

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
DO RIO GRANDE DO NORTE  
*CAMPUS CAICÓ*

ÁLISON PEREIRA DA SILVA

**AS ABORDAGENS DA LINGUAGEM MATEMÁTICA NA DESCRIÇÃO DE  
FENÔMENOS DA CONSERVAÇÃO DA ENERGIA MECÂNICA EM LIVROS DE  
FÍSICA DO ENSINO SUPERIOR**

CAICÓ/RN  
2019

ÁLISON PEREIRA DA SILVA

**AS ABORDAGENS DA LINGUAGEM MATEMÁTICA NA DESCRIÇÃO DE  
FENÔMENOS DA CONSERVAÇÃO DA ENERGIA MECÂNICA EM LIVROS DE  
FÍSICA DO ENSINO SUPERIOR**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso Licenciatura em Física do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte, em cumprimento às exigências legais como requisito final à obtenção do título Licenciatura em Física.

Orientador: Me. João Rodrigues da Silva Neto.

Silva, Álison Pereira da.

S587a As abordagens da linguagem matemática na descrição de fenômenos da conservação da energia mecânica em livros de física do ensino superior. – 2019.  
115 f : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Física) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte. Caicó, 2019.

Orientador: Me. João Rodrigues da Silva Neto.

1. Física. 2. Matemática. 3. Livro. I. Silva Neto, João Rodrigues da. II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte. III. Título.

CDU 53:37

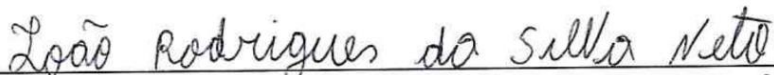
ÁLISON PEREIRA DA SILVA

**AS ABORDAGENS DA LINGUAGEM MATEMÁTICA NA DESCRIÇÃO DE  
FENÔMENOS DA CONSERVAÇÃO DA ENERGIA MECÂNICA EM LIVROS DE  
FÍSICA DO ENSINO SUPERIOR**

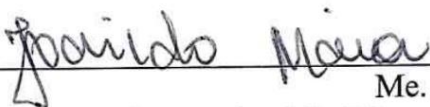
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso Licenciatura em Física do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte, em cumprimento às exigências legais como requisito final à obtenção do título Licenciatura em Física.

Aprovado em: 26/11/2019

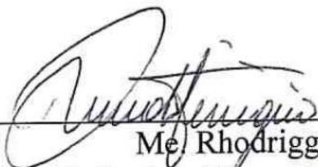
BANCA EXAMINADORA



Me. João Rodrigues da Silva Neto - Orientador  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte



Me. Joaildo Maia - Examinador  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte



Me. Rodrigo Mendes Virginio - Examinador  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte

Dedico este trabalho a Deus, à minha mãe Josineide Pereira da Silva, à minha família e aos meus amigos, que me incentivaram a seguir em frente com fé e persistência, para tornar meus sonhos em realidade.

## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a Deus, por estar sempre comigo, neste momento tão importante da minha vida. A toda minha família, pelo suporte e incentivo na busca dos meus objetivos, tanto em minha vida acadêmica, quanto na vida pessoal, bem como, por ensinar a nunca desistir dos meus sonhos, pois é com muito esforço, dedicação e fé em Deus que se pode vencer na vida, em especial a minha mãe que sempre esteve comigo em todos os momentos, sejam bons ou ruins, então dedico este trabalho especialmente a ela, por ser minha inspiração a buscar esta grande conquista.

Aos meus amigos e colegas, por todo aprendizado construído, mediante a prática social e de construção do conhecimento baseados em diálogos, parcerias e interação. Agradeço especialmente a minha amiga Alana Laís, por todos os ensinamentos e incentivo em busca do conhecimento, e por sua parceria estabelecida ao longo desta jornada acadêmica. Além de meus amigos Jordana, Deilson, Renilson, Luciana, Viviane, Leticce e Santana, por toda força e incentivo que proporcionaram para a construção e elaboração deste estudo.

Agradeço a minha amiga Dra. Antônia, por sempre cuidar da minha saúde, oferecendo o suporte necessário para cumprir-me com todas as atividades do curso, com base em seus cuidados para conciliar as atividades e como viver uma vida saudável. Seus conselhos e carinho fizeram a diferença neste importante ciclo de minha carreira profissional.

A professora Francisca Jucileuda mais conhecida como Nina, por sempre acreditar no meu potencial como aluno e futuro profissional, almejando fé, amizade e muita vontade de vencer, tanto na questão de saber superar as barreiras iniciais impostas, quanto na firmeza de lutar por tudo o que se acredita. Obtive especialmente com ela, uma importante relação professor-aluno, que existiu ao longo dos percursos iniciais da vida acadêmica.

Aos professores João Neto, Joaildo Maia, Larissa Fernanda, Luciane Almeida, Thiago Sobral, Rhodriggo Mendes, Claudenor Felipe, Romênia, Márcia Toledo e bem como a todos os professores de modo geral que colaboraram para a construção e solidificação da minha carreira acadêmica e bem como na importante influência pessoal em minha vida, tanto na questão de cidadão brasileiro, quanto no papel na formação de Físico-educador.

Agradeço também de forma especial e simbólica ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia – IFRN, Campus Caicó. Por ter aberto as portas e toda a contribuição oferecida, para torna-me um cidadão de bem, perante o percurso acadêmico, científico e social.

“A Física é a poesia da natureza. A matemática, o idioma”.

(Antônio Gomes)

## RESUMO

No campo das Ciências Exatas, as áreas Física e Matemática possuem uma importante relação perante o cenário científico. A Física utiliza a Matemática como suporte para descrição de seus fenômenos presentes ao longo do universo. Esta pesquisa tem como foco central a seguinte questão: De que forma os livros de Física do Ensino Superior utilizam Teoremas e Técnicas da matemática, para descrever fenômenos da Física, na área da conservação da energia mecânica? Assim, o presente trabalho de conclusão de curso apresenta-se como um estudo bibliográfico, abordando uma análise da literatura, no uso da linguagem matemática como forma de explicação e representatividade de eventos da área da Física, contribuinte para uma sociedade capaz de utilizar estas ciências para entender o universo ao nosso redor. Para tanto, foram analisados os livros de Física Básica dos autores Sears, Moisés e Halliday, atentando para empregabilidade algorítmica da Matemática dentro da Física, pois a própria matemática é tida como uma forma de expressão das ideias e de estruturação de pensamentos produzidos pelo ser humano, cuja perspectiva analítica esteja fundamentada em letras e símbolos, as quais muitas vezes podem se assemelhar a simples descrições de objetos. A partir deste estudo, conclui-se que a presente relação entre estas ciências, vem se solidificando com o passar do tempo, mediante alguns fenômenos físicos necessitarem de uma linguagem matemática mais complexa e de forma precisa, diante da abstração formulada perante fenômenos físicos na ciência moderna, tornando a Matemática como uma base da Física.

Palavras-chave: Física. Matemática. Mecânica. Conservação da Energia.



## **ABSTRACT**

In the field of exact sciences, the areas of physics and math have an important relationship with the scientific scenario. Physics uses mathematics as a support for description of its phenomena present throughout the universe. This research focuses on the following question: How do higher education physics books use mathematical theorems and techniques to describe the phenomena of physics in the area of mechanical energy conservation? Thus, the present course conclusion paper presents as a bibliographical study, addressing an analysis of the literature, no use of mathematical language as a way of explanation and representation of events in the area of Physics, contribution to a society capable of using these sciences to understand the universe around us. To this end, we analyzed the books of Basic Physics by authors Sears, Moses and Halliday, which allow the mathematical use of math within physics, because math itself is a form of expression of ideas and structuring of thoughts by humans. Which analytical perspective is based on letters and symbols, as can often resemble simple descriptions of objects. From this study, we conclude what presents a relationship between these sciences, has been solidifying over time, using some physical phenomena necessary for a more complex and precise mathematical language, given the abstraction formulated using physical sciences in modern science, making math as a basis of physics.

Keywords: Physics. Math. Mechanics. Energy Conservation.

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	12
<b>2 ASPECTOS HISTÓRICOS DA RELAÇÃO FÍSICA E MATEMÁTICA</b> .....	14
2.1 NASCIMENTO DO PENSAMENTO CIENTÍFICO (GRÉCIA ANTIGA) .....	14
<b>2.1.1 Tales de Mileto</b> .....	15
<b>2.1.2 Pitágoras</b> .....	16
<b>2.1.3 Platão</b> .....	16
<b>2.1.4 Aristóteles e a Física Aristotélica</b> .....	17
<b>2.1.5 Idade Média</b> .....	18
<b>2.1.6 O Renascimento científico</b> .....	20
2.2 A MATEMÁTICA COMO LINGUAGEM DA FÍSICA: MUNDO NATURAL .....	24
<b>3 ELEMENTOS DE MATEMÁTICA E DE FÍSICA</b> .....	26
3.1. LÓGICA MATEMÁTICA .....	27
3.2 TÉCNICAS DE DEMONSTRAÇÃO .....	28
3.3 TIPOS DE DEMONSTRAÇÃO .....	31
3.4 ANÁLISE VETORIAL .....	33
<b>3.4.1 Vetores em <math>\mathbb{R}^2</math></b> .....	33
3.5 PRODUTO INTERNO.....	38
<b>3.5.1 Vetores em <math>\mathbb{R}^3</math></b> .....	40
3.6 INTRODUÇÃO AO CÁLCULO .....	41
<b>3.6.1 Limites</b> .....	42
<b>3.6.2 Propriedades de Limites</b> .....	42
3.7 DERIVADAS .....	44
<b>3.7.1 Derivada de uma função</b> .....	44
<b>3.7.2 Algumas Regras de Derivação</b> .....	45
3.8 TAXAS DE VARIAÇÃO: VELOCIDADES E MARGINAIS .....	50
<b>3.8.1 Taxas de Variação Média</b> .....	50
<b>3.8.2 Taxa de Variação Instantânea e Velocidade</b> .....	51
3.9 INTEGRAIS .....	52
<b>3.9.1 Primitiva</b> .....	52
<b>3.9.2 Notação de Primitivas e Integrais Indefinidas</b> .....	53
<b>3.9.3 Determinação de primitivas</b> .....	53

<b>3.9.4 Integração por substituição</b> .....	54
<b>3.9.5 Regra Exponencial</b> .....	54
<b>3.9.6 Regras Logarítmicas</b> .....	55
3.10 <b>ÁREA E INTEGRAIS DEFINIDAS</b> .....	55
3.11 <b>TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO</b> .....	56
3.12 <b>ÁREA DE UMA REGIÃO LIMITADO POR DOIS GRÁFICOS</b> .....	57
3.13 <b>TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO: INTEGRAÇÃO POR PARTES</b> .....	58
3.14 <b>TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO: POR FRAÇÕES PARCIAIS</b> .....	58
<b>4 RELAÇÃO FÍSICA-MATEMÁTICA E A CONSERVAÇÃO DE ENERGIA</b> .....	60
4.1 <b>A MATEMÁTICA E O TEOREMA DO TRABALHO-ENERGIA CINÉTICA</b> .....	60
4.2 <b>ENERGIA POTENCIAL</b> .....	61
<b>4.2.1 Energia Potencial de uma carga em um campo elétrico uniforme</b> .....	61
<b>4.2.2 Energia potencial gravitacional e conservação da energia mecânica</b> .....	62
<b>4.2.3 Energia Potencial Elástica</b> .....	63
4.3 <b>OSCILADOR HARMÔNICO</b> .....	64
4.4 <b>CORPO EM QUEDA LIVRE</b> .....	66
4.5 <b>CONSERVAÇÃO DA FORÇA DE COULOMB</b> .....	68
<b>5. ANÁLISE DA LITERATURA DE FÍSICA DO ENSINO SUPERIOR</b> .....	71
5.1 <b>ANÁLISE DO LIVRO 1</b> .....	70
<b>5.1.1 Análise do capítulo 6</b> .....	71
<b>5.1.2 Análise dos objetivos do capítulo 6</b> .....	76
<b>5.1.3 Análise do capítulo 7</b> .....	77
<b>5.1.4 Análise dos objetivos do capítulo 7</b> .....	81
5.2 <b>ANÁLISE DO LIVRO 2</b> .....	80
<b>5.2.1 Análise do capítulo 6.</b> .....	81
<b>5.2.2 Análise dos objetivos do capítulo 6</b> .....	86
<b>5.2.3 Análise do capítulo 7</b> .....	87
<b>5.2.4 Análise dos objetivos do capítulo 7</b> .....	93
5.3 <b>ANÁLISE DO LIVRO 3</b> .....	94
<b>5.3.1 Análise do capítulo 7</b> .....	94
<b>5.3.2 Análise dos objetivos do capítulo 7</b> .....	101
<b>5.3.3 Análise do capítulo 8</b> .....	101
<b>5.3.4 Análise dos objetivos do capítulo 8</b> .....	107

<b>6 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	109
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	112

## 1 INTRODUÇÃO

No cenário da área de Ciências Exatas, o uso da Física, bem como da Matemática têm se tornado essencial na descrição de situações da realidade, as quais requerem uma comprovação ou explicação de como elas se comportam ou se fundamentam. Neste contexto, ressalta-se a importante relação existente, de forma concreta, interativa e tal como dialogada, perante o campo científico entre a Física e a Matemática, no fato de explicar situações eventuais, mediante fenômenos físicos presentes no universo, além de transformações naturais no dia a dia, por meio de códigos, gráficos e como também aplicações dedutivas, promovendo uma inseparabilidade entre as ciências da área Física e da Matemática.

Na visão de Pietrocola (2008) a Matemática é uma ciência que favorece a estruturação científica, tendo a função de promover técnicas e habilidades estruturantes do pensamento científico, assim é por meio desta, que áreas das Ciências da Natureza podem ser explicadas, em especial ao cenário da Física. Assim, oferecendo características com muita precisão nos fatos, uma interação lógica dedutiva, diante da possibilidade de prever resultados, além de uma universalidade entre o campo científico. Diante disto, a problemática desta pesquisa está vinculada na seguinte questão: De que forma os livros de Física do Ensino Superior utilizam Teoremas e Técnicas da matemática, para descrever fenômenos da Física, na área da conservação da energia mecânica?

Este trabalho está constituído de um estudo bibliográfico, abrangendo uma análise de três literaturas usadas nas licenciaturas e bacharelados dos cursos das áreas de Ciências Exatas, para o estudo da Mecânica, a qual, é uma grande área da Física que se concentra no estudo do movimento e repouso dos corpos, estejam estes ou não sob a ação de forças. Buscou-se assim, analisar como esses livros utilizam a linguagem matemática na descrição de fenômenos da Mecânica, na temática da conservação da energia, refletindo-se sobre a empregabilidade da linguagem matemática como suporte para a descrição de fenômenos da natureza no campo da Física, podendo assim, discutir a importância da relação entre as áreas de Física e da Matemática, como descrever a evolução do contexto histórico da relação entre as ciências Física e Matemática.

