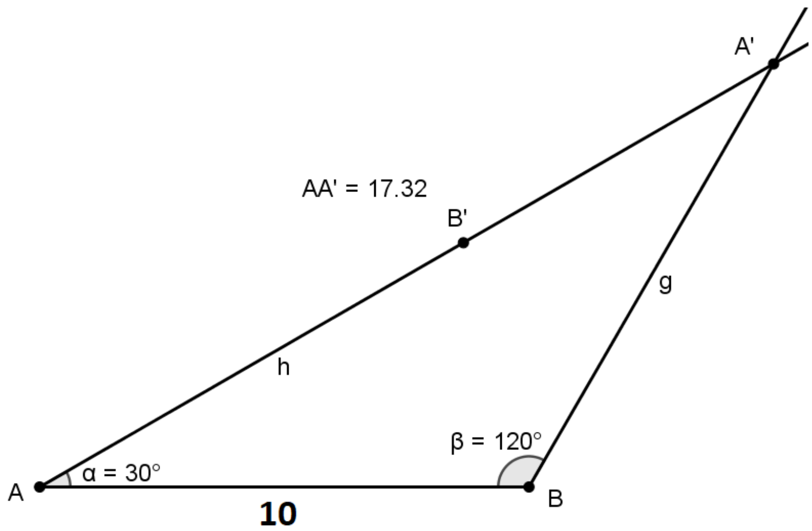
Figura 66: Semirretas Caso ALA



Fonte: Acervo do Autor, 2023.

É notório que: em apenas um lugar as semirretas se interceptam, ou seja, o triângulo é único. Utilizando a ferramenta Segmento (conforme as instruções 5.3.3) para ligarmos A à A', depois a ferramenta Distância (conforme instruções 5.3.11), onde conseguiremos determinar a medida do segmento AA'(medida x do segmento AC do exercício da atividade 3) que é oposto ao ângulo de 120°, como segue na Figura 67.

Figura 67: Único ponto de interseção Caso ALA

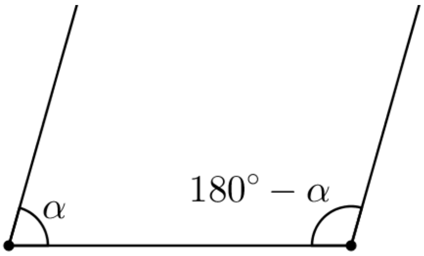


Fonte: Acervo do Autor, 2023.

- **Observação**

O professor pode sugerir ao aluno a construção de um triângulo com ângulos com amplitude não fixas, isto é, deixando livre para fazer a manipulação dos ângulos. Com isso, espera-se que o aluno possa perceber que: quando os ângulos forem suplementares, as semirretas não se interceptam em um ponto, conforme a Figura 68.

Figura 68: Semirretas paralelas



Fonte: Acervo do Autor, 2023.

Além disso é possível também abordar que caso os ângulos somados sejam maiores que 180° as semirretas também não se interceptam o triângulo não pode ser formado, ou seja, não existe.

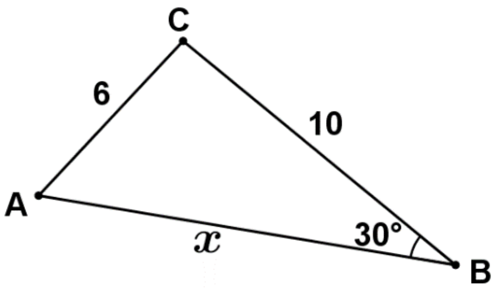
ATIVIDADE 4 (45 minutos)

Essa atividade servirá para basear a seguinte, por meio dela será possível fazer uma associação entre um caso de congruência e um caso que não é. Será nessa atividade que será mostrado uma atividade que desenvolva também o caso de congruência LLA. Primeiro, passaremos um exercício do qual é proposto aos alunos resolverem:

- **Exercício**

O procedimento para determinar o valor de x no triângulo ABC. Em seguida, informe se o valor de x é único (ver Figura 60).

Figura 69: Exercício 4



Fonte: Acervo do Autor, 2023.

Esse exercício pode ser resolvido utilizando a lei dos cossenos, é importante que o professor faça a solução após tentativa dos alunos. Segue abaixo a solução:

- **Resolução:**

$$6^2 = x^2 + 10^2 - 2 \cdot x \cdot 10 \cdot \cos 30°$$

$$0 = x^2 - 7 \cdot \sqrt{3} \cdot x + 64$$

Utilizando a fórmula resolutiva da equação do segundo grau temos:

$$x = \frac{10 \cdot \sqrt{3} \pm \sqrt{44}}{2}$$

$$x = \frac{10 \cdot \sqrt{3} \pm 2\sqrt{11}}{2}$$

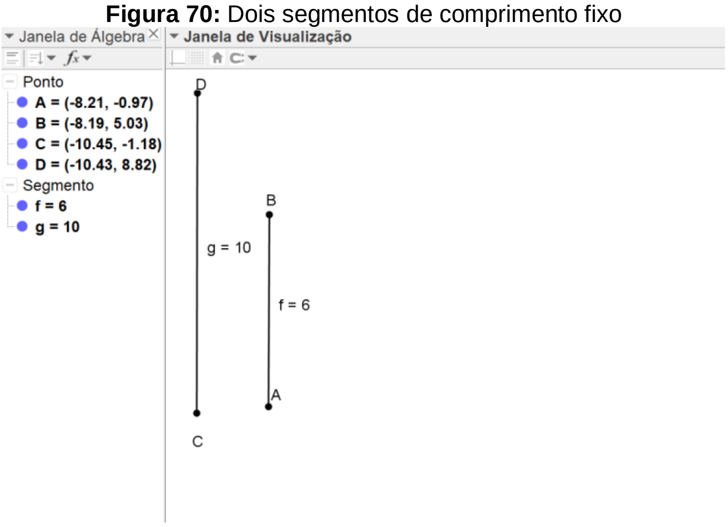
$$x' = 5 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{11} \cong 12$$

