MATRIZES
SISTEMAS LINEARES E FATORAÇÃO LU

Danielle de Oliveira Nunes Vicente
Evanildo Vicente de Oliveira Nunes

Volume Único

Danielle de Oliveira Nunes Vicente
Evanildo Vicente de Oliveira Nunes

Matrizes, Sistemas Lineares e Fatoração LU

1º edição

Natal - RN

Danielle de Oliveira Nunes Vicente

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação - CIP.

V632m Vicente, Danielle de Oliveira Nunes.
Matrizes, Sistemas Lineares e Fatoração LU. / Danielle de Oliveira Nunes Vicente, Evanildo Vicente de Oliveira Nunes. – Natal: [s.n.], 2017.
66 p.

ISBN: 978-85-924158-0-8

1. Sistemas Lineares. 2. Fatoração LU. 3. Método de Gauss. 4. Matriz. 5. Operações Elementares. I. Nunes, Evanildo Vicente de Oliveira. II. Título.

CDU 517.956

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Anyelle Palhares / CRB: 15-532

“ A Matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos como, também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens. ”

Descartes

(1596 – 1650)

PREFÁCIO

A maioria dos estudantes tem, ainda no ensino fundamental, contato com os sistemas de equações lineares. Neste ponto, tais sistemas são vistos de maneira um tanto quanto superficial. Além disso, pelo fato de serem tratados apenas sistemas de porte muito pequeno, em geral, com no máximo três equações e três incógnitas, o método mais usado para resolvê-los é o chamado método de substituição, que consiste em deixar incógnitas em função de outras de modo a conseguir, via substituição, fazer com que em uma equação apareça apenas uma incógnita e seu valor possa ser encontrado. Esse método simples funciona relativamente bem quando se trata de sistema desse porte, mas no caso de sistemas com mais variáveis, ele se torna inviável. Na verdade, resolver manualmente sistemas muito grande não é uma boa ideia. Um método para tratar sistemas com muitas equações e muitas variáveis é considerado bom se puder ser expresso em uma linguagem de programação e tornar possível obter soluções de forma rápida e confiável.

A importância dos Sistemas Lineares pode ser evidenciada pela enorme quantidade de aplicações práticas dos mesmos. Por exemplo, em Álgebra Linear com Aplicações [1] os autores dedicam um capítulo inteiro à 20 aplicações da Álgebra Linear, que recaem, em sua maioria,à resolução de sistemas lineares.

Existem muitos métodos programáveis para resolução de sistemas um dos primeiros e mais popular até hoje é o chamado Método da Eliminação de Gauss assim como sua variante Eliminação de Gauss-Jordan que serão apresentados nesse trabalho. Este método consiste em trabalhar com matriz ampliada do sistema, a qual contém toda a informação numérica do sistema, por meio de operações elementares. A matriz aumentada é transformada em uma matriz mais simples cujo sistema associado a ela também será mais simples de resolver e possui o mesmo conjunto solução que o sistema original.

Os registros, como ressaltado em [9], mostram que o método descrito acima,batizado como método de Eliminação de Gauss em homenagem a Carl Friedrich Gauss ($1777-1855$), já era conhecido na antiguidade em uma versão preliminar, antes da era cristão, como pode ser visto no livro Nove Capítulos de artes Matemáticas, o qual foi publicado na China durante o século I da era cristã e, conforme [1] ($2004, p.243$), "o mais importante dos textos de matemática chineses". Essa obra é constituída de 246 problemas de aritmética e geometria, mas esse trabalho dará atenção à resolução de Sistemas Lineares. Como curiosidade, cabe ressaltar que as operações eram efetuadas com o auxílio de pequenos gravetos dispostos numa folha de papel, os quais eram manipulados numa técnica que se assemelhava ao método da eliminação de Gauss apresentado somente no século XIX. [10].

Outro método de resolução de sistemas que será apresentado aqui se baseia na chamada fatoração LU nome dado pois consiste em transformar uma matriz A em um produto de duas matrizes uma triangular inferior **(Lower)** e outra triangular superior **(Upper)**. Em algumas situações esse método é bastante viável, sendo inclusive melhor do ponto de vista computacional do que o método da eliminação de Gauss aplicado à matriz ampliada do sistema, como pode ser visto em [9].

O objetivo dessa obra é apresentar os conceitos básicos sobre ,vetores, matrizes, operações elementares, sistemas lineares e métodos de obter solução de sistemas, principalmente aquele que faz uso da fatoração LU de matrizes. Para a obtenção desta fatoração, serão apresentados alguns resultados sobre matrizes triangulares e matrizes elementares considerados incomuns na literatura básica adotada no Brasil, uma vez que em sua maioria são deixados a cargo do estudante nas listas de exercícios.

Este livro está organizado da seguinte maneira:

O primeiro capítulo será feito um apanhado geral sobre vetores $\mathbb{R}^n$ e matrizes no qual trataremos de vetores em $\mathbb{R}^n$ e matrizes, as principais referências foram [1] [3] e [7];

Para o segundo capítulo, será abordado sistemas lineares e resolução de sistemas, as referências são as mesmas do capítulo anterior e para a parte de matrizes elementares as principais referências foram [4] [2] e [7];

Por fim, no terceiro capítulo, será abordada a fatoração LU, as principais referências foram [1] e [6].

Uma outra referência utilizada foram as apostilas de Álgebra linear Aplicada escritas pelos professores Roberto Hugo Bielschowsky, Carlos Leão de Andrade e José Querginaldo Bezerra, todos do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), as quais são usadas como referência principal nas disciplinas de Álgebra Linear ofertadas na UFRN para os cursos de engenharias e de ciências exatas (Física, Química, etc).

Sumário

Capítulo 1

VETORES EM $\mathbb{R}^n$ E MATRIZES

Nesse capítulo serão abordados os conceitos de Vetor no $\mathbb{R}^n$ e Matriz, suas representações, tipos de Matriz bem como operações definidas sobre estes para que possamos ter base para o estudo da resolução de sistemas via fatoração LU, onde L representa uma matriz triangular inferior e a letra L que vem do inglês "Lower" e U matriz triangular superior e a letra U vem do inglês "Upper". Os sistemas lineares e suas soluções, que serão objeto de estudo do capítulo 2, podem ser discutidos de modo bastante eficiente usando-se a linguagem das matrizes.

1.1 VETORES EM $\mathbb{R}^n$

Definição 1.1.1

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n),$$

onde $u_i \in \mathbb{R}$ *são as coordenadas* u *e* $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Por conveniência um vetor de $\mathbb{R}^n$ pode ser representado por uma matriz coluna:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Exemplo 1.1.1 *Abaixo segue um exemplo de um vetor coluna v*

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Definição 1.1.2 *Dois vetores $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ são iguais se e somente se suas coordenadas são iguais, isto é , $u_i = v_i$, para $i = \{1, \ldots, n\}$.*

Definição 1.1.3 *Dados os vetores $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ em $\mathbb{R}^n$, define-se a adição entre os vetores u e v, denotada por $u + v$ pelo vetor obtido somando suas componentes correspondentes, ou seja,*

$$u + v = (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{1.1}$$

Na representação por matriz coluna, temos:

$$u + v = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}.$$

Propriedades. Sejam $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ e $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ o vetor nulo.

Assim temos:

(i) $u + v = v + u$;

(ii) $u + (v + w) = (u + v) + w$;

(iii) Existe um vetor $\vec{0}$ em $\mathbb{R}$ tal que $u + \vec{0} = u$;

(iv) Para todo $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ existe $-\vec{u} \in \mathbb{R}$, tal que $u + (-u) = \vec{0}$.

As demonstrações dessas propriedades são bastante simples e seguem diretamente das propriedades dos números reais (comutatividade, associatividade, etc).

Por exemplo, a demonstração de que $u + v = v + u$ se faz dessa forma:

Prova.

Sejam dois vetores $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ onde $u_i, v_i \in \mathbb{R}$ temos:

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$$

$$(v_1 + u_1, v_2 + u_2, \ldots, v_n + u_n) = v + u$$

■

Vale mencionar que o elemento neutro da adição é o vetor $\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ e o oposto aditivo de $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ é $(-u_1, -u_2, \ldots, -u_n)$

Definição 1.1.4 *Dado um vetor u em $\mathbb{R}^n$ e um escalar α real, a multiplicação de u pelo escalar é definida por:*

$$\alpha u = (\alpha u_1, \alpha u_2, \ldots, \alpha u_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Propriedades. Sejam $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ vetores do $\mathbb{R}^n$ e os escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$. Temos:

(i) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$;

(ii) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$;

(iii) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$;

(iv) $1u = u$.