Por isso, os elementos fundamentais constituintes deste trabalho estão voltados para uma pesquisa teórica entre a aplicabilidade matemática, utilizada por estudiosos no decorrer dos tempos, cuja funcionalidade esteja voltada para a necessidade de se explicar a Física, com a utilização da Matemática. Promovendo uma explicação concreta de algo

que pode ser abstrato, mais com um significado físico por trás, que pode ser descrito e comprovado por meio de ferramentas matemáticas.

Ainda é possível destacar, que entre as contribuições deste trabalho, tem-se a implementação de uma pesquisa na área de Física-Matemática, imprescindível para o estudo do núcleo das Ciências da Natureza, implementando a própria matemática dentro de áreas desse núcleo, tendo como base as ferramentas utilizadas no corpo da Física.

Este estudo está dividido em seis capítulos, onde o primeiro é a presente introdução. No decorrer deles, é abordado a relação concreta de como fenômenos físicos são explicados pela linguagem matemática, mais precisamente, dando ênfase na relação da própria matemática servir de base para explicar eventos da Física.

No capítulo 2, será feita uma caracterização histórica, baseada em fatos no contexto da história e filosofia da relação surgida entre a Matemática e a Física. Tendo como base não só as experiências de importantes filósofos, mas também de físicos e matemáticos, contribuintes marcantes para o próprio desenvolvimento do conhecimento científico, em face de suas descobertas e investigações perante o ramo da ciência.

No capítulo 3, explana-se sobre a Matemática propriamente dita, neste caso, algumas questões voltadas para a Matemática Discreta. Tendo como abordagem, o emprego de uma linguagem lógica e dedutiva, tais como o desenvolvimento da racionalidade inserida no contexto do pensamento humano e científico.

No capítulo 4, mostra-se a interligação entre Matemática e Física. Dessa maneira, este capítulo fundamenta-se em aplicações voltadas para a área da Mecânica, sendo base indispensável para a temática central que se baseia no estudo da “energia”. Lembrando que para se trabalhar este referido tema da Física, é importante fazer-se o uso sucintamente, de elementos do estudo vetorial, assim como da cinemática, antes de introduzir-se a este campo.

No capítulo 5, será fundamentado na análise bibliográfica dos livros, em que se tem a obtenção de informações e discussões relacionadas a alguns capítulos, linguagem matemática empregada, conceitualização física e em termos de aplicação de situações de fenômenos da realidade, podendo assim, realizar-se uma análise da estrutura discursiva no âmbito do diálogo matemático na presença do cenário físico.

Por fim, no capítulo 6, têm-se as considerações finais relacionadas à pesquisa, através da base teórica, tanto na questão histórica, quanto na utilização da Matemática perante a Física.

## 2 ASPECTOS HISTÓRICOS DA RELAÇÃO FÍSICA E MATEMÁTICA

Estudar a relação entre as ciências Física e Matemática, é de fundamental importância para o cenário do núcleo das Ciências Exatas. Relação esta que não é de agora, mas que teve seu auge desde períodos históricos até a atual ciência moderna.

Neste contexto, dentro o núcleo das ciências experimentais, à Física é a área que se vinculou fortemente em símbolos e algoritmos matemáticos. Cujas leis foram fundamentadas em linguagem matemática, em termos de expressão de significado, conceitos e como forma de comunicação. Mantendo assim, uma relação concreta entre grandezas vinculadas ao pensamento físico de fenômenos do universo, descritos e caracterizados por meio de linguagem algorítmica puramente matemática.

Salientando que a relação Física-Matemática, se consagrou baseada na conciliação entre a Astronomia e áreas da Matemática, como Álgebra e Geometria, por exemplo. Diante disto, o percurso histórico a seguir, será com base na área da Mecânica, tendo vínculo pioneiro com a Matemática, atentando ao contexto da Física, na questão de se estruturar de forma matematizada, como abordado mais a diante.

A partir disto, o caminho histórico-científico, será baseado no próprio pensamento científico da civilização grega, mediante o adjunto da ciência, passando de forma superficialmente por algumas atividades desenvolvidas no contexto científico-social no que tange as sociedades, além de contribuições filosóficas formuladas por pesquisadores gregos, tendo como base o período do Renascimento Científico ao cenário do Mundo Moderno. Deixando de forma frisada que podem ter sido desenvolvidos estudos e pesquisas anteriormente ao surgimento do pensamento científico na Grécia, em outras civilizações, voltados para a temática de algumas ciências, como Matemática e Astronomia.

### 2.1 NASCIMENTO DO PENSAMENTO CIENTÍFICO (GRÉCIA ANTIGA)

No campo do desenvolvimento do pensamento científico, diversos filósofos e pesquisadores contribuíram com estudos e pesquisas para a construção e evolução da ciência, que utilizamos atualmente. Com base nisto, este capítulo está estruturado em alguns importantes nomes e discussões formuladas por intermédio do cenário científico.

### 2.1.1 Tales de Mileto

De acordo com Pires (2011), Tales de Mileto (624-558) foi um importante filósofo, matemático e astrônomo, o primeiro a implementar explicações científicas baseadas em estudos e observações realizadas. Neste quadro, as constatações formuladas por Tales eram fundamentadas por meio de observações da natureza, através do modelo cósmico voltado para o espaço e como também o tempo. A partir disto, concluiu-se que o que constituía o universo, materialmente, era à água. Então, foi Tales que proporcionou ao pensamento científico, qualidades e explicações naturais e não naturais sobre o mundo. Estudos estes, estruturados com o vínculo das observações, experiências e constatações sobre determinados fatos, atentando-o para a questão de como as informações são obtidas, de como sabemos e não somente o que sabemos, favorecendo explicações iniciais de forma racional para o próprio Universo.

No campo da Astronomia, Rosa (2012) aborda que Tales defendeu concepções e conceitos voltados para a questão de que a Terra era plana, tendo o formato de disco e que flutuava na água, além do que o sol, a lua e as estrelas eram vapores gasosos incandescentes, em que eram mergulhados no poente e surgiam na nascente.

No cenário da Geometria, foi o primeiro segundo Pires (2011) a formular teorias baseadas em teoremas e na racionalização de vários princípios, proporcionando um método para calcular a distância dos barcos até a costa. Além disso, as concepções de Tales foram ampliadas com o adjunto de pesquisas realizadas por Anaximandro<sup>1</sup>, contribuindo com uma lei universal que regiam o mundo cosmológico, a água seria o princípio e o elemento das coisas existentes. Neste âmbito, Anaxímenes<sup>2</sup> pertencente também à Mileto, defendia que a origem do mundo consistia no processo de rarefação e de condensação de vapor e bem como outros processos e mudanças de estados físicos da água.

---

<sup>1</sup> Anaximandro (610-547 a.C.), foi um discípulo, seguidor e sucessor de Tales de Mileto, estudou e escreveu sobre geografia, astronomia, matemática e política, considerado o fundador da astronomia na Grécia pois mediu a distância entre as estrelas e o tamanho das mesmas.

<sup>2</sup> Anaxímenes (588-524 a.C.), foi um filósofo pré-socrático grego integrante da Escola Jônica. Os estudos desenvolvidos por eles estavam centrados na natureza. O intuito era desvendar os mistérios da existência, classificando um elemento como gerador do cosmo e da vida.



### **2.1.2 Pitágoras**

Pitágoras (580-497) foi um marco conforme Pires (2011) para o desenvolvimento do campo científico, focou-se fortemente em estudos matemáticos. Acreditava-se que o princípio e essência de todas as coisas eram os números, sendo o elemento basicamente que explicava e transcreviam o universo. Diante disto, foi construído um cenário designado como tradição pitagórica, abrangendo o campo da Matemática, Física e Astronomia

A partir deste, destaca-se na visão de Rosa (2012) a cosmologia pitagórica na propriedade dos números, sendo a explicação e junção das coisas, tomando como forma a Geometria. Para explicação de suas conclusões, como é o caso do formato da Terra, por exemplo, tinha-se por base a defesa que o planeta Terra possuía um formato esférico, através de observações estéticas e geométricas, além de fazer uso dos próprios movimentos de translação e rotação, entre a terra em si e em relação ao sol.

Em suma, foram inúmeras as contribuições de Pitágoras, para o campo da Matemática, em que se pode citar o Teorema de Pitágoras, que além de ser muito utilizado na resolução de problemas matemáticos, também é utilizado no cenário da Física, como por exemplo, na parte da mecânica vetorial.

### **2.1.3 Platão**

Platão (427-347), foi um filósofo de acordo com Pires (2011) que utilizou alguns conceitos pitagóricos em seus estudos e ensinamentos. Do mesmo modo, como contribuição para as discussões científicas, demonstrou interesse por estudos astronômicos no fato de poder formular uma explicação matemática voltada para os movimentos dos planetas, cujo cenário de estudos e pesquisas era por um contexto científico baseado em abstração e no pensamento puro.

No âmbito Platônico, as explicações da verdadeira formação dos objetos e constituição do universo, segundo Rosa (2012) eram baseadas em aspectos geométricos. Além do mais, ressalta-se que a forma do mundo era esférica e polida, então os corpos celestes tinham a função de descrever círculos exatos, assim como as esferas cristalinas. Desse modo, Rosa (2012) retrata que a estruturação do universo era formada por sólidos, cujos corpos eram formulados com vínculo nos quatro elementos da natureza (terra, ar, água e fogo).

### 2.1.4 Aristóteles e a Física Aristotélica

Aristóteles (384-322) pode ser considerado no olhar de Pires (2011) como um primordial filósofo e cientista no período da Antiguidade, desenvolvendo estudos em áreas das Ciências Naturais, Matemática, entre outros campos, em que foram extremamente relevantes para o pensamento científico. Deixou significativas contribuições em áreas como a Lógica, Física, Astronomia.

A partir disso, a Lógica no ponto de vista de Pires (2011) estava constituída de um conjunto de conhecimentos seguros, por intermédio da construção do saber e da certeza científica, designando processos de caracterização científica, em que se explica a razão e a logicidade das coisas pertencentes à natureza, além da inserção de leis que regiam o próprio raciocínio científico. Assim, Aristóteles denominou esta Lógica como Analítica, baseada em sistemas de coerência, argumentação formal e bem como cálculos lógicos, fundamentados no saber da ciência.

Em vista disso, Aristóteles desenvolveu o que se conhece atualmente como “Á Física Aristotélica”. Então, toda a teoria aristotélica focava em uma explicação de como se pode partir de dados empíricos, para a construção e formulação de linguagem científica, de forma precisa e universal para a contextualização e exemplificação de coisas existentes pelo universo. Aristóteles foi um marco para esta causalidade científica, segundo TARNAS (2012):

Aristóteles foi o filósofo que articulou a estrutura do discurso racional de modo a que a mente humana pudesse apreender o mundo... através de regras sistemáticas para o adequado uso da lógica e da linguagem... A dedução e a indução; o silogismo; a análise da “causação” em coisas e fatos materiais, eficazes, formais e finais; distinções básicas como a de sujeito-predicado, essencial-acidental, matéria-forma, potencial-real, universal-particular, gênero-espécie-indivíduo; as dez categorias da substância, quantidade, qualidade, relação, lugar, tempo, posição, estado, ação e afeição – tudo isso foi definido por Aristóteles e posteriormente estabelecido como instrumentos indispensáveis de análise para a mente ocidental. Onde Platão havia colocado a intuição direta das Ideias transcendentais, Aristóteles agora inseria o empirismo e a lógica (ROSA *apud* TARNAS, 2012, p. 133 – 134).

Em suma, Aristóteles dedicou-se a estudos voltados para áreas tais como Astronomia, Matemática, Física, entre outras. Sendo que, em suas observações realizadas, aplicava-se um rigoroso sistema de lógica, abrangendo investigações sobre as causas e origens de objetos por exemplo, em que serviam de base para estudos e pesquisas.

A Física Aristotélica, foi um sistema de interpretação do mundo físico, cuja base tinha-se a ideia de lugar natural e no fato de que os corpos existentes, buscavam seu próprio lugar natural no universo. De acordo com Carvalho (2010, p. 82), tem-se que “corpos com essência do tipo terra se encontrariam mais próximos do centro do Universo, em oposição àqueles do tipo fogo, que estaria na parte periférica da esfera terrestre”.

Falando em Física Aristotélica, Pires (2011) cita que para entendê-la, é necessário compreender a concepção de matéria, o estudo da cosmologia e como também da teoria dos movimentos. Na visão de Aristóteles, a existência de vácuo era impossível, pois a matéria é que cria o espaço, em que não poderia conter um vazio, em sua estruturação.

Por isso, para Aristóteles, no olhar de Pires (2011) os quatro elementos da natureza (terra, ar, água e fogo), eram a designação da própria matéria, apresentando características relacionados a sua estrutura, constituição e existência.

No cenário da cosmologia, Aristóteles e outros pesquisadores conforme Rosa (2012) abordaram que o universo físico era constituído por duas regiões diferentes, redigidas por leis e princípios totalmente distintos. Nesta situação, essas regiões eram à sublunar e a supralunar.

Desta maneira, tinha-se um sistema segundo Pires (2011) de forma completa e coerente, com base em concepções dos componentes dos elementos da matéria, sendo que no lugar natural de tais elementos, considerava-se que as transformações da matéria seriam mudanças decorrentes dos movimentos, vinculando-os a características que podiam ser de substância, quantidade, posição ou local.

### **2.1.5 Idade Média**

Com o adjunto do pensamento científico no período dos gregos, diante da evolução do contexto histórico-científico, ressalta-se eventos relacionados ao período da Idade Média, em relação a inserção da ciência na humanidade.

A Grécia, dentre outros países como o Egito e a Ásia Menor, na visão de Pires (2011) passaram a ter influências dos romanos, por volta do início do século II a. c. Neste caso, áreas como a Filosofia, Artes gregas, entre outras, começaram a ser apreciadas pelos romanos e inseridas em seus cotidianos.

Neste contexto, Rossetto e Rosa apresentam que:

O conhecimento científico sofria forte interferência da Igreja Católica que, condenava muitas das práticas de pesquisa sobre origem da terra e da vida, entre outras. Considerava a ciência como ameaça, no sentido de trazer questionamentos aos dogmas pregados por ela (ROSSETTO; ROSA, 2016, p. 18).

