UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS NATURAIS E MATEMÁTICA

UM ESTUDO SOBRE O ENSINO-APRENDIZAGEM DAS DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

ENNE KAROL VENANCIO DE SOUSA

NATAL

2010

ENNE KAROL VENANCIO DE SOUSA

UM ESTUDO SOBRE O ENSINO-APRENDIZAGEM DAS DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como requisito parcial para a obtenção do título de mestre.

Orientador: Dr. John Andrew Fossa.
Co-orientadora: Dra. Giselle Costa de Sousa

NATAL
2010

Catalogação da Publicação na Fonte. UFRN / SISBI / Biblioteca Setorial
Especializada do Centro de Ciências Exatas e da Terra – CCET.

Sousa, Enne Karol Venancio de.
Um estudo sobre o ensino-aprendizagem das demonstrações matemáticas / Enne Karol Venancio de Sousa. – Natal, RN, 2010.
133 f. : il.

Orientador : Prof. Dr. John Andrew Fossa.

Co-Orientadora: Profª. Drª. Giselle Costa de Sousa

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ciências Exatas e da Terra. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática.

1. Educação matemática – Dissertação. 2. Matemática – Métodos de ensino – Dissertação. 3. Matemática – Ensino e aprendizagem. 4. Ensino por módulos – Dissertação. I. Fossa, John Andrew. II. Título.

ENNE KAROL VENANCIO DE SOUSA

UM ESTUDO SOBRE O ENSINO-APRENDIZAGEM DAS DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

BANCA EXAMINADORA

Dr. John Andrew Fossa (UFRN) – Orientador

Dra. Giselle Costa de Sousa – Co-orientadora

Dra. Rogéria Gaudêncio do Rêgo (UFPB) / (externo)

Dra. Claudianny Amorim Noronha (UFRN) / (interno)

Dra. Bernadete Barbosa Morey (UFRN) - Suplente

Aprovada em: / / 2010

Este trabalho é dedicado com muito amor a minha irmã Caroline Venancio de Sousa, que contribuiu de forma bastante decisiva na escolha pela minha profissão de educadora.

AGRADECIMENTOS

Como costumamos dizer na Comunidade Católica Shalom, gratidão é a linguagem das almas esposas de Jesus, e é com o coração grato que quero escrever essas palavras, limitadas ao que se passa no meu coração neste momento...

Quero começar rendendo minha Ação de Graças à Trindade Santa. Ao Pai, por sua ação criadora e fonte de eterna Sabedoria; ao Filho, por sua vida doada que me faz sempre sair de mim e me doar à humanidade, como uma educadora incansável. Ao Espírito Santo, pela força que me sustenta todos os dias e pela infinidade de carismas que faz surgir, tornando-me assim, a partir desses carismas e dons, expressão do amor de Deus à humanidade, a fim de contribuir para um mundo um pouquinho melhor.

Aos meus avós, em especial a Dona Teodora, educadora fiel de uma geração batalhadora e perseverante. Valeu demais o exemplo e o amor dedicado à família, por vocês estou aqui...

Aos meus pais, Hiran e Lourdes, por me ensinarem os primeiros passos, por terem sido a minha primeira escola e nunca terem se cansado de acreditar e investir em mim. Obrigada também, porque foi por vocês, para dar-lhes uma vida mais digna, que eu lutei tanto para estudar e chegar até aqui. As palavras, sem dúvida, são insuficientes: Amo vocês, muito obrigada!

Aos meus irmãos, eu agradeço pela força, encorajamento e amor. Espero poder ser para vocês, como irmã mais velha, exemplo de que vale a pena ralar por um ideal. Para vocês eu quero dizer que a conquista tem um sabor que torna muito pequenos todos os desafios encontrados pelo caminho.

A minha família Shalom, quero agradecer por me motivar a estudar e ser sinal do Cristo Ressuscitado no meio secular. Agradeço, em especial, aos formadores que tenho hoje, Mazé e Socorro, e também àqueles que já foram meus formadores: Lili, Danielle Borges, Valéria, Gizelly e Patrícia. Agradeço à Comunidade Shalom de Teresina por ter me enviado a esta terra de missão e também à Comunidade de Natal que me acolheu e foi para mim sustento quando a ausência da minha família e dos meus amigos me fez sofrer. Agradeço a todos, mas, em especial, a Jeovana, Dôra, Sônia, Juliana, Regina, Luciana, Antônia, Sheilinha, Roane e Rogério.

Aos amigos, tantos amigos, que me ajudaram a chegar até aqui e tantas vezes

alimentaram meus sonhos, com seu entusiasmo e orações: Sônia, Rita, Danielle Alexandrino, Adriana, Luis Gonzaga, Luiz Carlos, Sandra Beatriz, Juçara Borges, Clefra, Liliane Campos, Mauro César, Gizelly, Danielle Osório, Valéria, Carolina Caldas, Conceição, Nathaly, Séfora, Cecília, Shinayde, e também aos que me são caros e não citei. Valeu a pena!!!

Aos amigos do programa de mestrado, aos quais agradeço de forma muito cara a Georgeane, Maroni, Frank e Edigites. Valeu aí pela força!!!

Aos amigos do Colégio Diocesano Náldia Paula, Edmar, José Carlos, Pedro Aurélio, Meneses, Padre João, entre outros, obrigada por tudo!

Aos professores de Matemática que passaram pela minha vida e deixaram marcas: Lita, Júnior, Fabiano, meu querido professor Vicente, Barnabé, Gilvan, Jurandy, Severino Barros Bernadete, Claudianny e Iran. Obrigada pelo desejo de mudar o mundo pela educação e compartilharem comigo desse sonho.

Aos meus orientadores: Giselle, pela paciência, dedicação e cuidado, mas principalmente por trilhar comigo esse caminho até o fim. Ao meu querido professor Fossa, exemplo de esforço, dedicação e cuidado, quero agradecer de forma bastante especial pela sua paternidade e carinho, nunca foi tão fácil ser tão cobrada, pois eu sei que tudo foi para tirar o melhor de mim. Contem sempre com minhas orações por suas vidas, é a melhor forma que tenho de contribuir.

Aos meus alunos: os que já foram, os que são e os que serão, foi para melhor educá-los que vim até aqui e que daqui desejo ir mais adiante, para ser cada vez mais um testemunho de amor pela educação. Obrigada!

Aos amigos do IFRN, a todos, mas, de forma carinhosa a Clauber, Valeska, Samira e Sílvia que um pouco mais de perto acompanharam meu percurso. Ufa! Deu certo! Obrigada por tudo!

Por fim e mais uma vez, eu agradeço a Sandrinha que desde o início vem me ajudando com tantas traduções, correções, etc e tal, sendo mais uma co-orientadora desse trabalho. Obrigada! Não tenho ouro nem prata, mas te ofereço a minha pobre oração em gratidão a todo seu empenho pela realização deste meu sonho.

Voar é para os pássaros, os sonhadores e as nuvens. Mas, quando os sonhadores assumem a posição de professores e conseguem transmitir suas ideias e conceitos a ponto de transformá-los em movimentos conscientes, seus alunos sentem-se pássaros. Seus espíritos chegam às nuvens.

Angel Vianna

RESUMO

As demonstrações são ferramentas fundamentais para a Matemática e, como tal, são frequentemente usados por matemáticos, professores de matemática e estudantes. De fato, as demonstrações fazem parte de todo o contexto de ensino de Matemática, porque na Matemática consideramos algo como verdadeiro quando isso pode ser demonstrado. Diferentemente dos outros campos do conhecimento que utilizam a observação e a experimentação para validar suas verdades. A seguinte dissertação apresenta um estudo sobre o ensino e a aprendizagem das demonstrações em Matemática, descrevendo um Módulo de Ensino aplicado em um curso de Teoria dos Números oferecido pelo Departamento de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte para alunos do Ensino Superior. A dissertação teve como objetivo propor e testar um Módulo de Ensino que pudesse servir de modelo para o ensino das demonstrações matemáticas. O Módulo de Ensino consistiu nas seguintes cinco etapas: aplicação de uma entrevista para determinar o perfil dos alunos e seus conhecimentos prévios sobre linguagem matemática e técnicas de demonstração; análise de uma série de diálogos utilizando argumentos na linguagem quotidiana; investigação e análise da estrutura de algumas técnicas importantes de demonstrações; avaliação escrita e, finalmente, uma entrevista para comprovar os principais resultados do Módulo de Ensino. A análise dos dados obtidos por meio das atividades de sala de aula, avaliações escritas e entrevistas nos levaram à conclusão de que havia uma quantidade significativa de assimilação do assunto a nível de compreensão relacional, (SKEMP, 1980). Estes instrumentos verificaram que os alunos obtiveram uma melhora considerável no uso da linguagem matemática e das técnicas de demonstração apresentadas. Assim, as evidencias levam à conclusão que a proposta do Módulo de Ensino é um meio eficaz para o ensino/aprendizagem das demonstrações matemáticas e, como tal, fornece um guia metodológico que pode lançar as bases para uma nova abordagem a esse importante tema.

Palavras-chave: Linguagem Matemática. Ensino de demonstrações matemáticas. Módulo de Ensino.

ABSTRACT

Demonstrations are fundamental instruments for Mathematics and, as such, are frequently used by mathematicians, math teachers and students. In fact, demonstrations are part of every Mathematics teaching environment, because Mathematics considers something true when it can be demonstrated. This is in contrast to other fields of knowledge that employ observation and experimentation to validate truth. This dissertation presents a study of the teaching and learning of demonstrations in Mathematics, describing a Teaching Module applied in a course on the Theory of Numbers offered by the Mathematics Department of the Universidade Federal do Rio Grande do Norte for mathematics majors. The objective of the dissertation was to propose and test a Teaching Module that can serve as a model for teaching demonstrations. The Teaching Module consisted of the following five steps: the application of a survey to determine the students' profiles and their previous knowledge of mathematical language and techniques of demonstration; the analysis of a series of dialogues containing arguments in everyday language; the investigation and analysis of the structure of some important techniques of demonstration; a written assessment; and, finally, an interview to further verify the principal results of the Teaching Module. The analysis of the data obtained though the classroom activities, written assessments and interviews led to the conclusion that there was a significant amount of assimilation of the issue at the level of relational understanding, (SKEMP, 1980). These instruments verified that the students attained considerable improvement in their use of mathematical language and of the techniques of demonstration presented. Thus, the evidence supports the conclusion that the proposed Teaching Module is an effective means for the teaching/learning of mathematical demonstration and, as such, provides a methodological guide which may lay the foundations for a new approach to this important subject.

Key-words: Mathematical Language. Teaching Mathematical Demonstrations. Teaching Module.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

As demonstrações matemáticas são ferramentas muito utilizadas pelo estudioso de Matemática. De fato, estas fazem parte de todo o contexto da produção de conhecimento de Matemática, pois, diferentemente de outras áreas do conhecimento que utilizam observação e experimentação para provar suas verdades, a Matemática concebe algo como verdade, quando isso pode ser demonstrado.

É importante ressaltar que, embora o uso de demonstrações tenha esse caráter essencial na Matemática, é bastante comum encontrarmos alunos e professores com dificuldades tanto em relação à compreensão do significado de uma demonstração quanto à sua utilização. Entendemos que grande parte dessa dificuldade, além de se dar pela falta de maior ênfase em sua compreensão durante a formação inicial, foi também consequência das mudanças causadas pelo Movimento da Matemática Moderna, quando houve uma forte valorização do desenvolvimento dedutivo e, em seguida, após seu fracasso, um abandono quase que total do raciocínio dedutivo[1] e das demonstrações matemáticas.

Sobre as mudanças no ensino e as consequências da Matemática Moderna, Nasser e Tinoco (2003, p. 1) afirmam que:

> Depois de séculos de um ensino tradicional e estático, a abordagem adotada no ensino de matemática tem sofrido mudanças nas últimas quatro décadas. Essas modificações passaram pela "matemática moderna", que valorizava um enfoque demasiadamente estruturalista, nada natural para os alunos da escola básica. Após o abandono da matemática moderna, com o movimento de retorno às bases matemáticas o que se viu foi o abandono total do raciocínio dedutivo e das demonstrações. Embora "desenvolver o raciocínio lógico" seja um dos objetivos incluídos dos planejamentos de quase todos os professores de matemática, os alunos foram passando pela escola sem que fossem expostos a atividades que desenvolvessem seu raciocínio lógico ou que os preparasse para o domínio do processo dedutivo.

O desenvolvimento desse raciocínio lógico não está somente no planejamento dos mais diversos professores, mas é também apontado como uma necessidade dos currículos de Matemática, não só no Ensino Superior, mas também no Ensino Básico. Nesse sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998) do Ensino Médio destacam que o currículo de Matemática deve necessariamente contemplar

[1] Para uma melhor compreensão sobre os efeitos da valorização do formalismo matemático e suas consequências após seu abandono, ver Búrigo (1989), Duarte (2007), Pavanello (1989), Soares (2001).

atividades e experiências que possam dar aos aprendizes a possibilidade de um maior desenvolvimento e a comunicação efetiva de argumentos matematicamente válidos.

Alguns autores, como Bigode (2002), defendem ser necessário que coloquemos o aluno diante de fatos que provoquem a necessidade de provas consistentes, abordando assim a orientação dos PCN, destacando que os alunos do Ensino Fundamental teriam condições matemáticas e cognitivas para pensar sobre demonstrações, desde que estas não se reduzissem a uma lousa repleta de definições, axiomas, lemas, teoremas e corolários.

No que diz respeito à importância dada às demonstrações matemáticas nos documentos oficiais, o Currículo Nacional do Ensino Básico de Portugal[2] também apresenta algumas finalidades das demonstrações para o ensino de Matemática, como cita Machado (2006, p. 10, ênfase no original):

> [...] o Currículo Nacional do Ensino Básico (DEB, 2001) apresenta como uma das suas duas principais finalidades, "proporcionar aos alunos um contacto com as idéias e métodos fundamentais da matemática que lhes permita apreciar o seu valor e a sua natureza" [...] a matemática distingue-se de todas as outras ciências, em especial no modo como encara a generalização e a *demonstração e como combina o trabalho experimental com os raciocínios indutivo e dedutivo*, oferecendo um contributo único como meio de pensar, de aceder ao conhecimento e de comunicar.

Tomando-se por base as diretrizes apontadas nos documento citados, percebe-se a real necessidade de um ensino que valorize as demonstrações e que não só as apresente como necessárias, mas que essa necessidade se transforme em prática nas salas de aula, tanto na formação superior como na formação básica.

Na educação superior, tal necessidade é ainda mais explícita, tanto que no Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (ENADE), que integra o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Superior (SINAES), um dos componentes específicos da avaliação, na área de Matemática, corresponde justamente a procurar saber se o aluno, ao fim do curso, é capaz de formular conjecturas, elaborar argumentações e demonstrações matemáticas e examinar as consequências do uso de diferentes definições.

Contudo, os resultados do ENADE indicam que existam lacunas no ensino de demonstrações em Matemática, ressaltando, em especial, a necessidade de se trabalhar com a linguagem e com as demonstrações de uma forma mais detalhada.

---

[2] Nesse aspecto o currículo de Portugal formula o mesmo pensamento dos PCN, mas de forma mais clara no que diz respeito às demonstrações, por isso resolvemos destacá-lo nesse estudo.

Sobre a falta de formação inicial adequada e a chegada dos estudantes nos cursos de Licenciatura em Matemática sem a compreensão da necessidade das demonstrações, Hellmeister (2001, p. 32) afirma que:

> Analisando a estrutura curricular de vários cursos de licenciatura em Matemática, percebem-se as sérias dificuldades que as instituições de ensino superior têm na organização e hierarquização das disciplinas do curso, bem como em elaborar suas ementas e bibliografias. No caso das instituições que conseguem superar essa etapa, apresentando um bom projeto pedagógico, há ainda a dificuldade de se obter um corpo docente capaz de desenvolver tal projeto.
>
> Essa situação, que se reflete na qualidade dos cursos, implica a formação deficiente de muitos dos professores de Matemática que estão atuando no ensino fundamental e médio, oferecendo, por sua vez, uma formação ruim a seus alunos. É freqüente que resultados que podem e devem ser demonstrados, já no ensino fundamental e médio, sejam apresentados como "propriedades" dos "objetos" matemáticos, muitas vezes sem uma justificativa plausível, trazendo para o curso de licenciatura em Matemática um aluno sem nenhum questionamento, sem percepção da necessidade de demonstrações, sem reflexo sobre um sistema axiomático ou sem entender a diferença entre um exemplo e um teorema.

Os alunos são constantemente cobrados a darem respostas aos questionamentos nas mais diversas áreas, mas dificilmente se dá importância ao porquê das respostas, percepção esta que poderia minimizar a lacuna deixada na Educação Básica em relação ao raciocínio lógico e a compreensão das demonstrações matemáticas.

No domínio das Universidades, particularmente na UFRN, onde foi realizada a pesquisa referente ao presente estudo, notamos que essa importância passa despercebida aos olhares daqueles que cursam Matemática, pois utilizam, corriqueiramente, demonstrações sem um estudo mais sério e aprofundado de como realizá-las, utilizando-as de forma mecânica, na maioria das vezes, induzida pelo modelo dos professores. Muitos professores, por sua vez, consideram a prova como um procedimento pedagógico limitado e não como um meio de estudar Matemática ou uma forma de se comunicar matematicamente (KNUTH, 2002)[3], deixando de tematizar as demonstrações de maneira mais explícita.

Partindo dessa realidade, destacamos que se torna necessário o desenvolvimento de pesquisas que visem colaborar com o melhor entendimento das práticas de demonstrações, tanto por professores de Matemática, quanto por alunos, em especial, alunos que estejam no Ensino Superior, possibilitando-lhes perceber a importância das

[3] Vale salientar que, atualmente, a disciplina de Lógica oferecida na estrutura curricular do curso de Licenciatura em Matemática da UFRN, não é tida como disciplina obrigatória e no curso de Bacharelado em Matemática ela não está disponível nem como optativa, além disso, não é ofertada pelo departamento de Matemática e sim pelo departamento de Filosofia.

demonstrações, compreenderem seu significado e saberem utilizar técnicas para provar leis matemáticas, tendo como base a apropriação de uma linguagem própria.

Buscando-se trazer uma contribuição no sentido de apresentar a necessidade das demonstrações como algo que precisa ser estudado e compreendido e não somente transmitido e repetido, fez-se necessário expor procedimentos metodológicos que pudessem facilitar o processo de ensino e aprendizagem da Matemática por meio das demonstrações matemáticas.

Dessa forma, o presente trabalho tem como objetivo geral: *propor e testar um Módulo de Ensino que possa servir de modelo para uma abordagem das demonstrações matemáticas.*

Para facilitar o processo de ensino-aprendizagem das demonstrações matemáticas, o Módulo de Ensino proposto para o referido modelo foi estruturado com atividades construtivistas[4] de modo que o aluno não somente receba uma instrução sobre técnicas de demonstração matemática, mas que construa seu conhecimento a partir de atividades que o levem a abstrair, ser criativo e chegar a um nível de entendimento que o permita analisar as mais diversas técnicas.

Para isso, partimos do proposto na obra *Introdução às Técnicas de Demonstração na Matemática*, (FOSSA, 2009a) que sugere um estudo das técnicas de demonstração a partir de uma abordagem centrada na compreensão e análise das referidas técnicas. No decorrer das atividades, ainda investigamos problemas oriundos da linguagem matemática, bem como buscamos evidenciar a importância de uma abordagem que faça uso da análise e compreensão das técnicas de demonstração em categorias que Skemp (1980) denomina de compreensão relacional e instrumental[5].

Nesse sentido, apresentamos os objetivos específicos do presente trabalho conforme segue:

a) analisar qual o entendimento que os graduandos em Matemática têm sobre as técnicas de demonstração, bem como de termos que são, corriqueiramente, utilizados no Ensino de Matemática;
b) realizar uma intervenção, junto aos participantes da pesquisa, de maneira a levá-los a uma análise informal das Técnicas de Demonstração Matemática;
c) analisar as dificuldades apresentadas pelos alunos no decorrer da

[4] Sobre o construtivismo e o ensino de demonstrações matemáticas ver seção 2.4.
[5] Para mais detalhes sobre os conceitos de compreensão relacional e instrumental ver seção 2.5

Intervenção;

d) avaliar a eficácia do Módulo de Ensino.

Para o alcance desses objetivos, fazemos uso da abordagem qualitativa[6]. A escolha por este tipo de abordagem justifica-se por entendermos que este tipo de pesquisa preocupa-se também com detalhes que não poderiam ser quantificados. Tais detalhes são mais bem observados quando há uma preocupação não só com os resultados, mas com a subjetividade das questões envolvidas no todo, nas realidades múltiplas dos participantes, na descoberta, descrição e entendimento do contexto e, ainda, em sua interpretação. De fato, a visão de pesquisa qualitativa se baseia na ideia de que há sempre um aspecto subjetivo no conhecimento produzido, conforme atestam Araújo e Borba (2004).

Dentro das abordagens qualitativas conhecidas atualmente, escolhemos trabalhar com uma abordagem chamada pesquisa-ação. A escolha se deu pelo fato desse tipo de pesquisa possuir um caráter participativo, promovendo a interação entre o pesquisador e os participantes da situação investigada. Thiollent (1997) define a pesquisa-ação como um tipo de investigação social com base empírica, que consiste basicamente em relacionar pesquisa e ação em um processo no qual os participantes e pesquisadores se envolvem de modo cooperativo na elucidação da realidade em que estão inseridos, não somente identificando os problemas coletivos como também buscando e experimentando soluções em situação real.

Ainda se tratando da pesquisa-ação podemos dizer que é um tipo de abordagem investigativa que não se limita a descrever uma situação e, sim, a gerar acontecimentos que, em certos casos, podem desencadear mudanças no âmbito da coletividade implicada. Neste sentido, se fez bastante válido aplicar esse tipo de abordagem numa Intervenção como a que realizamos neste trabalho.

De acordo com o que foi exposto, pretende-se fazer um estudo sobre o ensino-aprendizagem das demonstrações matemáticas. Para tanto, o presente trabalho foi estruturado em quatro capítulos. Primeiramente, este introdutório traz uma visão geral sobre o estudo e um pequeno resumo dos capítulos da dissertação.

No segundo, intitulado *Princípios norteadores do ensino-aprendizagem das demonstrações matemáticas*, faz-se uma discussão sobre o construtivismo radical e

---

[6] Sobre a forma como utilizamos a abordagem qualitativa neste trabalho ver seção 3.4 que trata da metodologia do trabalho.

aborda a importância das demonstrações matemáticas, bem como seu significado, contemplando também a importância da leitura, que ocupa um papel fundamental nesse estudo. Traz, ainda, um breve estudo sobre o construtivismo radical e como as atividades construtivistas podem auxiliar em uma melhor aprendizagem das demonstrações matemáticas. Por fim, traz um estudo sobre a compreensão relacional, defendida por Skemp (1980).

No terceiro Capítulo, intitulado *Módulo de Ensino*, a proposta fundamental da dissertação é apresentada, expondo-a mediante a realização de atividades didáticas operacionalizadas em sala de aula. Neste módulo, foi focalizado o ensino de demonstrações matemáticas, tendo como principal referencial a obra intitulada *Introdução das Técnicas de Demonstração em Matemática* (FOSSA, 2009a), na qual as demonstrações são tratadas à luz do construtivismo. Nele, o estudo de cada técnica é realizado de maneira crítica e reflexiva, com ênfase em sua análise e compreensão.

No quarto Capítulo, descrevemos e analisamos os nove encontros realizados, segundo os objetivos específicos do trabalho. A análise é realizada segundo Skemp (1980), que classifica os tipos de compreensão em duas categorias: a primeira instrumental, onde o aluno apenas trabalha repetindo de forma mecânica o que ele aprendeu e, a segunda, que é a relacional, onde o aluno passa da fase mecânica de resolver as questões e chega a uma compreensão mais analítica de suas respostas. Na análise, classificamos ainda as respostas erradas ou deixadas em branco pelos alunos, como questões que não foram compreendidas pelos discentes.

O último Capítulo trata das Considerações Finais, onde são destacados os resultados desse estudo, bem como, suas ações ou investigações futuras. Nesse Capítulo, além de serem mostrados os resultados tendo como base os objetivos propostos pelo trabalho, também são apontados caminhos que podem melhorar o ensino-aprendizagem de demonstrações matemáticas.

2 PRINCÍPIOS NORTEADORES DO ENSINO-APRENDIZAGEM DAS DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

As demonstrações matemáticas assumem um papel particular para o estudioso de Matemática, pois, como já foi mencionado, o matemático necessita das demonstrações para provar seus teoremas, tanto quanto os profissionais das áreas de Ciências precisam da experimentação para autenticar a verdade de suas leis. Assumindo essa importância, destaca-se, a seguir, um estudo teórico das demonstrações matemáticas e a contribuição que o construtivismo radical pode trazer ao seu ensino.

2.1 IMPORTÂNCIA DAS DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

Para se estudar as demonstrações matemáticas é preciso que se esclareçam duas coisas:

a) a importância das demonstrações para a Matemática;
b) o que significa demonstrar, no âmbito da Matemática.

O primeiro esclarecimento se deve ao fato de acreditarmos que é fundamental conhecer primeiramente a importância das demonstrações matemáticas para a Matemática, antes de tratarmos das demonstrações em si, porque assim poderemos incluir um sentido maior ao seu ensino, que muitas vezes é realizado de forma repetitiva e sem compreensão.

Podemos afirmar, ainda, que o objetivo de estudar a relevância se deve ao fato de procurar contemplar as demonstrações que sempre fizeram e farão parte da vida de um matemático, não somente como uma repetição ou mera utilização implícita, mas, como já foi mencionado, com o valor que lhes é devido.

O segundo esclarecimento se deve ao fato de que muitas vezes se confunde demonstrar com verificar ou argumentar (convencer), que são questões fundamentais para o ensino de demonstrações, mas tais demonstrações, não podem ser limitadas só a estes dois aspectos. Assim, por vezes, demonstrar torna-se uma tarefa não muito simples, pois não se tem claro o que significa esse conceito. Para explicar melhor, temos a seguir duas considerações em que o ato de demonstrar é confundido com estes dois significados: o de verificar e o de argumentar.

Para a primeira, partimos do que expõe Shoenfield, citado por Bicudo (2002, p. 66)

> O aspecto conspícuo da matemática, em oposição às outras ciências, é o uso da DEMONSTRAÇÃO, em vez da observação. Um físico pode provar leis físicas a partir de outras leis físicas; mas ele, usualmente, considera a concordância com a observação como o teste último para uma lei física. Um matemático pode, ocasionalmente, usar a observação; pode, por exemplo, medir os ângulos de muitos triângulos e concluir que a soma dos ângulos é sempre 180º. Entretanto, aceitará isso, como uma lei da matemática, somente quando tiver sido demonstrado.

Nesse caso, foi visto que somente verificar (observar) que a soma dos ângulos de um triângulo é 180º graus não é suficiente para se ter certeza de que isso é verdade ou que esta afirmação é válida para todos os triângulos. De fato, é preciso realizar uma demonstração para que se tenha como verdade que para todo triângulo no plano a soma de seus ângulos será sempre 180º.

Para exemplificar a confusão de demonstrar com convencer, recorremos aos argumentos de Fossa (2009b, p. 6), que nos diz:

> Há algumas considerações que mostram que, dentro da comunidade matemática, a equação "demonstrar é convencer" não pode ser sustentada com verossimilitude. Assim, a mera tentativa de convencer não constitui uma demonstração. Alguns exemplos simples mostram isto. Quando, por exemplo, um adulto quer que uma criança não entre num determinado quarto, ele pode dizer algo como "Não entre aí, pois o bicho-papão vai te pegar." A criança é convencida, mas nem por isto foi feita uma demonstração. Ainda mais, a razão de que não houve demonstração nesse caso não depende da mentira. Se, de fato, houvesse um leão preso no quarto e alguém, ao informar um outro desse fato, convencesse o outro a não entrar, ainda não teríamos uma demonstração.

Considerando o que diz o autor, vemos que demonstrar também não se limita somente a convencer. Isso seria restringir muito o conceito de demonstrar no contexto matemático.

É importante destacar que estamos investigando, no presente estudo, o papel das demonstrações matemáticas para a comunidade matemática. Esse destaque se faz necessário porque demonstrar pode assumir valores e significados diferentes de acordo com o campo ou contexto em que estiver inserido.

Mas então o que se pode chamar de demonstração na comunidade matemática?

No presente trabalho, sempre entederemos o conceito de demonstração no sentido de buscar a justificativa da proposição proposta, pois como afirma Fossa (2009a, p. 47), “uma demonstração matemática é um argumento, cuja conclusão é o teorema demonstrado”. O autor afirma ainda que “[...] o caráter da demonstração matemática é a tentativa explícita de determinar o status epistemológico de proposições mediante da relação de conseqüência lógica” (FOSSA, 2009b, p. 7).

Assim, demonstrar é dar razões que garantam a verdade do teorema proposto. Nessa direção, é também importante deixar claro que as demonstrações que aparecem no contexto do ensino de Matemática não são necessariamente demonstrações formais, no sentido de não serem apresentadas no formalismo da Lógica, mas demonstrações que partem de axiomas ou proposições supostamente já demonstradas, que são vistas como um ponto de partida para se começar as deduções.

Fossa (2009b, p. 15), ao tratar de demonstração e conhecimento, destaca que:

> Philip Kitcher (1981) alega que a verdadeira finalidade de demonstrações matemáticas é que mostram porque uma proposição é verdadeira. Mas, mesmo ele reconhece que há dois tipos de demonstrações, a saber, um que mostra apenas *que* uma dada proposição é verdadeira (demonstrações indiretas são freqüentemente desse tipo) e um que mostra *porque* é verdadeira. Não obstante, embora os matemáticos até tenham preferência por demonstrações do segundo tipo, as do primeiro tipo são perfeitamente aceitáveis.
> A tendência dos matemáticos, observada acima, a fazer várias demonstrações para a mesma proposição poderá causar um pouco de perplexidade aqui, pois na presença de várias demonstrações, poderíamos perguntar sobre as “verdadeiras” razões (pois essas serão múltiplas no caso em aprecio) da verdade da proposição. Quando voltamos à natureza da demonstração, porém, a perplexidade desaparece, pois demonstração revela relações de conseqüência lógica e não há nada estranho no fato de uma proposição ser conseqüência lógica de dois, ou mais, grupos distintos de pressupostos. De fato, o que vemos no fenômeno de demonstrações múltiplas é teorização em ação, pois o matemático não visa apenas à validação de proposições avulsas, mas a construção e articulação de uma grande rede de relações.

Como já exposto, em se tratando da importância das demonstrações, sabemos que o matemático precisa fazê-las para provar seus teoremas, tanto quanto os profissionais das áreas de Ciências precisam da experimentação para autenticar a verdade de suas leis. Fossa (2009b, p. 45) aponta dois motivos para que o matemático tenha a preocupação de demonstrar todos os seus teoremas. O primeiro se deve ao fato de que “algumas proposições que parecem intuitivamente óbvias são de fato falsas”. O segundo é baseado no fato de que a Matemática é um tipo de conhecimento e, para se conhecer algo, não é o suficiente acreditar-se nele, porém, torna-se necessário ter boas razões para nele acreditar.

Sabe-se que as demonstrações farão parte da vida do matemático por entendermos que, como Fossa (2009b, p. 9), “podemos *definir* a matemática como a área de estudos que usa, exclusivamente, demonstrações, no sentido anteriormente delimitado, para validar as suas proposições”, pois como afirma o autor: “a definição mediante o método de validação não somente identifica a característica mais notável da matemática, mas também paralela a definição da ciência mediante o seu método de validação, a saber, o de verificação empírica” (FOSSA, 2009b, p. 9).

Com essa definição não se está querendo estabelecer que a única coisa que o matemático faz é demonstrar, mas sim ressaltar o quanto demonstrar é importante para o matemático. Assim, entende-se que as demonstrações fazem parte desse grande cenário que é a produção de conhecimento matemático e, além disso, também sustenta a validade de muitos teoremas que lhe dão vida.

Para melhor ensinar as demonstrações necessita-se buscar novas tendências, mas é extremamente necessário também buscar medidas que possam amenizar as lacunas deixadas nos conteúdos ministrados na Matemática. Essas lacunas são consequências de um ensino que, ao abordar a Matemática como se fosse um treino, somente diminui o nível de criatividade e abstração a ser desenvolvido pelo aluno. Em contrate, o referido nível de criatividade e abstração pode ser melhorado por um ensino-aprendizagem no qual o aluno pode ser motivado a construir seu conhecimento.

Outra consideração importante que se pode observar, ainda sobre as demonstrações matemáticas, é que elas são uma importante ponte de ligação entre Matemática Pura e Educação Matemática, visto que a Educação Matemática pode ajudar a dar sentido e tornar mais eficaz o seu ensino e assim amenizar as deficiências que os alunos trazem e que se tornam obstáculos ao cursarem disciplinas que exigem um maior nível de demonstração como Análise Real, Álgebra Linear e outras disciplinas que se utilizam de demonstrações.

Para explicitar ainda mais o papel que as demonstrações matemáticas assumem para o ensino de Matemática, apresentaremos um estudo um pouco mais detalhado dessa relação na seção seguinte.

2.2 DEMONSTRAÇÕES E ENSINO DE MATEMÁTICA

Conforme exposto no Capítulo 1, as demonstrações têm um papel de fundamental importância para a Matemática, uma vez que o fazer matemático exige o desenvolvimento de habilidades necessárias para ler textos matemáticos compreendendo os termos básicos, desenvolvendo argumentos e deduções. Exige ainda, a necessidade de desenvolver a compreensão das técnicas de demonstrações, o que vai ocorrer tanto durante a vida acadêmica quanto profissional do então estudante, pois, diversas vezes, esse se deparará com teoremas a serem demonstrados ou, no mínimo, compreendidos.

