

ALGORITMO DOS MORCEGOS MODIFICADO COM A MUTAÇÃO DE CAUCHY

**Izabele Vitória Oliveira Leite¹, Marcos Henrique Fernandes Marcone²,
Fábio Augusto Procópio Paiva³, José Alfredo Ferreira Costa⁴**

¹Discente do curso Técnico Integrado em Informática – IFRN. e-mail: izabele.vitoria@academico.ifrn.edu.br;

²Discente do curso Técnico Integrado em Informática – IFRN. e-mail: marcos.henrique@academico.ifrn.edu.br;

³Professor de Sistemas de Informação – IFRN. e-mail: fabio.procopio@ifrn.edu.br;

⁴Professor de Engenharia Elétrica – UFRN. e-mail: jafcosta@gmail.com

1 **RESUMO:** As meta-heurísticas são métodos que apresentam soluções aproximadas e
2 aceitáveis que podem ser utilizadas para resolver problemas complexos de otimização.
3 Algumas delas são bioinspiradas, isto é, baseiam-se no comportamento dos animais da
4 natureza, principalmente, aqueles que vivem em grupo. Um problema enfrentado por esses
5 algoritmos é a perda de diversidade, o que pode ocasionar a convergência prematura e reduzir
6 as chances de a solução global ser alcançada. Este trabalho propõe uma modificação no
7 algoritmo original dos morcegos por meio da utilização do operador de mutação de Cauchy, o
8 qual é aplicado sobre um morcego sorteado aleatoriamente. A modificação proposta tem
9 como objetivo preservar a diversidade do algoritmo. O desempenho do algoritmo original e o
10 do modificado foram avaliados usando quatro funções de referência, durante 30 execuções
11 independentes. Os experimentos computacionais consideraram uma população de morcegos
12 fixada em 30 e a variação da dimensionalidade do problema e da quantidade de avaliações da
13 função objetivo. Após os experimentos, alguns dados estatísticos foram apresentados para
14 evidenciar a superioridade do novo algoritmo proposto quando comparado ao original.

15 **Palavras-chave:** meta-heurística, algoritmo dos morcegos, ecolocalização, mutação.

16

MODIFIED BATS ALGORITHM WITH CAUCHY MUTATION

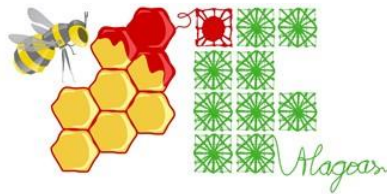
17

18
19 **ABSTRACT:** Metaheuristics are methods that present approximate and acceptable solutions
20 that can be used to solve complex optimization problems. Some of them are bio-inspired, i.e.,
21 they are based on behavior of animals in nature, especially, those that live in a group. A
22 problem faced by these algorithms is the loss of diversity, which can lead premature
23 convergence and reduce the chances of the global solution be achieved. This paper proposes a
24 modification into original bat algorithm using the Cauchy mutation operator, which is applied
25 to a bat ruffled randomly. The proposed modification aims to preserve the diversity of the
26 algorithm. The original algorithm and the modified algorithm were evaluated using four
27 benchmark functions, during 30 independent runs. The computational experiments considered
28 a population with 30 bats, varying the dimensionality of the problem and the evaluations
29 number of the fitness function. After the experiments, a few statistical data were presented to
30 highlight the superiority of the new proposed algorithm when it is compared to the original
31 algorithm.

32 **KEYWORDS:** metaheuristic, bat algorithm, echolocation, mutation.