Neste período, Rosa (2012) aborda que a Ciência em si não era tão apreciada pelos romanos, em termos de caráter científico, eles só demonstravam interesse pelo que realmente necessitasse, não se apreciavam pelo pensamento abstrato. Então, só era ensinado o que necessitavam, tais como mecanismos para atividades práticas, recorrendo à aprendizagem da Matemática, Lógica, entre outras áreas, quando fosse solicitado para a realização diária de determinadas funções.

De acordo com a historiografia, Tarnas (2003) enfatiza a divergência entre o cenário religioso e o campo científico, pois:

Ao mesmo tempo em que emergia e florescia a sensibilidade científica, surgiam também paixões religiosas – muitas vezes, em combinações emaranhadas. Isso porque a sociedade vivia um período de influência mística. O universo era explicado segundo os dogmas da Igreja Católica, portanto, existiam emaranhados de teorias e ideias, que se dividiram entre ciência e religião (TARNAS, 2003, p. 251).

Com o passar do tempo, por volta da segunda metade do século III, Pires (2011) aborda que o império romano passou a ser dividido em duas partes, sendo constituído pelo ocidental e o oriental, divisão esta realizada pelo imperador Diocleciano<sup>3</sup>.

Nesse período, o cristianismo segundo Pires (2011) teve forte influência no campo filosófico, passando a ser a religião oficial dos romanos. Naquela época, o filósofo grego Santo Agostinho promoveu uma intelectualidade em relação ao campo religioso, favorecendo uma base sólida e filosófica. Este considerava que para a aprendizagem e o conhecimento, tinham-se como fatores essenciais Deus e a alma, não demonstrando interesses em concepções voltadas para a natureza científica.

De acordo com as atividades desenvolvidas na Idade Média, Pires (2011) cita que foram formulados centros intelectuais voltados para fins religiosos. Então, os monges passaram a elaborar livros, além do que poucas ações voltadas para ciência eram realizadas, somente quando fosse necessário à sua utilização para devidos fins. Somente por volta do século V, a ciência passou a ser inserida no contexto romano, mediante a

---

<sup>3</sup> Diocleciano foi um imperador romano no período de 284-305, cujas reformas contribuíram para adiar o declínio de Roma e criaram as bases do império bizantino.

produção de textos científicos para a realização de estudos, mesmo que alguns deles não se apresente tanto quanto os dos gregos.

Todavia, houve um avanço no contexto da ciência, pôr parte dos povos gregos e árabes, em que foi introduzida uma nova visão no campo científico, tal feito realizado no final do século XII e no início do século XIII. A partir disso, foram se formulando concepções e ideias voltadas para o caráter da ciência, como a inserção das áreas Matemática e Astronomia (PIRES, 2011).

É importante citar a influência das ciências na sociedade, sendo que diversos cidadãos, passaram a usar segundo Rosa (2012) os conhecimentos científicos adquiridos em suas atividades diárias. Neste cenário, a cultura muçumana na visão de Pires (2011) reestruturou vestígios da filosofia e da ciência grega, levando-as para o continente europeu. Então, por volta do século XII, têm-se os primeiros aparecimentos de estudos formulados por Arquimedes, Ptolomeu, Aristarco e Euclides.

Nesse período, no mundo científico árabe, passou a se desenvolver áreas como a Álgebra, em base da formulação de algarismos arábicos, além de alguns problemas com teor aritmético, trazendo um grau de resolução maior quando comparado com Roma. Na área da Astronomia, foram desenvolvidos dois sistemas de esferas homocêntricas de Eudoxo e Elipus. Além disso, alguns astrônomos Islâmicos desenvolveram questionamentos mediante os modelos geométricos formulados por Ptolomeu<sup>4</sup>. Assim sendo, destaca-se que os árabes criaram a trigonometria esférica, inserindo seis funções, perante observações astronômicas (PIRES, 2011).

Havia interesse pela religião empregada pelo povo árabe e pouco interesse voltado para a ciência, no olhar de Rosa (2012) ela só era empregada quando se tinha um vínculo com temáticas religiosas. Portanto, no século XII, a Europa se formulou de forma lenta do caos da Idade Média e assim, a cultura renascia.

### **2.1.6 O Renascimento científico**

O Renascimento proporcionou ao homem um significado de existência, desconstruindo a visão do pensamento medieval, tornando-o “[...] não mais secundário em relação a Deus, a Igreja e a Natureza” (TARNAS, 2003, p. 246). Neste caso, os

---

<sup>4</sup> Ptolomeu (90 d.C. - 168 d.C.), foi um cientista, astrônomo e geógrafo de origem grega. Nascido no Egito sob domínio romano, é um dos últimos grandes cientistas do mundo helenístico, e autor dos estudos de astronomia mais importantes produzidos antes de Copérnico e Galileu.

segredos e características da natureza passam a ser compreendidos através do contexto científico e artístico, sendo amparados precisamente com o ramo da matemática e admiravelmente de forma estética (TARNAS, 2012).

Com o passar dos tempos, por intervenção evolutiva da ciência moderna, Pires (2011) explicita que por volta do século XVII, a matemática ganhou espaço dentro do contexto da Física, abrangendo a implementação científica de leis fundamentadas em caráter matemático, de acordo com estudos de grandes filósofos e pesquisadores. Assim, foi nesse período que os fenômenos passaram a ser expressos e representados pela fundamentação da linguagem matemática, tornando de forma mais evidente a relação entre a ciência Física e a Matemática.

Pitágoras foi um marco essencial para esta importante relação histórica, pois segundo Rosa (2012) desenvolveu estudos voltados para a implementação da Matemática dentro do campo científico. Ficando assim, designado o que se repercutiu como uma tradição pitagórica.

Diante da evolução histórica, estudos promovidos por Galileu<sup>5</sup>, influenciados também por Pitágoras, colaboraram para a relação histórica, entre Física e Matemática. Assim sendo, novas áreas da Matemática passaram a ganhar espaço no cenário científico (TARNAS, 2012).

A Geometria era a própria linguagem da natureza, fazendo uso do universo como campo de aplicação, por meio de estudos e da própria inspiração, produzida através de relações desenvolvidas. Baseado em estudos de Galileu, Paty (1995) afirma que houve uma pequena modificação nas pesquisas formuladas por Pitágoras, na questão da Matemática ser o conhecimento que possibilita a comunicação e conexão entre fenômenos da natureza, permitindo assim uma leitura da realidade. Sendo necessário uma linguagem matemática a ser utilizada para expressar estes fenômenos e explicá-los. Com base nisso, Paty (1995, p. 234) enfatiza que “para Galileu, esta língua era basicamente a Geometria”.

Nesse sentido, com base na linguagem da natureza, diante da concepção galileana, traduz que:

---

<sup>5</sup> Galileu (1564– 1642) foi um importante astrônomo, físico e matemático italiano. Ele é considerado um marco da revolução científica nas áreas da física e da astronomia. Seus estudos foram fundamentais para o desenvolvimento da mecânica (movimento dos corpos) e a descoberta sobre os planetas e os satélites.

Para justificar o caráter matemático da magnitude das leis da Física, Galileo invocava a ideia de que o “livro da natureza” é escrito em linguagem de figuras e números. “Suas letras topográficas”, ele escreveu falando do universo, “São triângulos, círculos e outras figuras geométricas, sem os quais é impossível para um ser humano entender uma única palavra dele”. E acrescentou que todas as propriedades dos corpos externos na natureza podem ser atribuídas, em última análise, às noções de “magnitude, figuras, números, lentidão (ou rapidez, e elas têm efeitos sobre nossas percepções sensoriais, e são, por assim dizer, a essência verdadeira das coisas” (PATY, 1999, p. 9).

Dessa forma, a Geometria se mantinha como a principal vertente da linguagem preferencial do mundo, segundo Rosa (2012) era através desta que se expressava o mundo. No entanto, com o decorrer do tempo, passou-se a ser designada como um recurso do pensamento para organização do mundo. Sendo um processo, em que o cientista é uma espécie de tradutor, tendo a habilidade de poder vincular-se entre formas de comunicações distintas, em relação a linguagem matemática e a própria natureza.

De acordo com estudos desenvolvidos por Isaac Newton<sup>6</sup>, sua principal vertente na opinião de Pires (2011) era expressar leis naturais baseadas na matemática. Cujas funções estavam voltadas para sistematizar o caráter científico, a princípio na área da Mecânica, e porque não dizer de toda a área da Física, constituindo-a de leis formuladas por algoritmos e expressões para explicar os ventos da natureza. Com a evolução científica, no período do século XVIII ao XXI, ocorreram diversas transformações, entre aspectos socio-filosóficos e científicos, no cenário do Renascimento Científico.

De fato, neste campo de transformação científica, em face de estudos formulados por Newton, Tarnas observa o seguinte:

A participação de Copérnico, que se apropria do ambiente intelectual do Renascimento Neoplatônico, adotando a concepção de que a Natureza, compreendida aqui como o Universo em sua totalidade, poderia ser fundamentalmente mensurada através de expressões matemáticas simples e harmoniosas de qualidade transcendental e eterna que o pressionou e orientou para a inovação (TARNAS, 2003, p. 271).

A Mecânica na visão de Rosa (2012) foi a área pioneira da Física, em termos de estruturação de leis matemáticas à frente do campo da ciência, com base nos estudos promovidos principalmente, por Isaac Newton ao longo das épocas. A partir disso, com todo o desenvolvimento da Mecânica pós-newtoniana, por meio de influências de Leonhard Euler, Alexis Clairaut e Jean le Rond d’Alembert, no século XVIII, a relação

---

<sup>6</sup> Isaac Newton (1643-1727) foi um físico, astrônomo e matemático inglês. Seus trabalhos sobre a formulação das três leis do movimento levaram à lei da gravitação universal, a composição da luz branca conduziram à moderna física óptica, na matemática ele lançou os fundamentos do cálculo infinitesimal.

da matemática inserida dentro do corpo da Física, torna-se mais sólida e têm seu auge fortemente com o adjunto do campo científico (Garbi, 2006).

No campo da Mecânica, Pires (2011) cita que foi recorrente extrair da teoria desta área, as principais ideias de força, por exemplo, como forma de expressão simbólica entre o campo matemático e o físico. Logo, cria-se uma relação Física-Matemática, cujo vínculo está no fato de a própria matemática ser a estrutura, organização sendo a mediação entre os saberes físicos. Então, Paty ressalta sobre a relação da Matemática com a Física que:

Escolher o modo mais radical de abordagem conceitual em vista da matematização (do saber experimental) [...] de encurtar ao máximo a distância entre o discurso matemático e os dados concretos aos quais ele está destinado a informar e esclarecer, concebendo a Matemática como um instrumento que constrói, ou que isola estruturas (PATY *apud* MERLEAU-PONTY, 1995, p. 256).

Analisando a citação acima, vale destacar que a Matemática inserida no campo da Física, está voltada para a questão significativa de conceitos, enxugando-os e deixando explícito algumas ideias formuladas em base puramente matemática. Mostrando assim, o poder dos símbolos e seus percursos em face da transição entre as Ciências Exatas.

Com a evolução da ciência na contemporaneidade, as áreas da Física também acompanharam esta evolução, baseadas na inserção matemática em pesquisas, formulação teórica de leis e deduções. Diante disto, foram necessários fazer uso de sistemas matemáticos mais precisos e avançados para expressão de fenômenos físicos. Com o adjunto da Ciência Moderna, foi necessário utilizar uma linguagem matemática de forma complexa, pois alguns fenômenos foram ganhando uma espécie de abstração.

Por conseguinte, Carvalho (2010) enuncia que é impossível pensar o empirismo sem fazer o uso de um algoritmo matemático por trás, o que pode se deparar com as seguintes perguntas:

Afinal, como entender o comportamento dos elétrons num átomo sem fazer uso de equações de onda? Além disto, como tratar as origens do universo sem o auxílio de tensores? Portanto, base essencial para obter respostas a estas perguntas, é relevante concluir que a matemática está inserida diretamente no cenário científico do corpo da física (CARVALHO, 2010, p. 85).

Com base nesta, existem modelos físicos que são bem sofisticados, mas que promovem uma descrição detalhada e de forma racional da realidade. Assim, Garbi



(2006) aborda que desde períodos do desenvolvimento científico até a atualidade, foram se construindo e solidificando elementos matemáticos mais abstratos, tais como o cálculo de Newton, séries de Fourier, técnicas variáveis de Lagrange e Euler, grupos quânticos, entre outras, favoráveis para uma proximidade matemática de fenômenos complexos, puros e superficiais no cenário da Física, descritos com estes e outros elementos matemáticos.

## 2.2 A MATEMÁTICA COMO LINGUAGEM DA FÍSICA: MUNDO NATURAL

Para explicar melhor esta relação entre a Matemática e o campo científico, é relevante fazer uso de concepções e informações vinculadas ao cenário do Mundo Natural. Na história recente da Matemática e da Física, foram necessários séculos para que o contexto matematizado pudesse se inserir no campo científico, diante da revolução científica. Assim, Tarnas (2003, p. 270) explicita que “esta revolução científica passa a desempenhar papel de destaque neste período, pois sacramentou o fim do Renascimento e contribuiu definitivamente para a implementação da moderna visão de mundo”.

Assim, diante do cenário histórico em plena construção entre as áreas Matemática e Física, a Astronomia foi a ciência, antes de entrar no campo físico, a se relacionar com o contexto matemático, contribuindo atualmente para as discussões relacionadas ao universo. Dessa forma, Tarnas aborda que:

Pela primeira vez na Astronomia, as aparências estavam “realmente” salvas, não apenas instrumental. Kepler resolvera ao mesmo tempo os fenômenos, no sentido tradicional, e “salvara” a própria Astronomia matemática, demonstrando a verdadeira pertinência física da Matemática em relação aos céus – uma capacidade para desvendar a natureza real dos movimentos físicos. Agora a Matemática estabelecia-se não apenas como instrumento para a previsão astronômica, mas como elemento intrínseco da realidade astronômica. Assim, para Kepler, a tese pitagórica de que a matemática era a chave da compreensão do Universo foi triunfalmente comprovada, revelando a grandiosidade anteriormente oculta da criação divina (TARNAS, 2003, p. 280).

Essa inter-relação entre os métodos matemáticos e físicos segundo Garbi (2006) está presente constantemente nos grandes círculos de pesquisas avançadas, como é o caso do estudo da teoria quântica de campos. Dessa forma, com o desejo e objetivo em desenvolver uma teoria que descreva plenamente as interações elementares da matéria, os físicos utilizam ferramentas cada vez mais sofisticadas, vinculadas a geometria diferencial, de caráter geométrico e algébrico.

Em contrapartida, debruçados sobre estruturas cada vez mais complexas, os matemáticos se veem utilizando cálculos originados do caráter da Física de altas energias, como tem-se o caso dos grupos de Feynman, normalização, supersimetria, entre outros (GARBI, 2006).