No campo das Universidades, muitos alunos trazem dificuldades que se transformam em verdadeiros obstáculos de aprendizagem, por quererem verificar resultados com exemplos particulares, em vez de utilizarem demonstrações, como destaca Hellmeister (2001, p. 2):

> Uma prática de nossos alunos, muito difícil de combater, e infelizmente incentivada por muitos livros didáticos, é a verificação de resultados testando-os em vários exemplos particulares e aceitando esse procedimento como uma demonstração.

Essas dificuldades se devem também ao fato de que muitas disciplinas introdutórias ao estudo da Matemática, não trazem um estudo mais aprofundado sobre linguagem matemática, nem sobre técnicas de demonstrações matemáticas, não conseguindo assim diminuir as lacunas que os alunos têm com relação ao formalismo e a abstração que serão comuns em todo o estudo da Matemática.

Um recurso que possibilitou saber o nível de desenvolvimento dos alunos brasileiros de Ensino Superior sobre essas habilidades mínimas, que incluem elaboração de argumentações e demonstrações matemáticas, foi o Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE) realizado em 2005 e 2008 para alunos de Matemática. Esse exame, no que concerne a Matemática, teve como objetivo conferir o desempenho dos estudantes em relação aos conteúdos previstos nas Diretrizes Curriculares para os cursos de Matemática, nas modalidades Bacharelado e Licenciatura. Para tanto, buscou averiguar as habilidades tidas como essenciais na formação do Matemático, conforme o artigo 6º, item b, que segue:

> Art. 6º A prova do ENADE 2005, no componente específico da área de Matemática, avaliará se o estudante desenvolveu, no processo de formação,

> habilidades e competências que lhe possibilite: [...]
> b) Formular conjecturas e generalizações, elaborar argumentações e demonstrações matemáticas e examinar conseqüências do uso de diferentes definições. (BRASIL, 2005, p. 2)

Vale ressaltar, entretanto, que é justamente nos primeiros anos do Curso de Matemática que os alunos sentem mais dificuldades quanto a essa compreensão. Realmente, isso se explica pelo fato de que a Matemática que encontram no Ensino Superior possui notações e terminologias nunca ou, pelo menos, pouco vistas antes, como axiomas, proposições, lemas, definições, entre outros termos. Esses termos parecem ser de uma linguagem estranha àquela empregada na Matemática vista até então, que se limitava a utilizar termos como: soma, subtração, multiplicação e potenciação. Além disso, muitas vezes, o desvendar desse vocabulário acaba sendo deixado a cargo dos próprios alunos, os quais de modo autodidata procuram se apropriar dessa nova linguagem.

Algumas pesquisas feitas sobre demonstrações matemáticas destacaram sua importância no Ensino Superior. Dentre elas, é interessante citar duas: uma desenvolvida por Ruy Cesar Pietropaolo (2005), que trata da função das demonstrações na Licenciatura; e outra proposta por Thiago Nagafuchi (2009), a nível do curso de Bacharelado.

A primeira traz uma proposta de ressignificação da demonstração matemática nos cursos de Licenciatura em Matemática. Pietropaolo (2005, p. 221–222), tomando como base entrevistas realizadas com pesquisadores em Educação Matemática e professores atuantes da Educação Básica, afirma que elas devem ser consideradas como:

> - ferramenta a ser tratada nas diversas disciplinas do curso (para validar, explicar, refutar, apresentar teorias) e como tema importante para estabelecer conexões entre os temas matemáticos (problemas históricos, relações entre conteúdos), ou seja, na perspectiva da compreensão e aprofundamento de conceitos e procedimentos.
>
> - elemento característico e imprescindível da Matemática, como elemento sintático, independente de conteúdos particulares, ou seja, na perspectiva de um tema transversal, mas que em dado momento ela – a prova – seria tematizada em si mesma (caberiam discussões sobre os tipos de prova aceitos pelos matemáticos, a linguagem, os termos utilizados, características dos sistemas axiomáticos, noções de lógica, da modificação da noção de rigor ao longo da história).

Pietropaolo (2005) dá assim às demonstrações, que em sua tese são chamadas de provas, uma abordagem mais ampla no contexto educacional, em especial, apontando caminhos para que essas *provas* tenham importância nos currículos de Matemática da Educação Básica, bem como investigando como essas mudanças podem implicar na formação inicial de professores.

Na pesquisa desenvolvida por Nagafuchi (2009), cujo título é *Um estudo histórico-filosófico acerca do papel das demonstrações em cursos de bacharelado em matemática*, traz-se uma discussão das demonstrações matemáticas no nível de Bacharelado, apontando a necessidade de um ensino mais explícito das demonstrações a partir de um debate histórico-filosófico, onde, segundo Nagafuchi (2009, p. 141), é importante considerar que:

> [...] debates, contextos, leituras, problematizações e reconstruções histórico-filosóficas podem justificar as demonstrações sob os seus mais diversos aspectos, como o lógico-estrutural, o retórico, o teórico metodológico e, ainda, são soluções plausíveis para dificuldades citadas pelos docentes, como o imediatismo, pois levariam os alunos a pensar acerca das demonstrações, o ensino tradicional, a falta de leitura e, ainda, estimularia o desenvolvimento de possíveis talentos para a Matemática.
>
> Em um curso de bacharelado em Matemática, poderia haver o primeiro contato do aluno com as demonstrações no Ensino Superior a partir de uma introdução dos aspectos lógico-estruturais da demonstração, podendo caber aqui, as reconstruções histórico-filosóficas que são capazes de enriquecer a experiência escolar da prática demonstrativa.
>
> Em outra etapa futura em que o aluno tenha adquirido um amadurecimento conceitual e uma visão mais abrangente e crítica da Matemática, haveria uma aproximação com a Filosofia da Matemática, que fosse responsável por apresentar, possibilitar e problematizar debates histórico-filosóficos sobre a Matemática, incluindo uma atenção especial às demonstrações, devido a sua importância.

Nesse sentido, a partir das pesquisas realizadas sobre o que vem sendo estudado sobre as demonstrações matemáticas nos últimos anos, particularmente depois dos anos 80, percebe-se que a Educação Matemática tem se preocupado em dar atenção à necessidade de discutir seu processo de ensino-aprendizagem, bem como de apontar caminhos que podem amenizar os problemas oriundos da utilização das técnicas de demonstração nas mais diversas disciplinas.

Além da tese de Pietrapaolo (2005) e da dissertação de Nagafuchi (2009), citadas anteriormente, podemos mencionar também a tese de Garnica (1995), intitulada *Fascínio da Técnica, Declínio da Crítica: um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de Matemática* e a dissertação de Tatiane Serralheiro (2007), *Formação de Professores: conhecimentos, discursos e mudanças na prática de demonstrações*. É importante ressaltar que ao citar esses trabalhos não se têm a pretensão de pensar que todos os trabalhos realizados a nível nacional foram citados, mas de apontar trabalhos e publicações que tem, também, a preocupação com o estudo e o ensino-aprendizagem das demonstrações.

A tese de Garnica (1995) trata do significado da prova rigorosa na formação do professor de Matemática, trazendo uma revisão bibliográfica acerca das demonstrações matemáticas e, em seguida, um estudo com um grupo de professores pesquisadores em Matemática e Educação Matemática que possuíam experiência com Licenciaturas. Na análise dos dados da pesquisa com os professores, Garnica conclui que a argumentação rigorosa para a formação poderia ser estudada a partir de duas diferentes leituras, as quais ele chama de leitura técnica e de leitura crítica. A leitura técnica se fundamenta na produção científica de Matemática e a crítica, no campo da Educação Matemática. Garnica (1995) conclui sua tese afirmando que, se a prova rigorosa é elemento fundamental para a compreensão da prática científica da Matemática, também deveria ser considerada fundamental nos cursos de formação de professores. A importância de demonstrações rigorosas, no entanto, não deveria ser considerada somente técnica, mas também como uma abordagem crítica, dando espaço às produções de formas alternativas de tratamento das argumentações em sala de aula.

Já a dissertação de Serralheiro (2007) aborda as seguintes questões: os discursos e conhecimentos iniciais sobre demonstração em Matemática; a forma como se dá o raciocínio dedutivo no processo ensino-aprendizagem da Matemática nas séries finais do Ensino Fundamental; e como a participação dos professores envolvidos na pesquisa pode refletir nas mudanças do ensino de Geometria no Ensino Fundamental.

Nessa perspectiva, faz-se necessário citar algumas outras pesquisas, assim como projetos que têm se interessado em realizar este estudo tanto a nível nacional como a nível internacional, até a presente data.

A nível nacional podemos citar o Projeto Argumentação e Prova na Matemática Escolar (AProvaME), da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP); o Projeto Fundão, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Em termos de publicações, em especial, tem-se o Boletim de Educação Matemática (BOLEMA), número 18, ano 2002, que traz uma edição especial com diversas publicações sobre o papel das demonstrações matemáticas.

O Projeto AProvaME é um estudo que vem buscando elaborar um levantamento das concepções sobre argumentações e provas de alunos adolescentes em escolas do Estado de São Paulo e, como já foi mencionado, é desenvolvido pelo Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC-SP.

O projeto Fundão, coordenado pela Professora Emérita Maria Laura Mouzinho Leite Lopes, é formado por professores da UFRJ em parceria com professores da rede de Ensino Fundamental e Médio do Estado do Rio de Janeiro e com alunos de Licenciatura do curso de Matemática da referida Universidade. Tem como foco trabalhar em prol da melhoria do ensino de Matemática e pela valorização do professor. Os pesquisadores envolvidos nesse projeto não trabalham somente com argumentações e demonstrações matemáticas, mas vem realizando pesquisas na área e, inclusive, lançaram um livro com provas matemáticas para o Ensino Básico, chamado *Argumentação e Provas no Ensino da Matemática.*

Cabe acrescentar outras publicações, como o livro *Introdução às Técnicas de Demonstração Matemática* (2009a), do Prof. John A. Fossa, reedição ampliada de Fossa (1990) e o livro do Prof. Daniel Cordeiro de Morais Filho (2006), intitulado *Um Convite a Matemática*, que aborda as técnicas de demonstração, mas no nível de compreensão instrumental[7].

O primeiro livro é a obra usada na aplicação do Módulo de Ensino desta pesquisa. Nesse trabalho, Fossa (2009a) trata das demonstrações matemáticas explorando o raciocínio, a abstração e a análise das técnicas de demonstrações com ênfase na compreensão e nos passos das demonstrações. É dividido em três partes, trazendo na primeira uma série de diálogos, com o intuito de motivar os leitores a estudarem as demonstrações matemáticas dentro de um contexto natural. Na segunda, apresenta diversas técnicas e foca o estudo nas estruturas das dissertações. Na terceira, traz explicações e exemplos de demonstrações contidas em textos matemáticos e, em seguida, apresenta uma análise de tais exemplos.

O segundo livro, *Um Convite a Matemática*, trata das demonstrações matemáticas, aplicando a Lógica à Matemática. Diferentemente de Fossa, o autor aborda as demonstrações maximizando os conteúdos matemáticos, com foco no conhecimento e aplicação das técnicas de demonstração. Outras distinções, em relação ao livro base usado no Módulo de Ensino, são: a ênfase na repetição de exercícios, o tratamento das definições sem uma construção prévia dos conceitos e a valorização ao desenvolvimento da compreensão instrumental por parte dos alunos.

Como citamos pesquisas a nível nacional, vale destacar também a nível internacional. O desenvolvimento de pesquisas a nível internacional, em especial,

[7] Ver seção 2.5.

Inglaterra, Estados Unidos, França e Itália, tem sido bastante notável com relação a nossa temática, devido ao grande número de publicações que hoje podem ser encontradas principalmente na Internet. Um exemplo disso é o site http://www.lettredelapreuve.it, que é um boletim informativo sobre o ensino-aprendizagem das demonstrações matemáticas *(International NewsLetter on the Teaching and Learning)*, uma revista eletrônica que publica artigos e divulga diversos trabalhos e publicações que tratam do ensino-aprendizagem das demonstrações. No site, é possível encontrar uma vastíssima bibliografia com centenas de publicações internacionais sobre demonstrações matemáticas.

Segundo Nagafuchi (2009, p. 19),

> Um dos possíveis motivos da explosão de pesquisas sobre provas e demonstrações foi a inclusão das demonstrações no currículo da educação básica em países como Estados Unidos, Canadá e Inglaterra. Hanna e De Villiers (2008) corroboram dizendo que diversos documentos curriculares de Matemática elevaram o *status* da prova na Matemática escolar em diversas jurisdições educacionais pelo mundo.

Talvez sejam precisos diversos outros estudos para se comprovar que se no Brasil as demonstrações tivessem mais importância nos documentos que norteiam o currículo básico, tanto do Ensino Básico, quanto do Superior, haveria também mais pesquisas e estudos na área. Mas mesmo sem ter certeza de que isso é um fato, vale destacar que em países em que já há essa ênfase no currículo, há, consequentemente, mais estudos e publicações sobre o ensino de demonstrações matemáticas.

Ainda, sobre as pesquisas na área, Nasser e Tinoco (2003, p. 2) afirmam que:

> Grande parte das pesquisas desenvolvidas internacionalmente nessa área foi relatada por Hanna e Jahnke (1996), no capítulo intitulado 'Proof and proving', incluído no manual de Educação Matemática, o "International Handbook of Mathematics Education", (pp. 877-908). Nele são citadas pesquisas sobre as funções da prova (Hanna, 1990; de Villiers, 1990), os tipos de prova aceitos por matemáticos e por educadores matemáticos (Bell, 1976; Balachef, 1988; Davis, 1993), além de estudos investigando os progressos dos alunos no desenvolvimento do raciocínio dedutivo (HERSCH, 1993; HOYLES, 1997).

A grande diferença entre o número de pesquisas realizadas no Brasil e no exterior pode ser visto não de forma desanimadora, mas como uma grande motivação para a Educação Matemática que tem aí um importante campo para contribuir com pesquisas e publicações.

Observamos que os estudos e pesquisas citados dão ênfase à importância e ao ensino de demonstrações matemáticas, nos diferentes campos e contextos de Ensino, mas não trazem uma abordagem prática de tais demonstrações. Nesse sentido, podemos afirmar que o diferencial da nossa dissertação é a abordagem prática que utilizamos, uma vez que temos como objetivo geral propor e testar um Módulo de Ensino que possa servir de modelo para abordar as demonstrações ao nível da compreensão relacional das mesmas.

Tomando-se por base o diagnóstico realizado pelo Exame Nacional de Cursos, a respeito dos conhecimentos de egressos de cursos de Licenciatura em Matemática sobre demonstrações, Pietropaolo (2005, p. 129) destaca que:

> Uma simples leitura dos desempenhos dos licenciandos em Matemática no Exame Nacional de Cursos em itens que envolvem demonstrações basta para constatar que, embora ainda predomine a concepção formalista em diversas licenciaturas, os egressos têm grandes dificuldades nesse tema. No primeiro capítulo já comentamos que o rendimento dos alunos em duas demonstrações geralmente indicadas para o Ensino Fundamental não ultrapassou a média de 8,6 numa escala de 0 a 100.

O autor ainda cita que em outra questão, cujo valor era 20 pontos (sendo 10 para a demonstração e 5 para cada um dos outros subitens), “a média de todo o Brasil com a *nota corrigida* para uma escala de 0 a 100 foi apenas 6,1 pontos. O desvio-padrão, relativamente pequeno, de 11,9 revela que as notas ficaram razoavelmente concentradas em torno da média”. Embora se saiba que toda avaliação tenha seus limites, os referidos resultados são uma forte indicação de que os alunos apresentam dificulades em relação às demonstrações matemáticas. Segundo Pietropaolo (2005), seria importante realizar mudanças na formação inicial dos professores para que fossem destacadas as perspectivas didática, curricular e histórica das demonstrações matemáticas.

Defendemos que o estudo de Demonstrações Matemáticas é elemento fundamental para estudantes e professores de Matemática, porém esse estudo requer a apropriação de uma linguagem que permita ao matemático ser claro e objetivo em sua comunicação, bem como em sua escrita. A seção, a seguir, traz um estudo sobre a importância da linguagem para o ensino de demonstrações matemáticas.

2.3 LINGUAGEM E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

A apropriação e a importância da linguagem no ensino de demonstrações se tornam muitas vezes negligenciadas, deixadas de lado, para dar ênfase diretamente aos conteúdos, sem levar em conta que a linguagem é fundamental para o diálogo, bem como para o entendimento dos assuntos ou disciplinas em questão. Por exemplo, um professor que demonstra um teorema usando axiomas ou definições terá muita dificuldade em trabalhar determinados passos de sua demonstração se o aluno não souber o que significa um axioma ou uma definição. A comunicação, neste caso, será comprometida e o aluno poderá deixar de entender a demonstração por não ter clareza quanto à linguagem utilizada pelo professor.

Sobre essa falta de clareza com relação aos conceitos, o professor tem um papel fundamental, pois, neste caso, ele atuará de forma determinante, podendo trabalhar os erros e chegar a novos conceitos, que, no caso, são os corretos. Fossa (2001, p. 15), exemplificando este aspecto da linguagem traz o seguinte exemplo:

> Se, por exemplo, queremos que o aluno construa o conceito de 'sereia' e ele diz que tem medo de sereias que correm a praia à noite, vislumbramos um problema. Segundo nosso conceito de sereia, esta não pode correr na praia porque não tem pernas. Assim, precisamos fazer o nosso aluno reorganizar seu conceito de sereia de tal forma que, em vez de pernas, ela possua uma cauda de peixe.

Da mesma forma acontece com as demonstrações matemáticas. Por exemplo, demonstrar um teorema utilizando um lema, sem que o aluno tenha um conceito correto de teorema ou lema, pode fazer com que ele tenha bastante dificuldade de chegar a uma conclusão que seja válida para a questão.

Ainda na mesma linha de pensamento, podemos citar von Glasersfeld (1996, p. 301), que utiliza uma metáfora assim como Fossa (2001), para tratar da linguagem como função orientadora, afirmando que:

> Quando um lavrador tem de guiar uma série de cabeças de gado ao longo de uma daquelas pequenas estradas de campos ladeadas por cercas, que têm aberturas de vez em quando, a tarefa é praticamente impossível se ele não tiver ajudante. Tem de ficar por trás dos animais para os manter a andar, e quando a primeira vaca descobre uma abertura na cerca, ela vira inevitavelmente para o campo. As outras seguem-na e o lavrador tem de correr até o campo para fazê-las voltar através da abertura. Isto já é suficientemente difícil, mas o que torna a situação desesperada é que as vacas, forçadas a regressar a estrada, viram-se sempre na direção de onde

> vieram. É um cenário em que ninguém pode ganhar e nenhum lavrador empreenderia tal viagem sem levar consigo pelo menos um cão obediente. Isto faz uma grande diferença. Sempre que o lavrador localiza um buraco na vedação, ele manda o cão bloqueá-lo – e o problema não se levanta. Note-se que o cão não conduz o gado, apenas fornece um condicionamento adicional ao seu movimento. É o lavrador que tem que mantê-las em marcha. Neste cenário o cão tem uma função semelhante ao da linguagem na sala de aula.

Nessa metáfora além da importância da linguagem, representada pelo cão, o professor desempenha um papel fundamental, pois ele, como esse lavrador, tem que ser o motivador do processo, não podendo dizer aos alunos que conceitos construir, mas precisa fazer uso da função orientadora da linguagem, a fim de impedir que os alunos construam direções inadequadas que possam diminuir sua aprendizagem.

A linguagem matemática apresenta diversas deficiências que podem ser consequências de vários fatores, dentre os quais, destacam-se dois. O primeiro é referente à falta de compreensão em decorrência de não ser uma linguagem corriqueira. Sobre isso Klüsener (1998, p. 182) afirma que:

> [...] os problemas evidenciados na aprendizagem matemática como meio de comunicação não são os mesmos da aprendizagem da língua materna, já que a linguagem matemática não se adquire de maneira natural, não é utilizada constantemente e necessita ser apreendida e praticada em diferentes contextos.

Ressaltamos que, se esse primeiro fator não for bem trabalhado pelo professor, os problemas gerados por ele podem vir a se tornar um grande impasse quanto à apropriação da linguagem matemática, que não é corriqueira, como nossa linguagem usual, mas uma linguagem própria que exige clareza, precisão e conhecimento claro dos termos em questão.

Outro grande fator de deficiência da linguagem é a dificuldade dos alunos com relação à língua materna. De fato, muitos alunos têm dificuldades de leitura e interpretação e, consequentemente, têm dificuldade de elaborar seu pensamento e escrevê-lo como um argumento. Ainda sobre esta questão, Klüsener (1998, p. 190), finalizando um artigo que trata de leitura matemática, afirma que:

> Frente a essa discussão, torna-se necessário resgatar, na prática pedagógica, a proposição de tarefas matemáticas envolvendo as diferentes expressões da linguagem no desenvolvimento dos conceitos, noções e do próprio pensamento. Todavia, a linguagem matemática e sua compreensão, sem tropeços, somente serão possíveis à medida que a língua materna for utilizada de maneira adequada, já que a linguagem matemática, na maioria dos casos, nos chega mediante a linguagem oral ou gráfica.

É interessante observar que os documentos oficiais que norteiam a educação do Brasil, por exemplo, os PCN (BRASIL, 1998), dão ênfase à apropriação dessa linguagem desde o ensino básico, em especial, o Ensino Médio. Nesse sentido, destacam a representação e a comunicação; investigação e compreensão e, ainda, a contextualização sociocultural, como competências e habilidades a serem desenvolvidas em Matemática.

Também na avaliação dos cursos de Matemática pelo Exame Nacional de Cursos, BRASIL (2005), já citado anteriormente, temos dois critérios que dizem respeito à linguagem, a saber: interpretar e utilizar a linguagem matemática com a precisão e o rigor que lhe são inerentes, bem como, ser capaz de ler e interpretar textos e expressar-se com clareza e precisão em Língua Portuguesa.

Vimos assim a importância de se trabalhar adequadamente às demonstrações dando ênfase à linguagem utilizada. No próximo item, apresentaremos um estudo sobre o construtivismo radical, ressaltando o quanto ensinar as demonstrações, a partir de um ensino que dê ênfase à autonomia do aluno, pode contribuir para o ensino-aprendizagem das demonstrações matemáticas.

2.4 O CONSTRUTIVISMO RADICAL E AS DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

Depois de tratarmos da importância das demonstrações matemáticas para o ensino de Matemática, bem como, seu significado e a importância da linguagem neste contexto, faz-se necessário contextualizar e justificar a escolha pelo construtivismo radical nesse processo de ensino-aprendizagem, que é o que faremos a seguir.

A abordagem construtivista consiste num processo cognitivo em que o aluno é um ser ativo, não somente absorvendo informações, mas construindo seu conhecimento, ao invés de somente recebê-lo como resultado de uma espécie de transmissão. Dessa forma, a teoria construtivista traz importantes benefícios ao ensino de Matemática tanto com relação aos alunos que serão construtores de seu conhecimento, como para os professores que precisam buscar cada vez mais metodologias eficazes para um ensino-aprendizagem de maior qualidade.

É importante observar que a abordagem construtivista se constitui hoje em uma teoria geral do conhecimento que possui um campo muito vasto. Vale ressaltar que essa perspectiva teórica ganhou muito destaque no ensino de Matemática dos últimos vinte anos. Baseada no idealismo neokantiano, entra em contraste com o realismo, no qual se fundamentam as teorias tradicionais do conhecimento. O construtivismo está centrado na própria atividade mental do aluno, onde são construídas estruturas conceituais, bem como redescobertas algumas estruturas já existentes, mas antes não compreendidas.

A linguagem também ocupa um importante papel nessa abordagem, visto que, de acordo com Fossa (1998, p. 14):

> A linguagem não é mais vista como um recipiente do conhecimento, uma vez que cada indivíduo deve construir para si mesmo suas próprias estruturas conceituais em lugar de recebê-las prontas dos outros. Todavia, a linguagem ajuda a diferentes indivíduos formular construções semelhantes, ao revelar as diferentes expectativas que cada um mostra com base em suas próprias construções.

Sendo assim, a linguagem atua como ferramenta na construção do conhecimento e, como já foi visto no item 2.3 deste estudo, torna ainda mais eficaz o ensino-aprendizagem das demonstrações, não sendo usada como meio para se transferir conhecimento, mas para guiar o aluno no seu próprio processo de construção.

Dentre as abordagens construtivistas existentes, a construtivista radical é a que melhor se adéqua e favorece o ensino das demonstrações matemáticas, uma vez que, como diz Fossa (1998, p. 15-16), o construtivismo radical é "a teoria do conhecimento ou um modelo que mostra como a mente racional funciona na organização de suas experiências". Com isso, não estamos querendo limitar a aprendizagem das demonstrações a essa abordagem, uma vez que todas as outras têm seu grau de importância; nosso intuito é destacar aquela que melhor se adéqua a uma compreensão relacional[8] das técnicas de demonstrações matemáticas.

Tal teoria ganhou destaque no cenário mundial na Décima Primeira Conferência Internacional sobre a Psicologia da Educação Matemática em Montreal, no ano de 1983. Lá sofreu muitas críticas, mas a partir disso obteve maior aceitação a nível internacional. Segundo von Glasersfeld (1996), que foi um dos maiores propagadores dessa teoria, o construtivismo radical teria suas raízes em tempos muito mais antigos que o construtivismo piagetiano.

Em se tratando de construtivismo e construtivismo radical, poderia se questionar se há alguma diferença entre os dois e, caso sim, que ou quais diferenças seriam estas. A esse respeito, von Glasersfeld (1996, p. 97) destaca dois pares de

[8] Sobre a compreensão relacional ver a próxima seção que trata dos níveis de compreensão definidos por Skemp (1980).

reformulações que o construtivismo radical faz ao construtivismo tradicional, a saber:

> 1 O conhecimento não é recebido passivamente nem pelos sentidos nem por meio de comunicação;
> o conhecimento é construído activamente pelo sujeito cognitivo.
>
> 2 A função da cognição é adaptável, no sentido biológico do termo, tendendo para a adaptação ou viabilidade;
> a cognição serve a organização do mundo experiencial do sujeito, não a descoberta de uma realidade ontológica objectiva.

O primeiro par trata do conhecimento. Neste sentido, o construtivismo radical destaca à importância da construção do conhecimento pelo aluno, que é visto como sujeito cognitivo. No segundo par, a grande diferença é que no construtivismo radical a cognição é abordada não somente como mera adaptação do sujeito, mas para organizar seu mundo experiencial. O aluno, em ambos os casos, atua como agente ativo de construção do conhecimento. Embora o último par apresentado seja o mais polêmico, uma vez que parece assumir uma visão realista, o aluno, em ambos os casos, atua como agente ativo de construção do conhecimento ao admitir a experiência do sujeito.

Mais uma vez é importante destacar que quando se diz que o construtivismo radical é a abordagem que melhor favorece o ensino das demonstrações, não se exclui a possibilidade de um bom ensino de demonstrações matemáticas sem o uso do construtivismo radical, mas que o ensino-aprendizagem das demonstrações terá mais êxito quando trabalhado nessa linha, pois construtivismo radical atribui bastante importância para a autonomia a qual potencializa o desenvolvimento da criatividade, que é tão importante no ensino de demonstrações matemáticas.

Entender como funciona a mente dos alunos, como eles elaboram sua linha de raciocínio, como argumentam e descrevem suas demonstrações, possibilita ao professor disponibilizar para o aluno uma maior liberdade e criatividade na escrita de suas demonstrações. Assim, vale ressaltar que mesmo existindo passos nas técnicas de demonstrações que precisam ser respeitados, não existe uma forma, uma maneira única de demonstrar. De fato, Fossa (2009, p. 48) deixa isso bem claro, quando diz que "as várias técnicas e estratégias são nada mais do que instrumentos que podemos usar em uma demonstração".

Antes de relacionar construtivismo radical e demonstrações matemáticas, faz-se necessário quebrar alguns tabus a respeito do construtivismo radical, uma vez, que quando se fala em construtivismo, muitos têm a impressão de que o professor está a parte do processo. Como veremos a seguir, não é bem assim.

Em primeiro lugar, destaca-se uma diferença entre o construtivismo radical e o ensino tradicional. No ensino tradicional, há uma tendência a levar o aluno a atuar como um mero repetidor, treinando inúmeras vezes o que lhe foi transmitido. Isso não quer dizer que não há aprendizagem e, de fato, alguns alunos, professores e pais até acreditam que essa seja a melhor abordagem, justificando tal escolha pelos anos em que ela vem sendo utilizada.

No construtivismo radical, porém, acontece diferente, pois nessa vertente ensinar é distinto de treinar, uma vez que essa abordagem enfatiza o ensino a partir de atividades que favorecem o ato de pensar. Nesse cenário, entra em destaque a criatividade, que, como já afirmado, várias vezes neste trabalho, é fundamental ao ensino-aprendizagem das demonstrações.

Realmente, a criatividade é mais um ponto que enriquece o estudo das demonstrações à luz do construtivismo, uma vez que o aluno, ao compreender as técnicas e não somente repeti-las, pode se tornar construtor de seu próprio conhecimento.

Sobre o tipo de compreensão defendida por este trabalho, apoiar-nos-emos no que Skemp (1980) denominou de compreensão relacional e de compreensão instrumental. Contudo, este tópico, como já mencionamos, será melhor discutido na seção posterior deste capítulo.

Outro ponto fundamental da teoria do construtivismo radical preconizada por von Glasersfeld (1996) é a necessidade de inferir o pensamento dos alunos.

Para von Glasersfeld (1996), os conceitos e as relações conceituais não podem passar de uma mente para outra, por isso é preciso que os conceitos sejam construídos individualmente por cada aluno, sob a orientação do professor. Mas para orientar, o professor precisa ter ideia das estruturas conceituais que os alunos estão usando, o que, por sua vez, exige que o professor tenha um modelo de como o aluno pensa. Para uma melhor explicação a respeito de como o professor pode realizar esta tarefa, von Glasersfeld (1996, p. 306) explica que:

> Se se partir do pressuposto de que os alunos, de uma forma geral, tentam que sua experiência faça sentido, será normalmente possível obter uma idéia de como eles pensam. Quanto mais experiência com os alunos o professor tiver reunido, mais hipóteses terá de fazer uma conjectura fundamentada sobre qual poderá ser o pensamento de determinado estudante e de supor aquilo que Vygotsky chamou apropriadamente << a zona de desenvolvimento proximal >>.

Dessa forma, à medida que o professor cria esse modelo de como o aluno pensa, depois de trabalhar com determinados alunos num certo tempo, ele pode ter uma melhor atuação como orientador, não apontando os possíveis erros, mas direcionando-os para a forma correta, evitando a repetição pura e gerando assim a compreensão do que está sendo estudado. Como consequência disso, pode ganhar sua confiança e assim ter a oportunidade de, ajudando cada aluno a chegar às respostas corretas, levá-los não apenas à conclusão do professor ou do livro, mas também à sua própria compreensão de modo que ambas se complementem. Assim sendo, embora o aluno seja colocado como o centro da aprendizagem, o professor, que é participante da vida matemática de seus alunos, também é muito importante para o processo de ensino-aprendizagem, uma vez que, tem o papel fundamental de promover a aquisição de conhecimentos, os conceitos corretos e a linguagem própria.

Outra característica forte do construtivismo radical é a interatividade, tanto a do aluno com o objeto do conhecimento, quanto a do aluno-aluno e do aluno-professor. Conforme o construtivismo radical, o aluno assume um papel de destaque no processo, sendo o sujeito de sua aprendizagem, o que justifica essa interação dele com todas as partes que constituem esse sistema: aluno, professor e conhecimento.

Tudo isso porque "quando os alunos são guiados pelo seu próprio interesse para investigar e entender conceptualmente uma situação, as mudanças conceptuais que efetuam durante o processo de reflexão serão muito mais sólidas do que se fossem obrigados pelo professor" (VON GLASERSFELD 1996, p. 307). Dessa forma, o professor orienta e não somente instrui, pois incentiva o aluno à reflexão e, assim, gera o aprendizado.

Ainda tratando das demonstrações matemáticas o professor, à luz do construtivismo, pode auxiliar os estudantes a identificarem sua estrutura. Pode também apresentar vários teoremas demonstrados e fazer uma distinção entre os argumentos que estão corretos e os que não estão, orientando a discussão e a reflexão do porquê estarem certos ou errados. Desse modo, procura evitar que as demonstrações apareçam para os alunos de forma infalível ou até mesmo imposta e, ao mesmo tempo, busca criar um espaço em que o aluno pode desenvolver suas habilidades num compasso adequado.

Para entender de forma sucinta o aspecto diferencial do construtivismo radical, neste trabalho, apresentamos o que von Glasersfeld (1996, p. 314) afirma na finalização de sua obra: "resumindo, aquilo que o construtivismo radical pode sugerir aos educadores é isto: a arte de ensinar tem pouco a ver com o intercâmbio do conhecimento, o seu objetivo fundamental deve ser incentivar a arte de aprender". Esse é o ponto crucial da importância de um ensino-aprendizagem mais significativo das demonstrações: incentivar a arte de aprender.

Incentivar a arte de aprender é potencializar a compreensão, por isso, no próximo tópico, traremos um estudo sobre os níveis de compreensão que Skemp (1980) classifica como instrumental e relacional.

2.5 SKEMP – COMPREENSÃO INSTRUMENTAL E RELACIONAL

Para um ensino eficaz, é necessário não só que o aluno repita operações ou execute as atividades propostas pelo professor de forma mecânica, mas que ele possa compreender as relações e edificar um conhecimento sólido de forma criativa, sustentado pelo porquê dos conteúdos ou atividades, conforme explica o construtivismo.

Tal ideia é defendida por Skemp (1980) que identifica dois tipos de conhecimento: o saber e a compreensão. O saber, também chamado de *compreensão instrumental*, diz respeito somente, como explica Fossa (2001), ao conhecimento *do que* de algo, enquanto a compreensão, também denominada *compreensão relacional*, além do conhecimento *do que* de algo, soma a este o *porquê*.