Definição 1.1.5 *Para $v_1, v_2, \ldots, v_m$ em $\mathbb{R}^n$ e $c_1, c_2, \ldots, c_m$ escalares o vetor de $\mathbb{R}^n$ dado por:*

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_mv_m,$$

*é chamado combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_m$ com pesos **(ou coeficientes)** $c_1, c_2, \ldots, c_m$.*

Exemplo 1.1.2 *Sejam $v_1 = (1, 2, 3, 4), v_2 = (2, 4, 6, 8)$ e $v_3 = (3, 6, 9, 12)$. Temos que $(2, 4, 6, 8)$ é uma combinação linear de v_1, v_2 e v_3 com coeficientes $c_1 = 3, c_2 = -2$ e $c_3 = 1$.*

De fato:

$$c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = 3(1, 2, 3, 4) + (-2)(2, 4, 6, 8) + 1(3, 6, 9, 12) = (2, 4, 6, 8).$$

Exemplo 1.1.3 *Verifique se $v = (1, 1)$ é combinação linear de $u = (1, 2)$ e $w = (2, 1)$. Para que v seja combinação linear de u e w, pela (1.1.5), deverá existir escalares c_1 e c_2 satisfazendo a equação:*

$$v = c_1u + c_2w$$

$$(1, 1) = c_1(1, 2) + c_2(2, 1) \Rightarrow (1, 1) = (c_1 + 2c_2, 2c_1 + c_2).$$

Ou seja, devemos ter, $\begin{cases} c_1 + 2c_2 = 1 \\ 2c_1 + c_2 = 1 \end{cases}$.

Resolvendo o sistema, achamos $c_1 = \dfrac{1}{3}$ *e* $c_2 = \dfrac{1}{3}$.

Logo, $(1,1)$ *é combinação linear de* $(1,2)$ *e* $(2,1)$ *com pesos* $\dfrac{1}{3}$ *e* $\dfrac{1}{3}$.

Exemplo 1.1.4 *Sejam os vetores* $u = (1,1), v = (-1,-1), w = (2,4)$, *verifique se* w *é combinação linear de* u *e* v.

Pela definição (1.1.5) *devem existir escalares* c_1 *e* c_2 *que satisfazem a equação:*

$$w = c_1 u + c_2 v. \tag{1.2}$$

Temos,

$$(2,4) = c_1(1,1) + c_2(-1,-1)$$

$$(2,4) = (c_1 - c_2, c_1 - c_2).$$

Resolvendo o sistema obtemos $0 = 2$ *logo não existe um* c_1 *ou* c_2 *que satisfaça a igualdade* (1.3) *e* w *não é combinação linear de* u *e* v.

1.2 MATRIZES

Definição 1.2.1 *Uma matriz pode ser definida por um arranjo retangular de números, denominados de elementos ou termos da matriz, dispostos em linhas e colunas. Uma matriz* A *com* m *linhas e* n *colunas será denotada por* $A = (a_{ij})_{m \times n}$ *onde* a_{ij} *é chamado termo geral da matriz e* $m \times n$ *representa a ordem da matriz. O conjunto das matrizes de ordem* $m \times n$ *será denotado por* $M_{m \times n}$.

Observação 1.2.1 .

1. *As matrizes, cujos termos são reais, são chamadas de matrizes reais;*

2. *As matrizes, cujos termos são complexos, são chamadas de matrizes complexas. O objetivo do nosso trabalho é apenas o estudo das matrizes reais;*

3. *Uma matriz que possui uma única coluna é chamada de matriz coluna;*

4. *Uma matriz que possui uma única linha é chamada de matriz linha;*

5. *Se A é uma matriz com o número de linhas igual ao número de colunas, então A recebe o nome de matriz quadrada de ordem. Neste caso diz apenas que A tem ordem n e o conjunto de todas as matrizes quadradas será denotado por M_n ou $M_{n\times n}$.*

Definição 1.2.2 *Seja $A \in M_{m\times n}$. Seus elementos são representados por a_{ij} onde i representa a linha e j a coluna em que o elemento está localizado.*

Assim:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Exemplo 1.2.1 *Em seguida mostraremos alguns tipos de matrizes e suas respectivas ordens:*

a) $A_{1\times 5} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}$, *é uma matriz linha de ordem* 1×5.

b) $B_{4\times 1} = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix}$, *é uma matriz coluna de ordem* 4×1.

c) $C_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 8 \\ 4 & -2 & 5 \\ 3 & -8 & 1 \end{pmatrix}$, *é uma matriz quadrada de ordem* 3.

Observação 1.2.2 *Se $A \in M_{m\times n}$, então as colunas de A são vetores de $\mathbb{R}^m$ e as linhas de A são vetores de $\mathbb{R}^n$. Deste modo, pode-se representar a matriz $A \in M_{m\times n}$ das duas formas seguintes:*

$$A = (A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}),\ ou\ A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}\ onde,\ A_i = (a_{1j} \ldots a_{mj}) \in \mathbb{R}^n.$$

1.2.1 Operações com Matrizes

Definição 1.2.3 *Duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$ são iguais se possuem a mesma ordem e*

$$a_{ij} = b_{ij}.$$

Definição 1.2.4 *Sejam $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ A multiplicação de A por α, denotada por αA é a matriz cujo termo geral é:*

$$(\alpha a)_{ij} = \alpha a_{ij}.$$

Exemplo 1.2.2 *Sejam* $A_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 11 & 15 \\ 0 & -3 & 10 & 13 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 12 & 0 \end{pmatrix}$ *e $\alpha = -2$, temos:*

$$\alpha A = \begin{pmatrix} -2 & -10 & -22 & -30 \\ 0 & 6 & -20 & -26 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & -6 & -24 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definição 1.2.5 *Sejam $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$ matrizes de $M_{m\times n}$. Define-se a* *adição de A e B pela matriz $A + B = c_{ij}$ onde definida por:*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

.

$$(A+B) = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Exemplo 1.2.3 *Sejam* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 10 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 & 3 \\ 10 & 4 & 12 & 4 \end{pmatrix}$. *A soma das matrizes A e B é:*

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 & 6 \\ 20 & 8 & 13 & 8 \end{pmatrix}$$

Teorema 1.2.1 *Considere quaisquer matrizes A, B e C (de mesma ordem) e quaisquer escalares α e β. Então:*

(i) $(A + B) + C = A + (B + C)$;

(ii) Existe uma matriz O que satisfaz $A+O = O+A = A$, onde O é a matriz com todos os elementos iguais a 0;

(iii) Para toda A, existe uma matriz $-A \in M_{m\times n}$ que satisfaz $A+(-A) = (-A)+A = O$, onde $-A = (-1)A$;

(iv) $A + B = B + A$;

(v) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;

(vi) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;

(vii) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;

(viii) $1A = A$.

As demonstrações desse teorema são bastante simples e seguem diretamente das propriedades dos números reais (comutatividade, associatividade, etc).

Observação 1.2.3 *Os vetores* $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ *podem, sem perda de generalidade, ser representados por uma matriz linha ou por uma matriz coluna, isto é,* $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{pmatrix}$ *ou* $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$*, respectivamente.*

Observe que dado $u = (u_1, \ldots, u_n), v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}^n$ *as operações*

$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$ *e* $\alpha v = (\alpha v_1, \alpha v_2, \ldots, \alpha v_n)$ *e por outro lado, são equivalentes a* $u + v = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}$ *e* $\alpha v = \begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ \vdots \\ \alpha v_n \end{pmatrix}$.

Em geral, escolhe-se a notação para os vetores de $\mathbb{R}^n$ *de acordo com a necessidade. Por isso, aqui será adotada a notação de matriz coluna para representar os vetores em* $\mathbb{R}^n$.

1.2.2 Produto Matriz-Vetor

Definição 1.2.6 *Se cada coluna de uma matriz* $A \in M_{m\times n}$ *é um vetor de* $\mathbb{R}^m$ *representada por* $A^{(j)}$ *e* $x \in \mathbb{R}^n$*, então o produto* Ax *é o vetor do* $\mathbb{R}^m$ *formado pela combinação linear das colunas de* A*, com pesos* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*. Se* $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}$ *denotam as colunas de* A*.*

A definição abaixo mostra como será realizada a multiplicação de uma matriz por um vetor utilizando as decomposições dadas na Definição 1.2.6.

Definição 1.2.7 *Seja Ax a multiplicação das colunas da matriz A pelo vetor coluna x, definida por:*

$$Ax = \begin{pmatrix} A^{(1)} & \dots & A^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

Logo:

$$= x_1A^{(1)} + x_2A^{(2)} + \ldots + x_nA^{(n)} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n \end{pmatrix}.$$

Se A_i representa a i-ésima linha de A, então

$$A_ix = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n.$$

Exemplo 1.2.4 *Abaixo um exemplo do produto de uma matriz por um vetor:*

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

1.2.3 Multiplicação de Matrizes

Definição 1.2.8 *Sejam $A \in M_{m\times p}$ e $B \in M_{p\times n}$. O produto das matrizes A e B, denotada por AB é a matriz C de ordem $m \times n$ cujo termo geral $(c)_{ij}$ é dado por:*

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}.$$

Observação 1.2.4 *Note que, considerando A e B compostas por vetores linhas e colunas, respectivamente, então o termo geral da matriz $C = AB$ será dado por:*

$$(c)_{ij} = A_i B^{(j)} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}.$$

Exemplo 1.2.5 *Sejam* $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *e* $B = (B^{(1)}\ B^{(2)}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Pela Definição 1.2.8, temos:

$$(ab)_{11} = \sum_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k1} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 1 \times 2 + 0 \times 0 + 1 \times 1 = 3$$
$$(ab)_{12} = \sum_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k2} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{33} = 1 \times (-1) + 0 \times 2 + 1 \times (-1) = -2$$
$$(ab)_{21} = \sum_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k1} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} = 0 \times 2 + 1 \times 0 + (-1) \times 1 = -1$$
$$(ab)_{22} = \sum_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k2} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} = 0 \times (-1) + 1 \times 2 + (-1) \times (-1) = 3.$$