Entretanto, o pensamento científico sofreu dificuldades, quando citado esta questão de se fundamentar em matemática, excepcionalmente, a partir do cenário da Geometria, Álgebra, entre outras áreas. Dificuldades estas, importantes desde os antigos gregos aos iluministas franceses, em que segundo Pires (2011) foram sendo sanadas aos poucos por intermédio do uso da ciência, em conjuntura com o caráter evolutivo.

Sobre a evolução científica, Omnês (1996) afirma que mediante as transformações ocorridas no âmbito da Ciência, tem-se que a própria realidade é uma causalidade da ciência. Trazendo tal questão para a vertente epistemológica, aborda-se a temática das epistemologias realistas, cuja temática está voltada para o fato de que a estruturação do mundo é formulada por meio do uso e obra da imaginação científica. Em termos específicos, são as interpretações científicas que favorecem o ponto de chegada e não unicamente de partida, para interação com a própria realidade. Assim sendo, a própria matemática é a natural estrutura para servir de descrição de modelos da área da Física, presentes no universo.

Neste campo de estudo, a matemática é a linguagem que permite ao cientista estruturar seu pensamento para compreender o mundo, “[...] não se trata apenas de saber Matemática para poder operar as teorias físicas que representam a realidade, mas saber apreender teoricamente o real através de uma estruturação matemática” (PIETROCOLA, 2002, p. 110–111).

Nesse sentido, citando cada uma destas áreas de maneira distintas e posteriormente apresentando sua importante interligação, Pinheiro; Pinho e Pietrocola diz que:

A Matemática fornece um conjunto de estruturas dedutivas, por meio das quais se expressam as leis empíricas ou os princípios teóricos da Física [...] ela é uma forma de linguagem e ferramenta, por meio da qual são estruturadas as relações entre os elementos constituintes de uma teoria (PINHEIRO; PINHO; PIETROCOLA, 2001, p. 40).

Eventualmente, com o desenvolvimento científico, a Matemática vem ganhando cada vez mais espaço, perante o cenário físico, em virtude da própria Ciência Moderna.

Sendo assim, este diálogo presente entre Física-matemática, não é de agora, pois na perspectiva de Batista e Mozolevsky (2010), desde a antiguidade a Matemática está

imersa como ciência de intelecto puro, utilizada na explicação de fenômenos de áreas pertencentes ao campo das Ciências Naturais, especialmente da Física. Então, com o passar do tempo, houve uma evolução no processo de representação dos fenômenos naturais por meio da Matemática, não somente em símbolos matemáticos, mas também em operações. Logo, estas explicações vêm sendo emergentes, na questão da necessidade de citar modelos matemáticos mais precisos, para explicação, assim como diálogos perante os fatos naturais presentes na realidade do universo. Diante disto, Silva e Martins, afirmam que:

É necessário a precisão e como também a definição de sistemas matemáticos mais significativos, para que assim, possam favorecer a explicação de teorias das leis da física, pois não poderiam ser quaisquer modelos e definições de sistemas matemáticos, para explicação da existência natural de determinados fenômenos (SILVA; MARTINS, 2002, p. 63).

Conforme o autor cita acima, alguns fenômenos físicos requer o uso mais preciso da Matemática, uma vez que a ciência está em extrema evolução, tendo como exemplo a Física Quântica, constituída por conceitos abstratos, isto é, fenômenos que podem ser difíceis de descrever e interpretar fisicamente sem fazer uso de uma matemática de forma mais precisa, devido ao grau de abstração existente em sua estruturação de Física Moderna.

### **3 ELEMENTOS DE MATEMÁTICA E DE FÍSICA**

Este capítulo está estruturado em uma abordagem teórica de alguns elementos essenciais do campo da Matemática e do cenário físico. Assim, como base para a construção e suporte deste estudo, foram formuladas seções de importantes ferramentas da Matemática, abrangendo desde o estudo da Lógica até o cenário introdutório do cálculo, utilizando alguns elementos de Álgebra, Geometria, entre outros, necessários para a compreensão de conceitos e aplicações da linguagem matemática dentro da Física.

As seções a seguir, relacionadas ao campo da Lógica, foram baseadas no material Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 1, de Gelson Iezzi e Carlos Murakami, 2013, além dos seguintes arquivos: Introdução a Lógica, de Cezar Augusto Mortari, 2001; Introdução à Lógica Matemática, de Marisa Gaspar, 2007 e Noções de Lógica Matemática, de Celina Abar, 2007.

### 3.1. LÓGICA MATEMÁTICA

No âmbito da Matemática, o estudo da lógica é necessário para o desenvolvimento científico desta área, em termos de compreensão, empregabilidade e manuseio de determinados elementos e variáveis matemáticas. Diante disto, pode-se citar a Lógica formulada pelo filósofo Aristóteles, que define ser a arte e o método de se pensar, existente até a atualidade no pensamento humano, sendo fundamentado o processo de argumentação, dedução e como também de provas para determinados problemas e ou situações quaisquer.

Assim sendo, é importante entender que formular o conceito e poder sobressá-lo perante determinados eventos voltados para suas características no contexto da natureza, consiste na captação do racional e do que realmente traz o sentido para a validação de determinado pensamento e ideia no contexto da ciência.

Nesse cenário, é necessário compreender a ciência matemática, partindo da questão da argumentação lógica, isto é, o que torna um argumento matemático válido diante do campo científico, seja pelo emprego de demonstrações e de técnicas matemáticas consistentes. Neste caso, as regras de lógica têm por funcionalidade a especificação significativa de sentenças matemáticas, ou seja, proporcionam explicação através da temática das preposições.

No campo da Lógica, Aristóteles foi o primeiro filósofo a formalizar o estudo da lógica, constituindo-o por meio do processo de raciocínio dedutivo. Dessa forma, este processo foi vinculado à forma de silogismo, isto é, a argumentação lógica foi estruturada em premissas e conclusão. Como exemplo desta questão, Pires (2011, p. 35), cita as falas de Aristóteles, em que este diz:

- a) Todos os homens são mortais (premissa);
- b) Sócrates é um homem (premissa);
- c) Portanto, Sócrates é mortal (conclusão).

Com base no exposto acima, de acordo com as regras citadas para o processo de argumentação correta, têm-se que o argumento é correto, entre as duas premissas e a conclusão considerada, como resposta final, não dando espaço para questionamentos que interfiram no processo de conclusão do argumento.

Ao citar que um argumento é correto, significa dizer que a conclusão segue as premissas, por exemplo, se as premissas são verdadeiras, logo a conclusão não pode ser falsa dado o contexto, além do que, a conclusão não pode apresentar informações a mais das que existem nas premissas, para que assim, o argumento final não apresente ideias contrárias, possibilitando deixar o argumento inválido a que se quer provar.

Na ciência, a lógica é empregada como forma de desenvolvimento de determinadas teorias científicas. Com base nisto, é importante que haja uma conexão entre os resultados obtidos mediante a manipulação de ideias e argumentação algorítmica de sistemas para com os fenômenos do mundo real, como exemplo disto, temos a Matemática como forma de explicação de determinados eventos da Física, por meio de seus sistemas simbólicos e expressão de leis físicas com o uso de equações, para exemplificação e comprovação de dados fenômenos existentes no universo.

Portanto, pode-se citar que a lógica na verdade não é um elemento que proporciona a descoberta da verdade em si, mas sua função é promover a explicação, isto é, o esclarecimento da exposição e pensamento diante de dado argumento.

### 3.2 TÉCNICAS DE DEMONSTRAÇÃO

Ao analisar o estudo da lógica, cuja função é promover a verdade de um dado argumento matemático, tem-se o caso das demonstrações. Desse modo, é importante citar as contribuições das técnicas demonstrativas de como argumentar e deduzir ideias perante o contexto da ciência.

De forma contextualizada, a teoria da demonstração consiste na estruturação de dados, em que colaboram para a explicação consistente de determinado argumento a ser provado, sendo feitos com base em certos axiomas. Em suma, esta teoria tende a servir de base como forma de orientação perante demonstrações de distintos ramos da Matemática.

Com base neste estudo, pode-se citar os axiomas elaborados por David Hilbert, vinculados a sua teoria da demonstração. Então, para facilitar a interpretação e o significado destes, tem-se o quadro abaixo com os significados de alguns símbolos lógicos.

**Quadro 1 – Símbolos Lógicos**

CONECTIVOS LÓGICOS	SIGNIFICADO
$\wedge$	Conjunção (“e”)
$\vee$	Disjunção (“ou”)
$\rightarrow$	Condicional
$\sim$	Negado
$\neg$	Negação
$\forall$	Para todo, para qualquer um
$\vdash$	Deduz que

Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

Neste enquadramento, tem-se os seguintes axiomas, presentes no estudo da lógica, na comprovação de determinados argumentos, em termos de verdade e significado.

*1. Axioma da Identidade:*

$$\forall x, x = x$$

Tal axioma apenas afirma que todo elemento é igual a si mesmo, o que apesar de obvio é necessário e crucial em muitas demonstrações e deduções matemáticas.

*2. Axioma da Escolha:*

$$\forall X, \exists f, \text{ onde } f \text{ é uma função tal que } \text{Dom}(f) = P(X) - \{\emptyset\} \text{ e } \forall y (y \in \text{Dom}(f)) \rightarrow f(y) \in y.$$

Onde  $P(X) - \{\emptyset\}$  representa todos os subconjuntos não vazios de  $X$  e  $\text{Dom}(f)$  representa o domínio de  $f$ .

Basicamente, esse axioma garante que podemos escolher infinitamente, mesmo sem uma propriedade para definir a escolha.

*3. Indução de uma hipótese:*

$$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$$

Podemos ler da seguinte forma:  $\alpha$  implica na proposição que implica em  $\alpha$ .

*4. Omissão de uma hipótese:*

$$(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$$

Podemos interpretar esse axioma como: não existe necessidade de repetir proposições.

5. *Permutação de hipóteses:*

$$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$$

A ordem das proposições não vai alterar a conclusão.

6. *Eliminação de uma proposição:*

$$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\gamma \rightarrow \alpha) \rightarrow (\gamma \rightarrow \beta))$$

Em suma, podemos reduzir nossa argumentação retirando uma proposição intermediária quando possível.

7. *Axioma da não contradição:*

$$(\alpha \rightarrow \beta \wedge \neg \beta) \rightarrow \neg \alpha$$

Se alguma proposição gerar uma outra proposição necessariamente falsa (ou mesmo um absurdo), podemos concluir que a sua negação é verdadeira.

8. *Axioma da dupla negação:*

$$\neg \neg \alpha \rightarrow \alpha$$

Uma dupla negação na verdade é uma afirmação.

Com base nos axiomas apresentados acima, é relevante citar de forma adicional, as seguintes regras de inferência, em que se podem expressar:

1.  $\alpha \wedge \beta \vdash \alpha$

*Ler-se:*  $\alpha$  e  $\beta$ , deduz que  $\alpha$ .

2.  $\alpha \wedge \beta \vdash \beta$

*Ler-se:*  $\alpha$  e  $\beta$ , deduz que  $\beta$

3.  $\alpha \vdash (\beta \rightarrow \alpha \wedge \beta)$

*Ler-se:*  $\alpha$ , deduz que, se  $\beta$ , então  $\alpha$  e  $\beta$ .

4.  $\alpha \vdash \alpha \vee \beta$

*Ler-se:*  $\alpha$ , deduz que  $\alpha$  ou  $\beta$ .

$$5. \quad \alpha \rightarrow \gamma, \beta \rightarrow \gamma \vdash (\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma$$

*Ler-se: se  $\alpha$ , então  $\beta$ , e se  $\beta$ , então  $\gamma$ , deduz que se  $\alpha$  ou  $\beta$ , então  $\gamma$ .*

Neste contexto, cita-se a importância das demonstrações na caracterização e prova, em relação a determinado argumento a ser comprovado, por meio de deduções e até de axiomas. Aborda-se a seguir, os tipos de demonstrações existentes no cenário da Matemática.

### 3.3 TIPOS DE DEMONSTRAÇÃO

A princípio, tem-se a Demonstração Direta, sendo que este tipo se fundamenta em proposições como  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \vdash \beta$ . Em tal caso, tem-se de significado, que as proposições  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  representam as premissas ou as hipóteses, logo,  $\beta$  representa a proposição, simbolizando a tese.

Além desta, tem-se a Demonstração Indireta Contra Positiva, neste tipo de demonstração, é indispensável citar que o ponto de partida é da premissa  $\neg \beta$ , em que constitui um modelo  $\mathfrak{M}$ , então usa-se as regras de interferência assim como as de equivalência para se chegar, ao seguinte argumento:  $\neg \alpha_1 \vee \dots \vee \neg \alpha_n$ , isso significa dizer que pode-se provar a contraposição dada por:  $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rightarrow \beta$ . Com base nisto, representa-se de forma geral, da seguinte forma:  $\neg \beta \vdash \neg \alpha_1 \vee \dots \vee \neg \alpha_n$ .

Por fim, tem-se a Demonstração indireta por Redução ao Absurdo que é um tipo de demonstração que tem por funcionalidade demonstrar que  $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \wedge \dots \rightarrow \beta$  é uma contradição, prova feita por meio do uso de regras de inferência e de equivalência.

Esses três tipos de demonstrações apresentadas acima, podem ser encontradas em livros de Introdução à Lógica Matemática, entre outros. Os exemplos a seguir, foram baseados em um arquivo de Técnicas de Demonstração, de autoria de Josimeire Maximiano dos Santos (2017) e Fundamentos da Matemática Elementar (2013), de Gelson Iezzi e Carlos Murakami, volume 1, aula 6.

Para uma demonstração ser direta, pressupõe a hipótese verdadeira e com base nesta, a tese ser provada como verdadeira. Como exemplo pode-se citar o seguinte:

Exemplo 1 - Considere a presente situação: Demonstrar de forma direta que a soma de dois números pares resulta em um número par.



**Prova:** Primeiramente, esta demonstração pode ser realizada passo a passo. Para isso, utilizando a linguagem lógica, estrutura-se a situação na forma de  $P \rightarrow Q$ , assim, tem-se  $m$  e  $n$  como sendo dois quaisquer números pares. Assim,  $m + n$  resulta em um número par. Então, vale ressaltar que, um número qualquer  $p$  par, pode ser designado por  $p = 2k$ , sendo  $k$  um inteiro. Com base nisto, sabendo-se que  $m$  e  $n$  são números pares, tem-se inteiros  $r$  e  $s$ , tais que  $m = 2r$  e  $n = 2s$ . Isto implica que  $m + n = 2r + 2s = 2(r + s)$ . Portanto,  $m + n$  é um número par.

Exemplo 2 - Provar o teorema a seguir, usando a demonstração contra positiva.