Neste trabalho, adotamos esses níveis de compreensão, instrumental e relacional, acrescentando mais uma categoria, referente à falta de compreensão, a qual denominamos *sem compreensão*. É importante destacar que esses níveis de compreensão fazem parte de um mesmo processo que é o conhecimento. Para se chegar à compreensão relacional, é preciso dominar o *do que* e, portanto, é necessária obter a compreensão instrumental.

Skemp (1980) aborda a Matemática de forma muito interessante. Segundo ele, a Matemática não se constitui somente numa coleção de conhecimentos, mas no exercício do conhecer. Assim como há a compreensão instrumental e relacional, há também a matemática instrumental e a matemática relacional e, segundo Fossa (2001, p. 84), “a meta da educação matemática é levar o aluno ao nível da matemática relacional”.

Nesse sentindo, na nossa pesquisa, demos sempre ênfase a esta meta da educação matemática, procurando levar os alunos a uma compreensão mais fundamentada, que aqui acreditamos ser sustentada pela autonomia que ele possui em construir seu próprio conhecimento, como sujeito de cognição. Assim, é importante fazer um estudo sobre os níveis de compreensão.

Sobre a consequência de limitar o ensino a uma compreensão instrumental, Fossa (2001, p. 85), afirma que:

> [...] o resultado de fiar-se exclusivamente na compreensão instrumental é uma falta de criatividade, uma falta de agudeza no pensamento crítico e, até uma capacidade reduzida na performance de atividade automatizada. Um exemplo do último item é o caso do pequeno escolar que decora um poema, uma prece, ou algo semelhante, mas no meio da recitação esqueceu uma palavra e, conseqüentemente, tem de recomeçar tudo do início.

Dessa forma, um ensino de demonstrações matemáticas que se limite à compreensão instrumental deixará diversas lacunas no exercício da aprendizagem dos alunos. Particularmente, na graduação, estas lacunas são sentidas nas inúmeras disciplinas do curso que dependem muito dessas técnicas. Por exemplo, limitar o ensino de Análise Real a um exercício de inúmeras demonstrações de teoremas, sem ensinar o sentido de demonstrar tais teoremas seria inútil, pois o aluno não se sentirá motivado a aprender, mas somente repetir os feitos do professor e, a própria disciplina, que tem como papel analisar, perderá o seu fim.

Sobre a compreensão relacional, que complementa a instrumental, Fossa (2001, p. 85 - 86), destaca que:

> Os esquemas associados com compreensão relacional, em contraste aos associados com compreensão instrumental, são ricos em ligações internas e externas, o que promove o reconhecimento de situações relacionadas entre si, ou situações análogas. Assim, o sujeito epistemológico poderá reduzir o conjunto numeroso de regras especiais a um pequeno grupo de princípios gerais por um processo de abstração. Esta redução facilita a retenção e o manuseio de um vasto elenco de conhecimentos, favorecendo assim o pensamento crítico e criativo. Ao mesmo tempo, o desenvolvimento do pequeno grupo de princípios gerais permite uma organização mais eficiente dos vários elementos do conhecimento em um todo significado, favorecendo a memória. Assim, o sujeito se torna mais adaptável à realização de tarefas novas e menos dependente das situações concretas já vivenciadas.

O objetivo do ensino construtivista é levar os alunos a construírem sua aprendizagem. Assim, para se obter, verdadeiramente, uma aprendizagem, é preciso passar do nível instrumental, que é necessário, mas não suficiente, e chegar ao nível relacional, onde o aluno realmente tem autonomia, pois entendendo o porquê ele tende a abstrair melhor e ser mais criativo, já que não se limita a *fôrma* utilizada pelo professor.

Tomando por base o que foi exposto anteriormente, no quarto capítulo, na análise que faremos dos dados do Módulo de Ensino, definimos três categorias de compreensão:

- Sem compreensão – o aluno nem sequer consegue responder ou utiliza respostas erradas que não tem sentido com o questionamento feito.
- Compreensão instrumental – o aluno aprende algo novo num esquema simples, compreensão isolada de regras e algoritmos de repetição. Repete o procedimento feito em um exemplo em sala de aula pelo professor ou visto no livro didático.
- Compreensão relacional – o aluno aprende algo novo, construindo ideias de forma criativa e dinâmica, num esquema elaborado. Usa vários exemplos para construir a resposta nova, descrevendo sua resposta de modo próprio com criatividade, mas respeitando a estrutura básica das técnicas expostas.

Lembramos que o processo de compreensão é um processo contínuo. Primeiro, o aluno que ainda não tem compreensão adquire, a partir da orientação do professor ou de suas próprias pesquisas, uma compreensão instrumental, baseada em regras ou algoritmos de repetição. A partir disso, sustentado pela autonomia de ser construtor de seu próprio conhecimento, o aluno aprende a escrever suas próprias respostas, baseado num nível pessoal de abstração, que pode ser ou não auxiliado pelo professor.

Nesse processo, o professor assume um papel particular, pois precisa partir dele a orientação dos alunos para que as etapas sejam obedecidas. Assim é preciso de forma simplificada haver primeiro um aprendizado que é o instrumental, e em seguida que seja conduzido a segunda fase, quando o conteúdo for assimilado. Realmente, depois do saber adquirido é preciso passar para a fase do porquê que é a fase da compreensão relacional. Aqui o papel do professor é motivar os alunos a questionarem, buscarem respostas, se tornarem parte do processo não só como expectadores, mas como construtores de seu conhecimento com toda a liberdade de pensar e encontrar respostas mais criativas, que é também característica do construtivismo radical.

De acordo com o exposto, a meta de um ensino-aprendizagem construtivista das demonstrações matemáticas é levar os alunos a um nível de compreensão que lhes permite a realizar suas tarefas de forma criativa e assumir uma independência em relação à abstração e demonstração.

Frente ao exposto e inspirado nos discursos precedentes, apresentaremos a seguir o Módulo de Ensino proposto.

3 MÓDULO DE ENSINO

Neste capítulo apresentamos o Módulo de Ensino que foi proposto mediante a realização de uma atividade didática operacionalizada em sala de aula.

Para uma melhor compreensão de como foi realizado este módulo, antes do capítulo que trata da descrição e análise de cada encontro realizado, prestamos um esclarecimento de uma maneira mais geral de todo o trabalho realizado. Para isso, dividimos este capítulo em quatro partes. A primeira trata da pesquisa, o segundo do contexto do campo de pesquisa, em seguida, tratamos dos objetivos do Módulo de Ensino e, por fim, da metodologia utilizada na Intervenção que, por sua vez, foi subdividida em sub-itens, os quais denominamos momentos.

Como exposto, a proposta do Módulo foi baseada no ensino construtivista e o conteúdo abordado foi as demonstrações matemáticas, tendo como principal referência a obra *Introdução às Técnicas de Demonstração em Matemática,* Fossa (2009a), onde o assunto é abordado à luz do construtivismo radical, já exposto anteriormente.

3.1 SOBRE A PESQUISA

O Módulo de Ensino que será descrito a seguir, foi desenvolvido com os alunos do curso de Matemática da UFRN, matriculados na disciplina Teoria dos Números[9] nos períodos 2009.1 e 2009.2. Salientamos que, na primeira aplicação o Módulo foi utilizado como uma experiência piloto que nos deu base para um estudo mais aprofundado, bem como uma melhor organização e planejamento das aulas e conteúdos a serem desenvolvidos em 2009.2.

Os dados deste primeiro módulo não foram utilizados neste trabalho por acreditarmos que uma primeira experiência fosse útil para servir de ensaio e que à medida que avaliássemos esta experiência inicial poderíamos ter um direcionamento para, numa segunda experiência, trabalharmos melhor alguns aspectos como: avaliação diagnóstica, divisão do conteúdo, número de encontros, atividades com caráter mais construtivistas, ênfase na motivação da leitura e compreensão de termos matemáticos

[9] Disciplina normalmente oferecida no quarto período do curso de Licenciatura ou Bacharelado em Matemática da UFRN.

mais complexos.

Outro ponto importante em relação ao fato de realizar uma segunda experiência é o que explicam Laville e Dionne (1999), ao tratar da observação estruturada, sobre a qual afirmam que quando o pesquisador conhece bem o contexto em que vai realizar sua atividade e reconhece os aspectos que deverão ser mais observados no comportamento das pessoas, pode preparar um plano mais determinado de observação, onde poderá haver mais flexibilidade em relação à adaptação de circunstâncias e do objeto de estudo.

Tendo em vista os aspectos que foram destacados no parágrafo anterior, foram feitas algumas modificações no instrumento, para melhorarmos a intervenção e levar mais alunos a uma compreensão relacional das técnicas de demonstração, fazendo-os participantes criativos do Módulo de Ensino. Dentre as modificações realizadas destacamos: maior ênfase em atividades com leituras; redução do conteúdo por encontro; atividades mais motivadoras com base no construtivismo radical, buscando levar os alunos a análise e descrição dos exercícios e não só repetição; valorização da exposição das respostas e atividades em grupos e, ainda, mais clareza nos enunciados das questões.

Desta primeira experiência, apesar de não citarmos os dados, podemos destacar que os alunos questionaram muito sobre o porquê de não se ter este módulo no início do curso, tendo em vista que eles usarão as técnicas de demonstração no decorrer de toda a graduação em Matemática.

3.2 CONTEXTO DO CAMPO DE PESQUISA

O Módulo (2009.2) foi desenvolvido em nove aulas de duas horas aproximadamente cada, tendo como público alvo trinta alunos do curso de Licenciatura em Matemática da UFRN, matriculados na disciplina Teoria dos Números, no segundo semestre do ano de 2009, curso noturno. O conteúdo central abordado foi o estudo das técnicas de demonstrações matemáticas, mas também foi trabalhada uma parte introdutória referente à prática de abstração e linguagem, com ênfase na leitura e interpretação, análise e avaliação de uma série de diálogos que, mesmo relacionadas à Matemática, são desenvolvidos num contexto cotidiano.

Vale destacar que trinta alunos fizeram parte da aplicação desse Módulo de

Ensino, sendo 22 do sexo masculino e 08 do sexo feminino. Nos dados sobre a faixa etária só vinte cinco alunos são citados, porque os outros cinco alunos faltaram as primeiras aulas.

Realçamos que o questionário não foi aplicado para os cinco alunos que faltaram o primeiro encontro, porque já havíamos começado a trabalhar o conteúdo específico e tratar dos objetivos do estudo nesse segundo encontro. Assim, como parte do questionário se referia ao conhecimento prévio da base que os alunos tinham sobre determinados termos, linguagem e utilização das demonstrações, os dados poderiam ser comprometidos por já termos iniciado a Intervenção.

Para caracterizar o perfil dos alunos, procuramos saber sua faixa etária, por meio do questionário (ver Apêndice A). Conforme os dados coletados com o referido instrumento, apresentamos o quadro a seguir:

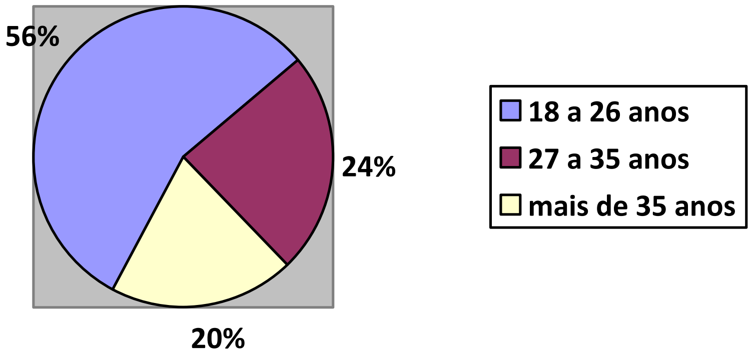
Quadro 1: Idade

Idade (anos)	**Quantidade**	**Percentual**
18 a 26	14	56%
27 a 35	6	24%
Mais de 35 anos	5	20%

Fonte: Pesquisa (agosto, 2009)

Os dados da Quadro 1 encontram-se representados no gráfico 1, a seguir:

Gráfico 1: Idade



Fonte: Pesquisa (agosto, 2009)

Pelo gráfico podemos observar que existe certo número de alunos que estão um pouco acima da idade aguardada para se cursar a graduação, esperando-se que o adequado seria que se entrasse na Universidade ao término do Ensino Médio, que é na média de 18 anos, embora alguns desses estivessem fora da faixa etária por já terem cursado antes uma outra graduação. Sabe-se que isto frequentemente acontece com turmas, como a nossa, do turno noturno, devido ao alto índice de alunos desse turno que precisam trabalhar durante o dia e acabam atrasando o curso.

Ainda visando compor o perfil dos alunos participantes da pesquisa, indagou-se no questionário se os alunos faziam graduação em licenciatura ou bacharelado em Matemática. Como resultado percebeu-se que 100% dos alunos (25 alunos) que responderam o questionário eram alunos do curso de licenciatura em Matemática.

Com relação à frequência nas aulas, vale salientar que houve uma rotatividade, dentre os trinta participantes, sendo que a média de alunos por aula era em torno de vinte e três alunos.

3.3 OBJETIVOS DO MÓDULO DE ENSINO

Para melhor conceber o intuito do Módulo de Ensino, apresentamos a seguir os objetivos do mesmo, explicitando o objetivo geral e, em seguida, os específicos.

3.3.1 Objetivo Geral

O objetivo geral do Módulo de Ensino é levar os alunos a um nível de compreensão relacional das demonstrações matemáticas.

3.3.2 Objetivos Específicos

Ao final do Módulo de Ensino, esperamos que o aluno seja capaz de:

a) Ler, analisar e interpretar textos matemáticos de modo crítico e reflexivo;

b) Compreender a definição de demonstração matemática e de termos frequentemente usados nos passos de uma demonstração;
c) Analisar a estrutura das seguintes demonstrações matemáticas: técnica de condicionalização, redução ao absurdo e indução matemática.

Como explicitamos no objetivo geral do Módulo, pretendemos que o participante alcance uma compreensão relacional, no sentido de Skemp (1980), sobre o conceito de demonstração matemática. Dessa forma, houve uma preocupação em se utilizar atividades construtivistas no Módulo de Ensino para que o aluno não somente recebesse uma instrução sobre as técnicas de demonstração matemática, mas construísse seu conhecimento a partir de atividades que o levassem a abstrair, ser criativo e chegar a um nível de entendimento que o permitisse analisar as mais diversas técnicas em nível relacional.

3.4 METODOLOGIA DA INTERVENÇÃO

Este item objetiva apresentar a metodologia utilizada para aplicação do Módulo de Ensino, destacando os Momentos nos quais esse Módulo foi dividido. Em cada sub-ítem apresentaremos a descrição de cada Momento com seus respectivos objetivos, enfatizando o Construtivismo Radical de von Glasersfeld, os conceitos de compreensão de Skemp e uma análise qualitativa dos dados e descrições de experiências. Bicudo (2004, p. 105) afirma que a pesquisa qualitativa traz grandes contribuições a um trabalho científico, pois privilegia "descrições de experiências, relatos de compreensões, respostas abertas a questionários, entrevistas com sujeitos, relatos de observações e outros procedimentos que deem conta de dados sensíveis, de concepções, de estados mentais, de acontecimentos, etc".

Assim, o percurso metodológico consistiu em cinco momentos, desenvolvidos ao longo de nove encontros[10], a saber:

[10] A descrição e análise das atividades realizadas nos Momentos será feita no capítulo seguinte, onde detalhamos cada encontro realizado e, ainda, a parte de entrevistas que foi realizada em encontros-extra, previamente agendados.

3.4.1 Momento I

O primeiro Momento consistiu na aplicação do questionário (Apêndice A), que nos serviu como diagnóstico, para identificar as ideias prévias dos alunos com relação às demonstrações matemáticas, servindo ainda para que pudéssemos adequar o Módulo de Ensino ao perfil dos alunos, uma vez que todo planejamento precisa ser flexível e, se necessário, sofrer mudanças para que atinja seus objetivos.

Os objetivos do questionário foram:

1. Conhecer o perfil dos alunos em relação à faixa etária e curso;
2. Analisar o entendimento que eles tinham do conceito de demonstração matemática, bem como de sua importância para o ensino;
3. Verificar o entendimento de conceitos e definições de diversos termos utilizados no ensino de Matemática como: proposição, teorema, lema entre outros.

Além disso, deixamos um espaço para que eles dessem sugestões ou comentassem algo que achassem necessário para a aplicação do Módulo.

Outro ponto importante do questionário é que através dele foi possível inferir o pensamento dos alunos, o que é uma característica do construtivismo radical.

Neste Momento, esperava-se que o aluno, a partir do questionário, pudesse ter uma perspectiva do que iríamos estudar no Módulo, bem como que ele se sentisse desafiado a expressar suas opiniões e questionamentos ou, pelo menos, se desse conta da necessidade do desenvolvimento de uma linguagem própria da Matemática.

3.4.2 Momento II

O Momento II correspondeu à aplicação da primeira parte do livro (FOSSA, 2009a). Para tanto, foi apresentado um primeiro contato com as demonstrações matemáticas só que num contexto de diálogos onde o conteúdo matemático foi colocado dentro de uma conjuntura natural, a partir de uma conversa informal. Este Momento foi realizado em dois encontros.

O objetivo desse Momento foi discutir e analisar os diálogos apresentados nos textos, para que os alunos pudessem expressar suas linhas de raciocínio, exercendo a argumentação e a criatividade.

Vale salientar que, ao fim de cada diálogo, os alunos eram ainda submetidos a alguns questionamentos. A elaboração das respostas a essas perguntas era feita a partir da realização de pesquisas e discussões com outros colegas dos grupos. Isso foi realizado em tempo extra, fora da classe, e apresentados na aula seguinte.

Neste Momento, esperava-se que os alunos num contexto informal pudessem expressar suas ideias em forma de argumentação, isto é, o aluno fizesse argumentações, mas ainda não tematizassem o conceito de demonstração.

3.4.3 Momento III

O momento III consistiu na aplicação didática do Módulo referente ao desenvolvimento das técnicas de demonstrações matemáticas:

- Condicional;
- Bicondicional;
- Redução ao absurdo;
- Indução Matemática.

Todos os conteúdos foram abordados seguindo a linha do construtivismo radical, no qual o professor tem o papel de discutir os conteúdos, mas direcionando os alunos a construírem seu conhecimento.

As ações aqui desenvolvidas buscam atingir o objetivo central do Módulo de Ensino, o de desenvolver a compreensão relacional das técnicas de demonstração, destacando que essas técnicas são vistas de maneira informal. Fossa (2009, p. 45), falando sobre a importância do estudo das técnicas de demonstração em matemática destaca que o propósito de estudá-las é “facilitar a leitura dos textos matemáticos, especialmente na análise e na compreensão das demonstrações aí encontradas, bem como proporcionar ao aluno recursos para demonstrar os teoremas que os textos deixam a seu encargo”.

Para se chegar a esse objetivo foram feitas, pelo professor, exposições sobre as técnicas citadas, com base na segunda parte do livro *Introdução às Técnicas de Demonstração em Matemática* (FOSSA, 2009a), bem como, realizamos a resolução de exercícios individuais e em grupos, cuja exposição dos resultados era feita no quadro. Também foi feita a análise de demonstrações encontradas em diversos livros das disciplinas estudadas no curso de Matemática. Salientamos que neste tipo de exercício os alunos não precisavam se preocupar em demonstrar, mas em analisar a estrutura de resolução, onde eles faziam críticas e avaliavam os passos da demonstração, identificando as técnicas e seu processo de construção.

Preferimos, num primeiro momento, como fez Fossa (2009a) no livro base desta pesquisa, minimizar o conteúdo matemático, para que o aluno não encontrasse barreiras com complicações matemáticas e, assim, aprendesse de maneira geral a técnica estudada. Além disso, observamos que nem todos os alunos estavam cursando o mesmo período do curso e, assim, não tinham requisitos comuns que nos permitissem pedir que demonstrassem proposições de conteúdos específicos.

Depois de conhecer as técnicas e aprender a analisar a estrutura da dissertação, aplicamos esse conhecimento analisando as diversas técnicas de demonstrações encontradas em livros utilizados nas disciplinas do curso, nesse segundo momento, os alunos tiveram um contato mais aprofundado com conteúdos matemáticos específicos em livros de Análise Real, Geometria Analítica, Geometria Euclidiana, Álgebra Linear, Cálculo, entre outros.

Os resultados esperados neste momento foram os mais importantes para o Módulo, uma vez que este foi considerado seu núcleo central. No fim deste Momento, esperava-se que os alunos através de um contato com as definições, descrições e análises das técnicas de demonstrações fossem capazes de reconhecê-las nas mais diversas disciplinas e contextos, soubessem ainda classificá-las de forma correta, bem como, identificar e analisar seus principais passos e, até mesmo reconhecer possíveis erros na argumentação utilizada por quem a estava resolvendo.

Esperamos, em resumo, uma autonomia que maximizasse a criatividade dos alunos e os tornasse capazes de realizar suas próprias demonstrações obedecendo suas principais características, mas com liberdade de escrever e argumentar de maneira pessoal.

3.4.4 Momento IV

O penúltimo Momento da Intervenção consistiu na aplicação de uma avaliação escrita. Tendo em vista que o Módulo de Ensino foi aplicado dentro de uma disciplina do curso, foi necessário realizar uma avaliação para atribuir uma nota. A avaliação (Anexo B) teve como objetivo registrar por escrito as respostas dadas pelos alunos e, também, avaliarmos o nível de compreensão que os alunos obtiveram ao fim do Módulo de Ensino. O resultado também foi bastante útil para analisarmos se os objetivos deste trabalho foram alcançados.

Nesta parte, destacamos ainda algumas questões psicológicas que acreditamos terem força para interferir nos resultados que esperávamos, uma vez que notamos que alguns alunos por saberem que estavam sendo avaliados mudaram suas posturas. Por isso, ao fim da avaliação pedimos que eles escrevessem, num papel à parte, suas opiniões e/ou comentários sobre o Módulo de Ensino, não exigimos que fosse obrigatório, nem que eles se identificassem. Isso foi feito com o objetivo de sondar o que se passava na mente deles e como eles se sentiam depois desses nove encontros. Essa sondagem é também uma forte característica do Construtivismo Radical. Além disso, ter as referidas opiniões por escrito foi muito útil para analisar os níveis de compreensão instrumental e relacional que, de certa forma, poderiam ter ficado comprometidos se a análise fosse feita apenas à partir da avaliação escrita.

Esperamos neste Momento compreender se o comportamento dos alunos ao longo do Módulo de Ensino pode ser refletido fielmente na avaliação escrita, assim como perceber se eles se sentiram motivados a expressar livremente sua opinião sobre a Intervenção.

3.4.5 Momento V

O Momento V, última parte da Intervenção, consistiu em conversar com alguns alunos sobre a proposta do Módulo de Ensino. Depois da avaliação, escolhemos alguns alunos para entrevistarmos a respeito da Intervenção, para isso utilizamos um tipo de entrevista chamada episódica, que segundo Flick (2002) “procura a ‘contextualização’ das experiências e acontecimentos a partir do ponto de vista do entrevistado". A escolha por este tipo de entrevista é consoante com o construtivismo radical que afirma que o único acesso que temos ao pensamento do aluno é através de mecanismos indiretos (FOSSA, 1998).

O objetivo dessa parte foi levar o aluno a externar seu pensamento por meio de um diálogo com o entrevistador que nos permitiria formular hipóteses sobre suas construções mentais e que, ao mesmo tempo, ofereceria validação pelo menos parcial das mesmas através da interação aluno/entrevistadora. As entrevistas foram realizadas em encontros extras, previamente agendadas com os alunos e por isso não contam como encontros. Tais entrevistas serão descritas e analisadas no capítulo a seguir.

Para alcançar o referido objetivo, realizamos de maneira informal uma conversa com os alunos e fomos tentando perceber que motivações eles tiveram durante a aplicação do Módulo, bem como, sua opinião sobre a importância desse tipo de iniciativa. Destacamos que essa percepção é bem diferente da percepção esperada no item anterior onde eles, após a avaliação, poderiam escrever o que quisessem sobre a Intervenção, pois aqui poderíamos ir contextualizando suas experiências e questionar sobre os aspectos que para nós eram os mais importantes.

O Capítulo a seguir detalhará tudo o que foi realizado nos cinco Momentos. Destacamos que junto com a descrição dos encontros também é realizada a análise dos dados.

4 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DO MÓDULO DE ENSINO

Essa parte do trabalho consiste em descrever a intervenção realizada nos cinco Momentos, que por sua vez foram divididos em nove encontros, analisando cada um dos seus aspectos.

4.1 MOMENTO I

Como exposto anteriormente, o primeiro Momento consistiu de apenas um encontro, cujo objetivo foi, a partir de um questionário diagnóstico, identificar as ideias previas dos alunos com relação às demonstrações matemáticas.

Por sua vez, os objetivos do questionário foram:

- Conhecer o perfil dos alunos em relação a faixa etária e curso;
- Analisar o entendimento que eles tinham do conceito de demonstração matemática;
- Verificar o entendimento de conceitos e definições de diversos termos utilizados no ensino de Matemática como: proposição, teorema, lema entre outros.

A seguir, apresentamos a descrição deste encontro, acompanhada das análises dos dados e de uma avaliação dos objetivos alcançados.

4.1.1 Encontro I

No primeiro encontro, realizado no dia 12 de agosto de 2009, apresentamos a proposta do Módulo de Ensino e, logo em seguida, aplicamos o questionário. Contudo, para não comprometer a aplicação deste instrumento, deixamos as considerações mais detalhadas para o final do encontro, após a coleta de seus dados. Ainda neste primeiro encontro, entregamos aos alunos os textos referentes à primeira parte do Módulo, relativa à abstração e linguagem matemática. Vale salientar que tais textos correspondem à primeira parte do livro *Introdução às Técnicas de Demonstração em Matemática* (FOSSA, 2009a) onde a argumentação e a linguagem matemática são trazidas dentro de um contexto quotidiano na forma de diálogos.

Outro aspecto relevante consiste no fato de que a entrega dos textos neste momento teve o intuito de proporcionar-lhes tempo para que pudessem ler o texto, discutir com os colegas e pesquisar os termos que lhes eram novos. Nessa aula (encontro), foram disponibilizados os textos das duas aulas seguintes.

Como os diálogos dos textos a serem trabalhados eram divididos em cinco dias da semana (segunda, terça, quarta, quinta e sexta-feira), resolvemos dividir a turma em cinco grupos de seis alunos cada. Os grupos receberam a tarefa de ler os textos, tentar interpretá-los e, se preciso, fazer pesquisa dos termos ou conteúdos novos. No encontro seguinte, deveriam expor para os demais a sua parte e apresentar as respostas de algumas questões dos exercícios específicos propostos.

4.1.1.1 Descrição e análise do questionário aplicado no primeiro encontro

Nesse item, apresentamos o questionário respondido pelos alunos, bem como a descrição e análise de suas respostas.

Como já observado, o questionário buscou identificar alguns pontos importantes, como a faixa etária dos participantes (primeira questão), já relatada no item 3.2 que trata do contexto do campo de pesquisa, e, na segunda questão, o curso que faziam na graduação (licenciatura ou bacharelado). As demais questões se destinaram ao conhecimento prévio dos alunos, buscando caracterizar o grau de entendimento dos alunos em relação às técnicas de demonstração matemática, a importância que eles davam a essa questão, sua auto-avaliação em relação à compreensão das referidas técnicas e da linguagem matemática e, por fim, os conceitos de alguns termos ou definições comuns nesta linguagem.

A seguir apresentamos os dados coletados no questionário de acordo com a seguinte ordem: o enunciado da questão; um quadro com os resultados e/ou porcentagem e uma análise das respostas obtidas.

Questão 01 e 02: veja a página 44 deste trabalho.

Questão 03: O que você entende por Demonstração Matemática?

Dos vinte e cinco alunos questionados, somente um deles não respondeu. Dentre os vinte e quatro restantes, dezessete responderam coerentemente com o conceito de demonstração apresentado na parte inicial do presente trabalho e o restante, oito alunos, utilizaram respostas que se distanciavam muito do conceito correto de demonstração.

Para melhor visualizarmos este resultado veremos o Quadro 2.

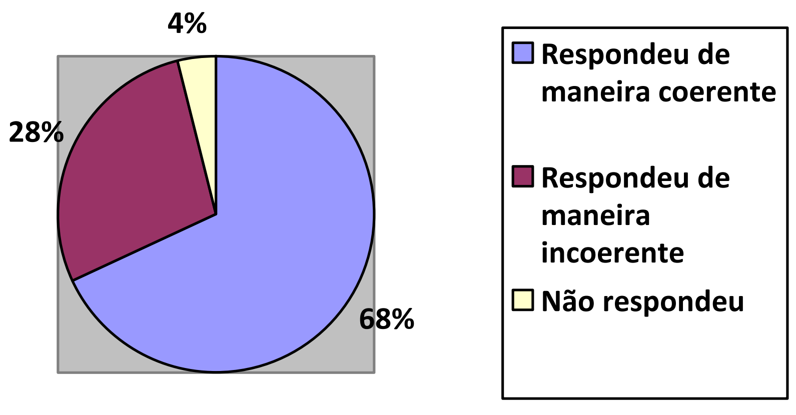
Quadro 2: Entendimento do conceito de demonstração matemática

CATEGORIAS	Nº DE ALUNOS	PORCENTAGEM
Respondeu de maneira coerente[11]	17 alunos	68%
Respondeu de maneira incoerente	07 alunos	28%
Não respondeu	01 aluno	4%

Fonte: Pesquisa (agosto, 2009)

Os dados do Quadro 2 encontram-se representados no gráfico 2, a seguir:

Gráfico 2: Entendimento do conceito de demonstração



Fonte: Pesquisa (agosto, 2009)

[11] De maneira coerente diz respeito a respostas que são iguais ou semelhantes ao conceito de demonstração utilizado em Matemática e apresentado no presente trabalho.

Percebe-se, a partir dos dados, que uma grande parte dos alunos, correspondente a mais da metade deles, tem até um bom entendimento do conceito de demonstrar em matemática embora, como veremos pelos dados posteriores, não tenham apresentado uma definição de maneira adequada.

Das respostas citadas, destacamos alguns exemplos transcritos na íntegra. Vale elucidar que os participantes serão chamados de alunos A, B, C, ..., X. Tendo em vista que o questionário foi respondido sem identificação.

Exemplo de respostas coerentes com o conceito de demonstração:

O aluno Q respondeu: “É a validação de uma verdade, pois diferentemente das outras ciências, na matemática toda verdade é possível demonstrá-la, com exceção dos axiomas.”. O aluno B afirmou que é “um meio de se provar algo, mostrar que algo ou alguma coisa é verdadeiro.” Já o aluno T explicou ser “uma esplanação, utilizando de ferramentas já conhecidas como definição, hipótese e outros, para chegar a uma tese (finalidade).” Nessas respostas observamos que estes alunos já tinham noção do conceito de demonstração, embora houve várias imprecisões nas suas respostas. Destacamos que o aluno T apresentou dificuldades com relação à escrita, algo que se repetiu também com outros alunos, evidenciando assim uma deficiência de coerência de linguagem, o que no Capítulo 2 foi apresentado como dificuldade com relação à língua materna.

Exemplo de respostas incoerentes como conceito de demonstração:

Nesse item destacamos duas respostas que nos chamaram bastante atenção. O aluno E respondeu: “Entendo que é algo que quando a gente ta no ens. Médio que vemos pronto, na universidade a gente desenvolve e passa a ser pronto, passa a ser demonstrado”. Esse exemplo foi destacado pela dificuldade que o aluno teve de expressar seu raciocínio, podendo-se observar no seu texto a falta de concordância e uma grande dificuldade com a linguagem usual, fato que foi comum em diversas outras respostas, tanto nas desse aluno quanto nas de outros da turma.

Outra resposta que destacamos é a do aluno C: “Tudo aquilo que é feito para ‘dizer’ como tal fato surgiu.” Nessa resposta não há evidência de compreensão instrumental do conceito, pois o aluno parece ter tentado reproduzir algo que ele já havia escutado sobre demonstração, mas, da forma como escreveu, não conseguiu uma explicação coerente.

Questão 4: Cursou alguma disciplina na graduação onde o professor introduziu as Técnicas de Demonstração Matemática?

Nessa questão pedimos para que eles respondessem sim ou não, sendo que quando respondessem sim era solicitado que citassem a disciplina. As respostas estão detalhadas no Quadro 3.

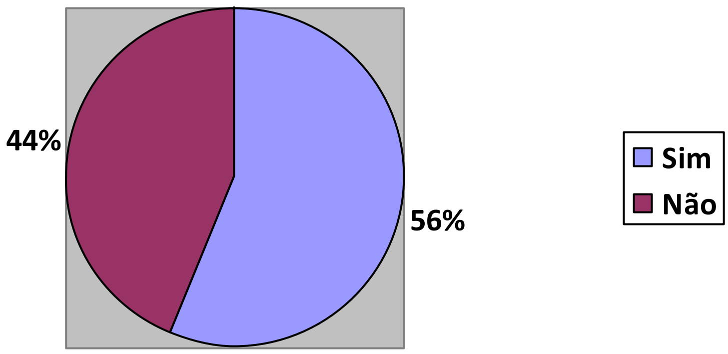
Quadro 3: Cursou alguma disciplina na graduação onde o professor introduziu as técnicas de demonstração.

OPÇÃO	Nº DE ALUNOS	PORCENTAGEM
Sim	14	56%
Não	11	44%

Fonte: Pesquisa (agosto, 2009)

Os dados do Quadro 3 encontram-se representados no Gráfico 3.

Gráfico 3: Cursou alguma disciplina na graduação onde o professor introduziu as técnicas de demonstração.