Assim:

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Se $A \in M_{m\times p}$ e $B \in M_{p\times n}$, então:

$$AB = \begin{pmatrix} A_1B^{(1)} & \dots & A_1B^{(n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_mB^{(1)} & \dots & A_mB^{(n)} \end{pmatrix}, \text{ onde}$$

$$(AB)^{(j)} = \begin{pmatrix} A_1B^{(j)} \\ \vdots \\ A_mB^{(j)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{1j} & + & \dots & + & a_{1p}b_{pj} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{1j} & + & \dots & + & a_{mp}b_{pj} \end{pmatrix} = b_{1j} \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + b_{pj} \begin{pmatrix} a_{1p1} \\ \vdots \\ a_{mp} \end{pmatrix}$$

$$= b_{1j}A^{(1)} + \dots + b_{pj}A^{(p)} = A \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix} = AB^{(j)},$$

ou seja, a j-ésima coluna do produto AB é o produto da matriz A pelo j-ésimo vetor coluna $B^{(j)}$. Com isso temos a seguinte proposição:

Proposição 1.2.1 *Se $A \in M_{m\times p}$ e $B \in M_{p\times n}$, então o j-ésimo vetor coluna do produto AB é dado por $AB^{(j)}$.*

De modo semelhante, a i-ésima linha da matriz AB é igual ao produto do i-ésimo vetor linha A_i pela matriz B. É possível observar que o produto matriz-vetor Ax, já definido anteriormente, é exatamente igual ao produto entre a matriz A e o vetor x, pensando como matriz coluna.

Exemplo 1.2.6 *Se $y = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, então:*

$$yB = -3\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-1 & 2\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}-2 & 0\end{pmatrix}.$$

Teorema 1.2.2 *Sejam A, B e C matrizes. Então, sempre que os produtos e somas forem definidos a operação de multiplicação de matrizes satisfaz às seguintes propriedades:*

(i) $(AB)C = A(BC)$;

(ii) $A(B + C) = AB + AC$;

(iii) $(B + C)A = BA + CA$;

(iv) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$;, *onde k é um escalar;*

(v) $OA = O$ *e* $BO = O$, *onde O é a matriz nula;*

(vi) $AI_{n\times n} = A$ *e* $I_{m\times m}A = A$, *onde $I_{n\times n}$ é a matriz identidade cujo termo geral é* 1, *se* $i = j$ *e* 0 *caso contrário.*

Prova.

Para demonstrar a propriedade do item (i), conhecida como propriedade de associatividade, considere as matrizes $A \in M_{m\times n}$, $B \in M_{n\times p}$, e $C \in M_{p\times q}$. Para que se tenha $(AB)C = A(BC)$, pela Definição 1.2.3 basta mostrar que os termos correspondentes são iguais. Para isso, será mostrado que a j-ésima coluna das matrizes $(AB)C$ e $A(BC)$ coincidem, isto é

$$[(AB)C]^{(j)} = [A(BC)]^{(j)}.$$

De fato, pela Proposição 1.2.1, Definição 1.2.7 e propriedades do Teorema 1.2.1 tem-se que:

$$[(AB)C]^{(j)} = (AB)C^{(j)} = (AB)\begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{pj} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} = & c_{1j}(AB)^{(1)} & + & c_{2j}(AB)^{(2)} & + & \dots & + & c_{pj}(AB)^{(p)} \\ = & c_{1j}(AB)^{(1)} & + & c_{2j}(AB)^{(2)} & + & \dots & + & c_{pj}(AB)^{(p)} \\ = & A(c_{1j}B^{(1)}) & + & A(c_{2j}B^{(2)}) & + & \dots & + & A(c_{pj}B^{(p)}) \\ = & A(c_{1j}B^{(1)} & + & c_{2j}B^{(2)} & + & \dots & + & c_{pj}B^{(p)}) \\ = & A(BC^{(j)}) & = & A(BC)^{(j)} & . & & & \end{array}$$

Logo,

$$[(AB)C]^{(j)} = [A(BC)]^{(j)}$$

■

As demais propriedades do Teorema 1.2.2 são demonstradas com a mesma linha de raciocínio.

1.3 ALGUNS TIPOS ESPECIAIS DE MATRIZES

1. **Matriz Inversível**

Definição 1.3.1 *Uma matriz quadrada A é chamada de inversível (ou não singular) se existe uma matriz B de mesma ordem satisfazendo $AB = BA = I$, onde I é a matriz identidade.*

Se existir a matriz B, satisfazendo a Definição 1.3.1, então B é única.

De fato, se existirem B_1 e B_2 satisfazendo as condições da definição, tem-se $AB_1 =$

$B_1A = I$ e $AB_2 = B_2A = I$, então:

$$B_1 = B_1I = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = IB_2 = B_2.$$

Isto é $B_1 = B_2$.

A matriz B da Definição 1.3.1 é chamada de inversa da matriz A e a denotamos por A^{-1}.

Observe que se A^{-1} é a inversa de A, então A é inversa de A^{-1}, uma vez que $A(A^{-1}) = I$ e $(A^{-1})A = I$.

Exemplo 1.3.1 *Determine a inversa da matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Suponha que $A^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$.

De acordo com a Definição 1.3.1, as matrizes A e A^{-1} devem satisfazer $AA^{-1} = I$. Substituindo as matrizes e utilizando as operações de multiplicação e definição de igualdade de matrizes, segue que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 & x_3 + 2x_4 \\ x_1 + x_2 & x_3 + x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 1 \end{cases}.$$

Note que a solução da primeira e da segunda equação é única e dada por:

$$x_1 = -1 \text{ e } x_2 = 1.$$

Já a solução da terceira e da quarta equação é dada por:

$$x_3 = 2 \text{ e } x_4 = -1.$$

Logo, com os cálculos anteriores, conclui-se que:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Note que $A^{-1}A = I$.

Propriedade 1.3.1 *Considere* A *e* B *matrizes de ordem* $n \times n$*, inversíveis e o número real* $\mu \neq 0$*. Então:*

(i) μA *também é inversível e* $(\mu A)^{-1} = \dfrac{1}{\mu} A^{-1}$;

(ii) A^{-1} *também é inversível e* $(A^{-1})^{-1} = A$;

(iii) AB *também é inversível e* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

2. **Matriz Triangular**

Definição 1.3.2 *Uma matriz quadrada* A *é dita triangular superior se todos os elementos que estão abaixo da diagonal principal são nulos, ou seja,* $a_{ij} = 0$ *se* $i > j$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Exemplo 1.3.2 *Como exemplo de matriz triangular superior tem-se*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 12 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definição 1.3.3 *Uma matriz quadrada A é dita triangular inferior se todos os elementos acima da diagonal principal são iguais a zero, ou seja, $a_{ij} = 0$ se $i < j$.*

Exemplo 1.3.3 *Como exemplo de matriz triangular inferior tem-se:*

a) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 12 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$

Observação 1.3.1 *As matrizes diagonais são matrizes triangulares simultaneamente superior e inferior, ou seja, tanto acima como abaixo da diagonal principal, todos os elementos são nulos.*

Teorema 1.3.1 *Se as matrizes A e B são triangulares inferiores, então AB também é.*

Prova.

Sejam $A, B \in M_{n\times n}$ matrizes triangulares inferiores. Para $i < j$, temos:

$$(ab)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}. \tag{1.3}$$

(a) Se $k \leq i$ então $k < j \Rightarrow b_{kj} = 0$;

(b) Se $k > i$, então $a_{ik} = 0$.

Dessa forma, na soma em (1.3), todos os termos são nulos, logo $(ab)_{ij} = 0$ se $i < j$.

■

Neste capítulo abordamos conceitos envolvendo vetores, suas operações e propriedades incluindo suas demonstrações. Também foi abordado o conceito de matriz, suas operações e propriedades, bem como algumas demonstrações pois todos esses conceitos servem como base para abordarmos outros conteúdos no decorrer do trabalho.

Capítulo 2

SISTEMAS LINEARES E MATRIZES ELEMENTARES

Acreditamos que você já tenha, alguma vez, trabalhado com a resolução de sistemas de equações lineares. Os sistemas de equações lineares são fundamentais para tudo o que se segue nesse trabalho, e mais ainda em aplicações da Álgebra Linear a problemas mais concretos.

2.1 INTRODUÇÃO

Sistemas Lineares é um tema presente no currículo de matemática do Ensino Fundamental e Médio e são utilizados para modelar diversos problemas com diferentes graus de complexidade, como ilustrados no exemplo seguinte

Exemplo 2.1.1 *Cláudio usou apenas notas de* $R\$ \ 20,00$ *e de* $R\$ \ 5,00$ *para fazer um pagamento de* $R\$ \ 140,00$. *Quantas notas de cada tipo ele usou, sabendo que no total foram utilizadas* 10 *notas?*

Sejam x *o número de notas de* $R\$ \ 20,00$ *e* y *o de notas de* $R\$ \ 5,00$.