$\forall n \in \mathbb{N};$  se  $n^2$  é par, então  $n$  é par.

**Prova:** A demonstração deste teorema, parte da forma contra positiva que é dada por:  $\forall n \in \mathbb{N} \mid n$  não é par então  $n^2$  não é par.

Ou seja,  $\forall n \in \mathbb{N} \mid n$  é ímpar então  $n^2$  é ímpar.

Passo:

$\forall \epsilon \in \mathbb{N}$  é ímpar

$\exists k \in \mathbb{N} \mid n = 2k + 1$

$n^2 = n^2$

$n^2 = (2k + 1)^2$

$n^2 = (2k + 1)(2k + 1)$

$n^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$

$\exists j \in \mathbb{N}, j = 2k^2 + 2k \mid n^2 = 2j + 1$  (Portanto,  $n^2$  é ímpar).

Razão:

(Premissa)

(Definição de número ímpar)

(Axioma da identidade)

(Axioma da substituição)

(Definição de Potência)

(Distributiva e Associativa em  $\mathbb{N}$ )

(Distributividade em  $\mathbb{N}$ )

Exemplo 3 – Demonstrar a proposição a seguir por absurdo. Se um determinado número somado a ele mesmo, resultada nele próprio, significa dizer que este número é o zero.

**Prova:** A princípio, representando o número qualquer por  $X$ , tem-se pela hipótese citada que  $X + X = X$ , resultando na conclusão de que  $X = 0$ . Neste contexto, para realizar a demonstração por absurdo, supõem-se que  $X + X = 0$ , em que  $X \neq 0$ , assim,  $2X = X$  e bem como  $X \neq 0$ . Então, dividindo ambos os membros da equação  $2X = X$ , por  $X$ , conclui-se que  $2 = 1$ , demonstrando assim, um absurdo. Logo, para que  $X + X = X$ , tem-se  $X = 0$ .

Vale destacar que na Teoria da Demonstração de David Hilbert<sup>7</sup> apresentada ao longo desta seção, não foi utilizado o axioma da indução perante o estudo exposto.

### 3.4 ANÁLISE VETORIAL

Nesta seção, estão inseridos os conceitos e características voltados para vetores planos e espaciais, que servirá de base elementar no decorrer deste capítulo. A partir disto, os estudos dos vetores são fundamentais para áreas como Álgebra, Geometria Analítica, Mecânica Clássica, entre outras, presentes em campos, tais como na engenharia e na Física. Sendo bastante utilizados quando se deseja estabelecer magnitude, sentido e direção em determinado estudo.

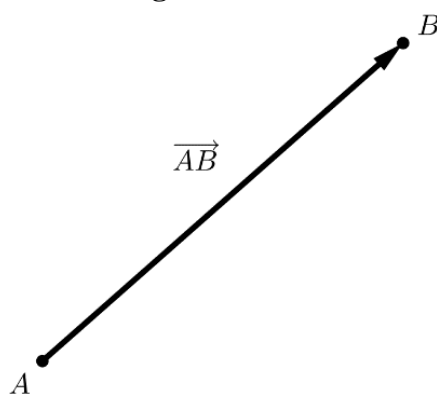
#### 3.4.1 Vetores em $\mathbb{R}^2$

O estudo dos vetores pode ser estabelecido mediante diversos espaços, podendo ser analisados nas formas unidimensional, bidimensional, tridimensional, entre outros espaços.

Neste cenário, aborda-se os vetores em duas dimensões do espaço nas formas algébrica e geométrica, sendo o algebrismo utilizado para a realização de algumas operações com vetores e a forma geométrica para representação e ilustração destes no espaço bidimensional.

De forma conceitual, um vetor é um segmento de reta orientado determinado, por exemplo, por um ponto inicial  $A$  e um final  $B$ , designado por  $\overrightarrow{AB}$ .

**Imagem 1: Vetor.**

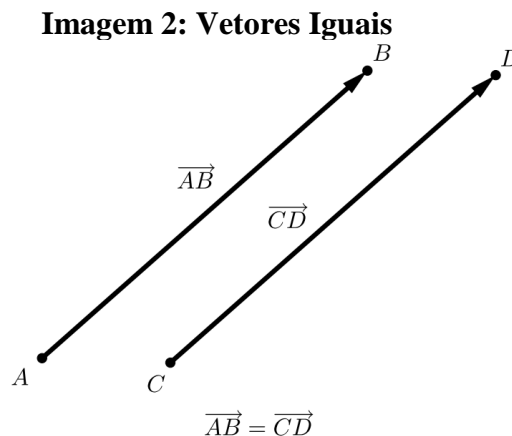


Fonte: Neto (2019, p.5).

---

<sup>7</sup> David Hilbert (1862 – 1943), foi um matemático alemão cujo trabalho em geometria teve a maior influência no campo desde Euclides. Depois de fazer um estudo sistemático dos axiomas da geometria Euclidiana, propôs um conjunto de 21 axiomas e analisou o significado deles.

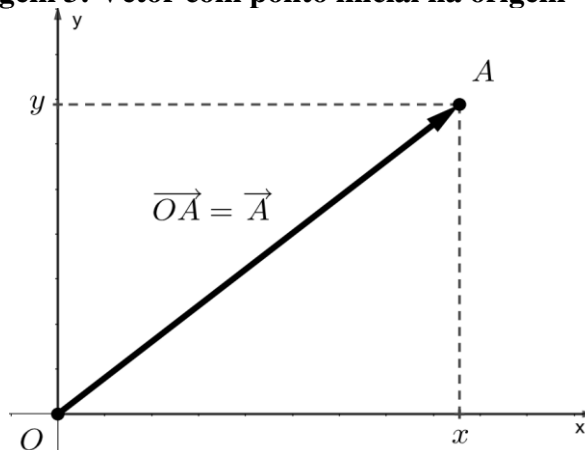
Vale ressaltar ainda que dois vetores são iguais quando possuem mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido. Como exemplo, toma-se que  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ , ilustrado a seguir:



Fonte: Neto (2019, p. 6).

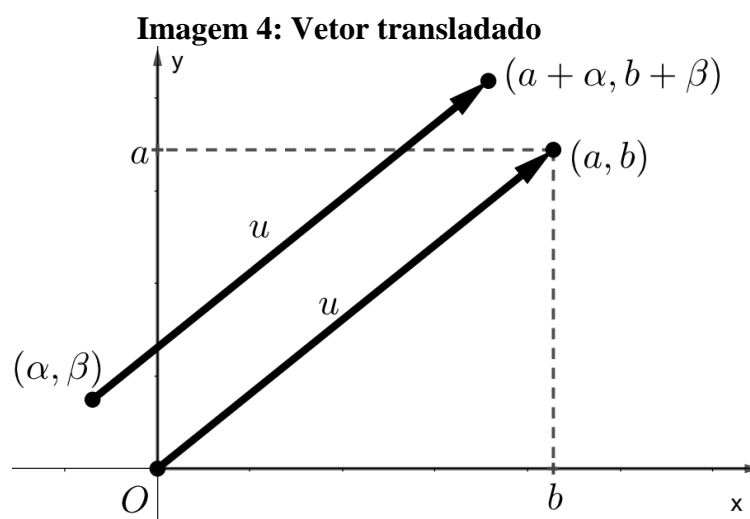
No estudo dos vetores, considere um sistema de coordenadas ortogonais em um plano, onde observar-se que um mesmo vetor pode ser representado em qualquer lugar desse plano. Em vista disso, qualquer vetor pode ser representado de forma que o seu ponto inicial coincida com o a origem  $O$ , ficando assim determinado pelo seu ponto final  $A$ , com base nisto, o vetor  $\overrightarrow{OA}$  é determinado pelo ponto  $A(x, y)$ , em que  $x$  e  $y$  são a coordenadas do ponto  $A$ , assim podemos estabelecer que  $\overrightarrow{OA} = \vec{A} = (x, y)$ , resultando nas componentes do vetor. Convém ressaltar que um par ordenado  $(x, y)$ , pode representar tanto um vetor quanto ponto. Neste contexto, ao representar um vetor, é comum colocar uma seta acima da letra para distinguir de um ponto.

**Imagem 3: Vetor com ponto inicial na origem**



Fonte: Neto (2019, p. 7).

Ao estudar os vetores no campo geométrico, pode-se realizar o processo de translação de um ponto a outro. A partir deste, considere um vetor com ponto inicial na origem  $O(0,0)$  e ponto final em  $A(a,b)$ , podemos transladá-lo pelo plano cartesiano simplesmente adicionando valores iguais nas respectivas abscissas e ordenadas dos ponto inicial e final, dito isto, considere o vetor  $u = (a,b)$  e ao adicionar  $\alpha$  unidades nas abscissas e  $\beta$  unidades nas ordenadas, translada-se o vetor  $u$  de tal forma que o seu ponto inicial torna-se  $(\alpha, \beta)$  e o ponto final é  $(a + \alpha, b + \beta)$ .



Fonte: Neto (2019, p. 8).

Neste cenário, dado um vetor  $\overrightarrow{PQ}$ , com  $P(x_p, y_p)$  e  $Q(x_q, y_q)$ , o ponto final desse vetor quando o inicial encontra-se na origem é  $(x_q - x_p, y_q - y_p)$ , ou seja:

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (x_q - x_p, y_q - y_p)$$

Dentre os vetores, tem-se o vetor nulo, designado por  $\vec{0}$ , representando o ponto  $(0,0)$ , ou simplesmente  $\mathbf{0}$ , no qual  $\mathbf{0} = (0,0)$ . Logo, qualquer ponto é o vetor nulo.

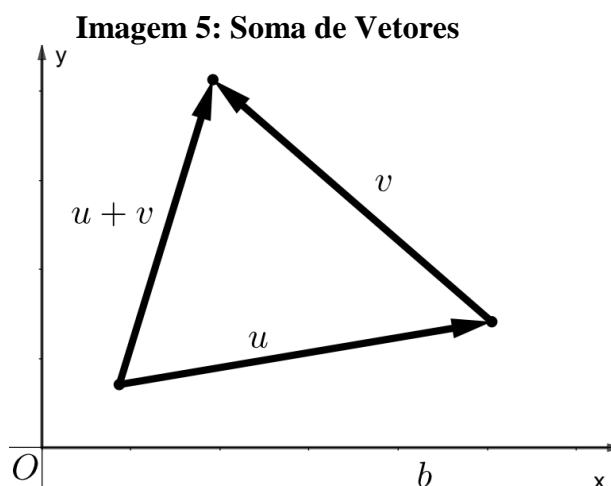
Neste estudo, pode-se obter o comprimento de um vetor, calculando-se a distância entre o seu ponto inicial e final. Sendo, esse comprimento também chamado de norma ou módulo do vetor. Assim, representa-se a norma de um vetor  $u$  por  $\|u\|$ . Mediante isto, dado um vetor  $u = (a, b)$  a sua norma é a distância entre a origem e o ponto  $(a, b)$ , ou seja, tem-se que:

$$\|u\| = \sqrt{(a - 0)^2 + (b - 0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

No campo algébrico do estudo vetorial, é importante citar que podem-se realizar operações com vetores, tais como soma, subtração, produto interno, entre outras. Então, ao utilizar a soma de dois vetores, obtém-se como resultado um outro vetor, que possuem coordenadas iguais as somas das coordenadas homólogas dos vetores somados. Por exemplo, dados dois vetores  $u = (x_u, y_u)$  e  $v = (x_v, y_v)$ , tem-se o seguinte:

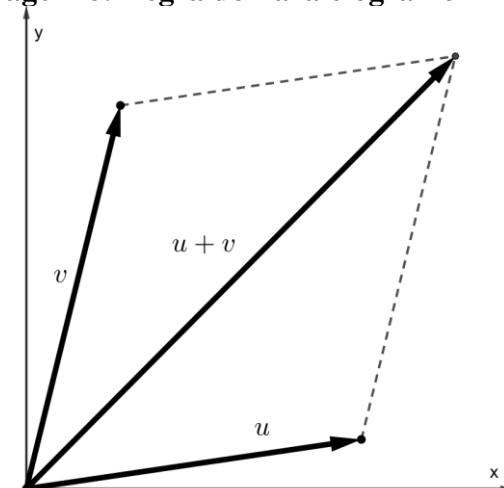
$$u + v = (x_u + x_v, y_u + y_v)$$

Assim como foi transcrito a forma algébrica para soma de dois vetores, pode-se representar a soma destes por meio da geometria. Veja na ilustração abaixo, como obter a interpretação geométrica da operação soma de dois vetores.



Fonte: Neto (2019, p. 10).

Vale destacar na imagem a seguir que o vetor soma tem o mesmo comprimento de uma das diagonais do paralelogramo determinado pelos vetores originais.

**Imagem 6: Regra do Paralelogramo**

Fonte: Neto (2019, p. 11).

Outra operação é a multiplicação de um escalar por um vetor, resultando em um vetor, cujas componentes são o produto do escalar pelas componentes originais. Por exemplo, dado um vetor  $u = (a, b)$  e um escalar  $k \in \mathbb{R}$ , tem-se que:

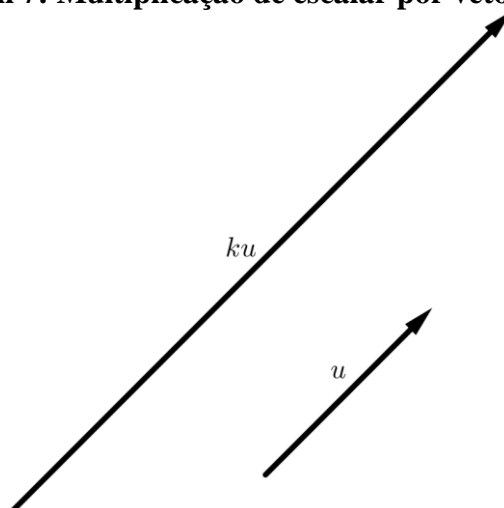
$$ku = k(a, b) = (ka, kb)$$

então,

$$\|ku\| = \|(ka, kb)\| = \sqrt{(ka)^2 + (kb)^2}$$

Portanto,

$$\|ku\| = \sqrt{k^2(a^2 + b^2)} = |k|\sqrt{a^2 + b^2} = |k|\|u\|$$

**Imagem 7: Multiplicação de escalar por vetor**

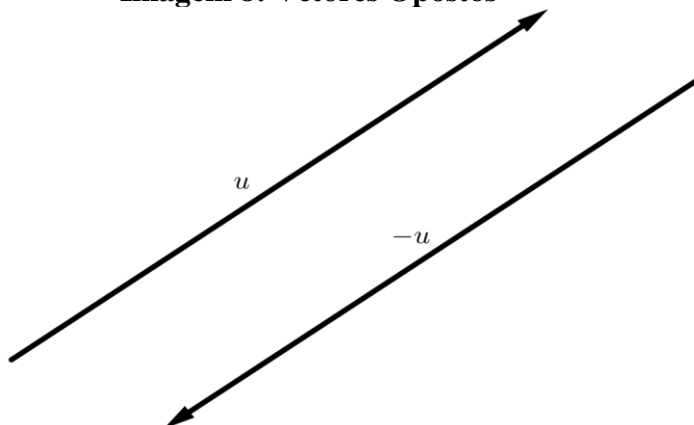
Fonte: Neto (2019, p. 12).