Fonte: Pesquisa (agosto, 2009)

Em geral percebemos que nesta questão houve certo conflito quanto à compreensão do enunciado, pois a maioria dos alunos que respondeu sim, achou que deveria responder sim se já tivesse cursado disciplinas em que o professor tivesse *utilizado* as técnicas e nossa intenção era saber se o professor havia dado uma explicação sobre as mesmas.

Além disso, nessa questão foi pedido que os alunos que responderam sim citassem qual disciplina. As indicadas foram: Análise Real, Geometria Euclidiana, Análise Combinatória e Probabilidade, entre outras.

Questão 5: Conhece algum documento que fale do uso ou incentive a utilização das Técnicas de Demonstração Matemática?

A esse item todos os alunos (25 alunos) responderam que não, o que mostrou a necessidade do nosso trabalho, pois nos propomos a elaborar um Módulo de Ensino que sirva de material para o ensino-aprendizagem das técnicas de demonstração matemática.

Questão 6: Você acha que conhecer as Técnicas de Demonstração Matemática ajudaria ou facilitaria a aprendizagem das Disciplinas do curso? Em caso afirmativo, por quê?

Nesse quesito, todos os alunos (25 alunos) responderam afirmativamente. Dessa forma, podemos afirmar que os alunos têm consciência da necessidade de estudar as técnicas de demonstração, uma vez que compreendem e afirmam que este estudo poderia ajudá-los na aprendizagem de muitas disciplinas.

Ressaltamos que nesse item pedimos ainda que os alunos que responderam sim justificassem sua afirmação. A seguir analisamos algumas respostas apresentadas.

O Aluno A respondeu: “Falam bastante pra gente do curso, das demonstrações como a essência da matemática”. Já o aluno L afirmou: “Acredito que o curso é todo baseado em demonstrações”; o aluno S, semelhantemente ao aluno L escreveu: “Porque são várias disciplinas do curso que requerem demonstrações”; o Aluno Y: “Porque várias disciplinas relacionadas a matemática possuem teoremas e propriedades que precisam ser validadas através de demonstração”. A partir dessas respostas podemos tecer algumas considerações importantes. Primeiramente, os comentários dos alunos mostram claramente que eles não só entendem que estudar as técnicas de demonstrações matemáticas é importante para sua aprendizagem, mas também compreendem que muitas disciplinas no curso de Matemática necessitam de demonstrações. Outra consideração importante é que nessa questão tais alunos conseguiram expressar de forma clara seu pensamento.

Questão 7: Quanto à interpretação da linguagem matemática, qual seu grau de habilidade?

Nessa questão oferecemos quatro possibilidades de respostas: ruim, médio, bom e ótimo e, em seguida, pedimos para que eles explicassem sobre a opção escolhida. As respostas podem ser melhor visualizadas no Quadro 4.

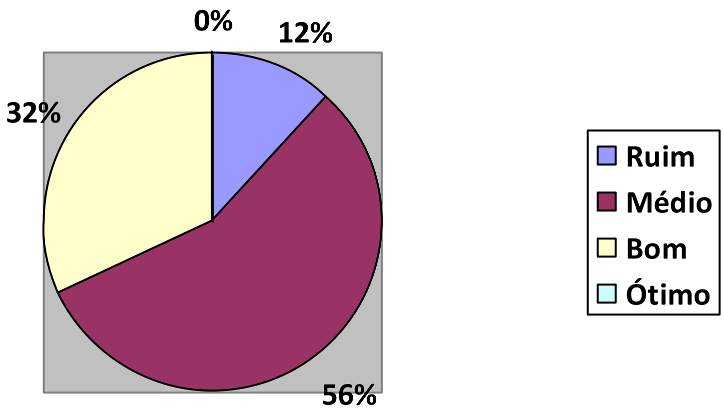
Quadro 4: Grau de habilidade quanto à compreensão da linguagem matemática.

GRAU	Nº DE ALUNOS	PORCENTAGEM
Ruim	03 alunos	12%
Médio	14 alunos	56%
Bom	08 alunos	32%
Ótimo	Nenhum aluno	0%

Fonte: Pesquisa (agosto, 2009)

Os mesmos dados podem ser também visualizados no Gráfico 4.

Gráfico 4: Grau de habilidade quanto à compreensão da linguagem Matemática.



Fonte: Pesquisa (agosto, 2009)

Conforme verificamos, a maioria dos alunos considera ter pouca (ruim ou média) compreensão da linguagem matemática, nenhum dos alunos considera que tenha uma ótima compreensão e apenas oito acreditam ter uma boa habilidade.

Destacamos abaixo algumas respostas referentes a cada item das opções fornecidas quanto ao grau de habilidade na compreensão.

Dos alunos que consideram que têm uma habilidade ruim quanto à linguagem matemática, destacamos a resposta do aluno A que diz: “quando pego um livro, geralmente de nível superior, não entendo muitas passagens”. Esse aluno expressa com bastante clareza sua dificuldade com a linguagem matemática. Pela forma como ele escreve percebemos que a dificuldade com a linguagem não se situa no que classificamos no item 2.3 como dificuldade com relação a língua materna, visto que ele escreve de maneira clara. Isso nos leva a supor que sua dificuldade seja diretamente com a linguagem matemática por não ser uma linguagem corriqueira.

Quanto aos alunos que responderam a segunda opção, ou seja, ter uma habilidade média em relação à linguagem, citamos a seguir alguns de seus comentários. O aluno H destaca classificar sua habilidade como média, “Devido a abstração de alguns conteúdo abordados”. Já o aluno B afirma: “As vezes me enrolo na interpretação”; o aluno O: “Consideraria bom se quando eu vise entende-se imediatamente, mas ainda preciso olhar e pensar um pouco”. Considerando as respostas anteriores, notamos que esses alunos pensam que, com esforço e mais atenção, eles teriam um melhor entendimento da linguagem matemática. Outro fator de destaque no que eles escrevem é a abstração e interpretação, elementos fundamentais da linguagem matemática. Acreditamos que, no caso desses alunos, já existe uma atenção com relação à abstração e, também, atenção diferenciada à nova linguagem, mas ao mesmo tempo, eles demonstram não saber como desenvolver tais habilidades. Vale lembrar que esta opção foi a da maioria dos participantes.

Em relação aos que responderam *bom*, enfatizamos que mesmo respondendo que consideram ter certo grau de habilidade com a linguagem matemática, ainda houve algumas respostas que indicaram necessidades que precisam ser trabalhadas. Como exemplo, o aluno J escreveu: “Gosto da linguagem matemática, convivo com ela todos os dias, mas tenho alguma dificuldades”; já o aluno K: “Dá pra intender a maioria das coisas”. Na verdade, percebemos que eles têm dificuldades também na escrita usual, pois a grande maioria das respostas, como pode ser visto pelos registros aqui transcritos, apresenta erros básicos de gramática e ortografia. Alguns alunos tiveram dificuldades até com o questionário, em relação à interpretação do enunciado de algumas questões, o que é muito preocupante para alunos que estão no ensino superior.

Questão 8: Quanto a utilização das Técnicas de Demonstração Matemática, qual seu grau de habilidade?

Nessa questão, como na anterior oferecemos quatro possibilidades de respostas: ruim, médio, bom e ótimo e, em seguida, também pedimos para que eles explicassem sobre a opção escolhida. O Quadro 5 ilustra melhor esses resultados.

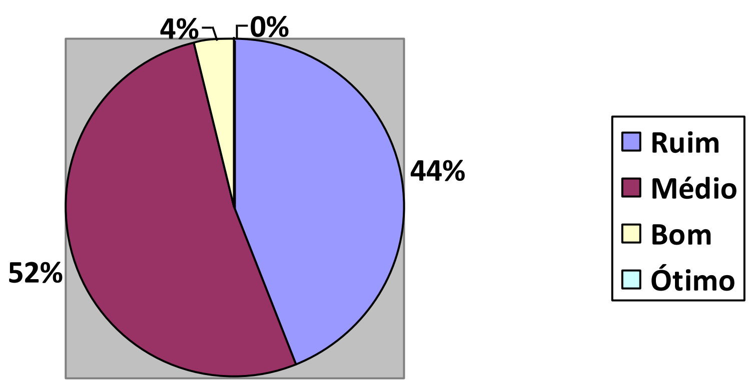
Quadro 5: Grau de habilidade quanto à utilização das técnicas de demonstração matemática.

GRAU	Nº DE ALUNOS	PORCENTAGEM
Ruim	11 alunos	44%
Médio	13 alunos	52%
Bom	01 aluno	4%
Ótimo	Nenhum aluno	0%

Fonte: Pesquisa (agosto, 2009)

Os dados do quadro se encontram ainda explicados no Gráfico 5.

Gráfico 5: Grau de habilidade quanto à utilização das técnicas de demonstração matemática.



Fonte: Pesquisa (agosto, 2009)

Nesta questão, como na anterior, nenhum aluno assinalou a alternativa referente a uma ótima habilidade, o que nos leva a concluir que exista uma grande necessidade de se trabalhar a linguagem matemática, bem como as técnicas de demonstrações matemáticas. Assim, desde o início do Módulo, já tínhamos como certo que valeria a pena realizar um trabalho desse tipo tendo em vista a necessidade de tais alunos.

De todos os questionamentos, esse foi o que mais chamou nossa atenção, pois observamos que os alunos responderam a parte da questão que se referia a explicação de suas respostas como um pedido de socorro, solicitando que as demonstrações ganhassem um espaço oficial nas disciplinas do curso de Matemática, como ocorreu, também, na experiência piloto.

Outro fator preocupante foi o fato de que somente um aluno considerou ter um bom grau de habilidade com as técnicas de demonstração e, como já mencionamos, nenhum respondeu que tem uma ótima habilidade, enquanto que um grande número de alunos considera ter um grau de habilidade ruim. Apresentaremos a seguir algumas respostas ilustrativas.

O aluno V respondeu que tinha uma boa habilidade com as técnicas, mas quando precisou explicar respondeu o seguinte: “Nem sempre consigo atingir o resultado a ser demonstrado”, o que para nós implica que ele também não possui muito contato com o uso correto das técnicas de demonstração.

Dentre os alunos que marcaram o item 2, correspondente a uma habilidade média, citamos duas respostas. O aluno Q: “No currículo de Licenciatura em Matemática não tem uma disciplina que trata especificamente de técnicas de demonstração matemática o que é lastimável, da mesma forma, tal assunto deveria ser introduzido ainda no ensino médio e até mesmo no fundamental”; enquanto o aluno Y: “Ainda não sou capaz de fazer demonstrações cuja explicação ainda não tenha visualizado”. Essas respostas nos levam a concluir que há uma falta de compreensão e, portanto, a necessidade de se realizar um estudo das técnicas de maneira explícita, como um conteúdo específico. Destacamos que o aluno Y, pode ser tomado como exemplo de alguém que já tinha um entendimento mínimo quanto às técnicas, mas se limitava a uma repetição de algo que ele já tinha visto anteriormente. Como ele se classificou como um aluno que tem uma habilidade média quanto às demonstrações matemáticas, podemos inferir que o entendimento que tem corresponde ao que chamamos de compreensão instrumental.

Destacamos ainda outras duas respostas referentes aos alunos que assinalaram o item 1, que correspondia a um grau de habilidade ruim em relação as técnicas de demonstração em matemática. A resposta do aluno E, “Quase nenhuma habilidade matemática quanto as demonstrações”, nos chamou atenção pela dificuldade com relação as técnicas e o quanto este aluno deve apresentar dificuldades com disciplinas mais demonstrativas. O aluno F, por sua vez, expressa uma expectativa positiva quanto a esse Módulo de Ensino: “Tenho muita dificuldade que desejo com muito esforços que sejam superados nesta disciplina”.

Verificamos a partir destas respostas o quanto é válida a tentativa de amenizar as dificuldades de abstração e habilidade matemática, pelo desenvolvimento desse Módulo de Ensino que trata especificamente de demonstração matemática. Lembramos que os alunos do curso de Matemática da UFRN, não possuem nenhuma disciplina específica obrigatória que trate da linguagem matemática, lógica, abstração matemática ou demonstrações matemáticas. O que os alunos conhecem é o modelo que reproduzem de seus professores ou de exemplos vistos em livros das disciplinas do curso de Matemática.

A nona questão, a penúltima do questionário, pedia para que eles respondessem sobre o entendimento que possuíam a respeito de alguns termos ou definições muito usadas na Matemática.

Questão 09: Escreva o que você entende por:

a) Proposição;
b) Teorema;
c) Axioma;
d) Corolário;
e) Lema;
f) Hipótese;
g) Tese;
h) Indução matemática.

Nessa questão, nosso objetivo era perceber qual entendimento os alunos tinham desses termos que são tão usados nas demonstrações. O resultado mais uma vez mostrou a necessidade de uma intervenção, como a realizada na nossa pesquisa, pois percebemos que a grande maioria dos alunos ou respondeu que não sabia o significado desses conceitos ou não responderam corretamente.

O Quadro 6 contém uma síntese das respostas obtidas, apresentadas quantitativamente.

Quadro 6: Respostas dos alunos referente ao entendimento de termos corriqueiramente utilizados nas demonstrações matemáticas.

ITEM	**NÃO SABE/ NÃO LEMBRA**	**RESPONDEU INCOERENTEMENTE**	**RESPONDEU COERENTEMENTE**
Proposição	**08 alunos**	**14 alunos**	**03 alunos**
Teorema	**08 alunos**	**08 alunos**	**09 alunos**
Axioma	**07 alunos**	**06 alunos**	**12 alunos**
Corolário	**14 alunos**	**06 alunos**	**05 alunos**
Lema	**17 alunos**	**05 alunos**	**03 alunos**
Hipótese	**04 alunos**	**11 alunos**	**10 alunos**
Tese	**04 alunos**	**10 alunos**	**11 alunos**
Indução matemática	**12 alunos**	**06 alunos**	**07 alunos**

Fonte: Pesquisa (agosto, 2009)

Mais uma vez chamamos a atenção para o número de alunos que não tem compreensão do conceito coerente, o correspondente ao número de alunos que respondeu que não sabia ou respondeu de maneira incoerente. Percebe-se assim que se precisa realizar um trabalho junto aos professores e alunos para conscientização da necessidade de buscarem compreender os termos, conceitos e definições que serão trabalhados durante todo o curso de Matemática e, também, no exercício de sua prática docente.

A última questão (questão 10) se referiu à importância que eles davam ao ensino de demonstrações.

Questão 10: Na sua opinião, qual a importância das demonstrações matemáticas para o ensino de Matemática?

Como essa questão era para ser respondida de maneira pessoal, destacamos algumas respostas que acreditamos serem válidas para expressar que alguns alunos, já no início do Módulo de Ensino, tinham interesse em estudar as técnicas de demonstração para amenizar algumas dificuldades encontradas nas disciplinas do curso mais abstratas ou que envolviam muitas demonstrações de teoremas.

As respostas dos alunos C, J e M, se referem à importância que o entendimento das técnicas pode ter para a aprendizagem de Matemática. Esse fator é um dos maiores pilares do nosso trabalho, uma vez que trabalhamos com o ensino-aprendizagem das referidas técnicas. Essas respostas estão destacadas a seguir.

Aluno C: “É de suma importância pois com as técnicas fica mais fácil de entender a matemática.”

Aluno J: “É necessário e deve ser bem explicado aos alunos. Facilita o entendimento das disciplinas.”

Aluno M: “No meu ponto de vista, é muito bom e talvez os alunos entederiam melhor a matemática.”

Já o aluno P, destaca outro fator chave deste estudo, que se enquadra no nosso objetivo geral que é levar os alunos a compreensão relacional das técnicas de demonstração. Segundo ele, as demonstrações matemáticas são “De extrema importância, pois desenvolve no aluno o interesse, a curiosidade, o raciocínio, aumentando o nível de abstração do aluno”. Concluímos, assim, que esse aluno tem um entendimento de que as técnicas de demonstração desenvolvem no aluno habilidades, que fazem com que as demonstrações matemáticas tenham seu grau de importância na aprendizagem de Matemática, que vão além de simplesmente demonstrar, mas de tornar o aluno mais criativo e com uma maior capacidade de abstração, levando-o assim a uma maior autonomia na sua aprendizagem.

No final do questionário foi deixado um espaço para que, se achassem necessário, os alunos o utilizassem para comentários e sugestões. Mesmo a maioria dos alunos (quinze) tendo deixado esse espaço em branco, apresentamos alguns dos depoimentos recebidos.

Aluno A: “Há algum tempo espero ansiosamente por esta disciplina (teor. dos nºs), pois imagino que fuja de uma visão da matemática enquanto sinônonimo de ‘contas’, ‘cálculos’.”

Aluno G: “Acredito que se o curso de matemática tivesse uma introdução ao conceito de demonstração ou até mesmo a disciplina de lógica no início do curso iria ajudar muitos alunos no processo de formação.”

Aluno J: “Gostaria que essas perguntas feitas acima que eu não pude definir fosse aplicada nesta disciplina.”

Aluno N: “Acredito que os temas abordados acima, deveria ser utilizado logo ao ingresso do curso.”

Aluno T: “Gostaria que houvesse a oportunidade particular de algum curso de demonstração matemática.”

Essas respostas foram destacadas também para mostrar que o Módulo de Ensino já era válido para os alunos e observarmos que, mesmo os alunos não conhecendo do que iríamos tratar especificamente, já havia uma expectativa e uma esperança na melhoria de suas aprendizagens. Ressaltamos que esse foi um elemento de grande importância logo no início do nosso trabalho.

Destaca-se ainda que, embora não fossem obrigados a responder esse último item, entendemos que muitos alunos resolveram respondê-lo com o intuito de reivindicar um auxílio em pontos que eles percebem ter dificuldades como o significado dos termos, a linguagem matemática e as técnicas de demonstração matemática.

4.1.2 Avaliação do Momento I

Ao fim desse Momento I, foi possível concluir que seus objetivos foram alcançados, uma vez que já conhecíamos o perfil do aluno com relação à faixa etária e curso. A partir dos dados coletados no questionário foi possível também realizar uma análise do entendimento que eles tinham do conceito de demonstração em Matemática, bem como, da importância que a aprendizagem das técnicas tem para o ensino de Matemática, além de verificarmos o entendimento que tais alunos tinham de diversos termos e definições que têm extrema importância na Matemática.

Vale destacar que no final desse Momento era esperado que o aluno, a partir do questionário, pudesse ter uma perspectiva do que iríamos estudar no Módulo, e, que ele se sentisse desafiado a expressar suas opiniões e questionamentos ou, pelo menos, percebesse a necessidade de uma linguagem própria da Matemática.

Observamos que tal expectativa foi alcançada, pois pela própria forma com que se expressaram, em especial nas perguntas relacionadas à sua visão sobre a importância de se estudar essas técnicas, anunciaram suas necessidades, tendo alguns deixado claro que precisavam de ajuda principalmente com relação ao estudo mais sistemático das técnicas e da linguagem utilizada no ensino de Matemática.

Destacamos ainda que a análise desses questionários logo no início da Intervenção nos deu base para inferirmos no pensamento dos alunos, característica do construtivismo radical tão enfatizada nesse trabalho, o que nos permitiu começar o Módulo de Ensino conhecendo um pouco das necessidades e do entendimento que os participantes tinham sobre o que nos propomos a executar.

4.2 MOMENTO II

O Momento II consistiu em dois encontros. Em um primeiro contato com as demonstrações matemáticas, o conteúdo matemático foi colocado dentro de uma conjuntura natural através da análise textual de diálogos centrados em interessantes temas matemáticos e alguns paradoxos.

Nesses encontros, os participantes foram convidados a identificar e avaliar os argumentos dos personagens nos diálogos, bem como responder aos questionamentos trazidos em cada texto, entregues e lidos previamente, defendendo suas opiniões e expressando suas ideias. Destacamos que os objetivos desses dois encontros foram:

- Discutir e analisar os diálogos apresentados nos textos, para que assim os alunos expressassem suas linhas de raciocínio, exercessem a argumentação e a criatividade;
- Aproximar os alunos das demonstrações dentro de uma conjuntura natural, levando-os à interpretação, análise e avaliação desses diálogos de maneira crítica e reflexiva.

Vale ainda ressaltar que nesse Momento era esperado que os alunos, num contexto informal, expressassem suas ideias em forma de argumentação, uma vez que argumentam, mas ainda não tematizam, o conceito de demonstração.

A seguir apresentamos detalhadamente os encontros realizados neste Momento e uma avaliação sobre o alcance dos objetivos de tais encontros.

4.2.1 Encontro II

O segundo encontro do Módulo foi direcionado para a discussão dos textos entregues aos grupos na aula anterior. Vale lembrar que tais textos foram extraídos da primeira parte do livro *Introdução às Técnicas de Demonstração em Matemática* (FOSSA, 2009a) o qual, como destaca Fossa (2009a, p. 7), “consiste em uma série de diálogos que, embora sejam sobre assuntos relacionados à matemática, desenvolvem-se dentro do contexto quotidiano”.

No início da aula (encontro), motivamos os grupos, seguindo a sequência da apresentação, a começar por expor suas opiniões sobre a metodologia utilizada. Sugerimos que todos os presentes participassem da discussão promovendo uma espécie de debate, onde eles poderiam confrontar opiniões, defender suas posições e avaliar as críticas uns dos outros.

Esse início de aula (encontro) foi bem polêmico, pois os alunos, em sua maioria, reclamaram muito da linguagem do texto e do fato de precisarem ler e pesquisar. Os argumentos utilizados foram a falta de tempo, de familiaridade com a linguagem e a dificuldade de interpretar os exercícios propostos, entre outros. Provavelmente, essas reclamações foram maiores por estarmos trabalhando com uma turma do curso noturno. Observamos que a novidade de minimizar o conteúdo matemático e trabalhar com uma linguagem quotidiana foi aceita com dificuldade por grande parte dos alunos. Vale destacar que os mesmos alunos que faziam tais reclamações tinham uma grande dificuldade com a exposição de argumentos que as justificassem e tinham grande dificuldade de leitura ao precisar exercê-la na discussão.

Notamos que esses alunos apresentavam os dois tipos de dificuldades citadas na seção 2.5, com a língua materna e com a linguagem matemática, o que deveria motivá-los a estudar mais. Porém, observamos que para eles o fato de precisar se expor e trabalhar suas dificuldades era mais difícil que trabalhar com a nova metodologia de ensino que exigia deles maior autonomia e responsabilidade para com sua aprendizagem. Acreditamos que isso se deve a diversos fatores, mas, em especial, ao fato da maioria de seus professores trabalharem ainda com a abordagem tradicional, fato mencionado pelos próprios alunos.

Alguns alunos, porém, gostaram da metodologia e disseram que mesmo não estando acostumados com *leitura em Matemática*, acreditaram ter sido bastante válido o esforço de vencerem as resistências e realizarem a leitura proposta. Dentre estes, alguns até mencionaram que durante a leitura se familiarizaram um pouco mais com alguns termos matemáticos que foram abordados no questionário da primeira aula, cujo significado não entendiam. A maior parte desses alunos mencionou que uma grande dificuldade que têm com o linguajar matemático é de a linguagem ser muito peculiar e haver palavras que são comumente usadas apenas em Matemática, como corolário e axioma, por exemplo.

Depois dessa primeira parte, em que os alunos puderam expor sua opinião sobre a metodologia que utilizamos, começamos a discussão. Cada grupo, formado em média por 06 participantes, apresentou seu diálogo abordando as partes que consideravam mais importantes do texto. Em seguida, desenvolveu alguns dos exercícios propostos, e, por fim, ocorreu um debate sobre o conteúdo apresentado.

Figura 1: Alunos realizando discussão em grupo

Fonte: Pesquisa (agosto, 2009)

No parágrafo anterior comentamos sobre os grupos de trabalho, a Figura 1 ilustra um desses grupos discutindo o texto que ficou sob sua responsabilidade, para, em seguida, apresentá-lo a turma.

Primeiramente, o grupo do diálogo da *segunda-feira* apresentou sua parte. Como essa foi à primeira apresentação, a classe parecia um pouco tímida, tendo o grupo um pouco mais de trabalho para que houvesse uma participação da turma. Além disso, alguns problemas apresentados tiveram diversas soluções diferentes e por vezes tivemos que intervir para levá-los ao conceito correto de alguns termos e definições, como paradoxo, dilema, e ainda sobre os problemas paradoxais apresentados no texto.

Percebemos que a maior dificuldade encontrada pelos alunos foi querer, de qualquer forma, encontrar uma solução exata para os problemas paradoxais. Vimos então que o conceito de paradoxo parecia difícil de ser compreendido, uma vez que, para a maioria dos alunos, deveria ter uma solução exata para todo e qualquer questionamento matemático.

Uma das partes do texto mais comentadas na discussão foi o sétimo parágrafo de Fossa (2009a, p. 12) citada a seguir:

> ‘Está confundindo duas coisas distintas,” expliquei. “Uma é o Burrinho de Buridan, um paradoxo sobre livre-arbítrio, e a outra é um problema da teoria de conjuntos infinitos. No primeiro, o animal é tão burro que não consegue escolher entre duas pilhas exatas de feno; visto que as pilhas são exatamente iguais, não tem motivo de preferir uma à outra e, portanto, o burro morreu de fome. No segundo, precisamos escolher, de cada conjunto de uma coleção infinito, um elemento sem ter uma regra para fazer a mesma.’

Como no texto havia certa confusão de conceitos por parte nos envolvidos no diálogo, os alunos também se questionaram muito, pois o texto os levava a refletir nas diferenças entre as afirmações. Por alguns terem dificuldade de interpretação do texto, os alunos com melhor desempenho quanto ao raciocínio envolvido queriam impor suas respostas, o que causou muita polêmica. Nessa situação, precisamos intervir e ajudá-los a ler de forma mais lenta, percebendo os fatos e conceitos envolvidos no texto. Ao fazer isso, percebemos que, à medida que eles chegavam à compreensão, a polêmica ia diminuindo e a discussão voltava a fluir.

Depois do texto, houve a discussão dos exercícios. A maioria dos alunos sentiu dificuldades em duas das questões discutidas, mais uma vez relacionadas à definição de paradoxo. Seguem-nas:

> 3. O que é um paradoxo? Se é algo que confronta as nossas expectativas, será que é sempre ‘na nossa cabeça’? [...]
> 7. Alguns conjuntos são elementos de se mesmo; mas são raros. Os mais comuns são os que não são elementos de si mesmo. O conjunto de todos os gatos, por exemplo, não é um gato. Agora, seja X a coleção de todos os conjuntos que não são elementos de si mesmo. Pergunta: X pertence a se

> mesmo? (FOSSA, 2009a, p. 16)

Outra vez precisamos intervir no sentido de ajudá-los a compreender que quando se estuda Matemática nem sempre precisamos fazer referência a números ou fórmulas, mas que trabalhar o raciocínio lógico através de argumentação ou interpretação também faz parte dos saberes de Matemática.

Em seguida, o grupo da *terça-feira* expôs sua parte, enfrentando um pouco menos de problemas em motivar a sala, pois, após a primeira discussão, os alunos responsáveis pela apresentação já se sentiam mais seguros e assim, desenvolviam o seu trabalho de maneira mais direta, relacionando sua parte do texto a situações matemáticas já enfrentadas por eles. À medida que os participantes discutiam o texto, citavam exemplos de situações em que encontraram palavras ou conceitos novos, em diversas disciplinas do Curso. Para exemplificar um aluno afirmou que a primeira vez que escutou a palavra proposição numa aula de Matemática pensou que o professor estava falando de preposição, que é um conceito utilizado na Língua Portuguesa.

Nesse diálogo, houve o primeiro contato com a palavra demonstração. Isso foi, de certa forma, bastante motivador, principalmente para os responsáveis pela discussão. No texto Fossa (2009a, p. 19), o diálogo apresentado foi:

> 'Muito bem! Me diga, então, qual o propósito de uma demonstração? Não é simplesmente convencer seu interlocutor da verdade da sua proposta?' Aqui, ele encarou seu irmão, apontou para ele e disse: 'Você, Gu-yong! Seu argumento não me convenceu. Logo, é um argumento que não realizou seu propósito. Logo, é um argumento inválido. Logo, não conseguiu provar que há somente um número finito de definições. Logo, você está errado. Logo, há um número infinito de definições.'

Esse trecho despertou ainda mais questionamentos. Um deles foi a constante confusão que se faz entre demonstrar e convencer, mas o grupo articulador do debate soube enfatizar a diferença e a turma chegou à compreensão correta do que seria demonstrar, segundo o texto.

Foram destacados ainda, por parte dos alunos, alguns exemplos que apareciam no texto os quais, segundo eles, eram mais comuns na linguagem matemática, como a ideia de conjunto. No texto, Fossa (2009a, p. 21) apresenta essa ideia dentro do diálogo a seguir:

> [...] 'Tem outra maneira de definir um conjunto. A idéia é dar uma condição que algo tem de satisfazer para pertencer ao conjunto. Escrevemos assim: $X=\{x \in \mathbf{Z}: x=2y \text{ para algum } y \in \mathbf{Z}\}$. Isto é, X é o conjunto de todos os inteiros

> pares. A primeira parte ($x \in \mathbf{Z}$) delimita o universo do qual tomaremos os elementos de X. Aqui requeremos que X seja um subconjunto dos números inteiros ($\mathbf{Z}$). A segunda parte ($x=2y$) é a condição de pertinência; indica que nem todo inteiro pertence a X – só os que satisfazem a condição de que são duas vezes algum inteiro, isto é, os pares.’

Um aluno que estava repetindo a disciplina e até então estava sem participar da discussão exclamou: “Ah! Isso sim é Teoria dos Números”. Questionamo-lo a respeito de sua afirmação e ele alegou ter familiaridade com a ideia de conjuntos e nos perguntou se o texto tinha algo ligado à divisibilidade. Notamos aí que esse aluno já se sentia apto a participar das discussões.

Quanto à seção de exercícios desta parte dos diálogos, destacamos dois que foram os mais citados. No livro, Fossa (2009a, p.24) questiona:

> 5. O que é um “número quebrado”? Defina número!
> 8. Se houver um certo grupo de coisas que queremos definir, digamos cisnes, a definição poderá falhar em duas maneiras diferentes. Pode ser *restrita* demais, ou seja, há alguns cisnes que não cabem na definição, ou *lata* demais, ou seja, há coisas que cabem na definição que não são cisnes. Uma definição pode ser restrita e lata ao mesmo tempo?

Destacamos que estes foram os mais citados na discussão por motivos bem distintos, o primeiro pela facilidade de compreensão e o segundo pela dificuldade de interpretação do texto. Mais uma vez enfatizamos a necessidade de uma leitura com mais calma e atenção aos detalhes.

Por fim, foi apresentado o diálogo da *quarta-feira* e, como neste texto apareciam mais situações envolvendo problemas matemáticos, números e processo de contagem, a sala participou de maneira mais segura. Também atribuímos essa segurança ao contato com a leitura, pois, como já haviam se apresentado dois grupos anteriormente, muitos alunos que reclamaram no início e que se negaram a participar do debate por não entenderem a linguagem, começaram a se familiarizar e ao fim deste encontro comentaram que seu conceito sobre a metodologia era um pouco diferente.

Nessa parte dos diálogos, mais uma vez o aluno que já havia cursado a disciplina Teoria dos Números afirmou ter certa familiaridade com o conteúdo envolvido no texto, só não sabia dizer de onde ela vinha, se da disciplina História da Matemática ou se havia estudado algo relacionado a isso anteriormente na disciplina Teoria dos Números. Fossa (2009a, p. 26) apresenta um paradoxo sobre números infinitos bastante conhecido na História da Matemática. Como nas outras partes do texto, o conteúdo é apresentado em forma de diálogo:

> [...] ‘mas deixe-me contar a história. Um dia todos os apartamentos estavam ocupados quando, devido a um erro de planejamento, chegou um número infinito de hospedes novos. Mas, Hilbert conseguiu transferir todos os hospedes já hospedados para os apartamentos de números pares da seguinte maneira:
>
> $$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & \end{array}$$
>
> Desta forma, tem todos os apartamentos de números ímpares livres. Visto que há um número infinito de números ímpares, ele pode colocar o número infinito de recém-chegados nesses apartamentos livres.’

Mais uma vez, a maior polêmica nessa parte do texto foi quanto à relação entre paradoxo e Matemática. Na verdade, notamos que uma parte dos alunos não havia compreendido ainda o conceito de paradoxo. Intervimos apresentando alguns exemplos de paradoxos famosos em outras áreas, falando um pouco de pessoas bastante conhecidas como Kurt Gödel, Maurits Cornelis Escher e Johann Sebastian Bach, que na matemática, arte e música, respectivamente, fizeram uso desses paradoxos de forma bastante rica. Para ilustrar o momento e motivá-los a pesquisar um pouco mais sobre isso, apresentamos algumas imagens de Escher, o qual enriqueceu a arte com suas telas paradoxais. Uma das imagens apresentadas em sala encontra-se destacada a seguir.

Figura 2: Queda D’água

Fonte: http://www.em.ufop.br/dearq/biblioteca/villela_clarisse_figurasparadoxais.pdf

No fim da aula, procuramos motivar os alunos a fazer a próxima atividade, expondo para eles a necessidade de se conhecer a linguagem matemática e de sempre buscar pesquisar os termos que eles não conhecem ou de cujo significado não têm certeza.

Chamamos a atenção da turma para a forma correta de se realizar esse tipo de pesquisa, buscando sites confiáveis, evitando usar qualquer resposta encontrada na internet. Achamos necessário fazer isso por notar que a maioria dos alunos não tinha segurança nas respostas e até apresentava respostas incoerentes na discussão.

Como nem todos os grupos puderam apresentar sua parte nesse encontro, propomos que o encontro seguinte desse continuidade às apresentações. Solicitamos que a turma lesse novamente os textos e observasse os pontos para os quais chamamos atenção para que houvesse uma melhora na metodologia de apresentação.