$$x'' = 5 \cdot \sqrt{3} - \sqrt{11} \cong 5{,}3$$

- **Orientações de construção com o *Geogebra***

Agora mostraremos a mesma situação utilizando o *Geogebra*. Construiremos dois segmentos de reta de comprimento fixo (conforme as instruções 5.3.4), sendo AB medindo 6 unidades e CD com 10 unidades, conforme a Figura 70.

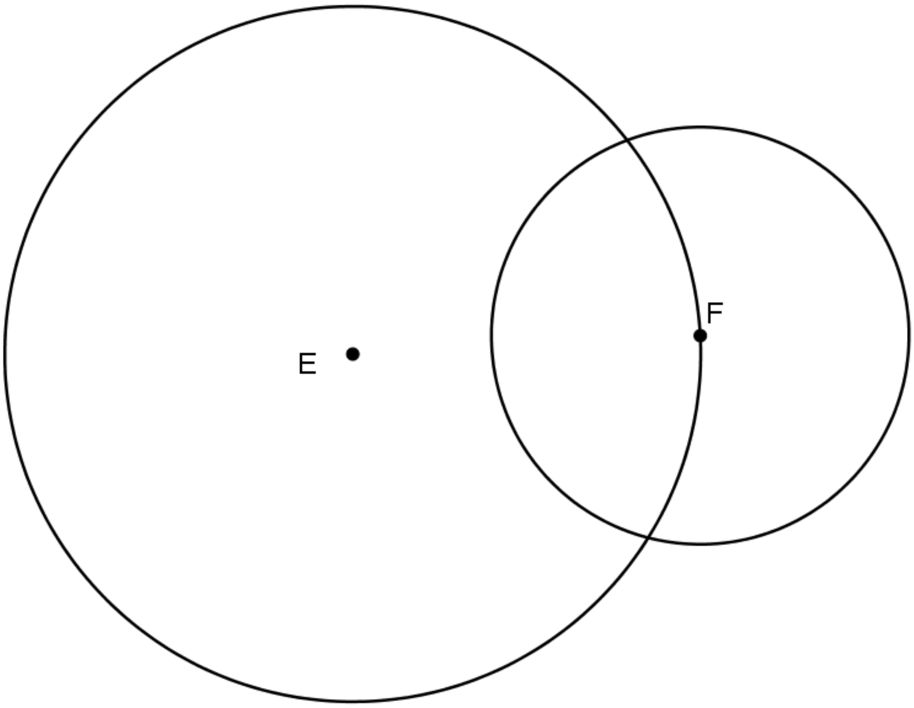
Figura 70: Dois segmentos de comprimento fixo



Fonte: Acervo do Autor, 2023.

Em seguida, iremos utilizar o compasso (conforme instruções 5.3.7) para construirmos um primeiro círculo, de raio com medida do segmento CD. Em seguida será determinado o ponto F no círculo c (conforme instruções 5.3.2), de acordo com a Figura 71.

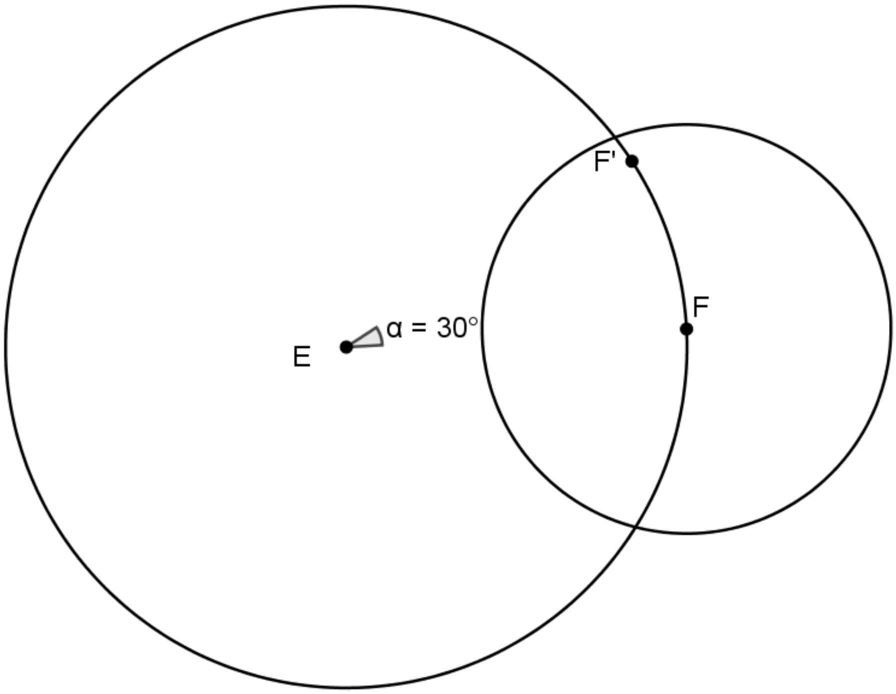
Figura 71: Círculo com ponto na circunferência



Fonte: Acervo do Autor, 2023.