Diante disso, sendo um vetor  $u = (x_u, y_u)$ , assim o vetor  $-u$  é o vetor oposto de  $u$ , o que resulta em:

$$-u = (-x_u, -y_u) = (-1)(x_u, y_u) = (-1)u$$

Logo, o vetor  $-u$  tem a mesma norma e direção de  $u$ , mas com sentido oposto.

**Imagem 8: Vetores Opostos**



Fonte: Neto, (2019, p. 13).

Nas operações com vetores são válidas as seguintes propriedades. Para quaisquer vetores  $u, v$  e  $w$  e  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ , tem-se:

$$P_1) u + v = v + u$$

$$P_2) u + (v + w) = (u + v) + w$$

$$P_3) 0 + u = u$$

$$P_4) u + (-u) = 0$$

$$P_5) (k_1 k_2)u = k_1(k_2 u)$$

$$P_6) k_1(u + v) = k_1 u + k_1 v$$

$$P_7) (k_1 + k_2)u = k_1 u + k_2 u$$

$$P_8) 1u = u$$

### 3.5 PRODUTO INTERNO

No estudo dos vetores, além das operações básicas apresentadas anteriormente, existe o produto interno realizado entre dois vetores, cuja definição e propriedades estão a seguir:

Definição 01: Dados dois vetores  $u = (x_u, y_u)$  e  $v = (x_v, y_v)$ , o produto interno de  $u$  e  $v$ , designado por  $\langle u, v \rangle$ , vale o seguinte:

$$\langle u, v \rangle = \langle (x_u, y_u), (x_v, y_v) \rangle = x_u x_v + y_u y_v$$

Teorema 01: Dados dois vetores  $u = (x_u, y_u)$ ,  $v = (x_v, y_v)$  e um  $w = (x_w, y_w)$ , além de um  $k \in \mathbb{R}$ , assim são válidas as seguintes propriedades voltadas para o produto interno:

- (i)  $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
- (ii)  $\langle u, w + v \rangle = \langle u, w \rangle + \langle u, v \rangle$
- (iii)  $k\langle u, v \rangle = \langle ku, v \rangle$
- (iv)  $\langle \mathbf{0}, u \rangle = 0$
- (v)  $\langle u, u \rangle = \|u\|^2$

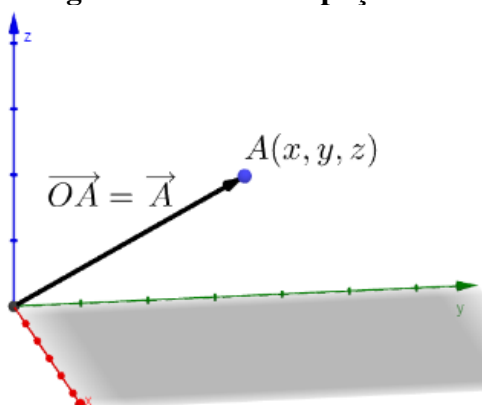
Teorema 02: Sendo  $\alpha$  o ângulo formado pelos vetores não nulos  $u$  e  $v$ , então  $\langle u, v \rangle = \|u\| \|v\| \cos \alpha$ .

Corolário 01: Dois vetores  $u$  e  $v$  são ortogonais se, e somente se,  $\langle u, v \rangle = 0$ .

### 3.5.1 Vetores em $\mathbb{R}^3$

A base teórica a seguir, está voltada para o estudo dos vetores no espaço tridimensional. Assim sendo, em um sistema de coordenadas ortogonais no espaço, pode-se estabelecer que todo ponto  $A(x, y, z)$  determina um vetor  $\overrightarrow{OA} = \vec{A} = (x, y, z)$ .

**Imagem 9: Vetor no espaço**



Fonte: Neto (2019, p. 19).



Assim como no  $\mathbb{R}^2$ , no  $\mathbb{R}^3$  pode-se citar as operações de soma e multiplicação por escalar em vetores planos. Então, dados dois vetores  $u = (x_u, y_u, z_u)$  e  $v = (x_v, y_v, z_v)$  e  $k \in \mathbb{R}$ , tem-se o seguinte;

$$u + v = (x_u + x_v, y_u + y_v, z_u + z_v)$$

E como também,

$$ku = (kx_u, ky_u, kz_u)$$

Neste contexto, vale ressaltar que todas as propriedades e teoremas estudados para vetores do  $\mathbb{R}^2$  são verdadeiras para vetores do  $\mathbb{R}^3$ . Então, a definição de produto interno e as propriedades são similares com as estabelecidas nos vetores no espaço bidimensional. Logo, tem-se o seguinte:

Definição 02: Dados dois vetores  $u = (x_u, y_u, z_u)$  e  $v = (x_v, y_v, z_v)$ , o produto interno de  $u$  e  $v$ , designado por  $\langle u, v \rangle$ , é

$$\langle u, v \rangle = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$$

Neste contexto, no  $\mathbb{R}^3$  define-se um produto entre dois vetores de modo que o resultado é um vetor, tal conceituação é denotada como produto vetorial.

Definição 3: Dados dois vetores  $u = (x_u, y_u, z_u)$  e  $v = (x_v, y_v, z_v)$ , o produto vetorial entre  $u$  e  $v$  é um vetor designado por  $u \times v$ , tal qual:

$$u \times v = \left( \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \right)$$

assim,

$$u \times v = (y_u z_v - z_u y_v, z_u x_v - x_u z_v, x_u y_v - x_v y_u)$$

Pode-se utilizar a notação de determinantes  $3 \times 3$ , facilitando a definição de produto vetorial, como também o cálculo. Por meio do determinante se encontra o vetor correspondente ao produto.

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

Teorema 3: Dados os vetores  $u = (x_u, y_u, z_u)$ ,  $v = (x_v, y_v, z_v)$  e  $w = (x_w, y_w, z_w)$ , pode-se apresentar as seguintes propriedades para o produto vetorial:

$$i) u \times u = 0$$

$$ii) u \times 0 = 0$$

$$iii) 0 \times u = 0$$

$$iv) u \times v = -(v \times u)$$

$$v) (cu) \times v = u \times (cv) = c(u \times v)$$

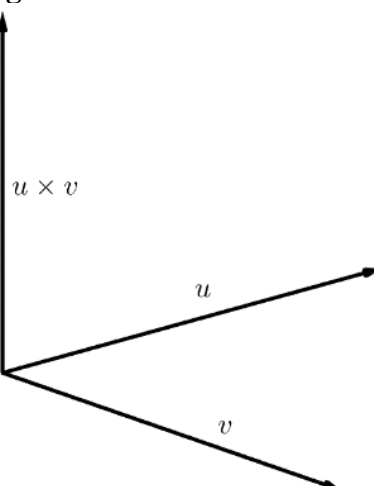
$$vi) u \times (v + w) = u \times v + u \times w$$

$$vii) \langle u, v \times w \rangle = \langle u \times v, w \rangle$$

Teorema 4: O vetor  $u \times v$  é simultaneamente ortogonal a  $u$  e a  $v$ .

O teorema acima simboliza a interpretação geométrica do produto vetorial. Sendo dados dois vetores no  $\mathbb{R}^3$ , para encontrar um terceiro vetor ortogonal a ambos, basta calcular o produto vetorial entre eles.

**Imagem 10: Produto Vetorial**



Fonte: Neto (2019, p. 25).

Portanto, a base teórica sobre vetores estabelecida neste capítulo, servirão de norteamento para tópicos a seguir, voltados para a introdução ao estudo do cálculo, aplicações perante a conservação da energia mecânica, no campo da Mecânica, além da colaboração na análise dos capítulos dos livros.

### 3.6 INTRODUÇÃO AO CÁLCULO

O estudo de introdução ao cálculo é essencial para diversas áreas das Ciências Exatas, mediante aplicações e demonstrações de determinados conteúdos matemáticos.

Assim, esta base teórica está fundamentada em elementos de matemática, como limites derivadas e integrais.

### 3.6.1 Limites

Nesta seção, estão inseridos conceitos e informações básicas sobre o estudo de limites, como ferramenta fundamental para o cenário da Física, em termos de aplicabilidade e significado de determinados fenômenos físicos.

No cálculo, o limite de uma função matemática é denotado da seguinte forma:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

O limite acima, é lido como: “o limite de  $f(x)$ , quando  $x$  tende a  $c$ , é  $L$ .” Sendo que a função  $f(x)$  torna-se arbitrariamente próxima de um único número  $L$ , quando  $x$  tende a  $c$  pelos dois lados.

### 3.6.2 Propriedades de Limites

Ao apresentar a definição de limite na seção anterior, é relevante abordar algumas de suas propriedades a serem levadas em consideração ao longo deste estudo.

Assim, antes de apresentar as propriedades, é importante citar que quando se tem o seguinte:  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ , simplesmente substitui-se a variável  $x$  pelo  $c$ , em que se aplica a substituição direta neste caso, devido a função ser contínua em  $c$ .

Veja a seguir as principais propriedades de limites:

Considere dois números reais, tais como  $b$  e  $c$ , além de  $n$  um número inteiro positivo. Então, tem-se o seguinte:

1º Propriedade:  $\lim_{x \rightarrow c} b = b$

2º Propriedade:  $\lim_{x \rightarrow c} x = c$

3º Propriedade:  $\lim_{x \rightarrow c} x^n = c^n$

4º Propriedade:  $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$ , no caso de  $n$  ser um número par,

consequentemente  $c$  deverá ser positivo.

Apresentadas as propriedades do estudo dos limites, pode-se citar relevantes operações, fazendo uso destas. Com base nisso, tem-se o seguinte:

Considere dois números reais, tais como  $b$  e  $c$ , além de  $n$  um número inteiro positivo. Considere também que  $f$  e  $g$  sejam funções, inseridas nos limites a seguir.

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \text{ e } \lim_{x \rightarrow c} g(x) = K$$

Logo,

1. Multiplicação por escalar:  $\lim_{x \rightarrow c} bf(x) = bL$
2. Soma ou diferença:  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L \pm K$
3. Produto:  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot K$
4. Quociente:  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{K}$ , em que  $K \neq 0$
5. Potência:  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = L^n$
6. Raiz:  $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$ , para  $n$  par,  $L$  deverá ser positivo.

Vale ressaltar que para os casos de limites envolvendo funções polinomiais, pode-se utilizar a seguinte regra:  $\lim_{x \rightarrow c} p(x) = p(c)$ .

No estudo dos limites, temos os limites laterais, ou seja, um limite deixa de existir quando determinada função se aproxima de um valor pela direita de  $c$  e outro pela esquerda. Assim, estas características comportamentais podem ser descritas de forma mais sucinta, no campo dos limites laterais, definidos a seguir:

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L, \text{ em que } x \text{ tende a } c \text{ pelo lado direito}$$

e

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L, \text{ em que } x \text{ tende a } c \text{ pelo lado esquerdo}$$

Nesse caso, é relevante citar que um limite existe quando obedece a seguinte definição:

Considere uma dada função  $f$  e dois números reais, tais como  $c$  e  $L$ , deste modo, tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

Nesse sentido, sua existência só é válida em termos de comportamentos quando o limite da esquerda e da direita, os limites laterais, foram iguais.

Há casos em que os limites não existem e outros que são ilimitados. A partir disso, um limite não existe quando ocorre uma distinção entre os resultados obtidos quando a variável tende a determinado valor pelas laterais, ou seja, o limite da esquerda é diferente do limite da direita. Além do mais, tem-se o caso quando a função  $f(x)$  aumenta ou diminui de forma indefinida, quando  $x \rightarrow c$ .

Assim, o comportamento ilimitado de um limite se dá quando ele tende ao infinito. Então, pode ser que uma função tenda ao infinito pela esquerda, pela direita ou por ambos os lados.

Para reforçar as informações, analise o seguinte exemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{x-2}$$

Para verificar se esse limite existe ou não, é importante analisar que  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{x-2}$ , diminui de forma ilimitada pela esquerda, nesse caso o limite tende  $-\infty$ . Além disso, deve-se analisar a sua existência quando  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{x-2}$ , observa-se que ocorre um aumento ilimitado pela direita, então o limite tende a  $+\infty$ , ou simplesmente,  $\infty$ . Portanto, conclui-se que a função  $f$  é ilimitada quando  $x$  tende a 2. Portanto comprovando-se a não existência do  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{x-2}$ .

### 3.7 DERIVADAS

O emprego de derivadas tem se tornado essencial para descrição de determinadas situações, como taxas de variações ao longo de um dado percurso, além de seu uso em importantes teoremas matemáticos, inseridos dentro do campo da Física.

#### 3.7.1 Derivada de uma função

Considerando uma função  $f(x)$  pode-se expressar a notação de derivadas por meio de uma das seguintes formas  $f'(x)$ ,  $\frac{df}{dx}$ , entre outras.

Seja a inclinação de um gráfico  $f$ , no ponto:  $(x, f(x))$ , a derivada da função  $f(x)$  é dada por:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

É importante ressaltar que esse limite deve existir, para que assim, a função seja derivada em  $x$ .

Utilizando a função  $y = f(x)$ , então sua derivação pode se expressar por uma das seguintes expressões:  $y'$ ,  $\frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{d[f(x)]}{dx}$  e  $D_x[y]$

Emprega-se a notação de limite para provar que uma função é derivável, conforme se vê a seguir.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

### 3.7.2 Algumas Regras de Derivação

Existem regras que facilitam o processo de derivação, sem ser necessário fazer uso da notação de limite, tornando o processo mais rápido e dinâmico, entre as quais se destacam a Regra do Produto e do Quociente, Regra da Cadeia, Regra da Constante, Regra da Potência Simples, Regra do Múltiplo por Constante, Regras da Soma e da Diferença.