Nesse segundo encontro encontramos algumas dificuldades. A primeira porque uma parte dos alunos não se preocupou em pesquisar todos os termos e diversas vezes tivemos que ajudar o grupo a expor de maneira correta seu conteúdo. A Segunda dificuldade ocorreu porque uma parte significativa dos alunos foi muito resistente, afirmando nunca ter tido contato antes *com esse tipo de Matemática.* Por este motivo, apenas três grupos se apresentaram, ficando os dois restantes para o encontro seguinte.

4.2.2 Encontro III

Como foi dito no item anterior, o terceiro encontro deu continuidade à discussão dos textos entregues no primeiro. Assim, consistiu na apresentação de dois grupos, que correspondiam aos diálogos cujo título eram *quinta-feira e sexta-feira*.

O primeiro grupo, classificado como *quinta-feira*, motivou bem a sala a participar da discussão, embora eles próprios tenham encontrado diversos obstáculos, como não ter compreendido o processo de contagem que aparece no texto, processo desenvolvido pelo famoso matemático Georg Cantor (1845-1918). O que podemos destacar dessa apresentação foi que, embora não tendo total compreensão do texto, os alunos pesquisaram sobre o assunto, questionaram não só uns aos outros, mas também a professora e demonstraram bastante interesse, não se contentando apenas em expor, mas buscando a compreensão do texto como um todo.

Nessa parte, o mais polêmico em relação a dificuldades, partiram das seguintes questões de Fossa (2009a, p. 38):

> 2. A proposta de Moacir é diferente do que a contagem feita por Cantor?
> 5. Mostre que a demonstração de Moacir sobre os números reais é inválida.
> 6. Ajeite a demonstração de Moacir sobre os números reais.

Quando questionados sobre a dificuldade em relação à resolução dessas questões (nenhum aluno conseguiu respondê-las corretamente), alguns responderam que, quando viram que não iam conseguir responder as atividades desistiram sem nem ao menos tentar resolver, outros disseram que faltou compreensão do conteúdo relacionado às questões. Do texto que se tratava da proposta feita pelo personagem Moacir, destacamos a fala de um aluno quanto à falta de habilidade em realizar demonstrações: "Eu não sei demonstrar nem em Matemática, a senhora me vem com essas demonstrações que parecem mais aula de português. Eu escolhi fazer foi matemática".

Sobre a colocação feita pelo aluno, questionamos a turma de uma maneira geral se a interpretação e o bom uso de linguagem são algo que só os estudiosos de línguas devem fazer. Como faltava ainda se apresentar um grupo, resolvemos deixar essa discussão para outra oportunidade, no entanto, pedimos que eles discutissem entre si quando fossem se reunir em grupo.

O último grupo teve a tarefa de expor o texto referente ao diálogo intitulado *sexta-feira*, sendo o menos polêmico por contar com uma maior participação da turma, uma vez que linguagem e interpretação já haviam ganho uma maior valorização de maneira geral. Esse grupo foi também o que deu abertura para começarmos a falar de argumentação e demonstração matemática, pois os exemplos do seu texto já traziam questionamentos sobre verdade, argumentação e demonstração. Como exemplo, podemos citar uma parte do texto referente à discussão sobre argumentação:

> 'Bem, Gu-yong, suponho que um argumento pode ser perfeitamente bom, mas deixar de convencer alguém. Pode ser que é complicado demais e assim fica difícil de entender.
> Não sei como pode dizer que um argumento desse tipo seria bom, amigo Moacir,' insistiu Su-yong. 'Se não me convencer, como é que me servirá? Não acreditarei na conclusão, mesmo se for verdadeira.'
> 'Tem de ser verdadeira,' concluiu Gu-yong.
> 'Isto não é verdadeiro,' respondi. 'Um argumento bom certamente poderá ter uma conclusão falsa.'
> Para Su-yong, isto foi uma idéia nova – e uma que o agradava. 'Muito poético, amigo Moacir! Mostra que a suposta racionalidade da matemática é uma ilusão efêmera da arrogância humana. Zenão teve razão!'
> Gu-yong, portanto, teimou. 'Pode ser que não há muitos argumentos bons, mas isto não muda o conceito. Um argumento bom é um que me convence da

> verdade de uma verdade. Se me convence da verdade de uma mentira, é um argumento ruim.'. (FOSSA, 2009a, p. 40)

A discussão desse texto nos remeteu a uma questão do exercício que tratava do papel da verdade nos argumentos. Percebemos, que de todas as apresentações, esta foi a que obteve um maior grau de compreensão e participação dos alunos. Quase 100% dos alunos participaram de alguma forma.

Embora o foco do encontro fosse o mesmo que o anterior foi observado algumas mudanças na postura dos alunos. De fato, os dois grupos que se apresentaram tiveram um pouco mais de cuidado com a pesquisa e com a forma de expor seu conteúdo. Observamos ainda que os alunos que haviam sido mais resistentes às leituras no encontro anterior mostraram uma postura diferente, um deles até chegando a mencionar que um dos termos que havíamos discutido na aula anterior o ajudara a entender um teorema em Análise Real, outra disciplina que ele estava cursando no mesmo semestre.

Aproveitamos a mudança de postura dos alunos citados para motivá-los ainda mais a desenvolverem o hábito de tentar compreender mais termos e até mesmo criar um glossário com as palavras e conceitos novos que fossem surgindo nas suas leituras.

Por fim, pedimos que eles, mais uma vez, dessem sua opinião sobre os textos. Neste sentido, embora os alunos que gostaram e desenvolveram bem seus conteúdos fossem a minoria da classe, eles deram ótimas contribuições para um melhor desenvolvimento da atividade. A maior parte dos alunos concordou com a ideia de que esse tipo de atividade deveria ser realizado logo nos primeiros períodos do curso, para que fossem amenizados problemas com leitura, interpretação e abstração dos textos em Matemática.

No fim da aula, foi entregue o primeiro texto sobre a primeira técnica de demonstração que iríamos estudar: a técnica condicional. A orientação foi que eles lessem o texto antes da aula seguinte, pois seria nosso próximo conteúdo. Como orientação, foi lida uma parte do livro onde o autor destaca o propósito de se estudar as técnicas, segundo Fossa (2009a, p. 45):

> O nosso propósito em estudar estas técnicas, portanto, é facilitar a leitura de textos matemáticos, especialmente na análise e na compreensão das demonstrações aí encontradas, bem como proporcionar ao aluno alguns recursos para demonstrar os teoremas que os textos deixam ao seu encargo.

A leitura desse trecho foi na verdade um esclarecimento do uso das técnicas a fim de motivar os alunos a lerem com mais empenho, pois a compreensão dessas técnicas facilitaria seu aprendizado em diversas outras disciplinas e na interpretação de textos matemáticos com demonstrações de teoremas.

4.2.3 Avaliação do Momento II

Podemos concluir que os objetivos desses dois encontros (Momento II), quais sejam discutir e analisar os diálogos apresentados nos textos levando os alunos a expressarem suas linhas de raciocínio e aproximar os alunos das demonstrações dentro de uma conjuntura natural, foram alcançados, o que pôde ser visto durante a descrição e análise dos encontros, através da fala dos alunos. No fim desses encontros, notamos que, embora somente dentro de um contexto natural, houve uma aproximação dos alunos às demonstrações, sendo ela um grande facilitador da aprendizagem das técnicas no contexto matemático.

Podemos afirmar que mesmo portador de tantos desafios, avaliamos esse segundo Momento como bastante satisfatório.

No início, uma parte considerável dos alunos apresentou certa dificuldade com a leitura e até alguma rejeição à metodologia aplicada, se recusando a expor seus argumentos e a participar das discussões. Mesmo assim, percebemos que à medida que os grupos iam se apresentando, havia uma familiarização com a linguagem e grande parte desses desafios era superada.

O que notamos ter sido mais desafiante foi trabalhar o conteúdo matemático dentro de uma conjuntura natural. Muitos alunos até então tinham uma ideia errônea sobre a Matemática, de que era uma disciplina que somente envolvia cálculos, sem necessidade de leitura e interpretação. Vimos que esse foi um problema praticamente resolvido no fim desses dois encontros, uma vez que nas discussões procuramos enfocar bem a necessidade da compreensão e interpretação dos textos e o quanto uma boa leitura pode auxiliar no ensino-aprendizagem da Matemática.

4.3 MOMENTO III

O Momento III consistiu de cinco encontros e teve como objetivo desenvolver a compreensão relacional das técnicas de demonstração. Para alcançá-lo, foram realizados um estudo da segunda parte do livro *Introdução às Técnicas de Demonstração em Matemática* (FOSSA, 2009a) e exercícios individuais e em grupos. A exposição dos resultados foi feita pelos alunos durante as aulas (encontros).

Tal Momento versou no estudo e desenvolvimento de quatro técnicas de demonstração, a saber:

- Condicional;
- Bicondicional;
- Redução ao absurdo;
- Indução Matemática.

Analisamos também exemplos encontrados em diversos livros das disciplinas estudadas no Curso que envolvem demonstrações utilizando as referidas Técnicas. Destacamos que nessas atividades os alunos não precisavam realizar as demonstrações, sendo foco do nosso estudo a identificação das técnicas de demonstrações, a análise de suas estruturas e processos de resolução, além da avaliação dos passos da demonstração.

Destacamos que, como fez Fossa (2009a) no livro base desta pesquisa, procuramos minimizar o conteúdo matemático, para que o aluno não encontrasse barreiras com complicações matemáticas e, assim, aprendesse de maneira geral a estrutura das técnicas em questão.

Como esse Momento foi considerado o núcleo central do Módulo de Ensino, tendo em vista que nele realizamos o estudo das técnicas de demonstração matemáticas, os resultados esperados foram os mais importantes para o Módulo. O esperado era que ao final desses cinco encontros, os alunos, através de um contato com as definições, descrições e análises das técnicas de demonstrações, fossem capazes de reconhecê-las nas mais diversas disciplinas e contextos, classificá-las de forma correta, bem como, identificar e analisar seus principais passos.

A descrição e análise dos cinco encontros realizados no Momento III encontram-se a seguir. Nesse tópico apresentamos, ainda, uma avaliação do referido Momento.

4.3.1 Encontro IV

No encontro IV, realizamos o estudo da técnica de demonstração matemática chamada técnica de condicionalização, apresentada anteriormente como o condicional. Tendo em vista que nosso trabalho tem cunho construtivista e por isso existisse a necessidade de construção de conceitos por parte dos alunos[12], nossa primeira atitude foi escrever a palavra condicional na lousa e, em seguida, iniciar uma discussão sobre o que entendiam sobre essa técnica.

A dinâmica norteada foi a seguinte: escrevemos na lousa a palavra condicional, depois solicitamos que os alunos falassem tudo o que soubessem a seu respeito. Em seguida, sugerimos que tentassem entrar em um consenso, obtendo, quando possível, uma ideia geral. Acabada a discussão, partimos para uma apresentação de *slides* com trechos do capítulo do livro Fossa (2009a) sobre o condicional.

Como os alunos já haviam lido o texto antes, muitos começaram a falar. Uns disseram que o condicional era um dos tipos mais comuns de proposições matemáticas e que era a proposição que condicionava um resultado a certas exigências. Outros disseram ser aquela proposição que possui um antecedente e um consequente. Ainda outros comentaram sobre *modus ponens* e *modus tolens*[13].

Percebemos que, na verdade, eles haviam entendido o conceito, embora os alunos que participavam da discussão tivessem somente a compreensão instrumental[14], pois conseguiam apenas repetir o que haviam aprendido na leitura, mostrando assim, uma aprendizagem muito superficial.

Após a discussão, procedemos com a apresentação de slides, para o que seguimos a sequência do livro base, Fossa (2009a), que começa apresentando os termos da proposição condicional, antecedente e consequente, sua representação e critério de validade do argumento. A apresentação foi realizada de forma bastante dinâmica, pois enquanto apresentávamos, os alunos iam interagindo, discutindo, questionando e chegando a suas conclusões sobre o conteúdo. Tínhamos sempre o cuidado de participar o mínimo possível, sendo nosso papel o de orientar a discussão e fazê-la voltar para o

---

[12] Construir conceitos no nosso trabalho se refere a elaborar esquemas referentes a esses conceitos. Sobre isso ler Fossa (2001, p. 15).

[13] Nomes latinos que se referem a argumentações chamadas respectivamente: afirmação do antecedente e negação do consequente.

[14] Ver Capítulo 2 que trata dos níveis de compreensão.

foco quando os alunos começassem a falar de outros assuntos.

A parte mais dinâmica da apresentação foi a dos exemplos, em especial, os exemplos que minimizaram o conteúdo matemático, pois o resultado sempre ficava mais evidente. Para ilustrar melhor, usaremos um trecho do livro, Fossa (2009a, p. 53):

> Se *x* é par, *x* é divisível por 2.
> (?) *x* não é par.
> Portanto, ? ? ?
>
> Vamos procurar um exemplo parecido com (?), em que a resposta talvez seja mais evidente.
>
> Se Matilda tomou o veneno, morreu.
> Mas Matilda não tomou o veneno.
> Portanto,.? ? ?

Quando o conteúdo era visto diretamente com proposições matemáticas, a maioria dos alunos não conseguia chegar à conclusão. Já quando trocávamos as proposições matemáticas por frases que eram de assuntos quotidianos, eles compreendiam e conseguiam completar o argumento ou classificá-los como inválidos[15], quando as premissas envolvidas não eram suficientes para se chegar à conclusão.

Após trabalhar exemplos com proposições simples, utilizamos exemplos com proposições cujos antecedentes eram uma proposições compostas. Por exemplo: Se x é par e maior do que 2, x não é primo. Nessa parte sentimos a dificuldade de trabalhar argumentação com alunos que não tinham base de Lógica Matemática, pois a maior parte dos exemplos trazia conectivos lógicos[16] e os alunos que nunca haviam estudado estruturas lógicas sentiram bastante dificuldade. Tivemos então que explicar alguns conectivos básicos, como a conjunção (e) e a disjunção (ou), para que os alunos pudessem compreender a forma de alguns argumentos e as condições necessárias para se chegar a seu resultado.

A partir da compreensão desses exemplos com proposições compostas, foi possível discutir a primeira técnica, chamada Técnica de Condicionalização, para demonstrar proposições matemáticas.

Terminamos a aula (encontro) sugerindo que os alunos ainda não se preocupassem em responder os exercícios, mas que refizessem uma leitura de todo o capítulo e, em especial, buscassem perceber e destacar em que partes eles ainda estavam

---

[15] Alguns argumentos podem ser inválidos, pois quando as premissas não nos dão informações suficientes para decidir a questão, concluir o argumento só para completá-lo o tornaria inválido, seria necessário obter mais informações nas premissas.

[16] Conectivos lógicos são palavras usadas para unir as proposições formando novas sentenças, chamadas proposições compostas. Alguns dos conectivos mais conhecidos são o *e*, o *ou* e o *se...então...* .

encontrando dificuldades. Pedimos ainda uma atenção redobrada à parte do texto que tratava da análise da técnica[17], tendo em vista que o nosso principal foco era analisar o esquema dos teoremas demonstrados, pois não pretendíamos que eles apenas aprendessem a estrutura da técnica, mas usassem a criatividade para elaborar, a partir da compreensão do conceito ou definição da técnica, suas próprias demonstrações.

4.3.2 Encontro V

O Encontro V foi a continuação do encontro anterior, pois consideramos a necessidade de melhor enfatizar a técnica de condicionalização, acreditando que se os alunos adquirissem uma base para a técnica mais simples, encontraríamos menos dificuldade em trabalhar as demais.

No início da aula fizemos uma breve retrospectiva da aula anterior, uma espécie de revisão, com o objetivo de avaliar se os alunos haviam entendido o que estávamos estudando até então. Voltamos ainda ao conceito de demonstração em Matemática e discutimos um pouco sobre como ela é utilizada pelos professores. Muitos alunos comentaram sobre isso.

Três alunos tiveram opiniões bastante parecidas, o primeiro aluno afirmou: "Se desde o primeiro período tivéssemos contato com a técnica não teríamos tanta dificuldade no curso"; outro disse ainda: "O problema é que a gente nunca vê isso antes da Universidade", e o terceiro: "Deveria ter uma disciplina só de demonstrações matemáticas, ou pelo menos, um mini-curso". Notamos que todas essas opiniões estão relacionadas à falta de um estudo sistematizado das demonstrações matemáticas, o que nos leva a concluir que tais alunos entendem que uma atenção maior com relação às técnicas de demonstrações por quem é o responsável poderia trazer maiores benefícios à aprendizagem de Matemática.

Já outro aluno teve uma opinião totalmente contrária ao afirmar: "Para mim, não tem problema continuar como está, eu acho que o matemático é obrigado a ter um bom raciocínio e se esforçar para isso, se não sabe, vai pesquisar". Este aluno concorda com a forma como as demonstrações vêm sendo estudadas no curso de Matemática e,

[17] Ver Fossa (2009a, p. 58-59) que traz o esquema dos teoremas demonstrados em forma de um quadro, onde se encontram as linhas com suas respectivas afirmações e do lado as justificativas correspondentes a cada sentença.

segundo ele, a responsabilidade pela aprendizagem de tais técnicas é somente do aluno. Observando a fala do aluno e sua postura nas aulas (encontros) até então, percebemos que ele não concordava também que nas licenciaturas matemáticas existissem *tantas* disciplinas da área de Educação, sendo suficiente aprender o conteúdo matemático para se tornar um professor apto a ensinar Matemática. Concluímos através da análise da postura de tal aluno e de uma conversa particular com ele, que sua opinião era bastante contrária às mudanças que o ensino de Matemática vem tendo nos últimos anos. Segundo ele, a Educação Matemática não contribuía para a melhora do Ensino e que, na verdade, até atrapalharia, pois tomava espaço de outras disciplinas.

Tendo em vista que a discussão já estava ficando bem polêmica e tínhamos que voltar para o nosso conteúdo, devido à limitação do número de encontros que nos foram cedidos pelo professor da disciplina, terminamos essa parte da discussão citando Fossa (2009a, p. 48):

> [...] o mero domínio das técnicas de demonstração a serem estudadas no que se segue não é uma garantia de que o aluno se tornará um "fera" em demonstrações. Demonstrar não é um ato mecânico, mas sim um ato criativo. As várias técnicas e estratégias não são nada mais que instrumentos que podemos usar em uma demonstração. Não obstante, são os instrumentos básicos para demonstrar teoremas matemáticos e, por isso, vale a pena dominá-los.

Citamos esse trecho do livro para mais uma vez enfatizar que o nosso intuito não era repassar para os alunos um conjunto de técnicas e estratégias, mas apontar a importância da demonstração e enfatizar que a criatividade faz toda a diferença, pois, como mencionamos, essas técnicas e estratégias são apenas instrumentos básicos. Como a beleza de uma demonstração dependerá da habilidade de quem está demonstrando, explicamos a escolha pelo construtivismo radical, alegando que, se o aluno constrói sua aprendizagem, ele tende a tornar-se um sujeito autônomo e esta autonomia pode maximizar o seu poder criativo.

Depois dessa primeira parte da aula, voltamos para o conteúdo do Módulo que seria discutido nesse encontro: a técnica de condicionalização e a técnica de bicondicionalização.

Como na aula anterior tínhamos trabalhado bastante proposições simples e compostas e os alunos já haviam discutido os conceitos dos termos do condicional (antecedente e consequente), prosseguimos com uma atividade que os ajudaria a intuir a técnica de condicionalização. Para isso, apresentamos a seguinte proposição:

“Seja x um número par. Se x é maior que 2, então x não é primo”

A partir desse exemplo, ajudamos os alunos a abstraírem para o nível geral, levando-os a procurar entender os termos dentro do contexto da proposição e, consequentemente, o conceito da técnica de condicionalização, qual seja: "Se a proposição a ser demonstrada é um condicional, assumir o antecedente e tentar deduzir o conseqüente" (FOSSA, 2009a, p. 57).

A partir da compreensão da definição da técnica de condicionalização, partimos então para a análise. Contudo, notamos que dois alunos que não estavam presentes no encontro anterior reclamaram não ter compreendido a definição. Comentamos, então, sobre a importância da presença nas aulas, uma vez que o conteúdo tinha uma sequência e continuidade. Sugerimos aos dois alunos a leitura dos textos anteriores e que tentassem em outro horário se reunir com colegas de classe e discutir sobre as suas experiências. Outro aluno reclamou que também não estava entendendo, mas notamos que ele nem ao menos estava com o texto em sala, o que certamente contribuiu muito para essa dificuldade.

Tendo em vista o nosso objetivo, que era levar os alunos a uma compreensão relacional das técnicas, apresentamos, em forma de slide[18], um resumo do que havíamos estudado até então, acreditando que poderia situá-los em relação ao nosso estudo e amenizaria de certa forma o prejuízo na compreensão.

Depois de apresentarmos essa parte de revisão da técnica de condicionalização, demos sequência à aula comentando sobre a técnica de bicondicionalização. Neste caso, não tivemos muitas dificuldades, uma vez que a maioria dos alunos já havia entendido que esta nova técnica era na verdade uma aplicação dupla da técnica de condicionalização.

Como grande parte dos alunos disse ter entendido essa nova técnica, solicitamos que alguém, de forma voluntária, fosse à lousa e escrevesse como entendeu essa técnica. O aluno C, se dispôs a ir e escreveu o seguinte: "Se a proposição a ser demonstrada é o bicondicional $A \leftrightarrow B$, usamos a técnica de condicionalização para demonstrar a ida $A \rightarrow B$ e usamos a mesma técnica para demonstrar a volta $B \rightarrow A$". Escreveu ainda: "Observação: lembremos que também podemos provar o bicondicional de outras três

[18] Como na aula anterior notamos que alguns alunos haviam faltado, preparamos uns slides com um resumo sobre a técnica de condicionalização, para mostrar rapidamente a turma como revisão para os que estavam presente no encontro anterior e para que os alunos faltosos não ficassem tão prejudicados.

formas: provando A→B e não-A→não-B ou provando B→A e não-B→não-A ou provando não-A→não-B e não-B→não-A".

Depois da explicação dada pelo aluno, reforçamos que a proposição A→B era equivalente a não-B→não-A. Notamos que três alunos ainda se confundiam em relação a essa equivalência, então revisamos e exemplificamos usando situações que tinham o conteúdo matemático minimizado, após o que sugerimos lerem novamente, em outro momento, o capítulo do livro referente à técnica em questão.

Realizamos a última discussão apresentando um quadro de análise, demonstrando um teorema bicondicional.

Antes do quadro, apresentamos a seguinte situação[19]:

> Sabemos que se a Matilda tomar o veneno, ela estará deprimida e sem juízo. Ela tomará o veneno e morrerá somente se estiver deprimida. Acontece que só fica deprimida à noite. Ora, se ela perder o juízo, morrerá. Mas, se não perder o juízo, não pode ser durante à noite. Conclui-se que, se a Matilda tomar o veneno, ela morrerá se, e somente se, é noite. (FOSSA, 2009a, p. 65).

Depois de apresentar a situação, reformulamos o problema, colocando-o na forma de teoremas[20], a fim de tornar mais clara as operações lógicas envolvidas:

> Teorema 1. Ela toma veneno → (ela está deprimida e ela está sem juízo).
> Teorema 2. (Ela toma veneno e ela morre) → ela está deprimida
> Teorema 3. Ela está deprimida → é noite
> Teorema 4. Ela está sem juízo → ela morre
> Teorema 5. Ela não está sem juízo → não é noite (FOSSA, 2009a, p. 65)

Em seguida, apresentamos em slides, o quadro que traz a demonstração detalhada e justificada. Chamamos a atenção para a parte que contém um sombreamento, esta refere-se as sub-partes da demonstração.

Quadro 7: Demonstração detalhada e justificada usando técnica de condicionalização.

Linha	***Afirmação***	***Justificativa***
1.	Ela toma veneno.	premissa dada no antecedente de (Con)
2.	Ela está deprimida e ela está sem juízo.	linha 1, Teorema 1, AA
Parte (a). Demonstrar: Ela morre → é noite.		

[19] Usamos slides, para ganharmos tempo.
[20] Quando vamos separar a situação em proposições, simplificamos os tempos dos verbos e uniformizamos as sentenças, isso para tornar mais clara as operações lógicas envolvidas.

	3.	Ela morre.	premissa dada no antecedente de Parte (a)
	4.	Ela está deprimida.	linhas1 e 3, Teorema 2, AA
	5.	É noite.	linha 4, Teorema 3, AA
	6.	Ela morre → é noite.	linhas 3 a 5, TC
Parte (b). Demonstrar: É noite → ela morre.			
	6.	É noite.	premissa dada no antecedente de Parte (b)
	7.	Ela está sem juízo.	linha 6, Teorema 5, NC
	8.	Ela morre.	linha 7, Teorema 4, AA
	9.	É noite → ela morre.	linhas 6 a 8, TC
10.		Ela morre ↔ é noite.	linhas 5 e 9, TB
11.		Ela toma veneno → (ela morre ↔ é noite).	linhas 1 e 11, TC

Fonte: Fossa (2009a)

Ao apresentar o quadro seis alunos reclamaram que ao ler o texto não conseguiram entender o quadro, mas à medida que íamos discutindo cada linha, com sua referida justificativa, essa reclamação diminuía. No fim da aula, somente dois alunos disseram continuar sem entender. Sugerimos a esses alunos que procurassem refazer o quadro em outro momento, e que começassem por um quadro mais simples contido no texto que trazia a análise de uma proposição condicional.

Finalizamos o encontro entregando o texto que iríamos utilizar na aula seguinte, cujo conteúdo central era a técnica da redução ao absurdo. Sugerimos aos alunos que além da leitura desse novo texto, respondessem os exercícios do texto anterior referentes às técnicas que havíamos estudado.

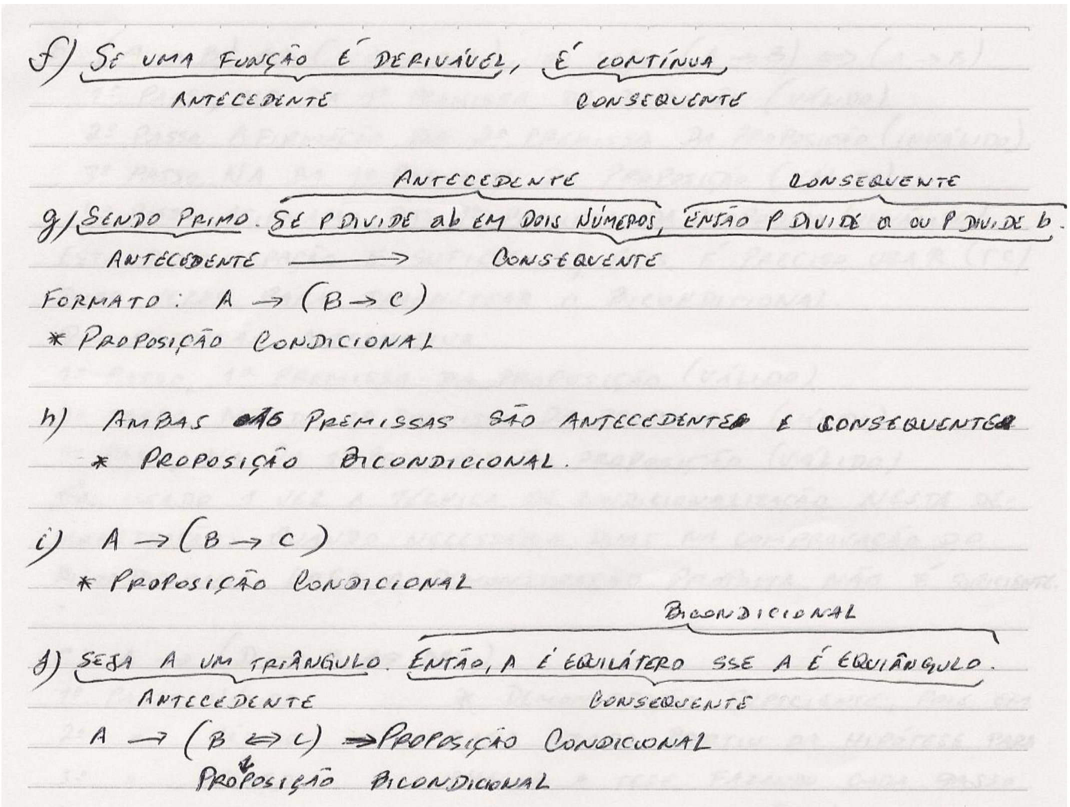
4.3.3 Encontro VI

O sexto encontro teve início com uma discussão em grupos sobre o exercício da aula anterior, com duração de 15 minutos. Notamos que a discussão ficou um pouco prejudicada e percebemos que isto aconteceu por dois fatores: primeiro por alguns alunos não terem resolvido as questões e, por isso, não participarem da discussão e, segundo, pelo fato de alguns outros alunos chegarem atrasados, depois dos 15 minutos de discussão. Com isso pode-se afirmar que a participação da turma foi reduzida. Resolvemos, então, fazer um comentário com a turma, chamando a atenção para a responsabilidade que eles tinham pela sua própria aprendizagem. Alguns alunos sugeriram que os exercícios fossem entregues a partir do próximo encontro e, em acordo com a turma, resolvemos aceitar a sugestão.

Os 15 minutos seguintes foram destinados à correção dos exercícios sobre condicional e bicondicional, e os alunos que responderam as questões comentaram sobre suas dúvidas. Neste caso, ficamos na posição de orientadores, procurando trabalhar os erros e guiá-los a chegar à resposta correta, sempre com a preocupação de não minimizar sua criatividade e seu aprendizado, mas motivá-los a expor e escrever tudo que era novidade na sua aprendizagem.

Pelas respostas dos exercícios e participação dos que o haviam respondido, é possível afirmar que alguns dos alunos já conseguiam responder as questões de forma pessoal. Como exemplo destacamos a resposta apresentada na Figura 3, na qual foi pedido que identificassem o antecedente e consequente de cada proposição condicional.

Figura 3: Resposta apresentada por um aluno, referente à questão que solicitava que fosse identificado o antecedente e o consequente de cada condicional.


f) SE UMA FUNÇÃO É DERIVÁVEL, É CONTÍNUA
ANTECEDENTE CONSEQUENTE

ANTECEDENTE CONSEQUENTE
g) SENDO P PRIMO. SE P DIVIDE ab EM DOIS NÚMEROS, ENTÃO P DIVIDE a OU P DIVIDE b.
ANTECEDENTE → CONSEQUENTE
FORMATO: A → (B → C)
* PROPOSIÇÃO CONDICIONAL

h) AMBAS AS PREMISSAS SÃO ANTECEDENTES E CONSEQUENTES
* PROPOSIÇÃO BICONDICIONAL.

i) A → (B → C)
* PROPOSIÇÃO CONDICIONAL

BICONDICIONAL
j) SEJA A UM TRIÂNGULO. ENTÃO, A É EQUILÁTERO SSE A É EQUIÂNGULO.
ANTECEDENTE CONSEQUENTE
A → (B ⇔ C) ⇒ PROPOSIÇÃO CONDICIONAL
PROPOSIÇÃO BICONDICIONAL

Fonte: Pesquisa (agosto, 2009)

O que gostaríamos de destacar na Figura 3 é que o aluno não só classificou os termos, mas tentou representar as proposições usando a linguagem simbólica. Notamos que ele já estava mais familiarizado com a linguagem matemática, em especial, com os termos lógicos, mas nesse caso o que mais nos surpreendeu foi que essa resposta foi de um aluno que afirmou nunca ter tido contato com Lógica Matemática.

Na segunda parte do encontro, iniciamos a discussão tratando da técnica de demonstração por redução ao absurdo. Logo no início da aula, pedimos que os alunos lessem de forma coletiva o seguinte parágrafo que seria o nosso primeiro foco:

> A idéia básica de redução ao absurdo é que uma premissa não pode ser verdadeira se ela nos levar a uma contradição. Antes de analisar um exemplo de redução ao absurdo, porem, vamos esclarecer o que quer dizer "contradição". Em geral, uma **contradição** é qualquer proposição que tem a seguinte forma:
>
> A e não-A.
>
> Isto é, uma contradição é uma proposição que afirma algo e ao mesmo tempo nega a sua própria afirmação. Dizemos também que as duas proposições
>
> A
> não-A
>
> são contraditórias, ou que uma é a contradição (ou a negação) da outra. (FOSSA, 2009a, p. 76-77)

Para uma melhor compreensão da referida técnica, antes de falar de sua definição, trabalhamos a definição de contradição. Como nas aulas anteriores, a definição foi bem compreendida quando minimizamos o conteúdo matemático e partimos de exemplos quotidianos.

Nesta parte, discutimos e orientamos um estudo sobre negação de proposições. Neste quesito a maior dúvida foi com relação a proposições que usavam as palavras todo ou nenhum, os chamados quantificadores universais. Por exemplo, ao pedir aos alunos que negassem a proposição: "Todo quadrado é um retângulo", a maioria dos alunos respondeu: Todo quadrado não é um retângulo. Ao perguntar se poderíamos escrever a negação utilizando a frase: Nenhum quadrado é um retângulo, muitos questionaram, pois para eles negar exigia que na frase aparecesse a palavra *não*. Observamos que eles não haviam compreendido corretamente o que seria negar uma proposição e daí explicamos em que consiste negar uma proposição.