O próximo passo será construir um círculo de centro em F e raio de medida do segmento AB. A próxima construção será do ângulo de 30° com vértice em E (conforme instruções 5.3.9), de acordo com a Figura 72.

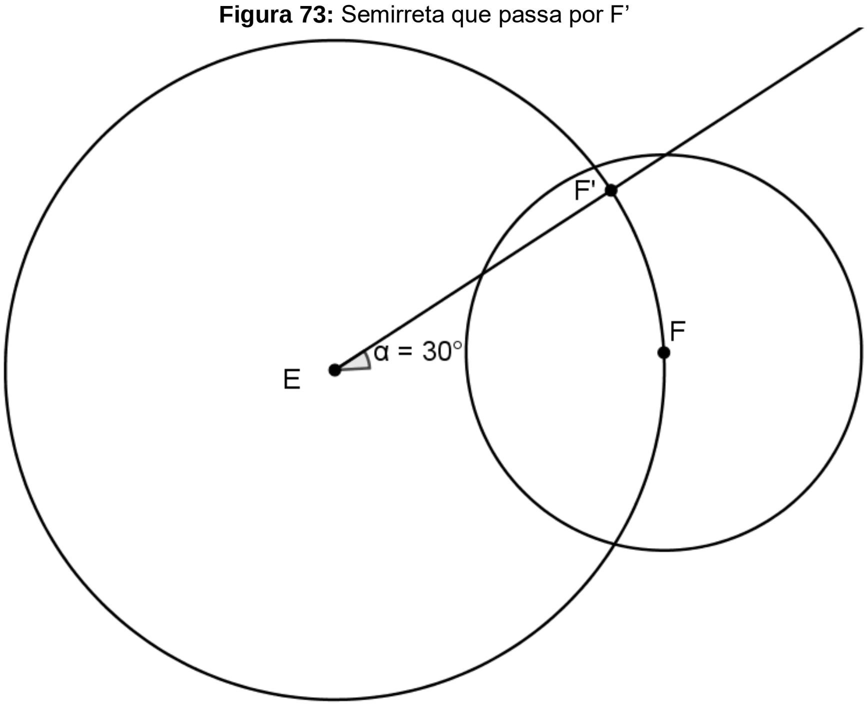
Figura 72: Ângulo fixo de 30°



Fonte: Acervo do Autor, 2023.

Em seguida, iremos passar por F' uma semirreta (conforme instruções 5.3.5) com origem no ponto E, de acordo com a Figura 73.

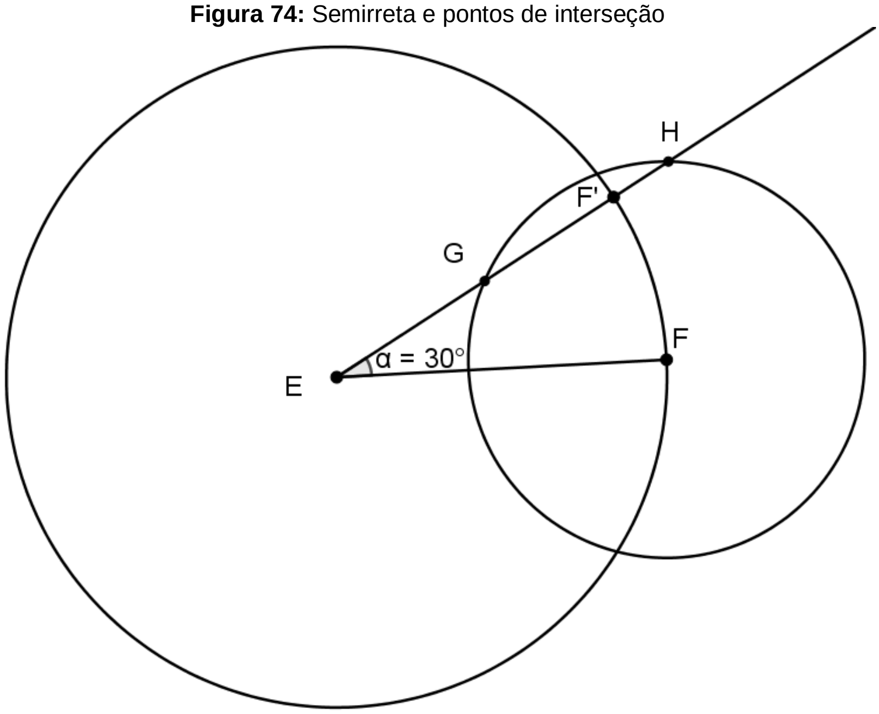
Figura 73: Semirreta que passa por F'



Fonte: Acervo do autor, 2023.

Construiremos agora o lado EF do triângulo com a ferramenta Segmento (conforme instruções 5.3.3), depois utilizaremos a ferramenta Interseção de Dois Objetos na semirreta (conforme instruções 5.3.2) e no círculo menor, o que nos retorna dois pontos de interseção, nesse caso os pontos G e H, de acordo com a Figura 74.