Em relação ao número de notas utilizados temos:

$$x + y = 10 \tag{2.1}$$

e por outro lado, em relação à quantidade de notas de cada tipo temos:

$$20x + 5y = 140 \tag{2.2}$$

Como as equações (2.1) *e* (2.2) *devem ser satisfeitas simultaneamente, o problema recai na resolução do seguinte problema:*

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 20x + 5y = 140 \end{cases}$$

Usando o método da substituição isolando x *na 1ª equação temos:*

$$x + y = 10$$

$$x = 10 - y \tag{2.3}$$

Substituindo o valor de x *encontrado anteriormente equação* (2.2) *temos:*

$20x + 5y = 140$

$20(10 - y) + 5y = 140$

$200 - 20y + 5y = 140$

$-15y = 140 - 200$

$-15y = -60 \rightarrow (-1)$

$15y = 60$

$y = \dfrac{60}{15}$

$y = 4$

Substituindo $y = 4$ *na equação* (2.3), *temos:*

$x = 10 - y$

$x = 10 - 4$

$x = 6$

Cada uma das duas equações acima é dita linear. Quando procuramos x e y que satisfazem a ambas simultaneamente, temos um sistema de equações lineares. O par ordenado de números reais que satisfaz ambas as equações é chamado de solução do sistema. Devemos lembrar que não existe um método único para solução de um sistema de equações lineares, no entanto, para o caso acima foi usado o método da substituição e as soluções do sistema acima são pares ordenados de números, ou seja, pontos do $\mathbb{R}^2$. O método usado acima, funciona bem neste caso, porém quando o número de variáveis cresce ele, se torna inviável.

Uma outra maneira de resolver o problema acima seria usando a regra de Cramer, usualmente introduzida no Ensino Médio. No entanto, esse método torna-se inviável para problemas com muitas variáveis além de ter muitas restrições, servindo apenas para sistemas lineares com número de equações e variáveis iguais e com matriz de coeficientes inversível. Logo, veremos alguns métodos a seguir que sejam eficientes para sistema maiores. Como o objetivo do trabalho é apresentar métodos possíveis de serem implementados computacionalmente, neste capítulo, serão apresentados os conceitos fundamentais da teoria de Sistemas Lineares e métodos de solução mais apropriados para tratar sistemas grandes.

2.2 DEFINIÇÕES BÁSICAS

Definição 2.2.1 *Uma equação linear nas incógnitas* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *é uma equação que pode ser escrita na seguinte forma:*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b. \tag{2.4}$$

onde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *e* b *são constantes. A constante* a_k *é chamada coeficiente da incógnita (ou variável)* x_k *e* b *é chamado termo independente da equação.*

Uma solução para a equação (2.4) *é um vetor* $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *em* $\mathbb{R}^n$*, que satisfaz a* (2.4) *tal que:*

$$a_1u_1 + \ldots + a_1u_n = b. \tag{2.5}$$

Exemplo 2.2.1 *Alguns exemplos de equações lineares e não lineares.*

(a) $4x_1 - 5x_2 + 2 = x_3$ *é uma equação linear;*

(b) $2x_1 + 3x_2 = 26$ *é uma equação linear;*

(c) $x_1 + 2\sqrt{x_2} = 6$ *não é uma equação linear, pois a variável* x_2 *tem potência* $\frac{1}{2}$*;*

(d) $x_1x_2 + x_3 = 4$ *não é uma equação linear, pois na equação existe produto de variáveis.*

Exemplo 2.2.2 *Utilizando o conceito de solução de equações lineares temos:*

a) $(5, 2)$ *é a solução da equação* $2x - 3y = 4$*, pois*

$$2(5) - 3(2) = 4,$$

isto é (5,2) satisfaz a equação $2x - 3y = 4$.

b) $(2, 4, 7)$ *é solução da equação* $4x - 3y + 5z = 31$ *pois*

$4 \cdot 2 - 3 \cdot 4 + 5 \cdot 7 = 31$

$8 - 12 + 35 = 31$

$43 - 12 = 31,$

isto é, $(2, 4, 7)$ *é solução da equação* $4x - 3y + 5z = 31$.

Definição 2.2.2 *Um sistema de equações lineares é um conjunto de equações lineares com as mesmas incógnitas. Em geral, representamos o sistema da seguinte forma:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \dots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \tag{2.6}$$

Um vetor s de $\mathbb{R}^n$ é solução do sistema (2.6) quando s é solução de cada uma das equações.

O sistema (2.6) é chamado de sistema $m \times n$. Ele é chamado sistema quadrado se $m = n$, ou seja, se a quantidade de equações é igual à quantidade de incógnitas.

Definição 2.2.3 *Consideremos os vetores $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}, b_i)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ que representam os coeficientes das equações do sistema (2.6) acrescidos dos segundos membros e os organizemos como linhas de uma tabela, chamada de matriz ampliada do sistema (2.6), como segue:*

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Definição 2.2.4 *Quando o sistema de equações é homogêneo, a ele associamos a matriz eliminando a coluna de zeros da direita na matriz.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Definição 2.2.5 *A matriz M (2.7) é chamada matriz ampliada ao sistema linear pois ela possui todas as informações do sistema ou seja os coeficientes e os termos independentes de (2.6) já a segunda matriz A (2.8), é chamada matriz dos coeficientes do sistema linear (2.6).*

O sistema (2.6) pode ser representado pela equação matricial $Ax = b$, onde A é a matriz dos coeficientes das variáveis, $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ onde x é o vetor variável e $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ é o vetor de termos independentes.

De acordo com essa representação, um vetor $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ é solução do sistema se, e somente se, $As = b$.

Exemplo 2.2.3 *A tripla $(1, 2, 3)$ é solução do sistema $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + 3z = 8 \\ -x - 2y + z = -2 \end{cases}$, pois, para $x = 1, y = 2$ e $z = 3$, as equações são todas satisfeitas, isto é:*

$$\begin{cases} 1 + 2 + 3 = 6 \\ 1 - 2 + 3(3) = 8 \\ -1 - 2(2) + 3 = -2 \end{cases}$$

Em notação matricial, o sistema do exemplo (2.2.3) é representado por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 3 & 8 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2.2.4 *O sistema linear* $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$ *, possui única solução substituindo* $x_1 = x_2$ *obtida da segunda equação na primeira obtém-se:*

$$2x_1 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}.$$

Exemplo 2.2.5 *O sistema linear* $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$ *não pode ter solução, pois caso tivesse, teríamos 2=1 como segue.*

$$x_1 = 1 - x_2 \Rightarrow 2(1 - x_2) + 2x_2 = 1 \Rightarrow 2 = 1.$$

Nos dois últimos exemplos, vimos que é possível que um sistema tenha uma única solução ou que não tenha solução.

Há, ainda exemplos de sistemas que possuem mais de uma solução, como é o caso do sistema:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}.$$

Note que $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ e $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 1)$ são soluções.

Caso tenha mais de uma solução, então ele possui infinitas soluções.

De fato, suponha que o sistema $Ax = b$ tenha as soluções distintas x_1 e x_2 e defina $x_0 = x_1 - x_2$, onde x_0 é não nula, assim,

$$Ax_0 = A(x_1 - x_2) = Ax_1 - Ax_2 = b - b = \overrightarrow{0}$$

Se k é qualquer escalar então:

$$A(x_1 + kx_0) = Ax_1 + A(kx_0) = Ax_1 + k(Ax_0)$$

$$= b + k\overrightarrow{0} = b + \overrightarrow{0} = b.$$

Isso significa que $x_1 + kx_0$ é solução de $Ax = b$, para qualquer $k \in \mathbb{R}$. Como x_0 é não nula e existem infinitas possibilidades de escolha para k, o sistema $Ax = b$ tem infinitas soluções.

Definição 2.2.6 *Um sistema linear homogêneo é formado por equações cujos termos independentes são todos nulos, isto é:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = 0 \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

ou $Ax = \overrightarrow{0}$, *em notação matricial.*

Observação 2.2.1 *Todo sistema linear homogêneo possui, pelo menos, uma solução, a saber,* $(0, 0, \dots, 0)$, *chamada solução trivial.*

Observação 2.2.2 *Se* $s_1, \dots, s_l$ *são soluções de um sistema homogêneo* $Ax = \overrightarrow{0}$, *então qualquer combinação linear de* $s_1, \dots, s_l$ *também é.*

De fato, temos:

$$A(a_1s_1 + \dots + a_ls_l) = a_1As_1 + \dots + a_lAs_l = a_1\overrightarrow{0} + \dots + a_l\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}.$$

Um fato importante sobre sistemas lineares que a matriz $A \in M_{n\times n}$ é triangular inferior e não tem zeros na diagonal principal, então $Ax = b$ tem solução para todo $b \in \mathbb{R}^n$.

De fato, nessas condições, $Ax = b$ tem a seguinte forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{(n-1)1}x_1 + \ldots + a_{(n-1)(n-1)}x_{n-1} = b_{n-1} \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{n(n-1)}x_{n-1} + a_{nn}x_n = b_n \end{cases},$$

fazendo as considerações dos passos abaixo:

Passo 1:

$$s_1 = \frac{b_1}{a_{11}}.$$

Passo 2: Para $1 \leq i \leq n-1$

$$s_i = \frac{b_i - a_{i1}s_1 - \ldots - a_{i(i-1)}s_{i-1}}{a_{ii}}.$$

O vetor $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ é solução do sistema.

Os passos acima descrevem de forma algorítmica como resolver um sistema $Ax = b$ com A triangular sem zeros na diagonal principal. Note que esse procedimento sempre é possível, pois $a_{ii} \neq 0$, para todo $i \in 1, \ldots, n$.