Destacamos que, como aborda Fossa (2009a), um grande problema com relação ao estudo da contradição é decorrente do fato de que na vida quotidiana diversas vezes nos deparamos com situações em que usamos contradições sem que isso seja considerado errado, exemplo: termos como está e não está, quero e não quero, mais ou menos, são muito comuns na linguagem vulgar. Isso para os matemáticos é um absurdo, pois contraria um dos princípios básicos da Lógica, chamado princípio da não-contradição, que diz que uma sentença não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

Mais uma vez, os alunos que haviam tido um contato anterior com Lógica Matemática obtiveram um melhor desempenho, mas também notamos que os alunos que haviam lido o texto e tentado responder aos exercícios não mostraram tantas dificuldades como nos primeiros encontros. Atribuímos esse avanço à familiaridade que a turma, como um todo, havia adquirido com essa nova linguagem, bem como, ao aumento no interesse em responder as questões. No entanto, sabemos que essas não são as únicas causas que poderiam explicar os referidos avanços, uma vez que ao longo dos encontros os alunos estavam cursando outras disciplinas que sem dúvida devem ter contribuído para a melhoria na sua aprendizagem. Por exemplo, um aluno pode ter se deparado com algum tipo de exemplo, numa outra disciplina, que pode ter adiantado conceitos ou estruturas que estaríamos utilizando, assim como demonstrações de teoremas que envolvessem as técnicas que iríamos estudar.

Outro fator de destaque é que essa é uma técnica bastante conhecida e utilizada, muitos alunos até comentaram estar cursando disciplinas que usavam esta técnica para demonstrar seus teoremas. Alguns trouxeram exemplos e mostraram seus cadernos no intuito de validar o que estavam afirmando. Um aluno observou, inclusive, que neste dia numa aula anterior, seu professor havia demonstrado um teorema utilizando a referida técnica, mas reclamou que ela não havia sido estudada, nem mesmo analisada anteriormente, tendo sido utilizada somente como um instrumento de resolução, sem explicação prévia. O que merece ainda destaque é que, na discussão, alguns alunos lembraram-se dos paradoxos e comentaram que havia certa semelhança entre paradoxo e contradição. Outros notaram que dentro desta técnica havia a necessidade de se utilizar a técnica de condicionalização, só que de forma indireta.

Terminamos o encontro construindo o quadro de análise para explicar a demonstração da proposição:

Proposição (8): Seja x um dado número par. Se x é maior que 2, então não é primo.

Para resolvê-la, fizemos uso de dois teoremas já estudados:

Teorema 1: Se x é par, é divisível por 2.

Teorema 2: Se x é maior que 2, então, se é primo, não é divisível por 2.

Antes de passarmos para a análise pedimos que um aluno viesse ao quadro e escrevesse a referida proposição na forma simbólica, e ele escreveu: $A \rightarrow (B \rightarrow \text{não-C})$, onde A corresponde a proposição x é par, o B à proposição x é maior que 2 e C: x é primo. Em seguida construímos de forma coletiva o Quadro 8, conforme Fossa (2009a, p. 82):

Quadro 8: Demonstração detalhada e justificada sobre técnica de redução ao absurdo.

Linha		**Afirmação**	**Justificativa**
1.		*x* é par.	premissa, antecedente da proposição (8)
2.		*x* é maior que 2.	premissa, antecedente da proposição (8)
	3.	*x* é primo.	premissa auxiliar, negação da conclusão desejada
	4.	*x* é divisível por 2.	Teorema 1, linha 1, AA
	5.	Se *x* é primo, não é divisível por 2.	Teorema 2, linha 2, AA
	6.	*x* não é divisível por 2.	linhas 3 e 5, AA
	7.	*x* é divisível por 2 e *x* não é divisível por 2.	linha, 4 e 6 uma contradição
	8.	x não é primo.	linhas 3 - 7, RA
9.		Se *x* é par e maior que 2, não é primo.	linhas 1, 2 e 8, TC.

Fonte: Fossa (2009a)

No Quadro 8, observamos os pontos que exigiam mais destaque, como: a utilização da técnica de condicionalização mais de uma vez; a linha 7, que trazia a proposição contraditória, o absurdo, e assim, a dedução do contrário do que queríamos provar. Desta forma, chegamos à conclusão que é o contrário do que começamos a afirmar.

Depois da construção e análise do quadro, devido ao tempo, demos a orientação sobre a próxima aula entregando o texto sobre Indução Matemática e pedindo aos alunos que respondessem os exercícios referentes à técnica de redução ao absurdo. Nos últimos minutos do encontro, aproveitamos para parabenizar a turma pelo seu melhor desempenho e participação, motivando-os a seguir este ritmo no próximo encontro.

4.3.4 Encontro VII

O Encontro VII foi relativo ao estudo da técnica de Indução Matemática, a última técnica que abordamos no Módulo de Ensino. Como acreditávamos ser esta a técnica mais conhecida pelos alunos, demos início ao encontro questionando a turma sobre quem a conhecia. Neste início de aula estavam presentes cerca de 20 discentes, dos quais 80% afirmaram ter alguma familiaridade com a técnica. A partir daí iniciamos a nossa discussão sobre o texto já lido por eles anteriormente.

Um aluno comentou ter ficado bem clara a analogia de indução presente no texto, ao comparar-se a técnica de indução a uma cadeia de dominó. Pedimos a ele que lesse para toda a turma o trecho do livro:

> Embora a indução matemática seja uma das mais poderosas e mais usadas técnicas de demonstração em toda a matemática, o seu princípio básico é muito simples, como a seguinte analogia mostrará. Suponha que colocamos várias pedras de dominó em pé, formando uma fila em que cada pedra é separada da próxima por uma pequena distância. Para derrubar todas as pedras, basta dar um empurrão na primeira porque esta derrubará a segunda que, por sua vez, derrubará a terceira e assim por diante até o fim da fila. O resultado final, claro, é a queda de todas as pedras de dominó da fila.
> Quais são as condições suficientes para que todas as pedras de dominó sejam derrubadas? São duas: (1) precisamos derrubar a primeira pedra e (2) cada pedra tem que derrubar a próxima da fila. (FOSSA, 2009a, p. 100-101)

A partir desse exemplo foi bastante simples trabalhar com a linguagem matemática, pois comparamos a primeira peça do dominó com a primeira parte da indução que consiste na sua base, provando que para o primeiro termo tal afirmação é válida. Em seguida, fazendo analogia com as demais peças, mostramos que, na indução, se um número natural e seu sucessor têm certa propriedade e o sucessor de seu sucessor também, e se isso vai se repetindo com todos os termos, existe uma relação entre eles, como no dominó quando cada peça derruba a seguinte.

Em seguida, propomos que passássemos então para um exemplo numérico e sugerimos que, usando a indução matemática, fosse provado que a soma dos n primeiros números inteiros positivos ímpares menores que n é igual ao quadrado de n. O primeiro passo foi escrever a afirmação usando notação matemática. Sugerimos que os alunos em dupla tentassem fazer isso. Para tanto, foi concedido um tempo de 10 minutos após o que pedimos que as duplas apresentassem suas respostas. Depois que as duplas discutiram suas respostas chegando a um consenso, escrevemos no quadro a proposição sugerida:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2.\ n \in \mathrm{N}.$$

Passamos então para a aplicação da técnica. Pedimos que algum aluno viesse à lousa e os demais fossem ditando os passos que ele deveria seguir. A figura a seguir ilustra um aluno realizando a aplicação da técnica na lousa.

Figura 4: Aluno realizando uma demonstração usando a técnica de Indução Matemática.

Fonte: Pesquisa (agosto, 2009)

O primeiro passo foi muito simples, pois foi sugerido que o aluno provasse que para o primeiro termo da equação, nesse caso o número 1, a igualdade era válida. Foi exatamente isso que ele fez. Já na segunda parte, foi sugerido que ele usasse como hipótese de indução a equação, tomando para $n = k$ e, em seguida tentasse deduzir que esta igualdade era verdadeira, também, quando atribuíssemos a n, o sucessor de k, no caso $n = k+1$. Deixamos que o aluno terminasse a resolução sem que interferíssemos. Para tentar deduzir que era válido para $n = k+1$, o aluno cometeu um equívoco muito comum nos livros didáticos, ao usar a tese, substituindo nela a hipótese de indução.

Ao fim da resolução, pedimos que a turma analisasse os passos dados. Neste sentido, um aluno destacou que a segunda parte da resolução da demonstração por indução fazia uso da técnica de condicionalização e a partir daí tentamos fomentar a discussão para tentar levá-los a perceber que na resolução eles haviam utilizado a tese a ser demonstrada como premissa do argumento. Depois de alguns minutos de discussão, como eles não conseguiram perceber tal fato, preferimos intervir justificando que não poderíamos substituir a hipótese na tese, uma vez que a tese precisaria ser deduzida a partir da hipótese. Em seguida, apresentamos uma forma correta de realizar a demonstração[21]. Cerca de três alunos foram resistentes à resolução, afirmando que eles haviam aprendido a fazer da maneira anterior. Para resolver este dilema, chamamos sua atenção para o uso da técnica de condicionalização e fazendo uma analogia com a segunda parte da técnica de indução, orientamos tais alunos ao conceito correto. Enfatizamos ainda o fato de ser comum encontrarmos erros em livros didáticos quanto à utilização da referida técnica.

Depois desse momento dividimos novamente a sala em grupos de 04 pessoas, e orientamos que fossem resolvidos os exercícios referentes à indução. À medida que os alunos respondiam tais exercícios, destacavam as dúvidas referentes aos conteúdos anteriores.

Este encontro foi considerado por todos os alunos o mais produtivo e participativo. Acreditamos que isso se deu por vários fatores, dos quais destacamos: a técnica já ser conhecida pela grande maioria dos alunos; já estarmos no sexto encontro, o que pode ter favorecido a maturidade e familiaridade com a referida técnica.

Ao final do tempo do encontro, sugerimos que revisassem todo o conteúdo para que na próxima aula, nosso penúltimo encontro, pudéssemos discutir os pontos que acharam mais importantes e suas maiores dúvidas.

4.3.5 Encontro VIII

No oitavo encontro, resolvemos usar uma metodologia bastante diferente das anteriores. Depois de sete encontros onde estudamos, discutimos e analisamos as principais técnicas de demonstração em Matemática, levamos para a sala de aula 20

[21] Há mais de uma forma correta de apresentação da demonstração.

livros das mais diversas disciplinas (Álgebra Linear, Análise Real, Geometria Euclidiana, Geometria Analítica, Teoria dos Números, Álgebra Moderna, Cálculo I, Cálculo II, Variáveis Complexas, entre outros) e realizamos uma atividade de pesquisa que consistiu em verificar nos livros que técnicas de demonstração eram utilizadas.

A atividade foi realizada em grupos formados por, no máximo, cinco componentes, ficando cada grupo com uma média de três livros. Solicitamos aos alunos que pesquisassem a demonstração de cinco teoremas. Deveriam então repetir cada teorema encontrado nos livros numa folha, destacar e fazer uma breve análise da técnica utilizada em sua demonstração, anotando também na folha a bibliografia para conferirmos se haviam compreendido a atividade. A figura 5 ilustra um dos grupos realizando a atividade proposta.

Figura 5: Alunos realizando atividade de pesquisa em livros de Matemática

Fonte: Pesquisa (agosto, 2009)

Essa foi uma atividade bastante produtiva, uma vez que os alunos, ao conseguirem identificar as técnicas, iam se auto-avaliando e demonstrando o quanto estavam familiarizados com a linguagem abordada nas referidas técnicas. Destacamos ainda que as proposições tão presentes nas aulas de Matemática agora conseguiam ser interpretadas.

No decorrer da atividade, alguns alunos chegaram a apontar pequenas falhas em alguns livros, onde o autor não havia sido fiel aos passos da demonstração que havia utilizado na argumentação. Isso, nos fez perceber que o objetivo de ajudá-los a atingir uma compreensão relacional das técnicas de demonstração havia sido alcançado.

Por fim, realizamos uma discussão geral onde foram socializadas as respostas de cada grupo e, ao final da discussão, provocamos outros questionamentos, objetivando despertar seu senso crítico e motivando-os a expressarem livremente sua opinião sobre o Módulo de Ensino, uma vez que o próximo encontro seria referente à atividade avaliativa e não teríamos mais outra oportunidade para realizar esse debate. Nesse momento, muitos alunos se expressaram em relação à disciplina, todos positivamente.

4.3.6 Avaliação do Momento III

Tendo em vista o objetivo desse Momento que era desenvolver a compreensão relacional das técnicas de demonstração matemática por parte dos alunos, podemos afirmar que o Momento III foi avaliado como bastante satisfatório quando, ao contemplar o estudo das técnicas de demonstração, percebemos que a grande maioria dos alunos participou das discussões de forma bastante eficaz. Destacamos que algo que contribuiu muito para o desenvolvimento das atividades foi o fato dos alunos já terem adquirido no Momento anterior um entendimento sobre a importância deste estudo.

Outro fator de destaque foi a importância que demos à análise das técnicas, ao invés de simplesmente trabalharmos os tipos de demonstrações. Diversos alunos comentaram que a referida análise havia contribuído para seu desempenho também em outras disciplinas que estavam cursando paralelamente a essa intervenção.

Vale ressaltar que, como foi dito anteriormente, esse Momento foi considerado o núcleo central do Módulo de Ensino. Nesse sentido, os resultados esperados eram os mais importantes para o Módulo, pois tinham ênfase na autonomia e criatividade dos alunos para o alcance da compreensão relacional das técnicas. Podemos então concluir que tal meta foi cumprida, uma vez que a maioria dos alunos realizou as atividades propostas, discutiu, argumentou, apresentou seus resultados e se considerou apta a realizar a avaliação do Momento posterior.

Quanto à minoria dos alunos que continuou com dificuldades de compreensão, destacamos que esses alunos não participaram ativamente de todas as atividades, alguns faltaram aulas, outros não realizaram os exercícios e trabalhos propostos. Portanto, seus resultados não tiveram influência sobre a avaliação do Módulo, e podemos concluir que para tais alunos o Módulo não atingiu seus objetivos. Vale repetir que a intervenção foi realizada numa turma de curso noturno e, talvez por isso, tenhamos encontrado maiores desafios, visto ser comum uma participação menos eficaz dos alunos nas aulas e o índice de faltas ser maior que no curso diurno.

A avaliação escrita e sua análise, bem como, a avaliação do Módulo segundo a visão dos alunos, serão apresentadas na descrição do próximo Momento e possui grande relevância para o trabalho como um todo.

4.4 MOMENTO IV

O Momento IV coincidiu com o último dos encontros da Intervenção em sala de aula e nesse Encontro foi aplicada a avaliação escrita. A referida avaliação foi necessária para atribuirmos uma nota para a disciplina em que a Intervenção estava inserida, Teoria dos Números, e registrar por escrito as respostas dadas pelos alunos a fim de analisá-las nesse trabalho.

Ainda nesse encontro, pedimos que os alunos entregassem junto com a prova uma análise da Intervenção em forma de texto. Destacamos que os itens a serem analisados nestes textos não foram direcionados, deixando-os assim exercerem de maneira pessoal sua opinião sobre todo o Módulo de Ensino. Observamos, também, que a entrega dessa análise foi facultativa, bem como foi facultativo a opção de se identificar.

Esse Momento foi considerado de extrema importância para a Intervenção, uma vez que avaliaria o nível de compreensão que os alunos atingiram. Os objetivos desse Momento foram:

a) Aplicar uma avaliação escrita com questões relacionadas às técnicas de demonstrações estudadas;
b) Analisar as respostas dos alunos na avaliação;
c) Analisar os textos entregues pelos alunos ao fim da avaliação;
d) Verificar, a partir da análise da avaliação e dos textos dos alunos, o alcance de sua compreensão relacional das técnicas de demonstrações matemáticas.

Era esperado, então, entendermos se a aprendizagem dos alunos, ao fim da aplicação do Módulo de Ensino, pôde ser refletida na avaliação escrita, bem como nos textos analíticos da Intervenção.

O detalhamento do encontro realizado neste Momento será apresentado a seguir, juntamente com a descrição e análise das respostas e textos dos alunos.

4.4.1 Encontro IX

No último encontro realizamos uma avaliação individual, composta de cinco questões subjetivas, envolvendo todas as demonstrações matemáticas abordadas ao longo dos Encontros da Intervenção.

Para enriquecer o estudo e trazer uma maior clareza com relação às respostas apresentadas pelos alunos, analisaremos algumas questões da avaliação de maneira qualitativa, através dos dois tipos de compreensão definidas por Skemp (1980). Para isso, definiremos três categorias citadas e detalhadas a seguir:

- Categoria 1, denominada *Sem compreensão* – referente ao aluno que nem sequer consegue responder, ou seja, responde algo que não tem sentido com o questionamento feito ou deixa a questão sem reposta.
- Categoria 2, chamada *Compreensão instrumental* – respectivo ao aluno que, ao aprender algo novo, expressa sua resposta apenas reproduzindo o procedimento feito em um exemplo em sala de aula ou visto em algum material didático. As respostas que foram classificadas com esse nível de compreensão mostram que o aluno domina certas regras e algoritmos, mas não consegue estabelecer relação entre os conceitos, se limitando à repetição.

- Categoria 3, nomeada *Compreensão relacional* – diz respeito ao aluno que, ao aprender algo novo, constrói ideias de forma criativa e dinâmica, num esquema elaborado. Assim, usa vários exemplos para construir a resposta nova, relacionando os conceitos e definições com criatividade.

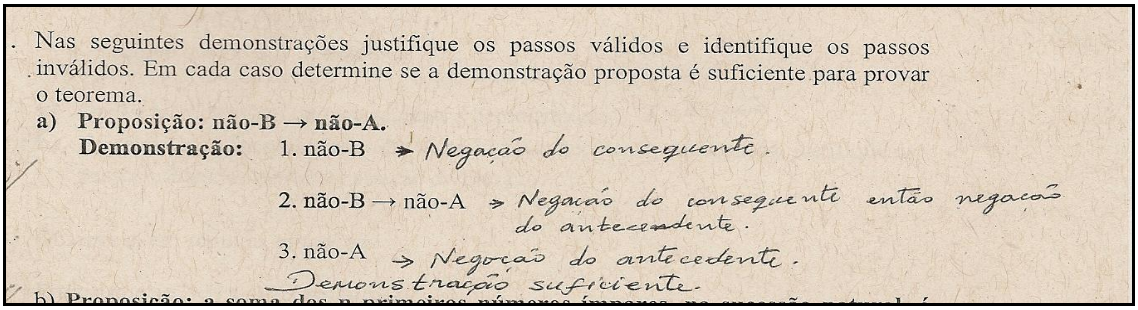
A questão 01 trazia dois exemplos de proposições já demonstradas, e solicitava que os passos válidos dessas demonstrações fossem justificados e que os passos inválidos identificados. Foi pedido ainda que, em cada caso, fosse determinado se a demonstração era suficiente para provar o teorema. O objetivo dessa questão era verificar se os alunos conseguiam reconhecer as principais características das técnicas de demonstração em questão, bem como analisar todos os passos envolvidos em seu desenvolvimento. Dos trinta alunos que realizaram a avaliação, 16 responderam de maneira satisfatória ao item *a*, relacionado à técnica de condicionalização e 17, ao item *b*, referente à técnica de indução matemática.

Notamos nesse quesito que uma grande parte dos alunos teve dificuldade em atingir uma compreensão relacional. De fato, por se tratar de uma questão que exigia deles uma independência de respostas prontas, existia pouca possibilidade de responder tal questão através de repetição ou de um algoritmo padrão, pois a questão exigia que o aluno não somente conhecesse as técnicas de demonstração, mas analisasse uma demonstração já realizada.

A seguir apresentamos as respostas dadas pelos alunos B, A e M, referentes ao item *a* da primeira questão. Após a análise, tais respostas foram classificadas nas categorias: sem compreensão, compreensão instrumental e compreensão relacional respectivamente.

ALUNO B[22]

Figura 6: Resposta apresentada pelo aluno B, referente a primeira questão da avaliação, item *a*.


Nas seguintes demonstrações justifique os passos válidos e identifique os passos inválidos. Em cada caso determine se a demonstração proposta é suficiente para provar o teorema.

a) Proposição: não-B → não-A.

Demonstração: 1. não-B → Negação do consequente.

2. não-B → não-A → Negação do consequente então negação do antecedente.

3. não-A → Negoção do antecedente.

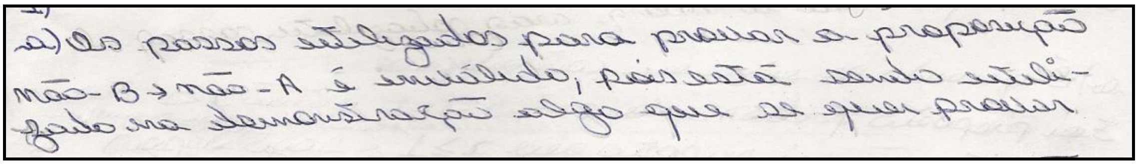
Demonstração suficiente.

Fonte: Pesquisa (agosto, 2009)

Na resposta do Aluno B podemos notar que não houve compreensão do enunciado, pois o aluno não só respondeu de maneira incoerente a questão, como não identificou os passos da demonstração como válidos ou não.

ALUNO A[23]

Figura 7: Resposta apresentada pelo aluno A, referente à primeira questão da avaliação, item *a*.


a) Os passos utilizados para provar a proposição não-B → não-A é inválido, pois está sendo utili-zado na demonstração algo que se quer provar

Fonte: Pesquisa (agosto, 2009)

---

[22] Para uma melhor visualização das respostas dos alunos, transcreveremos as respostas escaneadas. Deve ser observado que, tanto neste, quanto nos outros itens, o que está em itálico, corresponde ao que foi escrito pelo respectivo aluno:

ALUNO B:

1. Nas seguintes demonstrações justifique os passos válidos e identifique os passos inválidos. Em cada caso determine se a demonstração proposta é suficiente para provar o teorema.

   a) Proposição: não-B → não-A.

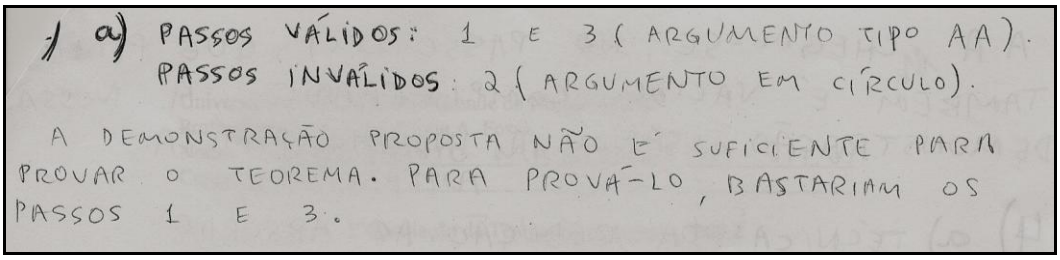
   Demonstração: 1. não-B → *Negação do consequente*
   2. não-B → não-A → *Negação do conseqüente então negação do antecedente*
   3. não-A → *Negação do antecedente.*
   Demonstração suficiente

[23] ALUNO A
a) Os passos utilizados para provar a proposição não B→ não A é inválido, pois está sendo utilizado na demonstração algo que se quer provar.

Na resposta do aluno A, podemos notar que ele até entendeu o que era solicitado na questão, mas não atingiu uma compreensão relacional, uma vez que repetiu a mesma resposta já vista em sala de aula para uma questão similar, não demonstrando criatividade.

ALUNO M[24]

Figura 8: Resposta apresentada pelo aluno M, referente à primeira questão da avaliação, item *a*.


1 a) PASSOS VÁLIDOS: 1 E 3 (ARGUMENTO TIPO AA).
PASSOS INVÁLIDOS: 2 (ARGUMENTO EM CÍRCULO).
A DEMONSTRAÇÃO PROPOSTA NÃO É SUFICIENTE PARA PROVAR O TEOREMA. PARA PROVÁ-LO, BASTARIAM OS PASSOS 1 E 3.

Fonte: Pesquisa (agosto, 2009)

O aluno M, por sua vez, organiza sua resposta com bastante clareza e, mesmo sendo sucinto na apresentação da resposta, destaca sua ideia não somente relacionando os conceitos estudados em sala de aula, mas também, mostrando uma autonomia na resolução da questão. Isso nos leva a concluir que esse aluno atingiu um nível de compreensão relacional para essa atividade.

Na segunda questão apresentamos dois itens com exemplos de argumentos: o primeiro continha termos matemáticos e o segundo teve o conteúdo matemático minimizado, com suas premissas escritas em linguagem coloquial, não matemática. Nesse quesito foi solicitado que os alunos classificassem cada argumento como válido ou não, justificando suas respostas. O objetivo dessa questão foi verificar se os alunos, ao justificar suas respostas, perceberam que os exemplos tinham a estrutura de um condicional e que poderiam analisar se sua estrutura estava corretamente determinada a partir da utilização correta dos termos do condicional: o antecedente e o consequente.

Ao analisar as respostas apresentadas pelos alunos na referida questão, podemos afirmar quanto ao item *a* que 24 alunos atingiram compreensão da questão, sendo que

[24] ALUNO M

a) *PASSOS VÁLIDOS : 1 E 3 (ARGUMENTO tipo AA)*
PASSOS INVÁLIDOS: 2 (ARGUMENTO EM CÍRCULO)
A DEMONSTRAÇÃO PROPOSTA NÃO É SUFICIENTE PARA PROVAR O TEOREMA. PARA PROVÁ-LO, BASTARIAM OS PASSOS 1 E 3.

destes, 15 se enquadram na categoria de compreensão relacional. No item *b*, 23 alunos chegaram à compreensão, dos quais 11, à compreensão relacional.

As terceira e quarta questões eram similares. Em ambas, foi apresentada uma proposição demonstrada e a partir dela foram realizados dois questionamentos. No item *a* que fosse classificado o tipo de demonstração, e no item *b*, a descrição da técnica, justificados os passos utilizados na demonstração.

Embora as questões 03 e 04 se assemelhem à primeira questão da avaliação, elas têm um elemento diferencial e vale a pena destacá-lo. Nessa questão não se interroga sobre a validade da demonstração utilizada, pois já se sabe que a técnica foi empregada corretamente, sendo o foco da questão analisar os passos e justificá-los com base no que foi estudado sobre a referida técnica nos encontros anteriores.

Essas questões tiveram um resultado muito satisfatório, em especial, a questão 03, referente à técnica de indução matemática, onde 29 alunos conseguiram identificar corretamente a técnica, tendo todos esses atingido algum nível de compreensão. A quarta questão também apresentou resultado satisfatório, embora não tão expressivo quanto a terceira. Acreditamos que essa diferença se deu porque a técnica de indução matemática é uma técnica que, além de ser bastante conhecida, tem um formato peculiar que permite um fácil reconhecimento.

Apresentamos, a seguir, o enunciado da questão 4 :

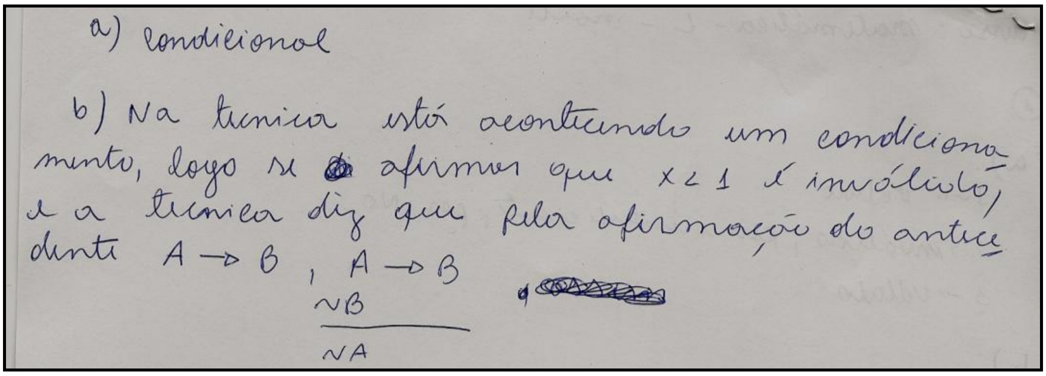
> Observe e, em seguida, responda:
>
> Provar que se $2x^2+x-1=0$, então $x<1$.
>
> **Demonstração:**
>
> Vamos supor que $2x^2+x-1=0$ e que $x\geq 1$. Logo, se $x\geq 1$, então $1-x\leq 0$ e $2x^2>0$. Mas, pela hipótese, teríamos $2x^2= 1-x$, o que nos remete a um valor estritamente positivo, não podendo então ser igual ou menor que zero. Assim, $x<1$. ■
>
> a) Qual a técnica utilizada para realizar a demonstração?
>
> b) Escreva com suas palavras como se realiza esta técnica e, em seguida, justifique os passos utilizados na demonstração de Sicrano[25].

[25] Na questão anterior supomos que a demonstração foi realizada por uma pessoa qualquer que chamamos de Sicrano, o mesmo nome usamos para designar a pessoa que supostamente também havia realizado a demonstração da questão 4.

Para exemplificar as respostas analisadas e classificadas respectivamente nas categorias 1, 2 e 3 apresentamos respostas dos alunos J, C1 e E:

ALUNO J[26]

Figura 9: Resposta apresentada pelo aluno J, referente a quarta questão da avaliação.



Fonte: Pesquisa (agosto, 2009)

Com relação à resposta apresentada pelo Aluno J, pode-se concluir que houve uma confusão na classificação da técnica, porque na técnica de condicionalização pode-se afirmar a negação do consequente para se chegar à negação do antecedente e aí se provar a proposição, mas neste caso não se chega a uma contradição, sendo esta a diferença entre essa técnica e a técnica de redução ao absurdo. Dessa forma, podemos concluir que o aluno não teve compreensão da referida questão.

---

[26] ALUNO J

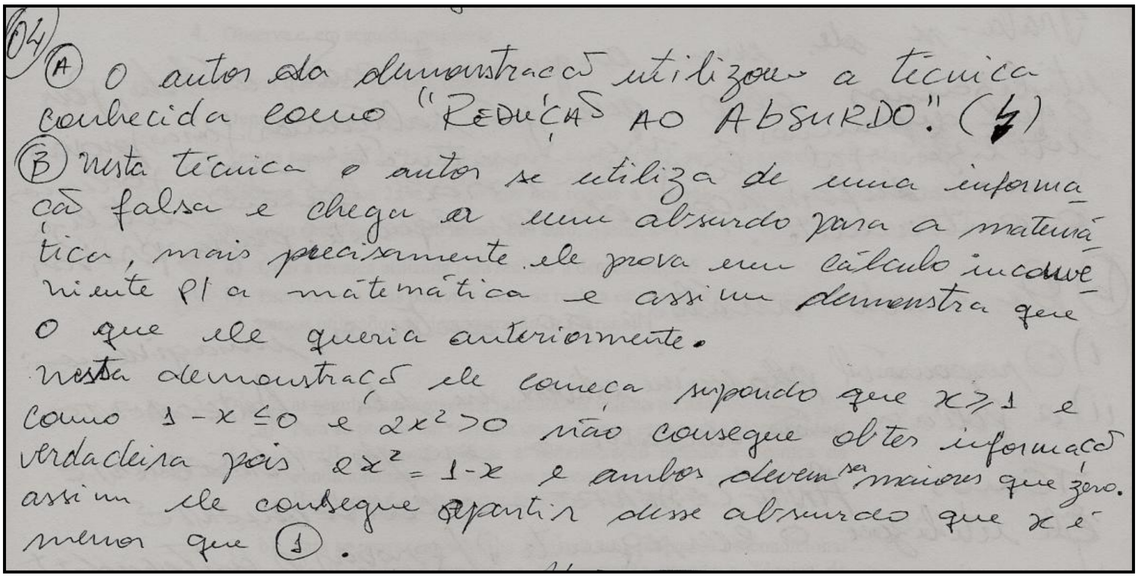
a) condicional

b) Na técnica está acontecendo um condicionamento, logo se afirmar que x ‹1é inválido, e a técnica diz que pela afirmação do antecedente A → B, A → B

$$\frac{\sim B}{\sim A}$$

ALUNO C1[27]

Figura 10: Resposta apresentada pelo aluno C1, referente à quarta questão da avaliação.



04) (A) O autor da demonstração utilizou a técnica conhecida como "REDUÇÃO AO ABSURDO". (↯)
(B) nesta técnica o autor se utiliza de uma informação falsa e chega a um absurdo para a matemática, mais precisamente ele prova um cálculo inconveniente p/ a matemática e assim demonstra que o que ele queria anteriormente.
nesta demonstração ele começa supondo que $x \geq 1$ e como $1 - x \leq 0$ e $2x^2 > 0$ não consegue obter informação verdadeira pois $2x^2 = 1 - x$ e ambos devem ser maiores que zero. assim ele consegue a partir desse absurdo que x é menor que (1).

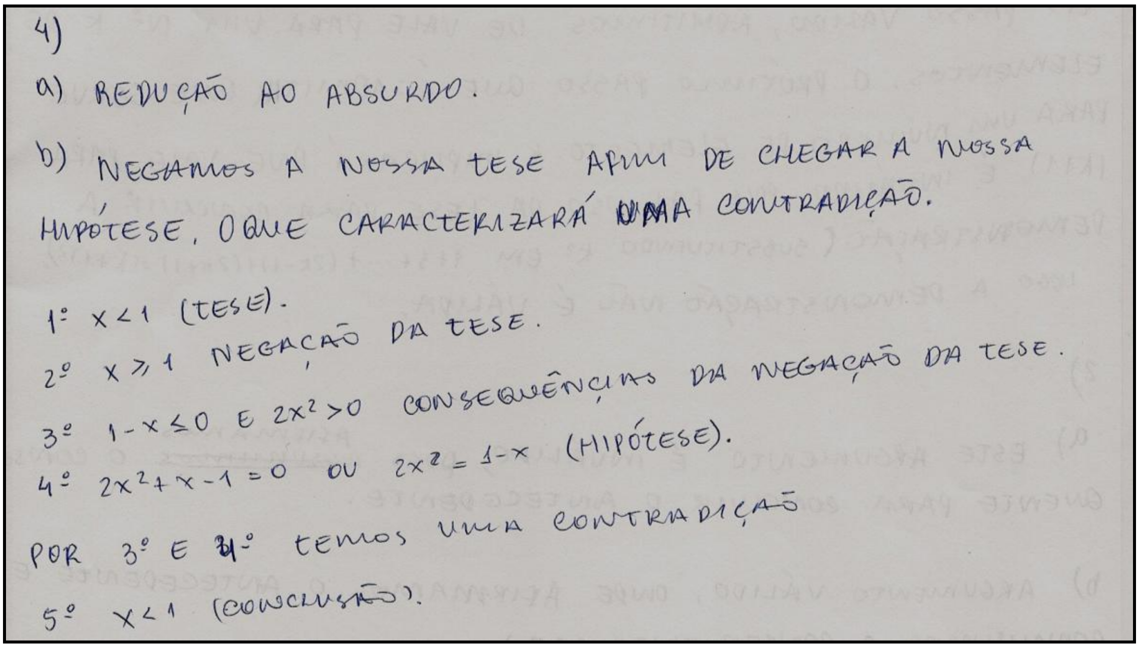
Fonte: Pesquisa (agosto, 2009)

Pode-se afirmar que o Aluno C1 compreendeu a técnica de redução ao absurdo, pois conseguiu responder a questão de maneira pertinente. No entanto, teve dificuldade de expressar sua resposta, pois justifica os passos da demonstração repetindo o que está escrito, o que nos levou a classificar sua compreensão como instrumental.