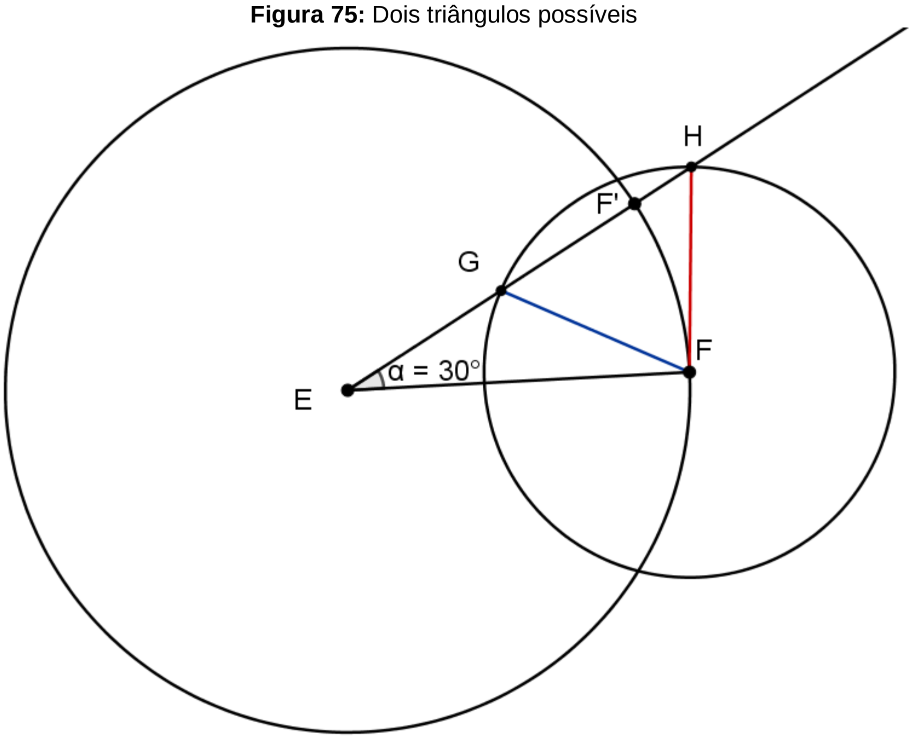
Figura 74: Semirreta e pontos de interseção



Fonte: Acervo do Autor, 2023.

Podemos perceber que existem dois triângulos com dois lados e o ângulo oposto ao menor lado dados, os triângulos EFG e EFH, como segue na Figura 75.

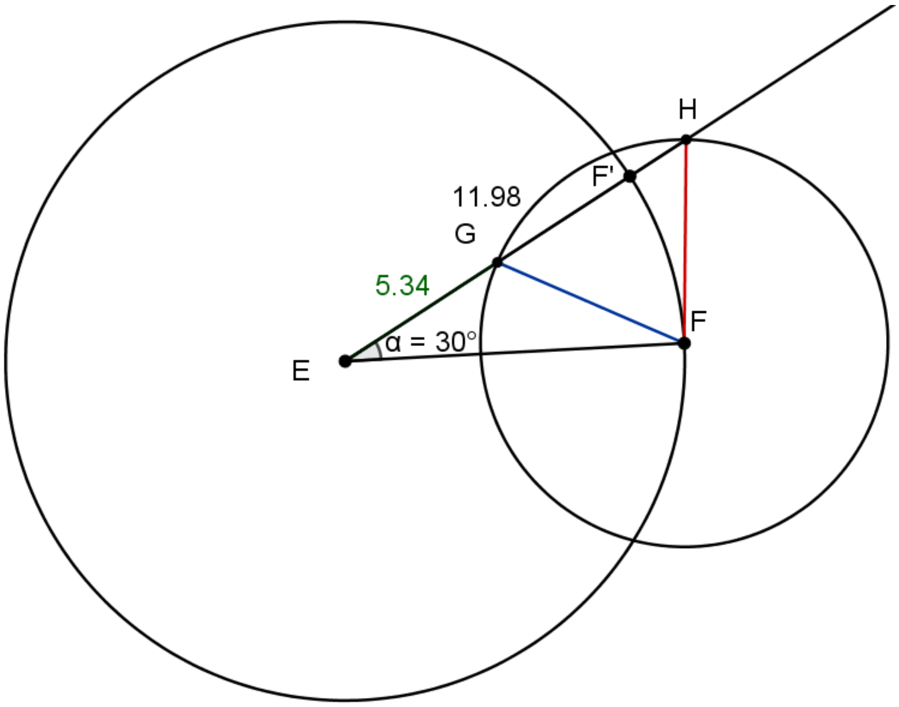
Figura 75: Dois triângulos possíveis



Fonte: Acervo do Autor, 2023.

Criando os segmentos dos possíveis terceiros lados do triângulo, com a ferramenta Distância (conforme instruções 5.3.11) podemos saber a medida dos dois possíveis lados, como podemos ver na Figura 76.

Figura 76: Distâncias dos lados dos triângulos



Fonte: Acervo do Autor, 2023.

Vimos que há dois valores possíveis para o terceiro lado, ou seja, essa situação não é um caso de congruência de triângulos. Essa atividade serve para o professor questionar aos alunos: um triângulo de lados 6 e 10 e um ângulo oposto ao menor lado não é um caso de congruência, mas será que há uma situação em que é dado dois lados e um ângulo e seja um caso de congruência? Esse questionamento deve ser respondido com a atividade seguinte, onde será apresentado o caso de congruência LLA.