A Regra do Produto consiste no produto da primeira função pela derivada da segunda, mais a segunda função multiplicada pela derivada da primeira. Então, expressando este contexto em caracteres matemáticos, tem-se:

$$\frac{d[f(x)g(x)]}{dx} = f(x) \frac{d[g(x)]}{dx} + g(x) \frac{d[f(x)]}{dx} = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

Nota-se que foi definido a regra do produto de forma simples e sem tanto trabalho. Então, pode-se ainda demonstrá-la pelo uso da notação de limites. A partir disso, tem-se a seguinte demonstração:

Considere  $F(x) = f(x)g(x)$

Usando a definição de derivadas para esta função na forma de limites, segue que:

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x + \Delta x)g(x) + f(x + \Delta x)g(x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ f(x + \Delta x) \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + g(x) \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x) \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \left[ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) \right] \left[ \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] + \left[ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x) \right] \left[ \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] \\
&= f(x)g'(x) + g(x)f'(x).
\end{aligned}$$

Outra regra de derivação bastante útil é a Regra do Quociente, definida conceitualmente por LARSON (2010, p. 145) da seguinte forma “A derivada do quociente de duas funções diferenciáveis é igual ao denominador multiplicado pela derivada do numerador menos o numerador multiplicado pela derivada do denominador, tudo dividido pelo quadrado do denominador”.

Em termos simbólicos, expressa-se como:

$$\frac{d\frac{f(x)}{g(x)}}{dx} = \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}, \text{ em que } g(x) \neq 0.$$

Conforme feito na regra do produto, é possível demonstrar esta regra por meio de limites.

Para isso, considere  $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ , então usando a definição de derivada para esta função, tem-se o seguinte:

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x)f(x + \Delta x) - f(x)g(x + \Delta x)}{\Delta x g(x)g(x + \Delta x)} \\
&= \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x)[f(x + \Delta x) - f(x)]}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x)[g(x + \Delta x) - g(x)]}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [g(x)g(x + \Delta x)]} \\
&= \frac{g(x) \left[ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] - f(x) \left[ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right]}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [g(x)g(x + \Delta x)]} \\
&= \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}
\end{aligned}$$

A Regra da Cadeia é considerada uma das regras mais precisas no ramo do cálculo, sendo essencial para resolver diversas operações mais complexas de forma eficaz, muito utilizada no caso de funções compostas, por exemplo.

Neste contexto, para definir a regra da cadeia, é importante citar a seguinte situação:

Considere  $y = f(u)$ , uma função que tem como diferencial  $u$ , deste modo, faça  $u = g(x)$ , sendo esta última função diferencial em  $x$ . Com base nisso, pode-se concluir que  $y = f(g(x))$ . Daí,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

De maneira análoga, tem-se:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d[f(g(x))]}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Em vista disso, pode-se observar que há uma função interna e uma função externa, logo deriva-se primeiro a função externa para depois derivar a interna, mediante o produto de ambas.



Sobre a Regra da Constante, temos que: a derivada de uma função constante é nula, ou seja, fazendo  $f(x) = C$ , onde  $C$  é uma constante, implica dizer que  $f'(x) = 0$ . Representando da seguinte forma:  $\frac{d[C]}{dx} = 0$ .

Caso fosse utilizar a definição de derivada para encontrar a derivada de  $f(x) = C$ , obtém-se o seguinte:

Por definição,  $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C - C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0$ . Portanto,  $\frac{d[C]}{dx} = 0$ . Mostrando assim, que o cálculo da derivada pela regra da constante se torna mais rápida e simples do que a notação de limites.

Na Regra da Potência Simples, temos que, por definição, a derivada de uma potência  $x^n$ , é dada por:  $\frac{d[x^n]}{dx} = nx^{n-1}$ , em que  $n$  é qualquer número real.

Demonstrando por meio da definição de derivada, faça  $f(x) = x^n$ .

Para tanto, usa-se a seguinte notação de produtos notáveis:  $(x + \Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{2}(\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n$ . Daí,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{2}(\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ nx^{n-1} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{2}(\Delta x) + \dots + (\Delta x)^{n-1} \right] \\ &= nx^{n-1} + 0 + \dots + 0 = nx^{n-1}. \end{aligned}$$

Outra regra pertencente às derivadas é a Regra do Múltiplo por Constante. Para a sua demonstração, faz-se uso da seguinte notação da propriedade dos limites:  $\lim_{x \rightarrow a} cg(x) = c [\lim_{x \rightarrow a} g(x)]$ .

Para isso, seja  $f$  uma função diferencial de  $x$  e  $c$  um número real, pode-se obter o seguinte:

$$\frac{d[cf(x)]}{dx} = c f'(x), \text{ em que } c \text{ é uma constante.}$$

A forma de demonstrar esta propriedade, utiliza-se a definição de limites. Partindo de  $\frac{d[cf(x)]}{dx}$ , e aplicando a definição de derivada segue que:

$$\begin{aligned}\frac{d[cf(x)]}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{cf(x + \Delta x) - cf(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c[f(x + \Delta x) - f(x)]}{\Delta x} \\ &= c \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\end{aligned}$$

Por fim, temos a Regras da Soma e da Diferença, é por meio delas que o processo de derivação ocorre de termo a termo de uma função. Consequentemente, tem-se que a derivada da soma ou da diferença de duas funções diferenciáveis é a soma e ou a diferença de suas derivadas. De forma exemplificada, apresenta-se a regra a seguir.

1. Regra da soma:  $\frac{d[f(x)+g(x)]}{dx} = f'(x) + g'(x)$
2. Regra da diferença:  $\frac{d[f(x)-g(x)]}{dx} = f'(x) - g'(x)$

Demonstra-se a regra da soma através da definição de derivadas:

Considere que:  $h(x) = f(x) + g(x)$ , então partindo da definição de derivada na notação de limites, temos que:

$$\begin{aligned}h'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) - f(x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x) + g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= f'(x) + g'(x)\end{aligned}$$

Demonstrando assim que  $\frac{d[f(x)+g(x)]}{dx} = f'(x) + g'(x)$ . Ressaltando-se que se utiliza método análogo no caso da diferença.

### 3.8 TAXAS DE VARIAÇÃO: VELOCIDADES E MARGINAIS

No campo da Física, o emprego de variações ao longo de uma determinada trajetória, necessita da utilização de derivadas para explicação e obtenção quantitativa de valores que apresentam variação ao longo do tempo, por exemplo, como é o caso da

velocidade e aceleração instantânea. Mediante o exposto, esta seção está vinculada ao uso de taxas de variações presentes no campo matemático, que é muito inserida no contexto físico para resolução de problemas, principalmente no campo da Mecânica.

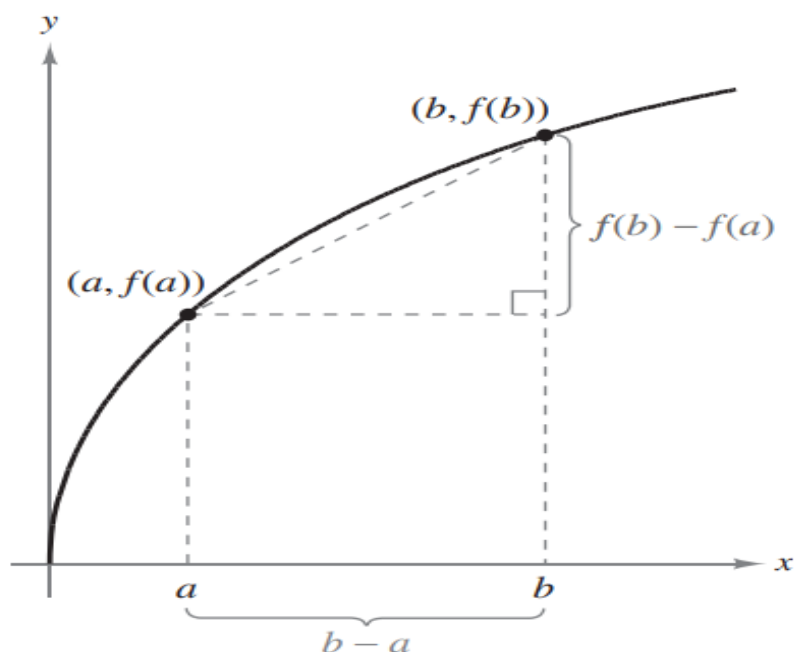
### 3.8.1 Taxas de Variação Média

As taxas de variações podem ser aplicadas em diversos campos, como em estudos populacionais, taxa de desemprego, além do cenário da Física, tais como velocidade, aceleração, entre outros. A partir disso, estas últimas têm suas evoluções à medida que o tempo passa, sendo possível analisar a taxa de variação de uma variável em relação a outra. Atentando para a questão de distinção entre taxa de variação instantânea e as taxas médias.

Neste cenário, considere que a derivada de  $f$  é uma função que fornece a taxa de variação de  $f(x)$  em relação a  $x$  no ponto  $(x, f(x))$ .

Diante disto, apresenta-se o seguinte gráfico:

**Imagem 11: Taxa de variação**



Fonte: Larson (2010, p. 129).

O gráfico acima aborda a questão da inclinação de um gráfico, presente no princípio das derivadas, favorecendo a variação entre duas funções, mediante a diferença entre dois pontos.

Em suma, o gráfico acima colaborará para expressar as taxas de variação, então considere uma função qualquer, tal como  $y = f(x)$ . Assim, a taxa de variação média de  $y$  em relação a variável  $x$ , perante o intervalo  $[a, b]$  é dada por:

$$\text{Taxa de Variação Média} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Relacionando a equação e o gráfico representados acima, pode-se afirmar que  $f(a)$  presente na parte esquerda do gráfico é o valor da função da parte esquerda do intervalo, assim como,  $f(b)$  é o valor da função da parte direita gráfica do intervalo. Por fim, a diferença entre  $b$  e  $a$  resultam na largura do intervalo.

É importante frisar que as taxas de variações, apresentam-se por unidades de medidas. Por exemplo,  $\Delta x$  é medido em  $a$  e  $\Delta y$  em  $b$ , então a taxa de variação entre  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  é dada por  $a/b$ .

### 3.8.2 Taxa de Variação Instantânea e Velocidade

A taxa de variação instantânea ou taxa de variação de uma função, usando  $y = f(x)$  em  $x$ , é o limite da taxa de variação média no intervalo quando  $\Delta x$  tender a zero. Assim, pode-se obter o valor instantâneo de uma velocidade naquele determinado instante, por meio dos valores do espaço  $(x + \Delta x)$  e  $(t + \Delta t)$  do tempo.

Mediante isso, pode-se apresentar que:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

Logo,  $y$  corresponde a distância e o  $x$  ao tempo, relação esta designada como velocidade (variação média ou instantânea). A exemplificação matemática é expressa da seguinte forma:

1. Velocidade Média:  $V_{média} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$
2. Velocidade Instantânea:  $V = \frac{dy}{dx}$

Vale ressaltar que a velocidade é obtida com a derivada da posição em relação ao tempo, isto é,  $v = \frac{dx}{dt}$ , cuja definição de derivada para a velocidade, pode ser definida como  $\dot{x}$ , por exemplo.

### 3.9 INTEGRAIS

Um dos elementos essenciais para o estudo do cálculo é a integração, em que colabora na resolução de aplicações e deduções de equações físicas. Além do emprego de técnicas que facilitam a explicação de fenômenos e eventos da Física.

#### 3.9.1 Primitiva

O processo de integração funciona de forma contrária ao da derivada, conforme veremos mais adiante.

Para iniciar os estudos das integrais, é importante iniciar com as primitivas, que, em termos de conceituação, é a operação que determina a função original a partir de sua derivada.

Assim, pode-se definir uma primitiva da seguinte forma:

Uma função  $F$  é uma primitiva de uma função  $f$  se, para cada  $x$  no domínio de  $f$ , acontecer que  $F'(x) = f(x)$ .

Então, o processo de encontrar a primitiva de uma função é feito a partir de sua derivada. Por exemplo, dadas as seguintes funções:  $f'(x) = 5$ ,  $g'(x) = 2x$  e  $h'(x) = 9x^2$ . A partir disso, pode-se determinar as primitivas ( $f$ ,  $g$  e  $h$ ), conforme se vê a seguir.

$$\begin{array}{lll}
 f(x) = 5x & \text{pois} & \frac{d(5x)}{dx} = 5 \\
 g(x) = x^2 & \text{pois} & \frac{d(x^2)}{dx} = 2x \\
 h(x) = 3x^3 & \text{pois} & \frac{d(3x^3)}{dx} = 9x^2
 \end{array}$$

### 3.9.2 Notação de Primitivas e Integrais Indefinidas

O processo para se obter uma primitiva também é o chamado de processo de integração. Diante disto, o símbolo que se utiliza para se representar uma integral é  $\int$ .

Neste contexto, pode-se citar que:

$\int f(x)dx$  é a *integral indefinida*, da função  $f(x)$ , cuja primitiva pertence à família de  $f(x)$ . Logo, pode-se escrever o seguinte:  $F'(x) = f(x)$ , para todo  $x$ , isto implica que:

$\int f(x)dx = F(x) + C$  no qual  $f(x)$  simboliza o integrando,  $d(x)$  é o diferencial e por último,  $F(x) + C$  é a primitiva ( $C$  é a constante de integração). A variável de integração é expressa pelo diferencial  $dx$  na integral indefinida. Então,  $\int f(x)dx$  simboliza a primitiva de  $f$  em relação a  $x$ , como também o símbolo  $\frac{dy}{dx}$  expressa a derivada de  $y$  com relação à variável  $x$ .

### 3.9.3 Determinação de primitivas

A princípio, a relação inversa entre as operações de integração e derivação podem ser representados da seguinte forma:

$$\frac{d[\int f(x)dx]}{dx} = f(x) \quad (I)$$

$$\int f'(x)dx = f(x) + C \quad (II)$$

Analisando as equações acima, (I) exemplifica que a derivação é o oposto da integração. Assim como, (II) representa que a integração é o oposto da derivação.

O processo de integração requer o uso de algumas regras básicas, as quais se verificam a seguir.

1) Regra da constante:  $\int kdx = kx + c$ , onde  $k$  é uma constante independente da variável  $x$ .

2) Regra do múltiplo por constante:  $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$

3) Regra da soma:  $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)$

- 4) Regra da diferença:  $\int [f(x) - g(x)] = \int f(x)dx - \int g(x)dx$
- 5) Regra da Potência Simples:  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ , em que  $n \neq -1$

### 3.9.4 Integração por substituição

No âmbito do processo de integração, uma das regras fundamentais que colabora para a resolução de certas integrais, é a regra de potência geral, definida da seguinte forma:

Se  $u$  é uma função diferencial de  $x$ , tem-se que:

$$\int u^n \frac{du}{dx} dx = \int u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \text{ onde } n \neq -1$$

A regra de integração por substituição ou mudança de variável é uma das técnicas mais eficazes para se resolver determinadas integrais que requer um grau de dificuldade maior quando comparadas com as da forma simples. Dito isto, a integral é reescrita como função de  $u$  e  $du$ , tomando assim, a forma, de regra de potência:  $\int u^n \frac{du}{dx} dx = \int u^n du$

Deste modo, é relevante adotar-se alguns passos para a realização do processo de integração por substituição. Vejamos:

1. Adote  $u$  como uma função da variável  $x$ .
2. Escreva  $x$  e  $dx$  como uma função de  $u$  e  $du$ .
3. Faça uma conversão de toda integral, convertendo-a de  $x$  para função de  $u$ .
4. Após realizar o processo de integração, reescreva a primitiva como uma função de  $x$ .
5. Por fim, confira a resposta por meio do processo de derivação.