33

34



35 **INTRODUÇÃO**

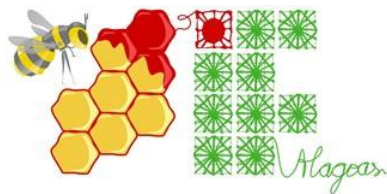
36 O processo de otimização é a tarefa de encontrar as melhores soluções para um
37 determinado problema. As técnicas de otimização, em geral, são usadas quando não há
38 soluções simples e diretamente calculáveis para os problemas (VIALI, 2011). Dependendo do
39 problema a ser otimizado, ele pode ser resolvido por métodos exatos (heurísticos) ou
40 aproximados (meta-heurísticos). Segundo Glover e Kochenberger (2003), as meta-heurísticas
41 são métodos de solução que coordenam procedimentos de busca locais, com estratégias de
42 alto nível, criando um processo capaz de escapar de mínimos locais e realizar uma busca
43 robusta no espaço de soluções de um problema.

44 Problemas de otimização são comuns em diversas áreas de aplicação do mundo real.
45 Nesse contexto, várias técnicas bioinspiradas baseadas na inteligência de enxames têm sido
46 aplicadas em diversas áreas como Sistemas de Potência (YOSHIDA *et al.*, 2000),
47 Telecomunicações (KAPLAN; MCCARTHY, 2012), Roteamento de Veículos (BELL;
48 MCMULLEN, 2004), Planejamento de Robôs (AYALA; MOLIN; COELHO, 2009) e em
49 outras áreas.

50 A Inteligência de Enxames é um conjunto de técnicas baseadas no comportamento
51 coletivo de sistemas auto-organizados, distribuídos, autônomos, flexíveis e dinâmicos. Esses
52 sistemas são formados por uma população de agentes computacionais simples que possuem a
53 capacidade de perceber e modificar o seu ambiente (SERAPIÃO, 2009). A inteligência de
54 enxames implementa a coletividade de grupos baseados no comportamento de animais como
55 vespas, peixes, grilos, cupins, borboletas, pássaros, formigas, vagalumes, morcegos e outros.

56 O Algoritmo dos Morcegos (*Bat Algorithm*) é uma meta-heurística desenvolvida por
57 Yang (2010) e é inspirado na ecolocalização dos morcegos durante o voo. O *Bat Algorithm*
58 (BA) tem sido usado para resolver diversos problemas de otimização do mundo real, como
59 processamento de imagens (ZHANG; WANG, 2012), classificação de dados (MISHRA;
60 SHAW; MISHRA, 2012), redes neurais artificiais (REDDY; MANOJ, 2012) e outros.

61 Um problema comumente enfrentado pelos algoritmos meta-heurísticos é conhecido
62 como convergência prematura. Ela ocorre quando o algoritmo fica “preso” em ótimos locais
63 e, devido a sua baixa diversidade, ele para de buscar a solução ótima global. Tal problema
64 pode impedir que o algoritmo obtenha bons resultados no espaço de busca tornando-o
65 ineficiente.



76 Neste artigo, uma modificação no BA original é proposta, a qual é implementada
77 usando o operador de mutação de Cauchy, o qual é aplicado sobre um morcego sorteado
78 aleatoriamente. Para avaliar o desempenho do novo algoritmo, vários experimentos
79 computacionais foram realizados no processo de otimização de 4 funções de referência. Ao
80 fim dos experimentos, observou-se a superioridade do BA modificado quando comparado
81 com o BA original no que diz respeito à qualidade e à estabilidade das soluções encontradas.
82 O trabalho está organizado como segue. Na Seção Materiais e Métodos, são apresentados o
83 algoritmo BA original e o BA modificado. Na Seção Resultados e Discussões, os
84 experimentos computacionais e os resultados obtidos são apresentados. E, por fim, na Seção
85 Conclusões, são apresentadas as considerações finais e as intenções de trabalhos futuros.

76

77 **MATERIAIS E MÉTODOS**

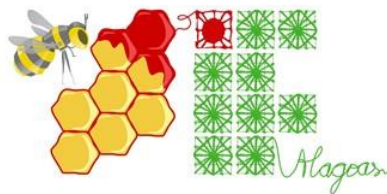
78 Na primeira subseção, é apresentada uma meta-heurística conhecida como algoritmo
79 dos morcegos. Na subseção seguinte, é apresentado um novo algoritmo dos morcegos que
80 utiliza o operador de mutação de Cauchy.