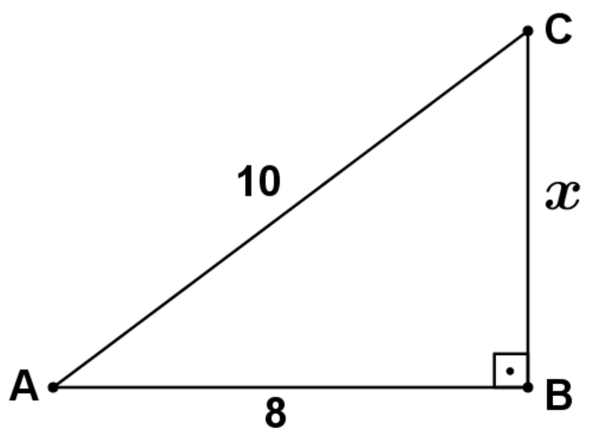
ATIVIDADE 5 (45 minutos)

Essa atividade servirá para mostrar uma situação em que é dado dois lados e um ângulo e que seja um caso de congruência. Primeiro, passaremos um exercício do qual é proposto aos alunos resolverem:

- **Exercício**

O procedimento para determinar o valor de x sabendo que o triângulo ABC é retângulo, reto em B. Em seguida, informe se o valor de x é único (ver Figura 77).

Figura 77: Exercício 5



Fonte: Acervo do Autor, 2023.

Esse exercício pode ser resolvido utilizando o Teorema de Pitágoras, é importante que o professor faça a solução após tentativa dos alunos. Segue abaixo a solução.

- **Resolução:**

$$10^2 = x^2 + 8^2$$

$$100 - 64 = x^2$$

$$36 = x^2$$

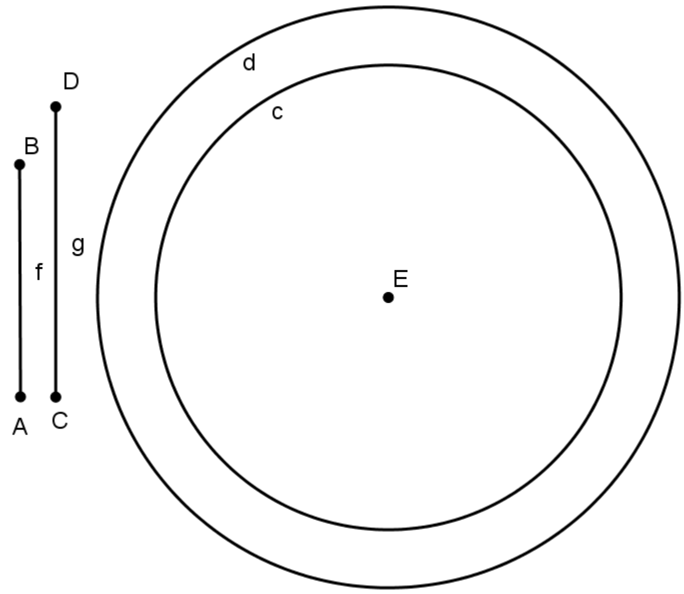
$$6 = x$$

É importante que o aluno tenha a percepção que nesse caso a solução é única, visto que valores negativos não podem ser atribuídos a distâncias. Outro conhecimento que é necessário que o aluno vá percebendo é que o ângulo dado, o de 90° graus, está oposto ao maior lado do triângulo retângulo, ou seja, a hipotenusa. Abaixo segue os passos no *geogebra* para mostra que nesse caso estamos lidando com um caso de congruência.

- **Orientações de construção com o Geogebra**

Inicialmente faremos dois segmentos AB e CD (conforme instruções 5.3.4) de medidas, respectivamente, 8 e 10 unidades, com o Compasso (conforme instruções 5.3.7) construiremos dois círculos concêntricos, c e d, com raio de mesma medida dos segmentos AB e CD, respectivamente, como na Figura 78.

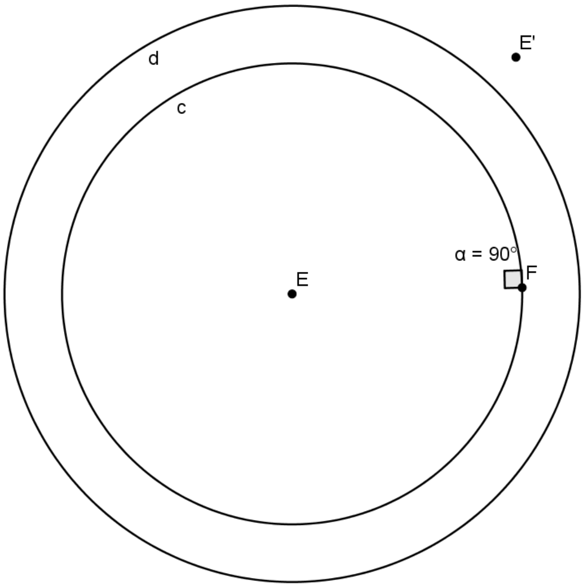
Figura 78: Círculos Concêntricos Caso LLA



Fonte: Acervo do Autor, 2023.

O próximo passo será fazer um ponto (conforme instruções 5.3.2) no círculo c, depois faremos um ângulo de amplitude fixa (conforme instruções 5.3.9) medindo 90° (ver Figura 79).