Com isso, tem-se a seguinte proposição:

Proposição 2.2.1 *Se A é uma matriz triangular sem zero na diagonal então o sistema $Ax = b$ sempre tem solução.*

Teorema 2.2.1 *Se A é uma matriz triangular inferior sem 0 na diagonal principal, então A é inversível.*

Prova.

Seja A uma matriz triangular inferior de ordem n e I a matriz identidade de ordem n. Para mostrar que A é inversível, pela definição (1.3.1), basta mostrar que existe uma matriz X de ordem n tal que $AX = I$ e $XA = I$, neste caso tem-se $A^{-1} = X$. Para isso, defina os seguintes sistemas:

$$Ax = I^{(i)} \text{ e } A^t y = I^{(i)},\ i = 1, \ldots, n.$$

Pela proposição (2.2.1), os sistemas definidos possuem solução, uma vez que A e A^t são matrizes triangulares.

Sejam $X^{(i)}$ e $Y^{(i)}$ soluções de $Ax = I^{(i)}$ e de $A^t y = I^{(i)}$ respectivamente, para $i = 1, \ldots, n$. Assim, $AX^{(i)} = I^{(i)}$ e $A^t Y^{(i)}$, para $i = 1, \ldots, n$.

Utilizando as soluções acima, defina as matrizes $X = (X^{(1)} \ldots X^{(n)})$ e $Y = (Y^{(1)} \ldots Y^{(n)})$.

Utilizando a proposição (1.2.1) segue que:

$$AX = A(^{(1)}, \ldots, X^{(n)}) = (AX^{(1)}, \ldots, AX^{(n)}) = (I^{(1)}, \ldots, I^{(n)}) = I$$

isto é,

$$AX = I. \tag{2.10}$$

Do mesmo modo, conclui-se que

$$A^t Y = I. \tag{2.11}$$

Aplicando a transposta em ambos os membros da equação (2.11), segue que:

$$A^t Y = I \Rightarrow (A^t Y)^t = Y^t A = I.$$

Utilizando a equação $Y^t A = I$ e multiplicando ambos os membros da equação (2.10) por

Y^t, segue que $Y^t AX = Y^t$ e, conclui-se que:

$$X = Y^t. \tag{2.12}$$

Das equações (2.10)(2.12) conclui-se que:

$$XA = I. \tag{2.13}$$

Por fim, das equações (2.10) e (2.13) segue que A é inversível.

Logo,

$$X = A^{(-1)}$$

■

2.2.1 Matriz na Forma Escada

Nesta subseção será mostrado que toda matriz pode ser transformada por meio de uma sequência de operações elementares sobre linhas numa matriz em uma forma muito especial, a forma escada, que será utilizada na próxima seção para resolver sistemas de equações lineares.

Definição 2.2.7 *Uma matriz $m \times n$ esta na forma escada se for nula ou se satisfaz as condições abaixo:*

a) Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas;

b) Se $L_1, \ldots, L_p$ são as linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha L_i ocorre na coluna k_i , então $k_1 < k_2 < \ldots < k_p$.

Exemplo 2.2.6 *A matriz abaixo é um exemplo de matriz na forma escada. Os primeiros úmeros não-nulos das linhas p_1, p_2, p_3, p_4 os quais são chamados pivôs ou elementos lideres. Nas demais entradas, representadas por "a", temos números reais quaisquer.*

$$\begin{pmatrix} 0 & p_1 & a & a & a & a & a & a & a & a \\ 0 & 0 & p_2 & a & a & a & a & a & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 & a & a & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

O método da eliminação de Gauss, utilizado para resolver o sistema $Ax = b$, consiste em substitui-lo pelo sistema equivalente $Ux = d$, que possui as mesmas soluções que o sistema original e cuja matriz ampliada $(U|d)$ na forma escada.

Exemplo 2.2.7 *A matriz* $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, *está na forma escada, pois todas as condições da definição* (2.2.7) *são satisfeitas, mas as matrizes* B *e* C*:*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

não estão na forma escada, pois B *não satisfaz a condição a, enquanto* C *não satisfaz a condição b.*

2.3 TRANSFORMAÇÃO DE MATRIZES

2.3.1 Operações Elementares de Matrizes

Seja A uma matriz $m \times n$. Para cada $1 \leq i \leq m$, denotemos por L_i a i-ésima linha de A. Definimos as operações elementares nas linhas da matriz A como segue:

1. Permutação das linhas L_i e L_j , indicada por:

$$L_i \leftrightarrow L_j.$$

2. Substituição da linha L_i por L_i somada com um múltiplo c da L_j , indicada por:

$$L_i \rightarrow L_i + cL_j.$$

3. Multiplicação da linha L_i por um número real c não nulo, indicada por:

$$L_i \rightarrow cL_i.$$

Exemplo 2.3.1 *Foi feita a operação elementar onde a 1^a linha foi trocada com a segunda linha.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} L_1 \leftrightarrow L_2 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 2.3.2 *Foi feita a operação elementar onde a 1^a linha foi substituída pela onde a segunda linha foi multiplicada por 3 e somada com a 1^a linha.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} L_1 \longrightarrow L_1 + 3L_2 \begin{pmatrix} 10 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 2.3.3 *Foi feita a operação elementar onde a 1^a linha foi substituída pelo produto da 1^a linha pelo número 4.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} L_1 \longrightarrow 4L_1 \begin{pmatrix} 4 & 20 & 8 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Um fato interessante é que toda operação elementar nas linhas de uma matriz em $M_{m\times n}$ é reversível. Isto é, se e é uma operação elementar, então existe a operação elementar e'

tal que $e'(e(A)) = A$ e $e(e'(A)) = A$.

De fato, se e é uma operação elementar do tipo $L_i \leftrightarrow L_j$, tome $e' = e$. Se e é uma operação elementar do tipo $L_i \longrightarrow cL_i$, com $c \neq 0$, tome e' como a operação $L_i \longrightarrow \frac{1}{c}L_i$. Finalmente, se e é uma operação elementar do tipo $L_i \to L_i + cL_j$, tome e' como a operação $L_i \to L_i - cL_j$.

Definição 2.3.1 *Dada uma matriz A, se e representa uma das operações elementares e $e(A) = B$, então dizemos que B é linha equivalente com A, pois foi obtida aplicando operações elementares na linha de A. linhas.*

Exemplo 2.3.4 *As matrizes:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \; e \; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

são equivalentes por linhas já que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} L_3 \longrightarrow L_3 + 2L_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} L_3 \longrightarrow L_3 - 3L_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

No exemplo acima, quaisquer duas dentre as quatro matrizes são equivalentes por linhas.

Note que se A é equivalente por linhas a uma matriz B, então B é equivalente por linhas à matriz A, já que toda transformação elementar sobre linhas é reversível.

Proposição 2.3.1 *Dois sistemas lineares $Ax = b$ e $Cx = d$, cujas matrizes ampliadas são equivalentes por linhas, possuem o mesmo conjunto solução.*

Prova.

Devemos mostrar que s é solução de $Ax = b$ se, e somente se, s é solução de $Cx = d$. Como toda operação elementar é reversível, basta mostrar que se s é solução de $Ax = b$, então s é solução de $Cx = d$, pois a reciprocidade será imediata.

Para isso, basta mostrar que sendo s solução de $Ax = b$ e a matriz $(C|d)$ é obtida de $(A|b)$ por meio de uma única operação elementar, então s é solução de $Cx = d$, pois, nesse caso, s será solução de cada uma das matrizes "intermediárias" no processo que transforma $(A|b)$ em $(C|d)$.

Dessa forma, vamos considerar cada uma das operações elementares. Se $(C|d)$ é obtida de $(A|b)$ por meio de uma operação elementar do tipo $L_i \leftrightarrow L_j$, então as equações de $Cx = d$ são as mesmas de $Ax = b$, apenas aparecendo em ordem diferente, portanto é imediato que se s é solução de $Ax = b$, será também solução de $Cx = d$.

No caso de uma operação do tipo $L_i \longrightarrow cL_i$, com $c \neq 0$, a única diferença entre $(C|d)$ e $(A|b)$ (ou entre $Cx = d$ e $Ax = b$) é a i-ésima linha (ou i-ésima equação).

A i-ésima linha de $(C|d)$ é $\begin{pmatrix} ca_{i1} & ca_{i2} & \dots & ca_{in} & cd_i \end{pmatrix}$, e portanto, a i-ésima equação de $Cx = d$ é $ca_{i1}x_1 + ca_{i2}x_2 + \ldots + ca_{in}x_n = cd_i$.

Sendo s uma solução de $Ax = b$, temos $a_{i1}s_1 + \ldots + a_{in}s_n = d_i$, logo $c(a_{i1}s_1 + \ldots + a_{in}s_n) = cd_i \Rightarrow ca_{i1}s_1 + \ldots + ca_{in}s_n = cd_i$, ou seja, s também é solução da i-ésima equação de $Cx = d$, e portanto, é solução de $Cx = d$.

Do mesmo modo, para a operação $L_i \longrightarrow L_i + cL_j$, a i-ésima equação de $Cx = d$ é $(a_{i1} + ca_{j1})x_1 + \ldots + (a_{in} + ca_{jn})x_n = d_i + cd_j$.