81 **Algoritmo dos Morcegos**

82 O BA é uma meta-heurística proposta por Yang (2010) que se baseia na ecolocalização,
83 a qual é utilizada pelos morcegos para detectar suas presas e desviar de obstáculos. Após a
84 emissão de uma onda ultrassônica, o morcego calcula o tempo de retorno do obstáculo até ele.
85 A partir da diferença entre o tempo de emissão e reflexão da onda e a variação da amplitude
86 do eco, o morcego se localiza naquele instante de tempo (ALTRINGHAM, 2011).

87 No algoritmo proposto por Yang (2010), os morcegos voam aleatoriamente com uma
88 velocidade v_i , em uma posição x_i , com uma frequência fixa f_{min} , variando o comprimento de
89 onda λ e amplitude A^0 para encontrar sua presa. De forma automática, os morcegos ajustam o
90 comprimento de onda (ou frequência) de seus pulsos emitidos e também ajustam a taxa de
91 emissão $r \in [0, 1]$, dependendo da proximidade do seu alvo. A amplitude pode variar de
92 várias formas e, no algoritmo, assume-se que ela varia de um valor alto A^0 (positivo) a um
93 valor constante mínimo A_{min} . O Algoritmo 01 apresenta o pseudocódigo do algoritmo dos
94 morcegos.

95 O algoritmo é iniciado com a geração aleatória da população com 30 morcegos (linha
96 01). Na linha 02, a frequência inicial (f_i) é determinada para a posição (x_i). A taxa de pulso
97 (r_i) e a amplitude (A_i) são inicializadas (linha 03). O laço representa a evolução dos



98 morcegos ao longo do tempo (linhas 04-16). Nesse laço, novas soluções são estabelecidas e as
99 frequências, velocidades e posições são atualizadas. Na linha 06, a taxa de emissão de pulso é
100 comparada com um vetor aleatório $rand$, que varia entre 0 e 1. Quando r_i é menor que $rand$,
101 novas soluções são geradas nas proximidades da melhor solução encontrada (linha 08). Na
102 linha 10, é criada uma solução aleatória e a linha 11 contém as condições para que essa
103 solução seja admitida. Caso as condições sejam obedecidas, as novas soluções serão aceitas
104 (linha 12) e a taxa r_i aumentará enquanto a amplitude A_i diminuirá (linha 13). Ao fim do laço,
105 os morcegos são classificados de acordo com as melhores soluções ótimas.
106

```
01: Gere a população inicial de morcegos  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) e  $v_i$ 
02: Determine a frequência de pulsos  $f_i$  em  $x_i$ 
03: Inicialize a taxa de pulso  $r_i$  e a amplitude  $A_i$ 
04: enquanto critério de convergência não for atingido faça
05:   Gere novas soluções ajustando a frequência e atualize as velocidades e posições
06:   se ( $rand > r_i$ ) então
07:     Selecione uma solução dentre as melhores soluções
08:     Gere uma solução local próxima da melhor solução selecionada
09:   fimse
10:   Gere uma nova solução aleatoriamente
11:   se ( $rand < A_i$ ) e ( $f(x_i) < f(x^*)$ ) então
12:     Aceite as novas soluções
13:     Aumente  $r_i$  e diminua  $A_i$ 
14:   fimse
15:   Classifique os morcegos e encontre o melhor deles
16: fim enquanto
```

107

108

Algoritmo 01. Pseudocódigo do BA original. IFRN, 2016.