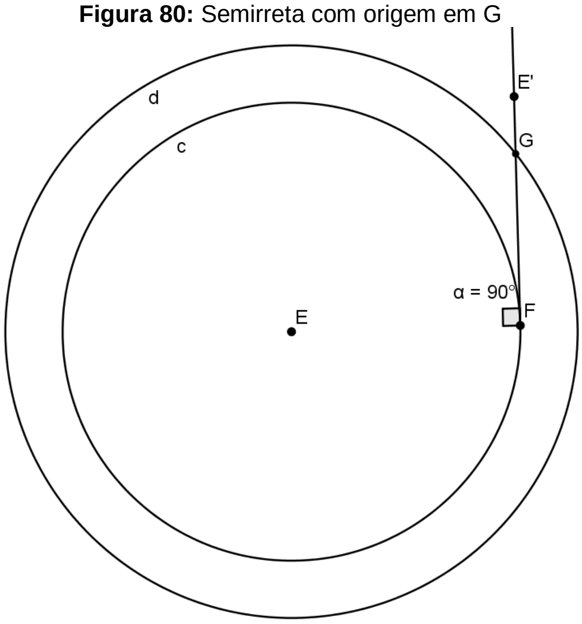
Figura 79: Ângulo reto



Fonte: Acervo do Autor, 2023.

Esse processo criará um ponto E', do qual criaremos uma semirreta com origem em F e que passa por E'. Com a Ferramenta Ponto de Interseção de Dois Objetos (conforme instruções 5.3.10) encontraremos o ponto onde a semirreta $\overrightarrow{FE'}$ intercepta o círculo d, nesse caso, o ponto G (ver Figura 80).

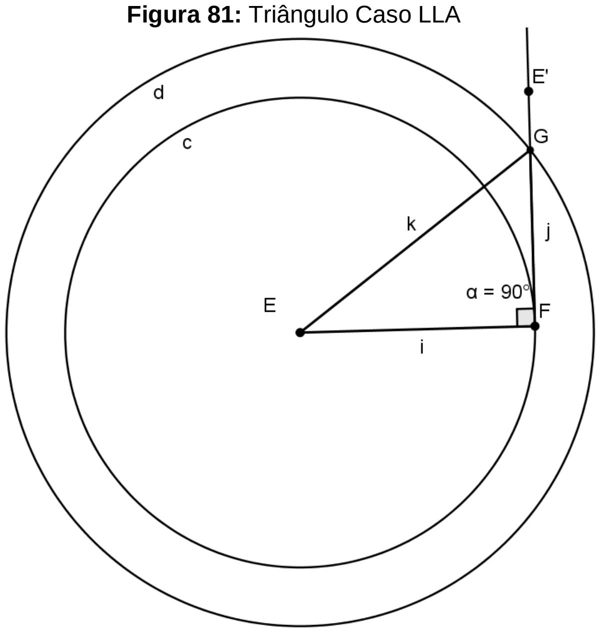
Figura 80: Semirreta com origem em G



Fonte: Acervo do Autor, 2023.

Nesse caso foi possível criar apenas um triângulo, já que há apenas um ponto de interseção. Em seguida, construiremos os segmentos EF, FG e GE (conforme instruções 5.3.3) para formar o triângulo EFG, como na Figura 81.

Figura 81: Triângulo Caso LLA



Fonte: Acervo do Autor, 2023.

Essa situação ilustra que dado dois lados e um ângulo, apenas um triângulo pode ser formado, ou seja, se configura como um caso de congruência de triângulos. Portanto, podemos concluir com os alunos que se forem dados dois lados e um ângulo tal que seja oposto ao maior lado, essa forma se configura como congruência de triângulo.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Considera-se relevante para o aluno o conhecimento de geometria plana, visto que ela possibilita uma aprendizagem além da própria geometria, expandindo para as outras áreas do conhecimento. Isso fez parte das perspectivas desse trabalho viabilizadas por uma proposta na qual o aluno possa compreender melhor uma parte da geometria plana, ora seja, a resolução de triângulos e congruências, pois o propósito da proposta é associar e abordar de forma abrangente e unificada conteúdos que geralmente tem abordagens de ensino desconectadas.

Com a revisão de literatura, para entender o surgimento da geometria plana, bem como as primeiras formas e pensamentos geometrizados, foi possível constatar na BNCC/2018 a importância da aplicação do conteúdo de congruência, assim como nos livros do didáticos analisados nos quais foi possível ratificar que os conteúdos de congruência de triângulos e resolução de triângulos eram abordados, porém de maneira independentes, sem qualquer associação entre os conteúdos.

A pesquisa possibilitou também observar as vantagens da utilização do *Geogebra*, que pode ajudar o professor, mas que, principalmente ajuda o aluno com uma participação mais ativa durante a exposição do conteúdo.

O estado do conhecimento permitiu verificar que poucas atividades foram desenvolvidas na perspectiva do ensino de geometria plana com o uso de tecnologias digitais para o Ensino Médio. Essa etapa permitiu uma melhor análise das teses e dissertações que foram desenvolvidas as quais se encontravam no Catálogo de teses e dissertações da CAPES, além observar como a sistematização dos trabalhos sobre o tema foram desenvolvidos no decorrer dos anos. Este objetivo foi atingido pois possibilitou verificar como os autores abordaram o ensino de geometria plana, bem como os recursos que eram utilizados para ensinar esse conteúdo e que não havia trabalhos que abordassem a temática dessa monografia.

A atividade proposta apresentou um procedimento diferente para ser abordado na resolução de triângulos qual seja, (determinar lados ou ângulos de triângulos), pois o relaciona com a congruência (algo não comum), utilizando o Geogebra. Essa prática de utilizar um *software* para ministrar aulas de Geometria é muito importante, pois possibilita uma melhor visualização dos objetos geométricos, dando um novo significado para os cálculos realizados.

Espera-se que, esse trabalho realce a curiosidade e desperte novas atividades que complementem o ensino de geometria plana, possibilitando preencher lacunas na proposta que ora foi apresentada.