27 ALUNO C1
a)O autor da demonstração utilizou a Técnica conhecida como "REDUÇÃO AO ABSURDO". (↓)
b) Nesta técnica o autor se utiliza de uma informação falsa e chga a um absurdo para a matemática, mais precisamente ele prova em cálculo inconveniente p/ a matemática e assim demonstra que o que ele queria anteriormente.
Nesta demonstração ele começa supondo que $x \geq 1$e como $1 - x \leq 0$ e $2x^2 › 0$ não consegue obter informação verdadeira pois $2x^2 = 1 - x$ e ambos devem ser maiores que zero. Assim ele consegue a partir desse absurdo que x é menor que 1.

ALUNO E[28]

Figura 11: Resposta apresentada pelo aluno E, referente à quarta questão da avaliação.


4)

a) REDUÇÃO AO ABSURDO.

b) NEGAMOS A NOSSA TESE AFIM DE CHEGAR A NOSSA HIPÓTESE, OQUE CARACTERIZARÁ UMA CONTRADIÇÃO.

1º $x < 1$ (TESE).

2º $x \geq 1$ NEGAÇÃO DA TESE.

3º $1 - x \leq 0$ E $2x^2 > 0$ CONSEQUÊNCIAS DA NEGAÇÃO DA TESE.

4º $2x^2 + x - 1 = 0$ OU $2x^2 = 1 - x$ (HIPÓTESE).

POR 3º E 4º TEMOS UMA CONTRADIÇÃO

5º $x < 1$ (CONCLUSÃO).

Fonte: Pesquisa (agosto, 2009)

O Aluno E, diferente dos outros, além de apresentar uma resposta pertinente, destaca os passos realizados de forma organizada com sua respectiva justificativa, relacionando os passos da demonstração de maneira bastante clara e objetiva; mostra ainda capacidade de construir ideias de forma criativa, numa independência da forma realizada em sala de aula, ou seja, sem precisar simplesmente repetir alguma resolução anterior. A análise da referida resposta nos leva a classificar sua compreensão como relacional.

A última questão da avaliação, citada a seguir, trazia dois itens, *a* e *b*, que eram contraditórios. O objetivo desta questão era discutir as afirmações relacionadas à proposição bicondicional, julgando-as válidas ou não. Esperávamos que o aluno identificasse que afirmar que uma alternativa era válida, consequentemente, invalidaria

---

[28] ALUNO E
4) a) REDUÇÃO AO ABSURDO
b)NEGAMOS A NOSSA TESE AFIM DE CHEGAR A NOSSA HIPÓTESE, O QUE CARACTERIZARÁ UMA CONTRADIÇÃO.
1º $x < 1$ *(TESE).*
2º $x \geq 1$ *NEGAÇÃO DA TESE*
3º $1 - x \leq 0$ *e* $2x^2 > 0$ *CONSEQUÊNCIA DA NEGAÇÃO DA TESE*
4º $2x^2 + x - 1 = 0$ *ou* $2x^2 = 1 - x$ *(HIPÓTESE).*
POR 3º E 4º TEMOS UMA CONTRADIÇÃO
5º $x < 1$ *(CONCLUSÃO).*

a outra. Outro resultado esperado era que eles identificassem as proposições equivalentes envolvidas na questão.

Questão 5:

> Discuta as seguintes afirmações, julgando-as válidas ou não:
>
> a) Para se provar um teorema que seja uma proposição bicondicional $A \leftrightarrow B$, podemos realizar a demonstração usando a Técnica de condicionalização duas vezes provando a "ida" $A \rightarrow B$ e a "volta" $B \rightarrow A$, que é o mesmo que provar $A \rightarrow B$ e $\sim B \rightarrow \sim A$.
>
> b) Para se provar um teorema que seja uma proposição bicondicional $A \leftrightarrow B$, podemos realizar a demonstração usando a Técnica de condicionalização duas vezes provando a "ida" $A \rightarrow B$ e a "volta" $B \rightarrow A$, que é o mesmo que provar $A \rightarrow B$ e $\sim A \rightarrow \sim B$.

Nessa questão, 17 alunos atingiram algum tipo de compreensão no item *a*, e 19 alunos do item *b*. É curioso observar que essa diferença se deu porque dois alunos tiveram dificuldade de compreender que $B \rightarrow A$ é equivalente a $\sim A \rightarrow \sim B$ e, assim, no caso do item *b* a questão seria verdadeira e, dessa forma, o item *a* que contradiz o item *b* falso.

Após a análise qualitativa das questões da avaliação, apresentaremos em um quadro-síntese a análise quantitativa dos dados de acordo com a seguinte classificação:

- Categoria 1, referente a respostas insatisfatórias, classificados como *sem compreensão*, onde o discente utilizou justificativas totalmente erradas, ou que simplesmente repetiam o enunciado;
- Categoria 2, referente a respostas satisfatórias, justificadas com alguma informação pertinente, mas que não apresentaram suas respostas de maneira criativa e autônoma, resolvendo as questões somente repetindo o procedimento realizado durante os encontros, ou seja, os alunos classificados nessa categoria atingiram uma *compreensão instrumental*;
- Categoria 3, referente a respostas satisfatórias, explicitando as propriedades pertinentes às técnicas de demonstração em questão, de forma completa e autônoma, valorizando a criatividade e uma forma própria de justificação, portanto classificando os alunos como aqueles que atingiram o nível de

compreensão relacional.

No quadro, acrescentamos uma linha que também julgamos ser referente aos alunos classificados como *sem compreensão*, mas colocados fora da categoria 1 por deixarem respostas em branco.

Quadro 9: Quadro-síntese das respostas apresentadas (quantidade de alunos)

<table>
<tr><th rowspan="2">Classificação</th><th colspan="2">Q1</th><th colspan="2">Q2</th><th colspan="2">Q3</th><th colspan="2">Q4</th><th colspan="2">Q5</th></tr>
<tr><th>a</th><th>b</th><th>a</th><th>B</th><th>a</th><th>b</th><th>a</th><th>b</th><th>a</th><th>b</th></tr>
<tr><td>Sem compreensão</td><td>14</td><td>12</td><td>6</td><td>7</td><td>1</td><td>0</td><td>4</td><td>6</td><td>12</td><td>9</td></tr>
<tr><td>Compreensão instrumental</td><td>7</td><td>7</td><td>9</td><td>12</td><td rowspan="2">29</td><td>14</td><td rowspan="2">25</td><td>10</td><td>7</td><td>9</td></tr>
<tr><td>Compreensão relacional</td><td>9</td><td>10</td><td>15</td><td>11</td><td>15</td><td>13</td><td>10</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Em branco</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td></tr>
</table>

Fonte: Pesquisa (agosto, 2009)

Fazendo uma análise quantitativa dos dados, podemos observar que a maioria dos alunos respondeu de forma satisfatória as questões, o que pode ser observado pelos números apresentados nas categorias 2 e 3, referentes a compreensão instrumental e relacional, respectivamente. Destacamos ainda que poucos deixaram em branco as questões, mostrando assim que, mesmo de maneira insatisfatória, um bom número de alunos optou por respondê-las, o que em nossa análise nos leva a crer que nessa fase do Módulo de Ensino eles adquiriram mais segurança em expressar seus procedimentos. Podemos concluir que, ao fim dos encontros, os discentes se sentiam mais confiantes e aptos a expressarem suas argumentações, embora muitos ainda tenham optado pela repetição, classificando-se assim no item referente à compreensão instrumental.

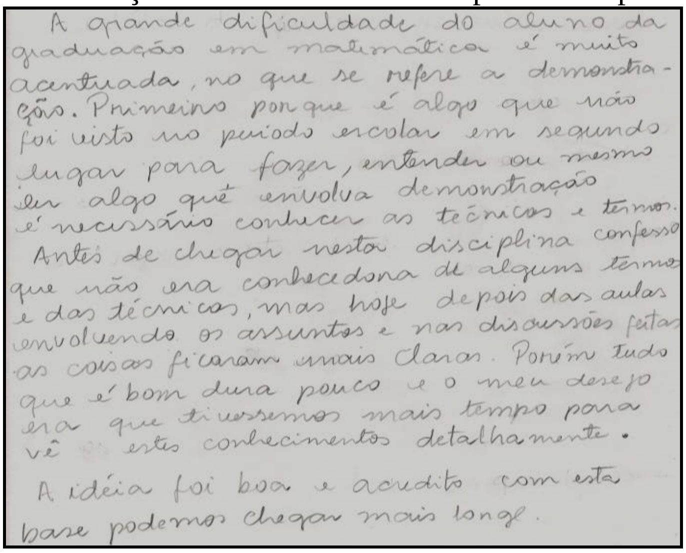
Sabemos que numa avaliação existem diversos fatores que podem contribuir para que o resultado não seja de acordo com o esperado, uma vez que muitos alunos ficam nervosos ao saberem que estão sendo avaliados, enquanto outros têm medo de ser criativos e se afastar da forma utilizada pelo professor, preferindo repetir as resoluções. Por esses motivos, acreditamos que o Módulo de Ensino teve resultados ainda melhores que os comprovados na avaliação escrita. Algo que nos dá base para afirmar isso é a avaliação realizada pelos alunos sobre o Módulo.

No início da descrição desse encontro, afirmamos que havia sido solicitado aos alunos que, ao entregar a avaliação escrita, pudessem expressar sua opinião sobre os Encontros realizados nestas semanas. Para isso não foi entregue aos alunos uma folha de avaliação, foi solicitado que aqueles que quisessem poderiam, sem precisar se identificar, escrever com suas palavras as considerações que para eles haviam sido mais importantes no Módulo de Ensino. O resultado foi surpreendente. Todos os alunos escreveram sua avaliação e nos entregaram junto com a prova, alguns até se identificaram, o que não era necessário. A seguir destacamos algumas dessas respostas. Como eles poderiam escrever de maneira pessoal, para uma melhor organização, comentamos as avaliações segundo seu conteúdo.

Utilizaremos a nomenclatura de forma diferente da anterior para denominar os alunos, pois já que uma parte destes não se identificou não seria conveniente usar os mesmos caracteres para representá-los.

ALUNA 1[29]

Figura 12: Avaliação do Módulo de ensino apresentada pelo aluno 1.


A grande dificuldade do aluno da
graduação em matemática é muito
acentuada, no que se refere a demonstra-
ções. Primeiro porque é algo que não
foi visto no período escolar em segundo
lugar para fazer, entender ou mesmo
ler algo quê envolva demonstração
é necessário conhecer as técnicas e termos.
Antes de chegar nesta disciplina confesso
que não era conhecedora de alguns termos
e das técnicas, mas hoje depois das aulas
envolvendo os assuntos e nas discussões feitas
as coisas ficaram mais claras. Porém tudo
que é bom dura pouco e o meu desejo
era que tivéssemos mais tempo para
vê estes conhecimentos detalhamente.
A idéia foi boa e acredito com esta
base podemos chegar mais longe.

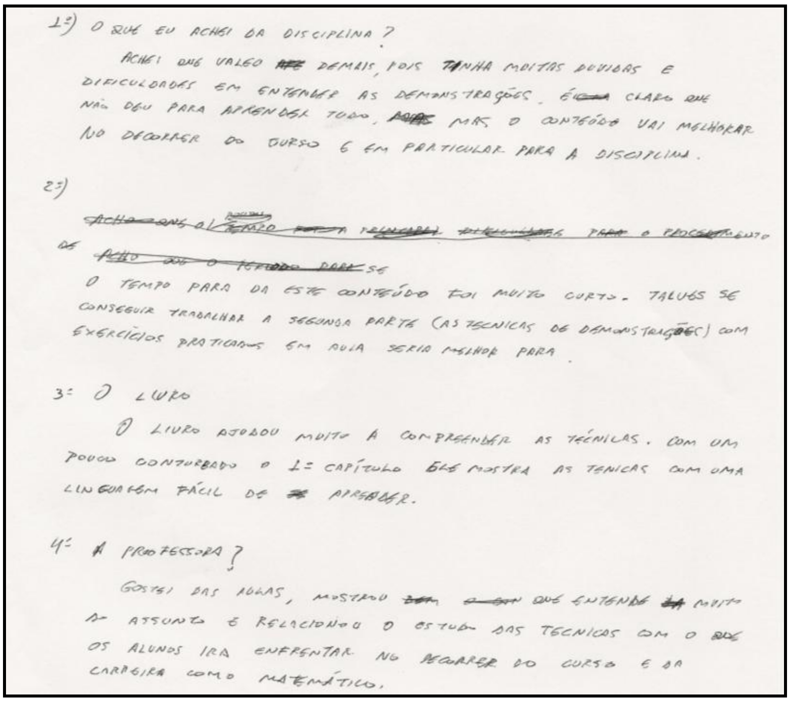
Fonte: Pesquisa (agosto, 2009)

[29] ALUNA 1
A grande dificuldade do aluno da graduação em matemática é muito acentuada no que se refere a demonstração. Primeiro porque é algo que não foi visto no período escolar em segundo lugar para fazer, entender ou mesmo ler algo que envolva demonstração é necessário conhecer as técnicas e termos. Antes de chegar nesta disciplina confesso que não era conhecedora de alguns termos, mas hoje depois das aulas envolvendo assuntos e nas discussões feitas as coisas ficaram mais claras. Porém tudo o que é bom dura pouco e meu desejo era que tivéssemos mais tempo para vê estes conhecimentos detalhadamente. A idéia foi boa e acredito que com essa base podemos chegar mais longe.

A aluna 1 utiliza o espaço da avaliação para destacar as dificuldades encontradas pelo alunos de graduação quanto às demonstrações e enfatizar que acredita ter sido válida a experiência. Pelo que a aluna destaca, é possível afirmar que para ela houve uma aprendizagem significativa e, no mínimo, um entendimento de que o estudo das técnicas de demonstração deveria ser algo mais valorizado no ensino de Matemática e que, a partir daí, deveria ser estudado logo no início do curso.

ALUNO 2[30]

Figura 13: Avaliação do Módulo de ensino apresentada pelo aluno 2.


1º) O QUE EU ACHEI DA DISCIPLINA?
ACHEI QUE VALEU DEMAIS, POIS TINHA MUITAS DUVIDAS E DIFICULDADES EM ENTENDER AS DEMONSTRAÇÕES. É CLARO QUE NÃO DEU PARA APRENDER TODO, MAS O CONTEÚDO VAI MELHORAR NO DECORRER DO CURSO E EM PARTICULAR PARA A DISCIPLINA.
2º)
O TEMPO PARA DA ESTE CONTEÚDO FOI MUITO CURTO. TALVES SE CONSEGUIR TRABALHAR A SEGUNDA PARTE (AS TECNICAS DE DEMONSTRAÇÕES) COM EXERCÍCIOS PRATICADOS EM AULA SERIA MELHOR PARA.
3º O LIVRO
O LIVRO AJUDOU MUITO A COMPREENDER AS TÉCNICAS. COM UM POUCO CONTURBADO O 1º CAPÍTULO ELE MOSTRA AS TENICAS COM UMA LINGUAGEM FÁCIL DE APRENDER.
4º A PROFESSORA?
GOSTEI DAS AULAS, MOSTROU QUE ENTENDE MUITO DO ASSUNTO E RELACIONOU O ESTUDO DAS TECNICAS COM O QUE OS ALUNOS IRA ENFRENTAR NO DECORRER DO CURSO E DA CARREIRA COMO MATEMÁTICO.

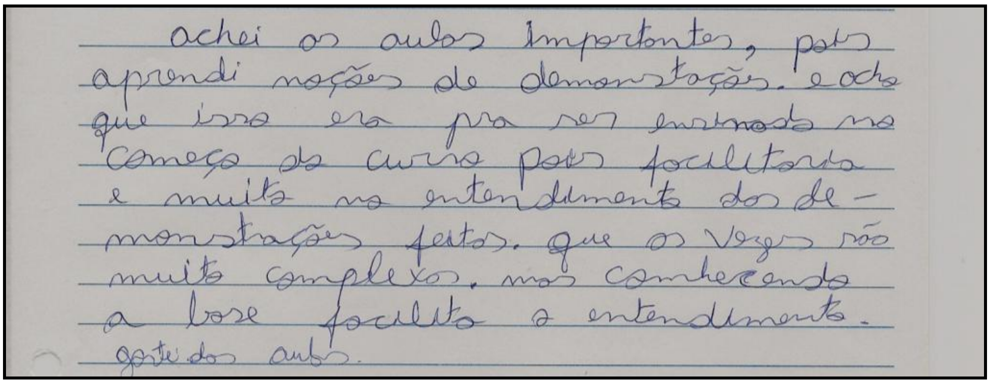
Fonte: Pesquisa (agosto, 2009)

30 ALUNO 2
1º) O QUE EU ACHEI DA DISCIPLINA?
ACHEI QUE VALEU DEMAIS, POIS TINHA MUITAS DÚVIDAS E DIFICULDADES EM ENTENDER AS DEMONSTRAÇÕES. É CLARO QUE NÃO DEU PARA APRENDER TUDO, MAS O CONTEÚDO VAI MELHORAR NO DECORRER DO CURSO E EM PARTICULAR PARA A DISCIPLINA.
2º) O TEMPO PARA DAR ESTE CONTEUDO FOI MUITO CURTO. TALVEZ SE CONSEGUIR TRABALHAR A SEGUNDA PARTE (AS TÉCNICAS DE DEMONSTRAÇÕES) COM EXERCÍCIOS PRÁTICOS EM SALA DE AULA SERIA MELHOR PARA.
3º) O LIVRO
O LIVRO AJUDOU MUITO A COMPREENDER AS TÉCNICAS. COM UM POUCO CONTURBADO O PRIMEIRO CAPÍTULO ELE MOSTRA AS TECNICAS COM UMA LINGUAGEM FÁCIL DE APRENDER.
4º) A PROFESSORA?
GOSTEI DAS AULAS, MOSTROU QUE ENTENDE MUITO DO ASSUNTO E RELACIONOU O ESTUDO DAS TECNICAS COM O QUE OS ALUNOS IRA ENFRENTAR NO DECORRER DO CURSO E DA CARREIRA COMO MATEMÁTICO.

O aluno 2 criou um questionário com perguntas que focavam pontos importantes do Módulo, como a professora, o tempo, o livro e sua opinião sobre a Intervenção, chamada por ele de disciplina. Observamos que em seus comentários ele enfatiza que houve uma melhora na sua aprendizagem e, mesmo não acreditando ter aprendido tudo, se mostra bastante motivado a buscar melhoras. A análise nos leva a afirmar que, pela autonomia adquirida e motivação a perseverar nos estudos, o aluno desenvolveu uma compreensão relacional da importância do ensino de demonstrações e de seu papel no Ensino de Matemática.

ALUNO 3[31]

Figura 14: Avaliação do Módulo de ensino apresentada pelo aluno 3.


achei as aulas importantes, pois
aprendi noções de demonstrações. e acho
que isso era pra ser ensinado no
começo do curso pois facilitaria
e muito no entendimento das de-
monstrações feitas. que as vezes são
muito complexos, mas conhecendo
a base facilita o entendimento.
gostei das aulas.

Fonte: Pesquisa (agosto, 2009)

O aluno 3, além de enfatizar a importância dessas aulas, solicita que o Módulo seja realizado no início do curso, pois, segundo ele, a base adquirida pelo estudo das técnicas facilitaria a aprendizagem de novos conteúdos. Podemos observar ainda, que esse aluno atesta ter atingido certa compreensão das técnicas, pois aprendeu noções de demonstrações.

---

[31] ALUNO 3

achei as aulas muito importantes, pois aprendi noções de demonstrações e acho que isso era pra ser ensinado no começo do curso pois facilitaria e muito no entendimento das demonstrações feitas que as vezes são muito complexos, mas conhecendo a base facilita o entendimento.
gostei das aulas.

ALUNO 4[32]

Figura 15: Avaliação do Módulo de ensino apresentada pelo aluno 4.

XX

Ao meu ver as aulas de tecnicas de de-
monstração foram muito úteis pois já estou
sentindo diferença no entendimento de outras
disciplinas que estou pagando nesse semeste.
Porém acho que deveriamos ter tido um tempo
maior para aprende-los e com uma quantidade
de exercícios bem maior pois como tudo na
matemática so se aprendo se exercitando.
Então se aumentasse a carga horária e
resolvessemos mais exercícios em sala, garanto
que teríamos um aproveitamento bem maior e
nossa vida de universitário seria bem mais
feliz.

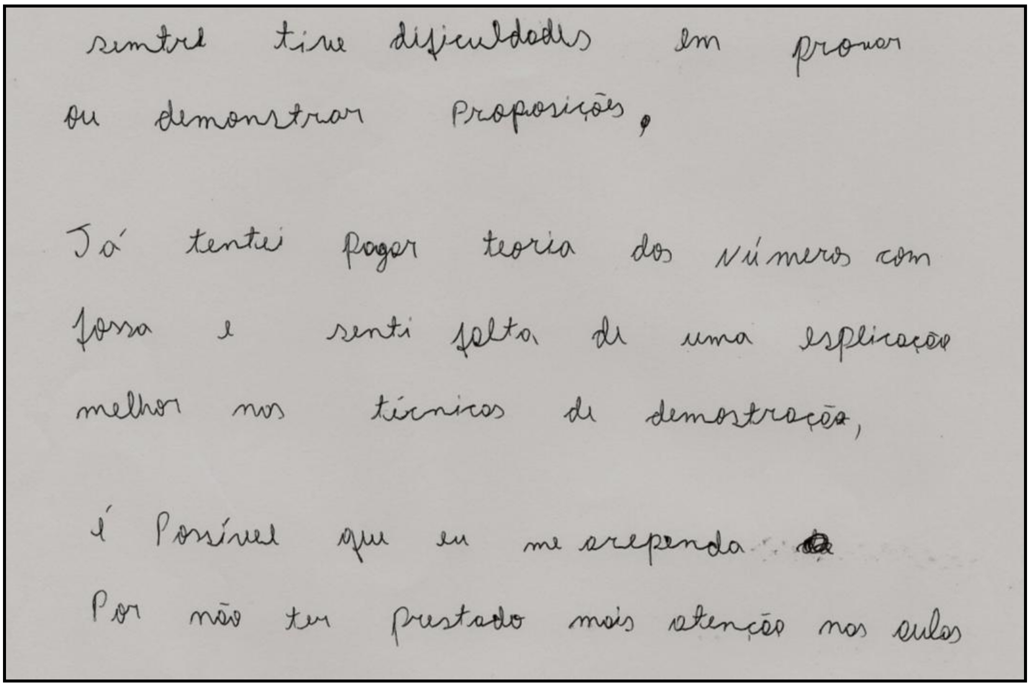
Fonte: Pesquisa (agosto, 2009)

O aluno 4 destaca que, depois desta Intervenção, ele notou um melhor desempenho seu com relação a outras disciplinas, porém, faz uma crítica ao tempo utilizado para aplicação do Módulo e à quantidade de exercícios realizados. Pela afirmação de ter conseguido um melhor desenvolvimento em outras disciplinas que estava cursando, podemos concluir que houve uma autonomia na sua aprendizagem, pois relacionou os conceitos adquiridos neste Módulo a outras situações.

[32] ALUNO 4
Ao meu ver as aulas de técnicas de demonstração foram muito úteis pois já estou sentindo diferença no entendimento de outras disciplinas que estou pagando nesse semestre.
Porém acho que deveríamos ter tido um tempo maior para aprende-los e com uma quantidade de exercícios bem maior pois como tudo na matemática só se aprende se exercitando.
Então se aumentasse a carga horária e resolvêssemos mais exercícios em sala, garanto que teríamos um aproveitamento bem maior e nossa vida de universitário seria bem mais feliz.

ALUNO 5[33]

Figura 16: Avaliação do Módulo de ensino apresentada pelo aluno 5.


sempre tive dificuldades em provar
ou demonstrar proposições,

Já tentei pagar teoria dos Números com
fossa e senti falta de uma esplicação
melhor nas técnicas de demostração,

é Possível que eu me arependa
Por não ter prestado mais atenção nas aulas

Fonte: Pesquisa (agosto, 2009)

Dos 30 alunos que escreveram sua avaliação, somente dois apresentaram uma resposta negativa. No entanto, o aluno 5 assume que apesar de já ter tentado cursar a disciplina anteriormente e ter muitas dificuldades com relação às demonstrações. Deveria ter sido mais atento às aulas, sendo possível até que no futuro se arrependa disso. Pelo escrito, não é possível inferir se houve ou não algum tipo de compreensão, porém destacamos que esse aluno assume a responsabilidade por uma possível falha quanto ao insucesso do Módulo para ele, ao afirmar não ter estado atento ao que estudamos nos encontros.

---

[33] ALUNO 5
sempre tive dificuldades em provar ou demonstrar proposições.
Já tentei pagar teoria dos Números com fossa e senti falta de uma esplicação melhor nas técnicas de demostração, é possível que eu me arependa por não ter prestado mais atenção nas aulas.

ALUNO 6[34]

Figura 17: Avaliação do Módulo de ensino apresentada pelo aluno 6.

Eu achei as aulas bastante interes-
santes, foi possível aprender muitas dicas
e técnicas de demonstração. A única
crítica que eu faço é sobre os debates. Na
minha opinião eles são totalmente des-
necessários e no lugar desses debates
deveria existir aplicação, no quadro, de
questões. As aulas deveriam ser escritas no
quadro-negro e não em slides. Faltou
falar sobre "validade e verdade" e sobre
"proposições gerais". A primeira parte, que
falava sobre os gêmeos coreanos, deveria
ser substituída pela apresentação formal
e informação dos principais conceitos
envolvidos nas demonstrações, a saber:
a noção de axioma, proposição, lema,
teorema, corolário, postulado, definição,
argumento, teoria, hipótese, tese. Entretanto,
foi possível, com esse método usado pela
professora Enne, alcançar o objetivo
que seria introduzir nos leitores conceitos
fundamentais e uma análise estrutura
das técnicas de demonstração.

Fonte: Pesquisa (agosto, 2009)

O aluno 6 também apresentou sua avaliação de maneira menos favorável, porém notamos que este é um aluno que parece ter sofrido bastante influência de um ensino tradicionalista, aparentando ter dificuldade com o emprego de novas metodologias de ensino. Vale destacar que, ao fim de seu texto, ele afirmou que a professora atingiu seu objetivo e, por isso, é possível concluir que houve compreensão das técnicas de

---

[34] ALUNO 6

Eu achei as aulas bastante interessantes, foi possível aprender muitas dicas e técnicas de demonstração. A única crítica que eu faço é sobre os debates. Na minha opinião eles são totalmente desnecessários e no lugar desses debates deveria existir aplicação, no quadro, de questões. As aulas deveriam ser escritas no quadro-negro e não em slides. Faltou falar sobre "validade e verdade" e sobre "proposições gerais". A primeira parte que falava dos gêmeos coreanos, deveria ser substituída pela apresentação formal e informação dos principais conceitos envolvidos nas demonstrações, a saber: a noção de axioma, proposição, lema, teorema, corolário, postulado, definição, argumento, teoria, hipótese, tese. Entretanto, foi possível com esse método usado pela professora Enne, alcançar o objetivo que seria introduzir nos leitores conceitos fundamentais e uma análise estruturada das técnicas de demonstração.

demonstração por parte dele.

No item posterior será apresentada uma avaliação quanto ao alcance dos objetivos desse quarto Momento, bem como, algumas considerações importantes quanto aos objetivos do Módulo.

4.4.2 Avaliação do Momento IV

Para uma melhor avaliação deste Momento, relembramos seus objetivos:

- Aplicar uma avaliação escrita com questões relacionadas às técnicas de demonstrações estudadas;
- Analisar as respostas dos alunos na avaliação;
- Analisar os textos entregues pelos alunos ao fim da avaliação;
- Verificar a partir da análise da avaliação e textos dos alunos, o alcance da compreensão relacional das técnicas de demonstrações matemáticas por parte dos alunos.

A partir da análise dos dados, foi possível afirmar que o primeiro objetivo foi alcançado pela realização da avaliação escrita com questões relacionadas ao curso. O segundo objetivo também foi realizado com sucesso, pois todas as questões da avaliação foram analisadas de maneira qualitativa, sendo classificadas em três níveis: sem compreensão, compreensão instrumental e compreensão relacional. Diante da avaliação realizada pelos próprios alunos, através de suas opiniões, sugestões e críticas entregues após a prova escrita, foi possível afirmar que outro dos nossos objetivos foi alcançado, o objetivo 3.

Também é possível afirmar que, apesar da prova escrita não ter tido um resultado tão satisfatório, a grande maioria dos alunos atingiu algum dos níveis de compreensão. Entre aqueles que tiveram questões classificadas como sem compreensão ou em branco, percebemos que foram justamente os alunos que faltaram as aulas, não cumpriram com suas atividades e, assim, o resultado não pode nem deve ser visto de forma desanimadora.

Ainda com relação à avaliação escrita, percebemos que o grande número de respostas classificadas na categoria de compreensão instrumental foi resultado de diversos fatores que não nos cabe, nem é o nosso foco, avaliar, como questões psicológicas e o fato do curso ser noturno. Vale observar que alguns dos alunos que obtiveram esses resultados, durante os encontros de sala de aula apresentaram um ótimo desempenho com relação à participação, interatividade e criatividade na argumentação de suas respostas. Porém, quando questionados quanto ao resultado da prova escrita, afirmaram ter medo de, ao resolver as questões, usar a criatividade e correr o risco de errar, optando assim por responderem as questões como as viam no livro ou nos exemplos de sala de aula, o que mostra mais ainda os limites de uma avaliação escrita realizada de forma tradicional, como foi feito.

Outro ponto que merece destaque na realização desse quarto Momento é a participação total dos alunos na avaliação solicitada ao final da prova escrita, quando sugerimos que nos entregassem por escrito as considerações que tinham a respeito do curso. Dos 30 alunos que entregaram por escrito suas considerações, avaliação do Módulo, 28 afirmaram ter tido um bom aproveitamento durante as aulas e apenas dois afirmaram não ter tido um bom desempenho, mas assumiram ter responsabilidade pela falta de uma melhor aprendizagem.

Dessa forma, consideramos atingido também o quarto objetivo que nos propomos e avaliamos como satisfatório esse Momento, onde alcançamos o que pretendíamos: procurar compreender se o comportamento dos alunos ao longo do Módulo de Ensino poderia ser refletido na avaliação escrita (o que conseguimos pela avaliação das aulas), e perceber se eles se sentiram motivados a expressar livremente sua opinião sobre a Intervenção, o que notamos que sim, tanto pelos 100% de participação, quanto pela análise de seus textos.

Esse quarto Momento nos levou a realizar entrevistas com alguns alunos a fim de procurarmos saber de maneira mais pessoal suas opiniões sobre os pontos que julgamos ser mais importantes do Módulo. A descrição e análise estão detalhadas no tópico seguinte.

4.5 MOMENTO V

O Momento V correspondeu à última parte da Intervenção e consistiu em entrevistar alguns alunos, em horário-extra, após os nove encontros realizados em classe, sobre a proposta do Módulo de Ensino. Depois da avaliação, foram escolhidos quatro alunos[35] para expressarem em uma entrevista, seu ponto de vista sobre alguns pontos da Intervenção. Os pontos abordados foram referentes a tópicos vistos por eles no início do Módulo; sobre as dificuldades apresentadas no questionário inicial e, também, sobre as sugestões e outros pontos que considerassem importantes no seu processo de aprendizagem.

Os objetivos da entrevista foram:

- Levar o aluno a externar seu pensamento sobre os mais diversos pontos abordados no Módulo de Ensino;
- Analisar a opinião dos alunos, buscando ter mais detalhes sobre sua motivação durante a aplicação do Módulo, bem como, da importância que deram a tal iniciativa.

As entrevistas foram feitas de forma parcialmente estruturada: ao realizarmos uma série de perguntas abertas, em uma ordem prevista, fomos acrescentando algumas outras improvisadas de acordo com o que queríamos abordar ou que considerávamos ser relevante para a pesquisa. Tal abordagem é conhecida como entrevista episódica e tem foco no ponto de vista do entrevistado. A escolha por ela se deu por favorecer a exploração em maior profundidade dos saberes estudados.

Esperávamos que nessa parte o aluno pudesse externar seu pensamento por meio de um diálogo informal para que, a partir daí, fossemos percebendo as motivações que tiveram durante a aplicação do Módulo. As entrevistas não fizeram parte dos nove encontros, uma vez que foram realizadas em encontros extras, previamente agendados com os alunos.

No item seguinte, trataremos dos dados da entrevista.

[35] Na escolha dos alunos para entrevista procuramos quatro alunos que tivessem, ao longo do Módulo, apresentado níveis diferentes de compreensão.