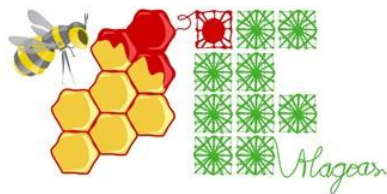
109

110 **Algoritmo Modificado dos Morcegos usando a Mutação de Cauchy**

111 Os operadores de mutação são capazes de introduzir novas partículas a um enxame. Isso
112 pode ser implementado aplicando uma variação sobre um determinado membro do enxame e,
113 assim, evitar a estagnação do algoritmo em regiões que apresentam ótimos locais
114 (DUMITRESCU *et al*, 2000)

115 Este trabalho propõe uma modificação no BA original. A modificação consiste na
116 utilização do operador de mutação de Cauchy, o qual pode ser usado, a cada iteração, para
117 aumentar a diversidade do enxame e evitar que o algoritmo fique “preso” em ótimos locais.

118 O Algoritmo 02 apresenta o pseudocódigo do algoritmo dos morcegos modificado.
119 Nesse novo algoritmo, o operador de mutação de Cauchy seleciona um morcego



120 aleatoriamente que, para ser mutado, está sujeito a uma determinada taxa de probabilidade,
121 conforme linha 15. Quando o morcego é sorteado, todas as suas dimensões sofrem mutação
122 de acordo com a taxa de probabilidade $1/D$, onde D é o número de dimensões do problema.
123 Então, cada uma das D dimensões é atualizada de acordo com a Equação 1:

$$\text{mutado}(x_i) = x_i + \text{cauchy}(a), \quad (1)$$

124 onde x_i é o morcego sobre o qual será aplicada a mutação, a é um parâmetro de escala que
125 define a forma da distribuição gerada. O valor de a foi definido como sendo 0,2, de acordo
126 com Stacey, Jancic e Grundy (2003).

127

```
01: Gere a população inicial de morcegos  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) e  $v_i$ 
02: Determine a frequência de pulsos  $f_i$  em  $x_i$ 
03: Inicialize a taxa de pulso  $r_i$  e a amplitude  $A_i$ 
04: enquanto critério de convergência não for atingido faca
05:   Gere novas soluções ajustando a frequência e atualize as velocidades e posições
06:   se ( $\text{rand} > r_i$ ) entao
07:     Selecione uma solução dentre as melhores soluções
08:     Gere uma solução local próxima da melhor solução selecionada
09:   fimse
10:   Gere uma nova solução aleatoriamente
11:   se ( $\text{rand} < A_i$ ) e ( $f(x_i) < f(x^*)$ ) entao
12:     Aceite as novas soluções
13:     Aumente  $r_i$  e diminua  $A_i$ 
14:   fimse
15:   Aplique mutação sobre o morcego selecionado aleatoriamente
16:   Classifique os morcegos e encontre o melhor deles
17: fimenquanto
```

128

129

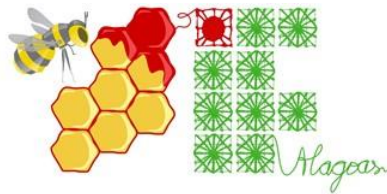
Algoritmo 02. Pseudocódigo do BA modificado. IFRN, 2016.

130

131 RESULTADOS E DISCUSSÕES

132 Os experimentos computacionais foram executados em um computador que utiliza
133 processador Intel Core i7 com 2,5 GHz de frequência, 8 Gb de memória RAM e sistema
134 operacional Windows 10 Pro, 64 bits. Os algoritmos BA original e BA modificado com a
135 mutação de Cauchy foram implementados na linguagem de programação Matlab R2013a e
136 não foram utilizadas técnicas de processamento paralelo.