Por fim, que os leitores sejam desafiados a dar continuidade ao trabalho, seja expandindo a proposta ou outros elementos do triângulo, como área, altura, mediana, raio da circunferência inscrita e circunscrita, além da aplicação da resolução de triângulos em outros objetos geométricos como os quadriláteros, seja aplicando e colhendo os resultados ou propondo cursos para formação de professores, de modo a prepará-los para o ensino de geometria na educação básica.

REFERÊNCIAS

ALVES, Wecsley Fernando Marçal. **Uso do GeoGebra no Ensino de Geometria Plana no Ensino Básico**. 2017. 76 f. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Goiás-UFG, Goiás, 2017.

ARAGÃO, Maria Jorge de. **História da Matemática**. Rio de Janeiro: Interciência, 2009.

BONJORNO, José Roberto; Giovanni Júnior, José Ruy; SOUSA, Paulo Roberto Câmara de. **Prisma matemática: Geometria e Trigonometria**. 1. ed. São Paulo: FTD, 2020.

BORBA, Marcelo Carvalho; PENTEADO Miriam Godoy. **Informática e educação matemática**. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.

BOYER, Carl. **História da matemática.** Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher; EDUSP, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf> Acesso em:10 jun. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Introdução**. Secretaria de Educação Fundamental, Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRESOLIN, Nadia Roberta Quaini. **Geometria sintética: investigação sobre o uso de um software de geometria dinâmica como meio para demonstrações visuais**' 30/11/2016 108 f. Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática Instituição de Ensino: Universidade Franciscana, Santa Maria Biblioteca Depositária: Centro Universitário Franciscano, 2016.

CHIODI, Joao Ricardo. **Uso do *software sketchup for schools* para o ensino de geometria plana em aulas *online***' 02/09/2021 78 f. Mestrado Profissional em Educação Científica e Matemática Instituição de Ensino: Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, Dourados Biblioteca Depositária: Biblioteca Central da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, 2021.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em Contexto: Geometria Plana e Geometria Espacial**. São Paulo: Ática, 2020.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em Contexto: Trigonometria e Sistemas lineares**. São Paulo: Ática, 2020.

REZENDE, Eliane Quelho ; QUEIROZ, Maria Lúcia Bontorim de. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas.** Campinas, SP. 2000.

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Tradução de Higyno H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

FILHO, Jose Ednaldo de Araujo. **Situações didáticas olímpicas (sdo) para o ensino de geometria plana: um contributo da engenharia didática**' 20/09/2019 65 f. Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática Instituição de Ensino: Universidade Federal do Ceará, Fortaleza Biblioteca Depositária: Biblioteca da Matemática UFC, 2019.

FREIRE, Angelo Augusto Coelho. **O uso do geogebra na resolução de problemas matemáticos a partir da teoria de Galperin**' 09/10/2015 115 f. Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Instituição de Ensino: Universidade Estadual de Roraima, Boa Vista Biblioteca Depositária: Biblioteca Central da Universidade Estadual de Roraima, 2015.

GOMES, Francisco de Assis Magalhães. Construção, Congruência e Resolução de Triângulos. **Revista do Professor de Matemática**, [*s. l.*], ed. 106, p. 37-45, 2022.

JUNIOR, Francisco de Paula Santos de Araujo; TRINDADE, Anna Karla Barros da; SANTOS, Adriano Viana dos. **Uma Proposta de Ensino de Geometria Plana com GeoGebra**. Instituto São Paulo Geogebra, São Paulo, v. 9, p. 01-119, 11 dez. 2020.

KALEFF, Ana Maria. Tomando o ensino da Geometria em nossas mãos. **Educação Matemática em Revista,** São Paulo, Ano 1, n. 2, 1994.

LORENZATO, Sérgio. Por que não ensinar Geometria? **Educação Matemática em Revista-** SBEM, Rio Grande do Sul, n.4, p.3-13, 1995.

MAFRA, Fernando Henriques. **O uso do *autocad* no processo de ensino-aprendizagem de geometria plana e espacial nas aulas de matemática do segundo ano do curso técnico do IFMG-SJE**' 14/02/2020 48 f. Mestrado em Educação Agrícola Instituição de Ensino: Universidade Federal Rural Do Rio De Janeiro, Seropédica Biblioteca Depositária: Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, 2020.

MENDES, Iran Abreu. **Matemática e investigação em sala de aula**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

MIKUSKA, M. I. S. **Uma análise do Ensino da Geometria no Curso de Formação de Docentes do Ensino Fundamental**. X Congresso Nacional de Educação - EDUCERE. Curitiba/PR, p. 6951-6963, 2021. Disponível em: <https://educere.bruc.com.br/CD2011/pdf/5544_3272.pdf> Acesso em: 27, fev. 2022.

MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo; JORGE, Miguel: **Geometria** - vol I. 9. ed. Livraria Francisco Alves Editora, 1973.

MOROSINI, Marília Costa; FERNANDES, Cleoni Maria Barboza. Estado do Conhecimento: conceitos, finalidades e interlocuções. **Educação Por Escrito**, Rio Grande do Sul, v. 5, ed. 2, p. 154 - 164, 2014. Disponível em: https://revistaseletronicas.pucrs.br/ojs/index.php/porescrito/article/view/18875. Acesso em: 17 ago. 2022..