Sendo s solução de $Ax = b$, temos:

$a_{i1}s_1 + \ldots + a_{in}s_n = d_i$ e $a_{j1}s_1 + \ldots + a_{jn}s_n = d_j \Rightarrow ca_{j1}s_1 + \ldots + ca_{jn}s_n = cd_j$.

Logo:

$a_{i1}s_1 + \ldots + a_{in}s_n + ca_{j1}s_1 + \ldots + ca_{jn}s_n = d_i + cd_j \Longleftrightarrow (a_{i1} + ca_{j1})s_1 + \ldots + (a_{in} + ca_{jn})s_n = d_i + d_j$, ou seja s é solução da i-ésima equação de $Cx = d$ e portanto, é solução de $Cx = d$.

■

2.3.2 Método de Redução Por Linhas Para Obter a Forma Escada

Aqui vamos mostrar como é possível, utilizando uma quantidade finita de operações elementares, obter de uma matriz não-nula qualquer uma matriz equivalente por linhas na forma escada. O método que será mostrado ficou conhecido como método de eliminação de Gauss, em homenagem a Carl Friendrich Gauss $(1777-1855)$. Uma versão preliminar da eliminação de Gauss apareceu pela primeira vez no livro chinês Nove Capítulo de Artes Matemática, em torno de 200 a.C. até então a importância do método não tinha sido reconhecido. Em 1801 Carl Friedich Gauss fez uso do método para poder calcular a órbita do asteróide Ceres com pouquíssimas informações. O trabalho de Gauss ganhou credibilidade quando Ceres reapareceu na constelação de virgem, local aproximado aos seus cálculos. Mais tarde o método foi popularizado quando Willian Jordan (engenheiro alemão) em 1888 publicou no seu livro de geodésica intitulado Handbuch der Vermessungskund.

Se A é uma matriz $m \times n$, então para obter a matriz equivalente forma escada, ou simplesmente reduzir a matriz A por linhas, serão aplicados os passos a seguir:

Passo 1. Para $k = i$.

Seja c_j a primeira coluna não nula de A localizada mais a esquerda. Faça a permutação necessária de modo que a entrada a_{ij} da nova matriz seja não nula.

Passo 2. ara $k+1 \leq i \leq m$ aplique a operação elementar

$$L_i \to L_i - \frac{a_{ij}}{a_{kj}} L_k.$$

Repita os Passos 1 e 2 na matriz assim obtida, ignorando a primeira linha. Novamente, repita os Passos 1 e 2 nessa nova matriz, ignorando as duas primeiras linhas etc, até alcançar a última linha não nula.

Note que todos os passos são possíveis, já que as únicas divisões são feitas por pivôs não nulos. Com isso, pode-se concluir que toda matriz nula é equivalente por linhas a uma matriz na forma escada.

Exemplo 2.3.5 *Para ilustrar o método descrito com os passos acima, considere a matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Para $i = 1$, observe que a coluna c_1 é não nula, porem a entrada $a_{11} = 0$ iremos trocar a primeira linha com a segunda.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} L_2 \leftrightarrow L_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Agora para $2 \leq i \leq 4$ serão aplicadas as seguintes operações:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_3 \to L_3 - 2L_1 \\ L_4 \to L_4 - 3L_1 \end{array}.$$

Em seguida observe que para $j > 1$ a primeira coluna mais a esquerda contento entradas $a_{ij} \neq 0$ para $i > 1$ é a terceira. Como $a_{23} \neq 0$, serão aplicadas as seguintes operações:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -8 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_3 \to L_3 + 8L_2 \\ L_4 \to L_4 + 7L_2 \end{array}.$$

Continuamos com o método, para $i \geq 3$ e $j > i$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 27 \end{pmatrix} L_4 \to L_4 - L_3.$$

Como para $i \geqslant 4$ não existe $a_{ij} \neq 0$ com $j > i$ a redução por linhas está finalizada e a matriz abaixo está na forma escada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para resolver um sistema $Ax = b$ pretende-se utilizar a eliminação de Gauss aplicada na matriz A ampliada $(A|b)$ obtendo uma matriz na forma escada $(C|d)$ equivalente ao sistema $Cx = d$, e possui o mesmo conjunto solução de $Ax = b$.

Exemplo 2.3.6 *A matriz ampliada do sistema* $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ *é:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} L_2 \to L_2 - 2L_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Esta última é uma matriz na forma escada para a matriz ampliada do sistema e esta é uma matriz ampliada do sistema $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 0x_1 + 0x_2 - 0x_3 = -2 \end{cases}$ *, o qual não tem solução, logo o sistema inicial não possui solução.*

.

Exemplo 2.3.7 *Use o método de eliminação de Gauss para resolver o sistema* $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$.

Seja a matriz ampliada do sistema dado, aplicando as operações elementares a seguir temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - 2L_1 \end{matrix}.$$

Como a matriz está na forma escada temos que, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$,

o sistema,

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ -x_3 = -3 \end{cases},$$

tem o mesmo conjunto solução do sistema original e por ser um sistema triangular, sua solução é simples:

$$x_3 = 3, x_2 = \frac{-1+6}{2} = \frac{5}{2}, x_1 = 1 + \frac{5}{2} - 3 = \frac{1}{2}.$$

.

Exemplo 2.3.8 *Utilize o método de eliminação de Gauss para solucionar o sistema* $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$.

Seja a matriz ampliada do sistema dado temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando a seguinte operação elementar $L_2 \to L_2 + 2L_1$, *temos:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta última é a matriz ampliada do sistema,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 7x_3 - x_4 = 1 \end{cases}.$$

O modo de resolver esse sistema é colocar as variáveis x_1 *e* x_3, *chamadas pivotais, por terem como coeficientes os pivôs das duas linhas, em função das demais variáveis, chamadas livres.*

Assim temos:

$$x_3 = \frac{1 + x_4}{7}$$
$$x_1 = x_4 - 2x_2 - 3x_3$$
$$= x_4 - 2x_2 - \frac{3(1 + x_4)}{7}$$
$$= \frac{4x_4 - 14x_2 - 3}{7}.$$

Assim uma solução geral para esse sistema é dada por

$$(\frac{4x_4 - 14x_2 - 3}{7}, x_2, \frac{1 + x_4}{7}, x_4).$$

Isso significa que para cada atribuição arbitrária de valores para x_2 *e* x_4 *encontramos os valores de* x_1 *e* x_3 *e assim, uma solução do sistema. Portanto, o sistema possui infinitas* *soluções.*

2.3.3 Matrizes Elementares

Definição 2.3.2 *As matrizes elementares são aquelas obtidas a partir da identidade mediante a aplicação de uma única operação elementar.*

Vamos usar a notação,

$$E = e(I_n),$$

para indicar que E é a elementar obtida de I_n por meio da operação elementar e.

Exemplo 2.3.9 *As matrizes abaixo são elementares, pois:*

Se fizermos a operação: $E_1 = e_1(I_3) \mapsto L_1 \longleftrightarrow L_3$, obtemos E_1

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se fizermos a operação: $E_2 = e_2(I_3) \mapsto L_1 \longrightarrow 7L_1$, obtemos E_2

$$E_2 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se fizermos a operação: $E_3 = e_3(I_3) \mapsto L_3 \longrightarrow L_3 + 3_1$, obtemos E_3

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Um fato importante sobre matrizes elementares é que se elas são obtidas por meio de uma operação elementar $L_i \longrightarrow cL_i$ com $c \neq 0$ ou $L_i \longrightarrow L_i \longrightarrow L_i + cL_j$ com $j < i$, em I, então elas são triangulares inferiores e não possuem zeros na diagonal principal.

De fato, se a operação feita em I, para obter a matriz elementar E foi $L_i \longrightarrow cL_i$, com $c \neq 0$, então E é diagonal (portanto triangular inferior) e na sua diagonal, o único termo diferente de 1 é o c na i-ésima linha, o qual também não é nulo.

No caso da operação $L_i \longrightarrow L_i + cL_j$, com $j < i$, temos que a i-ésima linha de I foi modificada usando uma linha acima desta.

Temos:

$$I_i = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ e } I_j = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \dots & 0 \end{pmatrix},$$

logo $I_i + cI_j = \begin{pmatrix} 0 & \dots & c & \dots & 1 \dots & 0 \end{pmatrix}$, onde c está na posição ij e o 1 na posição ii, logo a diagonal principal e tudo acima dela não foi modificado.

Exemplo 2.3.10 *A matriz abaixo é uma matriz elementar pois foi obtida a partir da matriz,* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *e da operação* $L_3 \longrightarrow L_3 + cL_1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema 2.3.1 *Seja e uma operação elementar sobre matrizes de $M_{m\times n}$. Considere a matriz elementar $E = e(I_n)$. Então $e(A) = EA$, para todo $A \in M_{m\times n}$.*

Prova.

Seja I a matriz identidade $n \times n$.

Assim $I = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix}$ onde, $I_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ e assim por diante.

Sendo $A \in M_{n\times n}$, temos:

$$I_iA = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots a_{ip} \end{pmatrix} = A_i.$$

De modo semelhante podemos provar que $\alpha I_iA = \alpha A_i$.

Caso 1: Seja a operação elementar $L_i \leftrightarrow L_j$.