137 A fim de avaliar o desempenho dos algoritmos, foram escolhidas quatro funções de
138 referência, bastante utilizadas e conhecidas na literatura de algoritmos meta-heurísticos. São
139 elas: Schumer Steiglitz, Rosenbrock, Griewank e Zakharov. Todas são aplicadas a problemas



140 de minimização. As funções Schumer Steiglitz e Rosenbrock são unimodais, ao passo que
 141 Griewank e Zakharov são multimodais com vários mínimos locais. Essas funções têm sido
 142 aplicadas em vários estudos (DEB, 2011; AMOUZGAR, 2012; PAIVA; COSTA; SILVA,
 143 2015) e são descritas abaixo:

- 144 • Função Schumer Steiglitz – é uma função que não possui mínimos locais, apenas o
 145 mínimo global:

$$146 \quad f_1(x) = \sum_{i=1}^d x_i^4 \quad (2)$$

- 147 • Função Rosenbrock – possui o mínimo global em um vale parabólico:

$$148 \quad f_2(x) = \sum_{i=1}^{d-1} [100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (x_i - 1)^2] \quad (3)$$

- 149 • Função Griewank – possui vários mínimos locais regularmente distribuídos:

$$150 \quad f_3(x) = \frac{1}{400} \sum_{i=1}^d x_i^2 - \prod \cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right) + 1 \quad (4)$$

- 151 • Função Zakharov – é uma função unimodal simples que possui forma de placa:

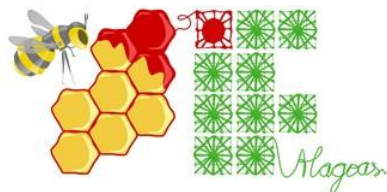
$$152 \quad f_4(x) = \sum_{i=1}^d x_i^2 + (\sum_{i=1}^d 0.5ix_i)^2 + (\sum_{i=1}^d 0.5ix_i)^4 \quad (5)$$

153
 154 Para cada uma das funções listadas acima, são apresentadas as fronteiras do espaço de
 155 busca, a região de inicialização do enxame, a solução global e a solução ótima, conforme
 156 Tabela 1.

157
 158 **Tabela 1.** Características das funções de referência. IFRN, 2016.

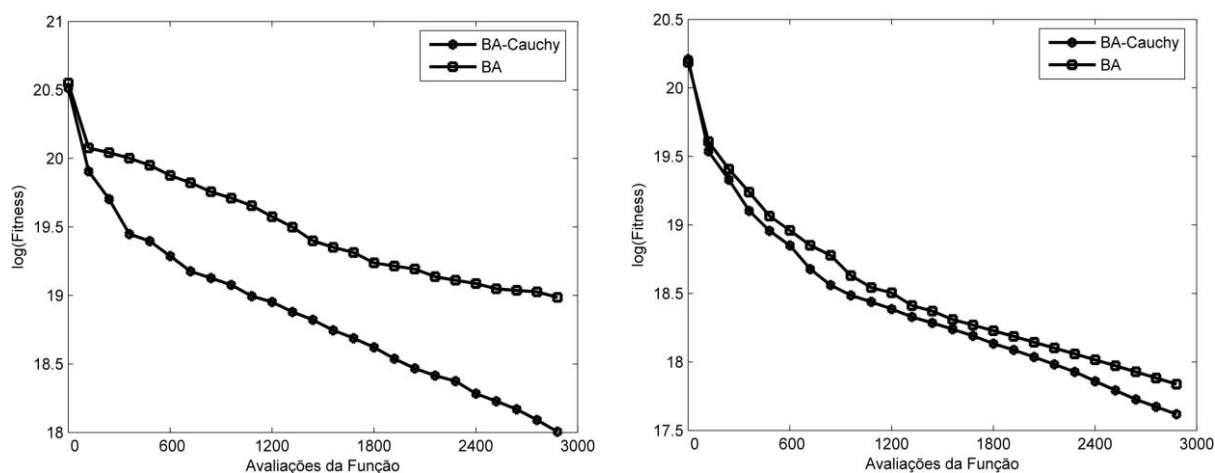
Função	Espaço de busca	Faixa de inicialização	Solução global	Solução ótima
f_1	$-100 \leq x_i \leq 100$	$50 \leq x_i \leq 100$	$f(x^*) = 0$	$x^* = (0, \dots, 0)$
f_2	$-30 \leq x_i \leq 30$	$15 \leq x_i \leq 30$	$f(x^*) = 0$	$x^* = (0, \dots, 0)$
f_3	$-600 \leq x_i \leq 600$	$300 \leq x_i \leq 600$	$f(x^*) = 0$	$x^* = (0, \dots, 0)$
f_4	$-5 \leq x_i \leq 10$	$5 \leq x_i \leq 10$	$f(x^*) = 0$	$x^* = (0, \dots, 0)$