4.5.1 Entrevistas

Como já foi dito, escolhemos realizar uma entrevista parcialmente estruturada, chamada entrevista episódica. Tal escolha foi feita para que pudéssemos tirar o máximo de proveito das entrevistas e não nos limitássemos a perguntas prontas, visto que esse seria o último Momento da pesquisa.

De acordo com Flick (2002), a entrevista episódica consiste em nove fases: preparação da entrevista; introdução da lógica da entrevista; concepção do entrevistado sobre o tema e sua biografia com relação a ele; sentido que o assunto tem para a vida quotidiana do entrevistado; enfoque das partes centrais do tema estudado; tópicos gerais mais relevantes; avaliação e conversa informal; e, por fim, a análise da entrevista.

A seguir apresentaremos as nove fases das entrevistas, destacando e analisando os aspectos mais relevantes para o Módulo de Ensino. Os alunos novamente serão indicados por uma nomenclatura simbólica, visto o interesse que tínhamos em se expressarem sem a preocupação de serem identificados, embora isso pudesse limitar os dados e as informações que buscávamos analisar. No relato a seguir, os alunos serão denominados por E1, E2, E3 e E4.

A primeira fase disse respeito à preparação da entrevista. Para que fosse bem sucedida, primeiramente buscamos os aspectos mais importantes de todo o Módulo de Ensino e destacamos os focos da entrevista, a fim de contemplar o máximo de pontos sem que a entrevista se tornasse cansativa para o aluno. Os pontos escolhidos foram: o significado de demonstração; a importância das demonstrações para o ensino de Matemática; as dificuldades e barreiras encontradas no emprego de demonstrações; a relação existente entre linguagem matemática e demonstrações; os efeitos causados pelo Módulo de Ensino; a responsabilidade com o ensino-aprendizagem das demonstrações e, por fim, comentários e sugestões adicionais feitos pelos próprios alunos sem questionamento específico.

A segunda fase da entrevista se deu de forma bastante simples. Conversamos com cada aluno separadamente e introduzimos a lógica da entrevista. Nessa fase, enfatizamos a importância desta entrevista para nosso trabalho e para futuros encaminhamentos e/ou estudos sobre o tema. Aqui os quatro alunos disseram entender o objetivo e, a partir daí, procedemos com as entrevistas individuais em encontros previamente agendados.

As próximas seis fases da entrevista foram divididas de acordo com os tópicos que escolhemos como foco. A seguir apresentamos cada fase com os questionamentos e as respostas dos alunos, bem como, a análise e comentários de tais respostas, que correspondem à última fase da entrevista mas que preferimos realizar junto às anteriores.

Quanto à concepção do entrevistado sobre o tema e sua biografia com relação a ele, começamos com um questionamento sobre o conceito de demonstração matemática. Quanto a esse questionamento os quatro alunos responderam com muita segurança, e, notamos que tal conceito havia se tornado claro para eles. Destacamos, a seguir, a resposta de dois alunos, E1 e E2.

O aluno E1 afirmou que as demonstrações servem para atestar a veracidade dos teoremas e proposições e o aluno E2 respondeu da seguinte forma: “a demonstração é algo que a gente tem que provar utilizando argumentos lógicos”.

O que é importante ressaltar nessa fase é a segurança quanto à resposta dada. Notamos que o conceito de demonstração já havia se tornado mais familiar para esses alunos e inferimos, a partir dessa entrevista e da análise do Momento anterior, que isso havia acontecido com todos os alunos que participaram da Intervenção.

A próxima fase corresponde ao sentido que o assunto tem para o quotidiano profissional do entrevistado. O questionamento feito foi sobre a importância das demonstrações matemáticas.

Aqui todos os alunos concordaram sobre o importante papel que as demonstrações matemáticas possuem para o Ensino de Matemática. Em suas falas foram destacados tópicos referentes ao desenvolvimento do raciocínio, da abstração, do bom uso da linguagem e do rigor matemático. Destacamos a resposta apresentada pelo aluno E3 que mencionou a importância desse tema como campo de estudo para a Educação Matemática, vistas as dificuldades de aprendizagem encontradas por grande parte dos alunos do Curso de Matemática em disciplinas que exigem um maior uso das demonstrações.

Aproveitando essa resposta, o questionamos sobre as dificuldades com relação ao ato de demonstrar e se as demonstrações ainda se assemelhavam como um problema de aprendizagem para ele. Sua resposta foi muito interessante, pois relatou um problema enfrentado por ele logo no início do curso com Geometria Euclidiana onde, ao se deparar com uma disciplina que apresentava muitos problemas que solicitavam demonstrações, os quais, por sua vez, envolviam termos desconhecidos por ele até então, o aluno relatou que se sentiu totalmente perdido, e, segundo ele, a falta de um material específico dificultou tanto a sua aprendizagem que o fez quase desistir do curso pela dificuldade com essa nova linguagem.

Em sua fala, percebemos a grande necessidade de materiais que possam servir de base para demonstrações, bem como uma necessidade de se dar mais importância à linguagem no Ensino de Matemática, fator que também destacamos nas entrevistas, como veremos a seguir.

Em sequência, foi pedido aos alunos que comentassem sobre a relação existente entre linguagem matemática e demonstrações matemáticas. Esse tópico é referente à quinta fase da entrevista episódica que trata do enfoque das partes centrais do tema estudado.

Nesse quesito destacamos a fala do aluno E2: “Sim, a partir do momento que a gente aprende a língua que na demonstração é utilizada, a gente consegue entender melhor o processo e fazer uma demonstração e se pode fazer uma demonstração utilizando o português, mas transferindo isso pra linguagem matemática vai ter vários códigos, varias simbologias que em todas as demonstrações a gente consegue ver esses códigos e sinais”. Esse aluno percebeu que a linguagem matemática é fundamental para o ensino-aprendizagem de Matemática, em especial nas demonstrações.

Pedimos ainda que comentasse sobre linguagem matemática, falando de sua experiência enquanto estudante de Matemática. Segundo ele, sempre teve muitas dificuldades em relação à linguagem, principalmente quando precisava realizar demonstrações, mas ressaltou que teve um desempenho bastante satisfatório depois de ter participado do Módulo de Ensino. Destacou também que, talvez, se tivesse cursado a disciplina de Lógica Matemática, essa dificuldade poderia ter sido minimizada.

Outro aluno deu ênfase à questão da linguagem de uma maneira geral, ressaltando que se eles tivessem mais habilidade com a linguagem e a leitura de textos matemáticos, a argumentação e o aprendizado das técnicas de demonstração seriam facilitados.

Destacamos, no tocante à linguagem, que ter trabalhado com textos que traziam conteúdos de Matemática de maneira informal, como o texto dos diálogos estudados nos dois primeiros encontros, facilitou o processo de desenvolvimento da leitura matemática. Além de ser nossa conclusão, a mesma opinião foi externalizada por outros dois entrevistados.

A próxima fase da entrevista tratou dos tópicos gerais mais relevantes e nesse item questionamos os alunos sobre dois aspectos: sua aprendizagem no curso e a responsabilidade do ensino-aprendizagem das demonstrações matemáticas.

Quanto à aprendizagem no curso, o aluno E2 afirmou ter tido um desempenho crescente ao longo do curso, e ter notado uma mudança com relação a outras disciplinas que cursava paralelamente. A partir dessa afirmação de melhora, perguntamos a que creditava esse melhor desempenho e ele respondeu que basicamente a dois motivos: o contato maior com as técnicas e a oportunidade que teve de já colocar em prática esse novo conhecimento.

Ainda sobre a aprendizagem, destacamos a resposta do aluno E1, que afirmou não ter tido problemas no decorrer do curso, pois já tinha contato com Lógica Matemática antes, mas ressaltou que foi importante trabalhar com as técnicas numa outra perspectiva, uma vez que no Módulo de Ensino trabalhamos mais com a análise de demonstrações já resolvidas do que propriamente com o ato de demonstrar.

A partir dessas respostas, os alunos nos fizeram perceber que o objetivo da pesquisa de levar os alunos a atingirem uma compreensão relacional das técnicas de demonstração havia sido alcançado, gerando uma melhoria no ensino-aprendizagem de Matemática. Essa compreensão os permitiu se tornarem autônomos, criativos e aplicarem o conhecimento adquirido a outras disciplinas.

Outro questionamento dessa fase do Módulo foi sobre a responsabilidade do ensino-aprendizagem das demonstrações matemáticas. Nesse item todos os alunos concordaram que as responsabilidades quanto ao ensino e a aprendizagem devem ser de todas as partes envolvidas no processo: alunos, professores, sistema de ensino, coordenações de curso de Matemática e até mesmo pesquisadores em Educação Matemática. Destacamos a seguir a transcrição das respostas de três desses alunos. Vale ressaltar que as entrevistas foram gravadas e, por isso, foi possível fazer a transcrição em total conformidade com a fala do aluno.

Aluno E2: “Bom, acho que faz parte do conjunto, mas claro que tem que começar pelo professor, se for considerar que o professor vá dar uma matéria sem estar avaliando realmente o aluno, de que forma o aluno está deve aprender ou está aprendendo o conteúdo, neste sentido o professor tem que ter visão de como passar isso e se for colocar aqui com as demonstrações matemáticas tem que partir primeiramente do professor. Em contrapartida precisa também que o aluno se esforce para poder conseguir também entender a matéria e fazer com que a matéria seja proveitosa”.

Aluno E3: “Eu acho que deve partir da coordenação do curso ou da chefia do departamento diagnosticar esse tipo de dificuldade que o aluno possui e a partir do diagnóstico detectar onde o problema esta ocorrendo se o problema estiver realmente ocorrendo em uma falta de uma base em lógica ou em demonstrações matemáticas, eu acho que deve partir da coordenação do curso fazer uma estrutura curricular que se adéque, que insira esse tipo de disciplina ou disciplina especifica de demonstrações ou então fazer cursos de preparatórios, como já existe em outras áreas aqui como pré-calculo que quando o aluno chega no primeiro semestre tem um curso preparatório nessa área. Cabe a coordenação do curso, ao departamento do curso ou chefia do departamento em conjunto com o corpo docente preparar algo nesse sentido de que o aluno tenha um contato inicial com esse tipo de conhecimento, na área de demonstrações, na área de lógica também, eu acho que é isso que precisa ser feito: um diagnóstico do problema e o ataque ao problema, seja com disciplina de primeiro semestre ou como curso preparatório como outros que já existem.

Aluno E4: “É um trabalho em conjunto. Eu vejo que um não faz milagres não, mas se tiver toda uma conjuntura a redor disso, ai tem. Porque no caso pensando mais abrangente para o mais especifico, nós não temos nenhuma disciplina tipo introdução a demonstrações já que as demonstrações a gente vê ao longo do curso todo, deveria ser tratado com mais carinho, como um componente curricular. Depois disso uma boa formação dos professores porque a clareza também na importância das demonstrações. E também tem a parte do aluno, porque se ele não for atrás não adianta nada não”.

Nesse quesito chamamos atenção para a preocupação que os alunos têm com relação ao ensino das técnicas, tanto que sugerem que seja uma disciplina do currículo, que seja estudada no início do curso e que todos façam sua parte nesse caminho de mudança.

Por fim, pedimos que de maneira pessoal fossem feitos comentários, sugestões ou críticas, com relação ao Módulo de Ensino como um todo. Esse questionamento faz parte das fases sete e oito da entrevista episódica, e corresponde à avaliação e conversa informal. Essa é uma fase de extrema importância, pois, segundo Flick (2002), é proporcionada ao aluno a oportunidade de falar sobre sua experiência com o tema em questão.

Nesse item, notamos que todas as falas dos alunos abordaram os mesmos tópicos: necessidade de mudança no sistema, em busca de uma maior valorização das técnicas; divulgação da pesquisa realizada, bem como do Módulo de Ensino; preparação de um material complementar ao livro base utilizado no Módulo, Fossa (2009a), contendo mais exercícios, e sugestões para apresentação de algumas técnicas nos eventos de matemática, na forma de minicursos, palestras, entre outros.

Quanto à última fase da entrevista, a análise, ressaltamos que já foi realizada no decorrer das demais. Porém, no próximo item, o qual trata da avaliação desse quinto Momento, abordaremos novamente esses pontos.

4.5.2 Avaliação do Momento V

Na análise das entrevistas percebemos como elas fizeram diferença para a pesquisa, uma vez que o ponto de vista do aluno é fundamental para percebermos sob outro foco a atividade realizada.

Nesse quinto Momento, tínhamos como objetivo primeiro levar o aluno a externar seu pensamento sobre os mais diversos pontos abordados no Módulo de Ensino, e podemos afirmar que foi alcançado. Ressaltamos que os alunos entrevistados não pareceram nervosos, mas, pelo contrário, até comentaram querer contribuir da melhor forma para que o Módulo fosse realizado com outros alunos da graduação em Matemática.

Como segundo objetivo, pretendíamos analisar a opinião dos alunos, buscando ter mais detalhes sobre sua motivação durante a aplicação do Módulo, bem como, da importância que eles deram a tal iniciativa. Para atingi-lo, esperávamos que o aluno pudesse externar seu pensamento por meio de um diálogo informal e, como consequência do objetivo anterior, foi possível observar que isso aconteceu de forma bastante satisfatória. Como já citado, os alunos falaram de maneira natural, sem medo de se expor, pois sabiam que não seriam identificados e tinham consciência que seus comentários eram de fundamental importância, principalmente para estudos posteriores.

A análise das entrevistas nos fez ter certeza do que tínhamos suposto na avaliação: muitos alunos haviam atingido a compreensão relacional, mas na avaliação escrita isso não foi tão perceptível. Acreditamos que isso aconteceu pelo *medo* que muitos alunos têm de exercer sua criatividade, preferindo repetir respostas vistas em sala de aula. Nas entrevistas foi possível perceber ainda suas motivações e o quanto a postura deles havia mudado em relação ao primeiro encontro. Todos elogiaram o trabalho e solicitaram sua divulgação.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Reconhecer a importância das demonstrações matemáticas, no ensino de Matemática;

> *A matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos como, também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens.*
>
> Descartes

Após os estudos realizados durante a pesquisa e a escrita dessa Dissertação, podemos tecer algumas considerações, dentre elas, a convicção de que as demonstrações matemáticas têm um papel fundamental no Ensino de Matemática, sobretudo na Educação Superior, precisando seu ensino-aprendizagem ser mais valorizado, discutido e aperfeiçoado, especialmente nos cursos de graduação em Matemática.

Quanto às demais considerações que, por sua vez, representam os resultados gerais do nosso estudo, podemos destacar que todas estão em conformidade com a proposta apresentada nos objetivos geral e específicos desse trabalho, os quais serão discutidos a seguir.

No objetivo geral, nos comprometemos a propor testar um Módulo de Ensino que pudesse servir de modelo para uma abordagem das demonstrações no qual deveria haver uma preocupação não só com seu uso, mas com uma compreensão sobre seu papel no ensino de Matemática. Podemos afirmar que tal objetivo foi alcançado, uma vez que aplicamos o Módulo de Ensino e notamos, a partir da análise dos dados da pesquisa, que os alunos ao final desse Módulo demonstraram ter compreendido a importância que as demonstrações matemáticas têm para o ensino de Matemática. Apontamos a seguir pontos importantes sobre o estudo, apresentando uma avaliação sobre o alcance dos objetivos específicos da pesquisa.

O primeiro objetivo específico foi analisar qual o entendimento que os graduandos em Matemática têm sobre as Técnicas de Demonstração, bem como, de termos que são, corriqueiramente, utilizados no Ensino de Matemática. Para o alcance de tal objetivo, realizamos no primeiro Momento do Módulo um encontro onde aplicamos um questionário que buscava colher dados que permitissem traçar um perfil dos alunos e o quanto entendiam sobre as demonstrações e os termos comumente empregados no Ensino de Matemática.

Observamos que a maioria dos alunos apresentava dificuldades com relação à linguagem matemática e à habilidade de argumentar. Ainda pela análise do questionário foi possível perceber que havia também certa expectativa quanto ao que íamos estudar durante a intervenção e uma esperança de melhoria na aprendizagem das demonstrações matemáticas, o que para muitos alunos era uma motivação, pois seria um auxílio na aprendizagem de diversas outras matérias.

Ainda com relação a esse objetivo específico, nos encontros dois e três, através da análise de textos que traziam termos matemáticos dentro de uma linguagem quotidiana, pudemos também perceber a dificuldade enfrentada por muitos com relação à linguagem e motivá-los a exercerem a abstração, argumentação e o pensamento crítico. Muitas vezes nos deparamos com desafios, como as dificuldades com a língua materna e a falta de compromisso de alguns alunos quanto à realização das atividades propostas, os quais sempre eram discutidos com os alunos como provocação e estímulo a uma mudança de postura que exigia esforço e dedicação da parte deles.

Para atingir o segundo objetivo, realizamos uma Intervenção junto aos participantes da pesquisa. Tal intervenção teve dois focos: primeiro, tratar das demonstrações matemáticas num contexto natural e, segundo, trabalhar diversas técnicas com o objetivo de levar os alunos a uma análise informal, promovendo a criatividade nas argumentações, o que levaria à compreensão relacional das demonstrações matemáticas.

Um ponto a ser destacado quanto ao alcance desse objetivo é a participação efetiva dos alunos, os quais foram motivados a atuarem de forma crítica, questionadora, para assim realizarem as atividades propostas. Sobretudo, evidenciou-se que o livro base utilizado para o estudo das técnicas e a interação entre as partes envolvidas na aplicação do Módulo tiveram grande influencia para o bom andamento das atividades.

Quanto às atividades, enfatizamos que a escolha pela abordagem construtivista radical também teve papel fundamental no ensino-aprendizagem das demonstrações matemáticas. No decorrer das atividades, o aluno nunca foi pensado como um receptor de aprendizagem, mas como um ser ativo no processo, construindo seu próprio conhecimento, o que pode ser observado na descrição da pesquisa e no final da

Intervenção, tanto através dos textos entregues no dia da avaliação quanto no detalhamento das entrevistas.

A proposta da pesquisa abrange também a análise das dificuldades apresentadas pelos alunos no decorrer da Intervenção. Essa análise foi realizada e avaliada juntamente com a descrição dos Momentos, sempre nos direcionando a tentar minimizar as dificuldades, com ações concretas no decorrer do Módulo ou com orientações para futuros estudos sobre tais temas.

A primeira dificuldade foi encontrada no início do Módulo de Ensino, quando nos deparamos com a resistência dos alunos para com a nova metodologia, para quem, ao invés de construirmos juntos a aprendizagem, seria melhor colocarmos direto os conceitos no quadro e irmos detalhando as técnicas. Para tentar minimizar essa dificuldade, investimos na motivação de buscar uma aprendizagem mais significativa através da conscientização das mudanças que a Educação vem sofrendo e valorizar outros modelos e métodos de aprendizagem.

Outra dificuldade encontrada foi a inconstância de alguns alunos que faltaram aulas e não se comprometeram a realizar as atividades propostas, em parte justificável por termos aplicado o Módulo no turno noturno, que como já mencionado no trabalho, tem realidades bastante particulares. Além disso, outros fatores como: falta de compromisso por parte de tais alunos e rejeição à nova metodologia. Destacamos que, apesar dessa dificuldade, foi possível realizar com a grande maioria da turma todas as atividades, as discussões em sala de aula foram proveitosas e a participação dos alunos que realmente se comprometeram desde o princípio foi bastante satisfatória, o que nos permite afirmar que a aplicação do Módulo em nenhum desses primeiros Momentos esteve prejudicada.

Por fim, procuramos avaliar a eficácia do Módulo de Ensino, através dos dois últimos Momentos, correspondentes a avaliação escrita e análise dos textos entregues pelos alunos com comentários sobre a Intervenção, além das entrevistas realizadas.

Sabemos que a avaliação é um processo contínuo e apresenta diversas limitações devido à sua subjetividade. Em contrapartida, inferir o pensamento dos alunos através de suas próprias sugestões e comentários nos ajuda a perceber que muitos dos alunos que apresentavam falta de conhecimento de alguns conceitos, dificuldades de linguagem e argumentação, no fim do Módulo já haviam tido um crescimento muito satisfatório com relação à aprendizagem das demonstrações, não somente de forma quantitativa, mas qualitativa.

O crescimento qualitativo da aprendizagem pode ser observado fazendo um paralelo entre o questionário inicial e a postura apresentada pelos alunos na avaliação escrita e nas entrevistas. Por esse mesmo paralelo, bem como por todas as atividades descritas, analisadas e avaliadas, concluímos que a maioria dos alunos atingiu um nível relacional de compreensão, sendo assim, aptos a irem além de mecanizações, expressando suas ideias de forma clara, objetiva e independente. Observamos ainda, que alguns alunos, porém, não conseguiram atingir tal nível de compreensão, se limitando à compreensão instrumental e até mesmo à falta de compreensão. Sabemos que vários foram os fatores que os fizeram convergir para isso, dentre os quais destacamos os seguintes: falta de tempo para estudar por motivos de trabalhos, falta às aulas, falta de participação nas atividades propostas e nas discussões. Diante do exposto, ressaltamos que os fatores que geraram esses resultados não podem ser contabilizados como avaliação negativa para a aplicação do Módulo como um todo, uma vez que a aprendizagem dos alunos foi comprometida por motivos pessoais e não por falta de eficácia da Intervenção.

Entendemos que o processo de mudança não é simples, exige esforço, dedicação, mudança de postura e, por isso, não esperávamos acabar com os problemas relacionados ao ensino-aprendizagem das demonstrações matemáticas. No entanto, acreditamos ter sido bastante válido o esforço de realizar um Módulo de Ensino e propor que ele possa servir de base para uma nova abordagem no ensino de demonstrações. Acreditamos termos aberto caminhos para diversas outras pesquisas na área, visto que, no Brasil, o ensino de demonstrações ainda é um campo vasto a ser explorado.

REFERÊNCIAS

ARAUJO, J. L.; BORBA, M. C. (orgs.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

BICUDO, I. Demonstração em matemática. **Bolema** (Boletim de Educação Matemática-Unesp), Rio Claro,SP, ano 15, n. 18, p. 65-72, 2002.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa Qualitativa e Pesquisa Qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: ARAUJO, J. L.; BORBA, M. C. (orgs.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

BIGODE, A. J. L. Hoje tem Matemática – Projeto pedagógico 8ª série – Orientação para o professor. In: BIGODE, A. J. L. **Matemática hoje é feita assim** – 8ª série, São Paulo: FTD, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental: Matemática. Brasília: MEC / SEF, 1998.

BRASIL. Portaria INEP n. 176, de 24 de agosto de 2005. **Diário oficial da República Federativa do Brasil**, Brasília, DF, 26 de agosto de 2005. Disponível em: <http://www.dm.ufscar.br/cursos/grad/Matematica_enade_2005.pdf>. Acesso em: 22/09/2009.

BÚRIGO, E. Z. **Movimento da matemática moderna no Brasil:** estudo da ação e do pensamento de educadores matemáticos nos anos 60. Dissertação (Mestrado em Educação). Porto Alegre: Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1989.

DUARTE, A. R. S. **Matemática e Educação Matemática:** a dinâmica de suas relações ao tempo do Movimento da Matemática Moderna no Brasil. Tese (Doutorado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, 2007.

FLICK, U. Entrevista episódica. In: BAUER, M. W.; GASKELL, G. (orgs.). **Pesquisa qualitativa com texto, imagem e som:** um manual prático. Petrópolis: Vozes, 2002. p. 114-136.

FOSSA, J. A. **Teoria Intuicionista de Educação Matemática**. Natal: EDUFRN, 1998.

______. **Ensaios sobre a Educação Matemática**. Belém: EDUEPA, 2001.

______. **Introdução às Técnicas de Demonstração na Matemática**. São Paulo: Editora da Física, 2009a.

______. As Conseqüências da Conseqüência: Uma Investigação Histórico-Filosófica de Demonstração Matemática. In: VIII Seminário Nacional de História da Matemática, 2009, Belém, PA. **Anais do VIII Seminário Nacional de História da Matemática**. Belém, PA: SBHMat/Unama, 2009b. v. 1. p. 1-15.

GARNICA, A. V. M. **Fascínio da técnica, declínio da crítica:** Um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de matemática. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Rio Claro, SP: IGCE – UNESP, 1995.

HELLMEISTER, A. C. P. Lógica através de exemplos: vamos usar a revista do Professor de Matemática? **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 33, 2001.

KLÜSENER, R. Ler, escrever e compreender a matemática, ao invés de tropeçar nos símbolos. In: NEVES, Iara C. B. et all (orgs.) **Ler e escrever**. Compromisso de todas as áreas. Porto Alegre: UFRGS, 1998. p. 177-191.

KNUTH, E. **Teachers' conceptions of proof in the context of Secundary School of Mathematics**. Journal of Mathematics Teachers Education, n. 5(1), p. 61-88, 2002.

LAVILLE, C.; DIONNE, J. **A construção do saber:** manual de metodologia da pesquisa em ciências humanas. Porto Alegre: Artes Médicas; Belo Horizonte: UFMG, 1999.

MACHADO, S. **A demonstração matemática no 8º ano no contexto de utilização do Geometer´s Sketchpad**. Educação e Matemática, Lisboa, n. 86, p. 10-16, 2006.

MORAIS FILHO, D. C., **Um Convite à Matemática, Fundamentos Lógicos com Técnicas de Demonstração, Notas Históricas e Curiosidades**. Campina Grande, PB: Editora da Universidade Federal de Campina Grande & Editora da Universidade Estadual da Paraíba, 2006.

NAGAFUCHI, T. **Um estudo histórico-filosófico acerca do papel das demonstrações em cursos de Bacharelado em Matemática**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Londrina, PR: UEL, 2009.

NASSER, L.; TINOCO, L. (coord.) **Argumentação e Provas no Ensino de Matemática**. Rio de Janeiro: Projeto Fundão, Instituto de Matemática/UFRJ, 2003.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino de geometria:** uma visão histórica. Dissertação (Mestrado em Educação). Campinas, SP: Universidade Estadual de Campinas – Faculdade de Educação, 1989.

PIETROPAOLO, R. C. **(Re)significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores de Matemática**. Tese (Doutorado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005.

SERRALHEIRO, T. D. **Formação de Professores:** conhecimentos, discursos e mudanças na prática de demonstrações. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Centro das Ciências Exatas e Tecnologias, PUC-SP, 2007.

SOARES, F. S. **Movimento da Matemática Moderna no Brasil:** Avanço ou Retrocesso? Dissertação (Mestrado em Matemática). Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2001.

SKEMP, R. **Psicologia del aprendizaje de las matemáticas.** Trad. Gonzalo Gonzalvo Mainar. Madrid: Ediciones Morata, S. A. 1980.

THIOLLENT, M. **Pesquisa-ação nas organizações**. São Paulo: Atlas, 1997.

VON GLASERSFELD, E. **Construtivismo radical:** Uma forma de conhecer e aprender. Coleção Epigénese e desenvolvimento. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Questionário

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS NATURAIS E MATEMÁTICA
TÉCNICAS DE DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA

Visando identificar a contribuição das Técnicas de Demonstração Matemática no ensino de Matemática para futuros encaminhamentos, solicitamos a gentileza de responder este questionário e devolvê-lo em seguida. Agradecemo-lhes por responder.

QUESTIONÁRIO

1) Idade:
( ) 18 a 26 ( ) 27 a 35 ( ) mais de 35 anos

2) Curso:
( ) Bacharelado em Matemática ( ) Licenciatura em Matemática ( ) Outros
Caso você tenha respondido a opção Outros, cite qual: ______________________

3) O que você entende por Demonstração Matemática?
____
______
____
______

4) Cursou alguma disciplina na graduação onde o professor introduziu as Técnicas de Demonstração Matemática?
Sim ( ) Não ( )
Em caso afirmativo, em qual disciplina? ____________________

5) Conhece algum documento que fale do uso ou incentive a utilização das Técnicas de Demonstração Matemática? Sim ( ) Não ( )
Em caso afirmativo, qual(is)? ____________________

6) Você acha que conhecer as Técnicas de Demonstração Matemática ajudaria ou facilitaria a aprendizagem das Disciplinas do curso?
Sim ( ) Não ( )
Em caso afirmativo, por quê?
____
______
____
______

7) Quanto à interpretação da linguagem matemática, qual o seu grau de habilidade?
Ruim ( ) Médio ( ) Bom ( ) Ótimo ( )
Explique:

8) Quanto à utilização das Técnicas de Demonstração Matemática, qual o seu grau de habilidade?
Ruim ( ) Médio ( ) Bom ( ) Ótimo ( )
Explique:

9) Escreva o que você entende por:

a) Proposição

b) Teorema

c) Axioma

d) Corolário

e) Lema

f) Hipótese

g)Tese

h) Indução matemática

10) Na sua opinião, qual a importância das Demonstrações Matemáticas para o Ensino de Matemática?

Se julgar necessário, utilize o espaço abaixo para comentários e sugestões.

APÊNDICE B - Avaliação Escrita

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - CCET
Professores: Enne Karol e John A. Fossa
Nome:____
Curso:____

1º Avaliação de Teoria dos Números - 2009.2

1. Nas seguintes demonstrações justifique os passos válidos e identifique os passos inválidos. Em cada caso determine se a demonstração proposta é suficiente para provar o teorema.
   a) Proposição: não-B → não-A.
   Demonstração: 1. não-B
   2. não-B → não-A
   3. não-A

   b) **Proposição: a soma dos n primeiros números ímpares, na sucessão natural, é igual ao quadrado de n, ou seja, provar que: $1+3+5+...+(2n-1) = n^2$.**

Demonstração

i) A fórmula é verdadeira para o primeiro elemento, pois fazendo n=1, temos: $1=1^2$, logo para o primeiro elemento vale a afirmação.
ii) Supondo que a fórmula seja verdadeira para n=k, ou seja, $1+3+5+...+(2k-1) = k^2$ (hipótese de indução), devemos mostrar que é também válida para n=k+1.
Queremos mostrar que $1+3+5+...+(2k-1)+(2k+1) = (k+1)^2$.
Ora, pela hipótese temos o valor da soma $1+3+5+...+(2k-1)$, que substituindo na igualdade $1+3+5+...+(2k-1)+(2k+1) = (k+1)^2$, obteremos $k^2+(2k+1) = (k+1)^2$, desenvolvendo o trinômio $(k+1)^2$ obtemos como resultado k^2+2k+1. Assim, como $k^2+(2k+1) = k^2+2k+1$, provamos que $1+3+5+...+(2n-1) = n^2$ é válida para qualquer valor de n, n sendo um número natural. ■

2. Determine se os seguintes argumentos são válidos ou não. Justifique sua resposta:
   a. Se 6 é divisível por 2, então 6 é par.
      Ora 6 é par,
      Portanto 6 é divisível por 2.
   b. Se o responsável pelo crime estivesse na sala a polícia não deixaria o escapar e de fato, ele estava na sala. Logo, ele foi pego pela polícia.

3. Sicrano para demonstrar a proposição: $1+3+...+(2x-1) = x^2$. $x \in \mathbf{N}$. Realizou a demonstração está apresentada abaixo. Observe a resolução de Sicrano e faça o que se pede:

Demonstração de Sicrano:

(i) Demonstrar que P(1) é válida
$1 = 1^2$
$1 = 1$
Logo P(1) é válida

(ii) Supor que P(n) é válida
Hipótese de Indução:
$1+3+...+(2n-1) = n^2$

(iii) Demonstrar P(n+1)
P(n+1): $1+3+...+(2n-1)+(2n+1) = (n+1)^2$
Por hipótese, temos que: $1+3+...+(2n-1) = n^2$
Assim adicionando a ambos os membros da Hipótese de Indução o termo (2n+1) temos que:
$1+3+...+(2n-1)+(2n+1) = n^2+(2n+1)$, *como* $n^2+(2n+1)= (n+1)^2$
Podemos dizer que:
$1+3+...+(2n-1)+(2n+1) = (n+1)^2$
Como queríamos demonstrar

a) Qual a técnica utilizada para realizar a demonstração?
b) Escreva com suas palavras como se realiza esta técnica e, em seguida, justifique os passos utilizados na demonstração de Sicrano.

4. Observe e, em seguida, responda:
Provar que se $2x^2+x-1=0$, então $x<1$.

Demonstração:

Vamos supor que $2x^2+x-1=0$ e que $x\geq1$. Logo, se $x\geq1$, então $1-x\leq0$ e $2x^2>0$. Mas, pela hipótese, teríamos $2x^2= 1-x$, o que nos remete a um valor estritamente positivo, não podendo então ser igual ou menor que zero. Assim, $x<1$. ■

c) Qual a técnica utilizada para realizar a demonstração?

d) Escreva com suas palavras como se realiza esta técnica e, em seguida, justifique os passos utilizados na demonstração de Sicrano.

5. Discuta as seguintes afirmações, julgando-as válidas ou não:
   a. Para se provar um teorema que seja uma proposição bicondicional $A\leftrightarrow B$, podemos realizar a demonstração usando a Técnica de condicionalização duas vezes provando a “ida” $A\rightarrow B$ e a “volta” $B\rightarrow A$, que é o mesmo que provar $A\rightarrow B$ e $\sim B\rightarrow\sim A$.
   b. Para se provar um teorema que seja uma proposição bicondicional $A\leftrightarrow B$, podemos realizar a demonstração usando a Técnica de condicionalização duas vezes provando a “ida” $A\rightarrow B$ e a “volta” $B\rightarrow A$, que é o mesmo que provar $A\rightarrow B$ e $\sim A\rightarrow\sim B$.

APÊNDICE C - Cronograma dos encontros relizados.

12.08.2009: Encontro I

14.08.2009: Encontro II

17.08.2009: Encontro III

19.08.2009: Encontro IV

21.08.2009: Encontro V

24.08.2009: Encontro VI

26.08.2009: Encontro VII

28.08.2009: Encontro VIII

31.08.2009: Encontro IX