Seja,

$$I = \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_i \\ \vdots \\ I_j \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix}.$$

Considere a matriz elementar $e(I) = E_1$ obtida pela troca entre a i-ésima linha e a j-ésima linha de I. Assim:

$$e(I) = E \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_j \\ \vdots \\ I_i \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix}.$$

Seja,

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}.$$

Temos:

$$e(A) = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}.$$

Fazendo o produto da matriz elementar por A temos:

$$EA = \begin{pmatrix} E_1A \\ \vdots \\ E_iA \\ \vdots \\ E_jA \\ \vdots \\ E_nA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1A \\ \vdots \\ I_jA \\ \vdots \\ I_iA \\ \vdots \\ I_nA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = e(A)$$

Caso 2: $Li \longleftrightarrow cLi$. Neste caso, temos:

$$e(I) = \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ cI_i \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix} = E$$

Seja

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

Assim:

$$e(A) = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ cA_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}.$$

Fazendo o produto da matriz elementar por A temos:

$$EA = \begin{pmatrix} E_1A \\ \vdots \\ E_iA \\ \vdots \\ E_nA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1A \\ \vdots \\ cI_iA \\ \vdots \\ I_nA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ cA_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = e(A).$$

Caso 3: $L_i \longleftrightarrow L_i + cL_j$. Temos:

$$e(I) = \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_i + cI_j \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix} = E$$

Seja

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

Temos:

$$e(I) = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i + cA_j \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = E$$

Fazendo o produto da matriz elementar por A temos:

$$EA = \begin{pmatrix} E_1A \\ \vdots \\ E_iA \\ \vdots \\ E_nA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1A \\ \vdots \\ (I_i + cI_j)A \\ \vdots \\ I_nA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ I_iA + cI_jA \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i + cA_j \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = e(A)$$

■

Corolário 2.3.1 *Sejam A e B em $M_{m\times n}$. Então, A é equivalente a B se, e somente se, existem matrizes elementares $E_1 \dots E_s$ de ordem m tais que,*

$$E_s \dots E_2 E_1 A = B.$$

Prova.

Por definição, A é equivalente a B quando existem operações elementares $e_1, \dots, e_s$ tais que,

$$e_s(\dots(e_2(e_1(A)))\dots) = B.$$

Basta tomar $E_i = e_i(I)$, para cada $1 \leq i \leq s$. ■

Corolário 2.3.2 *Toda matriz elementar é inversível e sua inversa também é uma matriz elementar.*

Prova.

Seja E uma matriz elementar. Seja e a operação elementar tal que $E = e(I)$. Se e' é a transformação elementar inversa de e e se $E' = e'(I)$, pelo Teorema (2.3.1) temos $I = e'(e(I)) = e'(E) = e'(I)E = E'E$ e $I = e(e'(I)) = e(E') = e(I)E' = EE'_1$, logo, E é inversível e $E^{-1} = E'$. ■

Neste capítulo abordamos conceitos relativos aos sistemas lineares, método de Gauss, matrizes elementares, bem como as operações elementares nas matrizes, também abordamos alguns teoremas importantes e suas demonstrações, no próximo capítulo iremos finalizar com a abordagem da fatoração LU.

Capítulo 3

FATORAÇÃO LU

3.1 INTRODUÇÃO

A fatoração LU de uma matriz $A \in M_{m\times n}$ consiste em escrever A como o produto das matrizes $L \in M_{m\times m}$ e $U \in M_{m\times n}$ sendo L uma matriz triangular inferior e U uma matriz na forma escada. No caso em que A é quadrada a matriz U será triangular superior (toda matriz quadrada na forma escada é triangular superior). Daí vem o nome desta fatoração, L de lower (inferior) e U de upper(superior).

A fatoração LU é importante na resolução de sistemas lineares por tornar esse trabalho mais fácil e viável de ser executado computacionalmente. Por exemplo para resolver o sistema $Ax = b$ utilizando a fatoração LU, deve-se proceder da seguinte forma:

1º Passo: Reescreva o sistema $Ax = b$ como $LUx = b$.

2º Passo: Resolva o sistema $Ly = b$ onde y é um novo vetor coluna de incógnitas.

3º Passo: Sendo $\hat{s}$ uma solução de $Ly = b$, resolva o sistema $Ux = \hat{s}$.

Com os passos acima se s é uma solução de $Ux = \hat{s}$, então $Us = \hat{s}$. Assim, de $LUx = b$, segue que $(LU)s = L(Us) = L\hat{s} = b$, isto é $As = b$ e s é solução de $Ax = b$.

Exemplo 3.1.1 *Para* $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$, *as matrizes* $L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{pmatrix}$ *e* $U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *fornecem uma fatoração do tipo* $A = LU$. *Utilizando a fatoração* LU *da matriz* A *resolva o sistema* $Ax = b$, *onde* $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Utilizando a fatoração LU *o sistema* $Ax = b$ *é equivalente a* $LUx = b$ *para* $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, *o sistema* $Ly = b$ *é:*

$$\begin{cases} 2y_1 = 2 \\ -3y_1 + y_2 = 2 \\ 4y_1 - 3y_2 + 7y_3 = 3 \end{cases}$$

$y_2 = 2 + 3 \times 1 = 5$

$7y_3 = 3 - 4 \times 1 + 3 \times 5$

$y_3 = \frac{14}{7} = 2$

Cuja solução é:

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Por outro lado o sistema $Ux = y$ *é:*

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

$x_2 = 5 - 3 \times 2 \Rightarrow x_2 = -1$

$x_1 = 1 - 3(-1) - 2 \Rightarrow x_1 = 2,$

onde, a solução é dada por:

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

E é também solução do sistema inicial $Ax = b$.

No exemplo acima, fica claro como é simples a resolução de um sistema $Ax = b$, quando A admite uma fatoração LU. A simplicidade na resolução é garantida por serem sistemas que possuem matrizes de coeficientes triangulares. Porém nem toda matriz possui uma fatoração LU, como mostra o exemplo abaixo.

Exemplo 3.1.2 *A matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ não admite uma fatoração LU.*

De fato, suponha que:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & w \\ 0 & u \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xt & xw \\ yt & yw + zu \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} xt = 0 \\ xw = 1 \\ yt = 1 \\ yw + zu = 0 \end{cases}$$

De $xw = 1$, segue que $x \neq 0$ e de $xt = 0$, segue que $t = 0$, o que contradiz a equação $yt = 1$.

Assim, este sistema (de equações não lineares) não possui solução, ou seja, A não admite fatoração LU.

Na próxima seção vamos mostrar que se uma matriz $A \in M_{m\times n}$ pode ser levada a uma forma escada U pelo método de eliminação de Gauss sem o uso de permutações de linhas, então A admite uma fatoração LU, onde L é triangular inferior (produto de matrizes elementares que são triangulares inferiores) e U é uma matriz na forma escada linha-equivalente a A (caso A seja quadrada, U será triangular superior).

3.2 OBTENDO A FATORAÇÃO LU

Seja $A \in M_{m\times n}$ uma matriz que possa ser levada através da eliminação de Gauss, a uma forma escada U sem uso de permutação de linhas. Sejam $E_1 \dots E_k$ as matrizes elementares associadas às operações elementares que transformam A em U.

Dessa forma, pelo que já foi visto, temos:

$$E_k \dots E_1 A = U \tag{3.1}$$

Como não há permutação de linhas, o único tipo de operação elementar possível será $L_i \to L_i + \alpha L_j$ com $j < i$. Dessa forma, como já vimos, as matrizes $E_1 \dots E_k$ são triangulares sem zeros na diagonal principal. Como cada uma das matrizes $E_1 \dots E_k$ é inversível, de (3.1) segue:

$$A = E_1^{-1} \dots E_k^{-1} U \tag{3.2}$$

Com isso, a matriz $E_1^{-1} \dots E_k^{-1}$ é uma candidata a matriz L da fatoração LU. Devemos mostrar que ela é triangular inferior. Como o produto de matrizes triangulares é também triangular inferior, podemos mostrar que cada uma das matrizes $E_1^{-1}, \dots, E_k^{-1}$ é triangular inferior.

Teorema 3.2.1 *Se $E \in M_{n\times n}$ é triangular inferior e não tem zeros na diagonal principal, então E^{-1} é triangular inferior.*

Prova.

Já vimos pelo Corolário (2.3.2) que E possui inversa. Seja B a inversa de E. Devemos mostrar que $b_{ij} = 0$, se $i < j$. Temos $(eb)_{1j} = 0$, para $1 < j$, pois $EB = I_{n\times n}$, assim:

$0 = (eb)_{1j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} e_{1k}b_{kj} = e_{11}b_{1j}$, pois $e_{12} = \dots = e_{1n} = 0$, já que E é triangular inferior.

Assim, $e_{11}b_{1j} = 0$ e como $e_{11} \neq 0$, temos $b_{1j} = 0$, para todo $2 \leq j \leq n$.

Agora, para $2 < j$, temos:

$0 = (eb)_{2j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} e_{2k}b_{kj} = e_{21}b_{1j} + e_{22}b_{2j}$, pois $e_{23} = \dots = e_{2n} = 0$.

Assim $e_{21}b_{1j} + e_{22}b_{2j} = 0$, e $e_{22}b_{2j} = 0$, pois $b_{1j} = 0, (1 < 2 < j)$, agora, $b_{2j} = 0$, já que $e_{22} \neq 0$, ou seja $b_{2j} = 0$, para todo $3 \leq j \leq n$.