159
 160 Os valores definidos para os parâmetros utilizados nos experimentos foram os mesmos
 161 valores padrões usados por Yang (2010): amplitude (A) definida no intervalo $[1, 2]$; taxa de
 162 pulso (r_i) definida dentro do intervalo $[0, 1]$; frequência mínima (f_{min}) igual 0 e; frequência
 163 máxima (f_{max}) igual 2.



164 As Figuras 1a, 1b, 2a e 2b apresentam o comportamento dos algoritmos para as quatro
165 funções de referência escolhidas, respectivamente, Schumer Steiglitz, Rosenbrock, Griewank,
166 Zakharov. Na otimização da função Schumer Steiglitz, Figura 1a, não há estagnação em
167 nenhum dos dois algoritmos avaliados, no entanto é evidente que a velocidade de
168 convergência do BA modificado supera a do BA original. Já na Figura 1b, função
169 Rosenbrock, observa-se que os resultados dos dois algoritmos estão mais aproximados que os
170 da função Schumer Steiglitz, porém o BA modificado também se destaca por obter soluções
171 mais satisfatórias com uma maior velocidade de convergência.

172



(a) Função Schumer Steiglitz

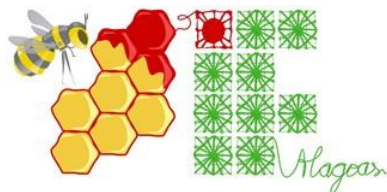
(b) Função Rosenbrock

Figura 01. Comportamento do BA e do BA modificado, durante 3000 iterações, em 30 dimensões. IFRN,2016.

173

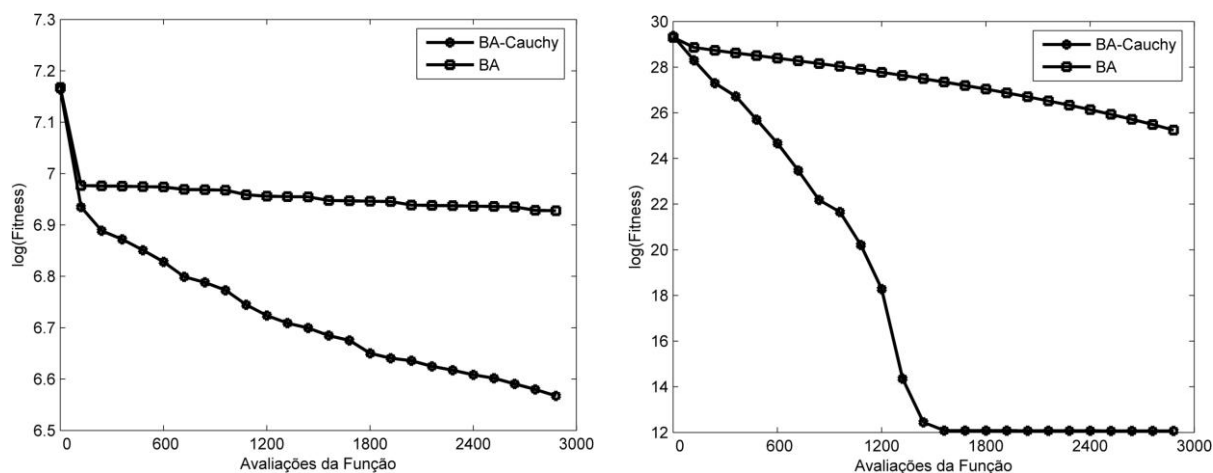
174 Na Figura 2a, função Griewank, o BA original novamente apresenta um desempenho
175 inferior ao do BA modificado. Durante todo o processo de busca, é observado que o algoritmo
176 apresenta pequenas melhorias significativas na função objetivo. Por outro lado, o BA
177 modificado apresenta um comportamento de convergência ativo, mesmo próximo da iteração
178 de número 3.000. Na Figura 2b, função Zakharov, embora o BA original não tenha estagnado
179 nas 3.000 iterações, a sua velocidade de convergência é lenta quando comparada com a do BA
180 modificado. Embora o BA modificado tenha estagnado, aproximadamente, na iteração 1.600,
181 a média das melhores soluções encontradas supera a média do BA original.