NETO, Joao Evangelista de Oliveira. **Situações Didáticas Olímpicas Aplicadas a Problemas de Geometria Plana da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP)**' 25/10/2019 64 f. Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática Instituição de Ensino: Universidade Federal do Ceará, Fortaleza Biblioteca Depositária: Biblioteca da matemática UFC, 2019.

PAVANELLO, Regina Maria. O abandono do ensino de Geometria no Brasil: causas e consequências. **Revista *Zetetíké*,** Campinas, SP. n.1, p.7-17, 1993.

PONTE, João Pedro da. Novas tecnologias na aula de Matemática. **Educação e Matemática**, [*s. l.*], ano 1995, ed. 34, p. 2-7, 30 jun. 1995.

PRODANOV, Cleber Cristiano; DE FREITAS, Ernani Cesar. **Metodologia do trabalho científico:** Métodos e Técnicas da Pesquisa e do Trabalho Acadêmico. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

RAMOS, Augusto Cesar Machado. **Objeto de aprendizagem de geometria plana e sólida para o ensino médio e técnico profissionalizante de mecânica**' 5/06/2017 178 f. Mestrado Profissional em ENSINO Instituição de Ensino: Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte Biblioteca Depositária: PUC Minas, 2017.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SEVERINO, Antônio Joaquim. **Metodologia do trabalho científico**. São Paulo: Cortez, 2016.

TAVARES, Luciana Cristina de Melo. **A geometria no ensino médio:** uma sequência didática utilizando a fotografia, os ambientes não formais de ensino e os objetos virtuais de aprendizagem**'** 05/08/2016 115 f. Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Instituição de Ensino: Universidade Estadual de Goiás, Anápolis Biblioteca Depositária, 2016.

UNESCO. **Os desafios do ensino de matemática na educação básica**. Brasília Unesco: São Carlos, Edufscar, 2016. Disponível em: https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000246861

UNIVERSITAS. A produção científica sobre educação superior no Brasil, 1968 – 2000. Porto Alegre: GT Política de Educação Superior/ ANPED, 2002. Disponível em: http:// www:pucrs.br/faced/pos/universitas.

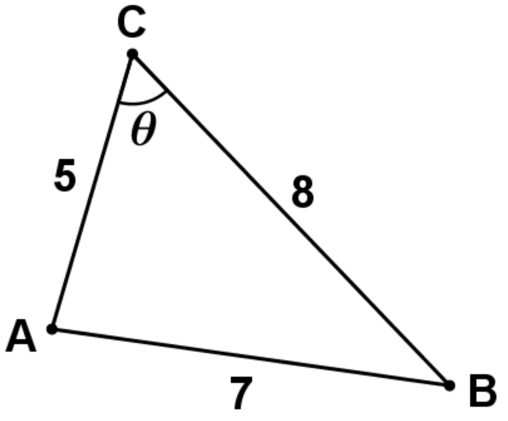
APÊNDICES

RESOLUÇÃO DE TRIÂNGULOS

ATIVIDADE 1

Exercício

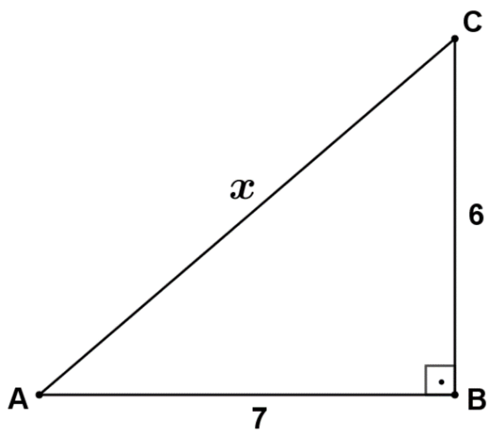
Dado o triângulo ABC, determine a medida, em graus, do ângulo θ



ATIVIDADE 2

Exercício

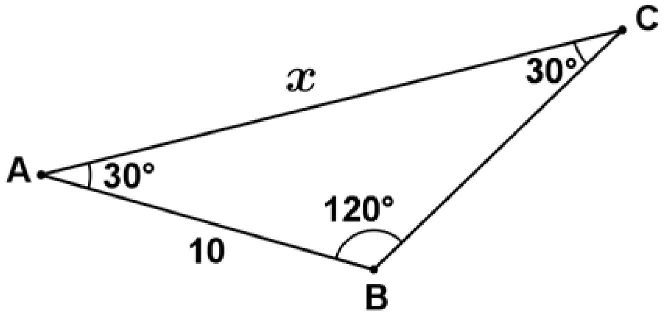
Determine o valor de x no triângulo.



ATIVIDADE 3

Exercício

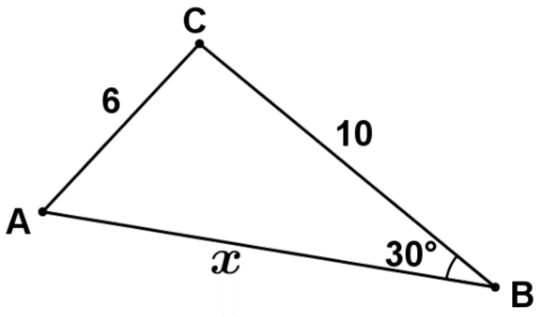
Determine o valor de x no triângulo



ATIVIDADE 4

Exercício

O procedimento para determinar o valor de x no triângulo ABC. Em seguida, informe se o valor de x é único.



ATIVIDADE 5

Exercício

O procedimento para determinar o valor de x sabendo que o triângulo ABC é retângulo, reto em B. Em seguida, informe se o valor de x é único.