Seguindo assim, prova-se que os termos acima da diagonal principal de cada linha são nulos e, portanto, que B é triangular inferior.

$\blacksquare$

Com isso, concluímos que a matriz $E_1^{-1} \dots E_k^{-1}$ é triangular inferior e que, nas condições citadas acima, A admite uma fatoração LU.

Além disso, a argumentação nos fornece o método para obter a fatoração LU.

Note que a matriz L é dada por

$$L = E_1^{-1} \dots E_k^{-1} \tag{3.3}$$

que é o mesmo que $E_1^{-1} \dots E_k^{-1} I$. Como as matrizes $E_1^{-1}, \dots, E_k^{-1}$ são as matrizes elementares associadas às operações reversas àquelas feitas em A para obter U, temos que, $L = E_1^{-1} \dots E_k^{-1} I$ é a matriz obtida de I por meio das operações reversas das operações que levam A em U e feitas na ordem contrária, ou seja, se $e_1, e_2, \dots, e_k$ foram as operações que levaram A em U, ou seja $e_k(\dots(e_1(A))\dots) = U$, então,

$$e_1^{-1}(\dots(e_k^{-1}(I))\dots) = L.$$

Exemplo 3.2.1 *Encontre uma decomposição LU da matriz* $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$.

Para isso, vamos reduzir A à forma escada por linhas U usando eliminação de Gauss.

A forma escada correspondente à matriz U:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aplicando na matriz A as operações elementares necessárias, temos:

Passo 1:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix} L_3 \longrightarrow L_3 - 2L_1.$$

Passo 2:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} L_2 \longrightarrow L_2 + \frac{3}{2}L_1.$$

Passo 3:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} L_3 \longrightarrow L_3 + 3L_2.$$

Então,

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, aplicando na matriz identidade as operações reversas na ordem contrária à aplicada para converter, A em U, temos:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Passo 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} L_3 \longrightarrow L_3 - 3L_2.$$

Passo 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} L_2 \longrightarrow L_2 - \frac{3}{2}L_3.$$

Passo 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} L_3 \longrightarrow L_3 + 2L_1.$$

Então:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, como $A = LU$, tem-se:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 3.2.2 *Encontre uma decomposição LU de*

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Para obter a decomposição $A = LU$, vamos reduzir A à forma escada para obter a matriz U e em seguida as reversas das operações utilizadas aplicadas em ordem inversa na matriz I fornecerá a matriz L.

Passo 1:

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix} L_3 \longrightarrow L_3 - \frac{1}{2}.$$

Passo 2:

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 8 & 5 \end{pmatrix} L_3 \longrightarrow L_3 + 8L_2.$$

Passo 3:

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix} = U.$$

Vamos encontrar a matriz triangular inferior L dada por (3.3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} L_3 \longrightarrow L_3 - 8L_2.$$

Passo 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 1 \end{pmatrix} L_3 \longrightarrow L_3 + \frac{1}{2}.$$

Passo 3:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}.$$

3.3 MATRIZ INVERSA VIA FATORAÇÃO LU

Uma situação em que precisamos resolver vários sistemas $Ax = b$ é quando queremos encontrar a inversa de A. Reescrevendo a equação $AB = I$, onde I é a matriz identidade, utilizando vetores coluna, temos $A(B^{(1)}...B^{(n)}) = (I^{(1)}...I^{(n)})$ e consequentemente, $(AB^{(1)}...AB^{(n)}) = (I^{(1)}...I^{(n)})$, ou seja, devemos ter $AB^{(1)} = I^{(1)}, ..., AB^{(n)} = I^{(n)}$. Portanto, para encontrar a inversa da matriz A, devemos encontrar uma solução para cada um dos sistemas $Ax = I^{(1)}, ..., Ax = I^{(n)}$.

Abaixo segue um exemplo do calculo da matriz inversa de A via fatoração LU.

Exemplo 3.3.1 *Vamos determinar a matriz inversa de* $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *via fatoração* LU *como foi falado acima.*

Sejam as matrizes $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$ *e* $U = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

A matriz A decomposta na forma fatorada é dada por:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Vamos resolver $Ax = I_1, Ax = I_2, Ax = I_3$ *usando a fatoração* LU *de* A. $LU \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *onde* $Ux = z$.

Então,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolvendo o sistema obtido temos:

$$z_1 = 1, z_2 = 2, z_3 = -\frac{1}{3}.$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Resolvendo o sistema obtido temos:

$$x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = -1$$

Por fim obtemos a 1^a *coluna da matriz* A^{-1}.

Agora, temos que fazer o mesmo processo na segunda equação $Ax = I$*, onde* I *será o vetor da segunda coluna na matriz identidade.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolvendo o sistema obtido temos:

$$z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = \frac{1}{3}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Resolvendo o sistema obtido temos:

$$x_1 = -1, x_2 = -2, x_3 = 1.$$

Assim, obtemos a 2^a *coluna da matriz* A^{-1}

Agora, temos que fazer o mesmo processo na terceira equação $Ax = I$*, onde* I *será o vetor da terceira coluna na matriz identidade.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Resolvendo o sistema obtido temos:

$$z_1 = 0, z_2 = 0, z_3 = 1.$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Resolvendo o sistema obtido temos:

$$x_1 = -5, x_2 = -7, x_3 = 3.$$

Por fim obtemos a 3^a *coluna da matriz* A^{-1} *e a matriz inversa de* A *é:*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 3 & -2 & -7 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta obra, apresentamos uma abordagem para os assuntos matrizes, vetores e sistemas lineares, com o intuito de apresentar formas de resolver sistemas lineares, que são importantes nas mais diversas áreas do conhecimento. Para isso, foi trabalhada a formalização dos conceitos envolvidos e apresentadas de algumas demonstrações dos resultados abordados. Por fim, apresentamos o tópico Fatoração LU, o qual também é usado para resolver sistemas. Como foi mencionado na introdução deste trabalho, a resolução de sistemas via fatoração LU pode ser vantajosa do ponto de vista computacional. Com os exemplos feitos, ficou claro que a partir da fatoração LU da matriz A a resolução do sistema $Ax = b$, é mais rápido e consiste em resolver os dois sistemas $Ly = b$ e $Ux = s$, onde s é solução de $Ly = b$. Porém, para obter a fatoração LU da matriz A devemos aplicar a eliminação de Gauss na matriz A (não na matriz ampliada $(A|b)$). Com isso, o custo computacional para obter uma fatoração LU e depois resolver os dois sistemas pode ser maior do que aplicar o método de Gauss diretamente na matriz ampliada $(A|b)$ para resolver o sistema. Contudo, existem situações em que é necessário resolver vários sistemas $Ax = b$ que possuem a mesma matriz de coeficientes A mas diferentes valores para o vetor b. Neste caso, em geral, é mais rápido obter a fatoração LU de A e resolver os dois sistemas mencionados acima para b do que fazer a eliminação de Gauss para A e repetir as operações deste processo para cada b, que é o caso da matriz inversa.

Referências Bibliográficas

[1] ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Álgebra Linear com Aplicações**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

[2] LIPSCHUTZ,Seymour;MARC Lars Lipson;**Teoria de Problemas de Álgebra Linear**,3 e.d. Bookman , Porto Alegre, 2004.

[3] STRANG, Gilbert. **Álgebra Linear e Suas Aplicações:Tradução.** 4. ed. Brasil: Cengage Learning, 2010.

[4] HEFEZ, Abramo; DE SOUZA FERNANDEZ, Cecília. **Introdução à Álgebra Linear.** IMPA: PROFMAT-SBM, 2010.

[5] FALEIROS, C. Antônio.; **Curso de Álgebra Linear Aplicada**. cap 1- Santo André, São Paulo, 2009.

[6] Lay,David,C. LAY, **Álgebra Linear e Suas Aplicações** . 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999.

[7] LIPSCHUTZ, Seymour; LIPSON, Marc. **Álgebra Linear: Coleção Schaum.** 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

[8] Tavares, Agamenon H. C., **Usando a história da resolução de alguns problemas para conceitos: Sistemas Lineares, Determinantes e Matrizes.** Dissertação de Mestrado (PROFMAT)- UFRN, UFRN, Rio Grande do Norte, 2013.

[9] TREFETHEN, Lloyd N.; BAU, David. **Numerical linear algebra**, Philadelphia:Siam, 1997.

[10] Howard, Eves. **Introdução a História da Matemática**, 3.ed. Campinas-SP: Editora da UNICAMP, 2002.

Essa obra aborda os conceitos e resultados sobre sistemas lineares, passando pela teoria de matrizes e de vetores do R^n como base para um bom entendimento dos métodos abordados. Serão tratados aqui, as operações entre matrizes, entre vetores, suas propriedades, métodos para resolução de sistema via eliminação de Gauss e por fim apresentaremos a fatoração LU, a qual fornece uma outra forma de resolver sistemas que em algumas situações pode ser mais viável. Para tratar da fatoração LU, são necessários resultados, principalmente, da teoria de matrizes e vetores, os quais serão apresentados com suas devidas demonstrações no decorrer do texto.

Agência Brasileira do ISBN
ISBN 978-85-924158-0-8
9 788592 415808