182 A Tabela 2 mostra os resultados dos experimentos computacionais realizados. Nas
183 funções avaliadas, os valores médios das soluções encontradas pelo algoritmo BA modificado
184 são melhores que os do BA original. Em relação às melhores e às piores soluções



185 encontradas, o algoritmo BA modificado foi superior ao BA original em todas as funções, ou
 186 seja, os valores são sempre menores e mais próximos da solução global. Em todos os
 187 experimentos realizados, as médias do BA modificado obtiveram valores mais satisfatórios
 188 que os do algoritmo BA original e, assim, a superioridade do algoritmo proposto é novamente
 189 comprovada. Em relação ao desvio padrão, que mostra a variação existente em relação à
 190 média, o algoritmo BA original obteve valores melhores nas funções Schumer Steiglitz e
 191 Rosenbrock, já o BA modificado conseguiu os resultados superiores nas funções Griewank e
 192 Zakharov.

193



(a) Função Griewank

(b) Função Zakharov

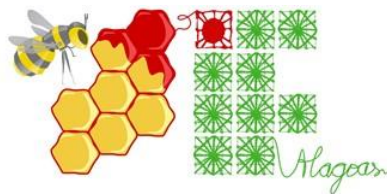
Figura 02. Comportamento do BA e do BA modificado, durante 3000 iterações, em 30 dimensões. IFRN,2016.

194

195

Tabela 2. Resultados dos algoritmos nas funções de referência avaliadas. IFRN, 2016.

Fun	Dim	Iter	BA original			BA modificado		
			Média (Desvio)	Melhor	Pior	Média (Desvio)	Melhor	Pior
f_1	10	1000	5,38E+07 (6,41E+05)	5,33E+07	5,61E+07	1,73E+06 (1,85E+06)	9,15E+04	7,21E+06
	20	2000	1,06E+08 (5,49E+06)	1,00E+08	1,17E+08	2,26E+07 (1,14E+07)	5,18E+06	5,66E+07
	30	3000	1,73E+08 (6,36E+07)	1,43E+08	5,07E+08	6,16E+07 (2,36E+07)	2,91E+07	1,17E+08
f_2	10	1000	2,16E+07 (5,12E+05)	2,10E+07	2,41E+07	2,14E+06 (1,76E+06)	8,05E+04	7,40E+06
	20	2000	3,75E+07 (1,66E+06)	3,54E+07	4,17E+07	2,08E+07 (8,58E+06)	4,83E+06	4,01E+07
	30	3000	5,33E+07 (7,90E+06)	4,55E+07	7,74E+07	4,16E+07 (1,06E+07)	2,26E+07	7,22E+07



	10	1000	2,65E+02 (4,47E+01)	2,23E+02	3,57E+02	1,77E+02 (3,94E+01)	1,22E+02	3,26E+02
f_3	20	2000	6,38E+02 (8,02E+01)	5,09E+02	7,77E+02	4,07E+02 (6,15E+01)	3,13E+02	6,09E+02
	30	3000	1,01E+03 (1,15E+02)	7,33E+02	1,19E+03	7,02E+02 (1,05E+02)	4,93E+02	9,69E+02
	10	1000	6,91E+07 (3,21E+07)	3,75E+07	1,53E+08	2,46E+03 (5,33E+03)	2,22E+02	2,95E+04
f_4	20	2000	7,57E+09 (3,85E+09)	2,23E+09	1,92E+10	1,58E+04 (2,45E+04)	5,78E+02	1,16E+05
	30	3000	7,07E+10 (3,07E+10)	1,93E+10	1,70E+11	1,72E+05 (8,31E+05)	2,63E+03	4,57E+06

196

197 CONCLUSÕES

198 Este trabalho propôs uma modificação na meta-heurística baseada na ecolocalização
199 dos morcegos a fim de reduzir o processo de convergência prematura, caracterizado pela
200 convergência do enxame para pontos de ótimos locais. O algoritmo proposto consiste na
201 combinação do BA original com o operador de mutação de Cauchy.

202 O desempenho do BA original e BA modificado foi comparado por meio de vários
203 experimentos computacionais, realizados utilizando quatro funções de referência: Schumer
204 Steiglitz, Rosenbrock, Griewank e Zakharov. Após os experimentos, observou-se que o
205 algoritmo BA modificado obteve resultados superiores ao BA original, o que mostra que a
206 mutação preservou a diversidade do algoritmo.

207 Como trabalhos futuros, pretende-se combinar o operador de Cauchy com uma outra
208 técnica conhecida como Aprendizagem Baseada em Oposição. Para avaliar a robustez dessa
209 combinação, ela será implementada como um mecanismo de geração de diversidade em uma
210 outra meta-heurística, a qual é baseada no comportamento dos vaga-lumes e chamada de
211 *Firefly Algorithm*.

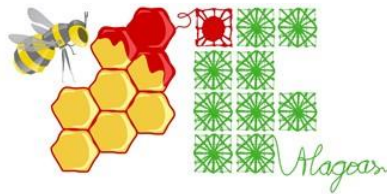
212

213 REFERÊNCIAS

214 AYALA; MOLIN; COELHO. Otimização multiobjetivo usando enxame de partículas de
215 controladores multivariáveis para uma aplicação em robótica. **IX SIMPÓSIO BRASILEIRO**
216 **DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE (SBAI)**, [sn], p. 1-6, 2009.

217

218 BELL, E.; MCMULLEN, R. Ant colony optimization techniques for the vehicle routing
219 problem. **Advanced Engineering Informatics**, v. 18, n. 1, p. 41-48, 2004.



- 220
221 DUMITRESCU, Dumitru *et al.* **Evolutionary computation**. CRC press, 2000.
222
223 GLOVER, F. e KOCHENBERGER, G. A. (2003). **Handbook of Metaheuristics**. Kluwer
224 Academic Publishers, Boston.
225
226 KAPLAN, D.; MCCARTHY, F. **Multi-protocol telecommunications routing optimization**.
227 U.S. Patent n. 6,016,307, 18 jan. 2000.
228
229 SERAPIÃO, A. Fundamentos de otimização por inteligência de enxames: uma visão
230 geral. **Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica**, v. 20, n. 3, p.
231 271-304, 2009.
232
233 STACEY, A; JANCIC, M; GRUNDY, I. Particle swarm optimization with mutation.
234 In: **Evolutionary Computation, 2003. CEC'03. The 2003 Congress on**. IEEE, 2003. p.
235 1425-1430.
236
237 VIALI, L. **Métodos quantitativos: estatística e matemática aplicadas**. 2011.
238
239 YANG, Xin-She. Bat algorithm for multi-objective optimisation. **International Journal of**
240 **Bio-Inspired Computation**, v. 3, n. 5, p. 267-274, 2011.
241
242 YOSHIDA *et al.* A particle swarm optimization for reactive power and voltage control
243 considering voltage security assessment. **IEEE Transactions on power systems**, v. 15, n. 4,
244 p. 1232-1239, 2000.