### 3.9.5 Regra Exponencial

O estudo das integrais tem de ser seguido baseado em algumas regras para se realizar o processo de integração. Então, uma delas é a regra exponencial, que é definida pelas seguintes definições:

1. Regra Exponencial Simples:  $\int e^x dx = e^x + C$ , onde  $C$  é uma contante.

2. Regra da Exponencial Geral:  $\int e^n \frac{du}{dx} dx = \int e^u du = e^u + C$ , onde  $C$  é uma constante.

### 3.9.6 Regras Logarítmicas

As regras logarítmicas para integração, permitem integrar funções da seguinte forma:  $\int x^{-1} dx$  e  $\int u^{-1} du$ .

Desse modo, pode-se definir as técnicas de integração logarítmicas, considerando  $u$  como uma função diferencial de  $x$ .

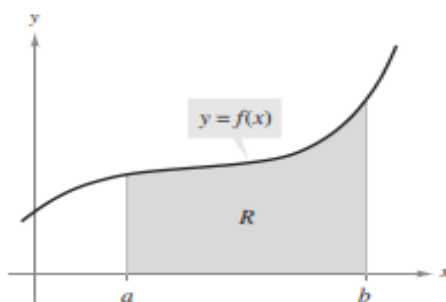
1. Regra Logarítmica Simples:  $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

2. Regra Logarítmica Geral:  $\int \frac{du/dx}{u} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C$

### 3.10 ÁREA E INTEGRAIS DEFINIDAS

Ao longo desta seção, aprenderemos como usar o cálculo para determinar áreas de regiões que não são padrão no contexto diário, como a região  $R$ , mostrada na figura abaixo:

**Imagem 12: Área limitada pelo gráfico**



Fonte: Larson (2010, p. 356).

Ao se realizar estudos no campo da geometria, a área é definida como um número que representa o tamanho de uma região limitada. Para simples regiões, como retângulos, triângulos e círculos, pode ser determinada por meio do uso de fórmulas geométricas. Diante disso, trazendo esta questão para o ramo do cálculo, tem-se que a área pode ser



definida da seguinte forma:  $A = \int_a^b f(x)dx$ . Fazendo uso de integral definida, cuja definição é dada a seguir:

Considere  $f$  uma função não negativa e contínua no intervalo fechado  $[a, b]$ . Então, a área da região limitada pelo gráfico de  $f$ , pelo eixo  $x$  e pelas retas que contém as extremidades do intervalo é expressa pela integral da superfície acima, ou seja, dada por:  $\text{Área} = \int_a^b f(x)dx$ . Vale ressaltar que a dedução desta área pode ser encontrada no livro Cálculo Aplicado, de autoria de Ron Larson, 1ª edição, ano 2010.

Neste contexto, a expressão acima é denominada de integral definida entre os intervalos de  $a$  até  $b$ , cujos limites de integração inferior e superior são, respectivamente,  $a$  e  $b$ .

### 3.11 TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Para iniciar os estudos voltados para o cálculo, é importante ressaltar como base inicial desse estudo, o teorema fundamental do cálculo. Definido matematicamente por:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Lembrando que a dedução deste teorema pode ser encontrada no livro Cálculo Aplicado, de Ron Larson, 1ª edição, ano 2010.

É importante dizer que, se for possível encontrar a forma primitiva da função  $f$ , então pode-se usá-la para resolver a seguinte integral definida:  $\int_a^b f(x)dx$ , cujo resultado da integração é designado como Teorema Fundamental do Cálculo.

Partindo do seguinte: utilizando duas funções  $f$  e  $g$ , sendo ambas contínuas no seguinte intervalo fechado  $[a, b]$ . Desta maneira, obtêm-se:

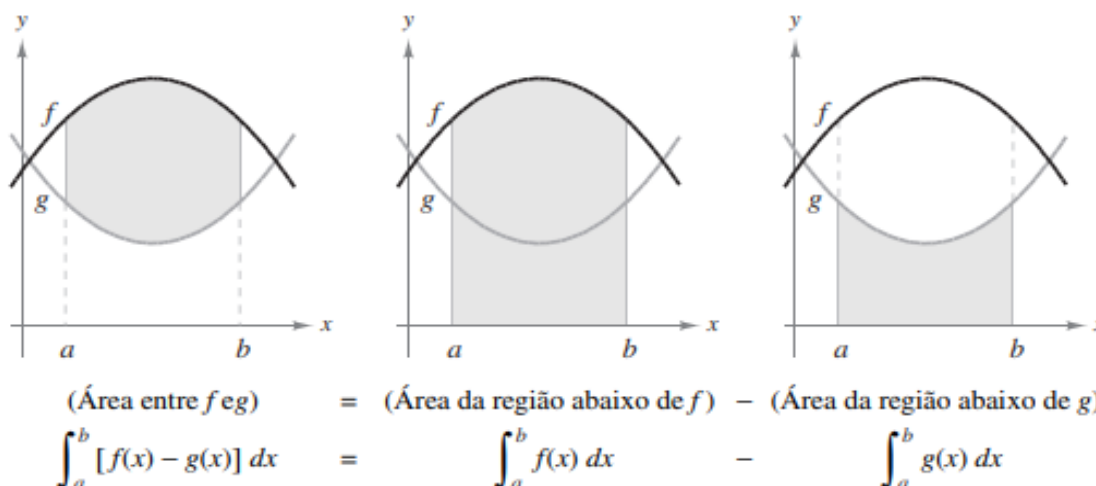
1.  $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$ , onde  $k$  é uma constante.
2.  $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$ .
3.  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ , em que  $a < c < b$ .
4.  $\int_a^a f(x)dx = 0$ .

$$5. \quad \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx.$$

### 3.12 ÁREA DE UMA REGIÃO LIMITADO POR DOIS GRÁFICOS

No estudo das integrais, é possível ampliar o uso de integrais definidas, para calcular a área abaixo de uma região que apresenta uma limitação por dois gráficos. Para exemplificar esta questão, considere a seguinte situação:

**Imagem 13: Área de uma região limitada por dois gráficos**



Fonte: Larson (2010, p. 368).

Em suma, a região exposta está limitada pelos gráficos de  $f$ ,  $g$  e pelas retas  $x=a$  e  $x=b$ . Neste contexto, é possível determinar por interpretação a área abaixo do gráfico, considerando o fato que  $f$  e  $g$  estão acima do eixo  $x$ . Logo, a determinação de tal área é realizada baseada na subtração das áreas abaixo do gráfico de  $f$  e do gráfico de  $g$ , como descrito na imagem 13.

Então, pode-se também usar outra forma para o cálculo desta área limitada, considerando que as funções  $f$  e  $g$  sejam ambas contínuas para todo  $g(x) \leq f(x)$  no intervalo  $[a, b]$ . A qual pode ser descrita por:  $A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$ .

### 3.13 TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO: INTEGRAÇÃO POR PARTES

O processo de integração por partes é uma das técnicas essenciais para se calcular determinadas integrais que apresentam um grau de complexibilidade maior, valendo tanto para integrais definidas quanto para integrais indefinidas, sendo útil para realizar a integração de funções algébricas, exponenciais e logarítmicas. Diante disso, deduzindo-se algorítmicamente esta técnica baseada na regra do produto obtida por derivação, tem-se o seguinte:

$$\frac{d[uv]}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

Aplicando-se a integração em ambos os membros baseado na forma diferencial, tem-se:

$$\int \frac{d[uv]}{dx} dx = \int u \frac{dv}{dx} dx + \int v \frac{du}{dx} dx$$

Como  $\int \frac{d[uv]}{dx} dx = uv$ , então a expressão anterior se transforma em:

$$uv = \int u \frac{dv}{dx} dx + \int v \frac{du}{dx} dx$$

Eliminando os termos  $dx$  nas integrais, obtém-se  $uv = \int u dv + \int v du$ ,

ou ainda,

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

em que  $u$  e  $v$  são diferenciáveis de  $x$ .

Neste cenário, pode-se aplicar a técnica de integração por partes em situações, como por exemplo:

1.  $\int x^n e^{ax} dx$ , onde pode – se fazer  $u = x^n$  e  $dv = e^{ax} dx$ .
2.  $\int x^n \ln x dx$ , onde pode – se fazer  $u = \ln x$  e  $dv = x^n dx$

### 3.14 TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO: POR FRAÇÕES PARCIAIS

Outra técnica eficaz, no processo de integração são as Frações Parciais, que consiste na decomposição de uma função racional na soma de duas ou mais funções racionais simples. Neste caso, para se determinar esta decomposição em frações parciais, é realizado o processo de fatoração, no qual a função racional própria  $\frac{p(x)}{q(x)}$  pode ser transformada na soma de frações parciais. Ao fatorar  $q(x)$ , obtém-se o seguinte:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \text{Soma de frações parciais (1)}$$

Diante disso, considera-se expressões do tipo  $ax + b$ , para cada fator linear, ou seja, o denominador das frações que compõem a soma do lado direito, transforma-se em parcelas da forma  $\frac{A}{ax+b}$ . Então, para cada fator linear repetido  $(ax + b)^n$  o segundo membro de (1) deve incluir n termos da seguinte forma:

$$\frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \dots + \frac{A_n}{(ax + b)^n}$$

#### **4 RELAÇÃO FÍSICA-MATEMÁTICA E A CONSERVAÇÃO DE ENERGIA**

Este capítulo tem como funcionalidade e perspectiva, conectar os leitores com a relação entre Física e Matemática de forma mais objetiva. Sendo assim, esse estudo está vinculado a aplicações de situações físicas, baseado na área da Mecânica, cuja temática é a conservação da energia mecânica, tendo como base alguns elementos e características essenciais para este campo.

Apresenta-se aqui, cinco aplicações físicas, cujo foco são as estratégias matemáticas usadas e necessárias para estruturar as ideias e facilitar a interpretação física de determinados fenômenos mecânicos, por meio do estudo da energia mecânica e suas aplicações em diversas situações do cotidiano. Assim, este capítulo pretende mostrar a relação entre a Matemática e a Física, por meio do diálogo e da empregabilidade de estudo, aplicando-se importantes elementos do cálculo dentro da abordagem física.

As aplicações a seguir, foram baseadas e algumas delas retiradas do livro de Mecânica Clássica, de John R. Taylor, volume único, ano 2013, sendo o tema objeto de estudo abordado no capítulo 4 deste volume.

Além deste, foi utilizado o livro de Física Básica, de H. Moysés Nussenzveig, volume 1, 4ª edição, ano 2002, fazendo uso dos capítulos 6 e 7, os quais abordam o trabalho da energia mecânica e sua conservação perante o sistema. Tendo sido empregada a aplicação da conservação da energia mecânica em relação ao oscilador harmônico simples.

#### 4.1 A MATEMÁTICA E O TEOREMA DO TRABALHO-ENERGIA CINÉTICA

A energia cinética é uma grandeza escalar associada à presença de velocidade nos corpos. Por exemplo, a queda de um objeto, arrancada de um carro, um brinquedo de corda, entre outras situações. Há uma relação entre a aplicação de uma força e a variação de energia a que ficavam submetidos cada um destes corpos. Como é o caso da relação estabelecida entre energia cinética e trabalho, por meio do Teorema do Trabalho -Energia Cinética, deduzido a seguir:

Partindo da energia cinética, temos que:

$$K = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \quad (\text{definição de energia cinética})$$

Então, pode-se escrever que:

$$\frac{dk}{dt} = \frac{1}{2} m \cdot \frac{dv^2}{dt} \Rightarrow \frac{dk}{dt} = \frac{1}{2} m \cdot \frac{d(v \cdot v)}{dt}$$

Pela regra do produto, obtém-se:

$$\frac{dk}{dt} = \frac{1}{2} m \cdot \left( \frac{dv}{dt} \cdot v + v \cdot \frac{dv}{dt} \right)$$

$$\frac{dk}{dt} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot 2 \cdot v \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dk}{dt} = m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot v$$

Reconhecendo que  $a = \frac{dv}{dt}$ , tem-se que:

$$\frac{dk}{dt} = m \cdot a \cdot v$$

Usando a 2ª lei de Newton, definida simbolicamente por  $F = ma$ , temos o seguinte:

$$\frac{dk}{dt} = F \cdot v$$

Onde o termo  $\frac{dk}{dt}$  indica a taxa de variação da energia cinética, além do que a velocidade corresponde a  $v = \frac{dr}{dt}$ . Daí, multiplicando ambos os lados da igualdade por  $dt$ , resulta em

$$\frac{dk}{dt} dt = F \cdot \frac{dr}{dt} dt$$

Ou ainda,

$$dk = F \cdot dr$$

Integrando ambos os membros, segue

$$K - K_0 = \int F \cdot dr$$

Portanto, resulta que o trabalho total é obtido a partir da variação da energia cinética, expresso da forma a seguir:

$$W = \Delta k = \int F \cdot dr$$

Pode-se observar que a dedução do teorema acima, estão presentes importantes elementos matemáticos, neste caso, a derivada e a integral. Portanto, a aplicação citada está estruturada em uma linguagem puramente matemática, aliada de uma interpretação física.

## 4.2 ENERGIA POTENCIAL

A seção a seguir, está constituída de aplicações relacionadas a energia potencial, pertencente ao campo da energia mecânica. Assim sendo, utiliza-se como temática a energia potencial gravitacional, potencial elástica, além de outras áreas da Física, como é o caso da energia potencial de uma carga em um campo elétrico uniforme, conforme veremos a seguir.

### 4.2.1 Energia Potencial de uma carga em um campo elétrico uniforme

Considera-se que uma dada carga  $q$  é inserida em um campo elétrico uniforme, em que aponta na direção de  $x$ , tendo uma intensidade  $E_0$ . Assim, vale ressaltar que a força atuando sobre essa carga  $q$  vale  $F = qE_0\hat{x}$ . Dessa maneira, vamos mostrar que esta força, tem caráter conservativo e que podemos encontrar a energia potencial correspondente.

Prova:

$$\vec{F} = q\vec{E} = qE_0\hat{x}$$

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_X dx$$

$$W = \int_{x_1}^{x_2} qE_0 dx$$

$$W = qE_0 \int_{x_1}^{x_2} dx \Rightarrow W = qE_0(x_2 - x_1)$$

Então, tem-se que:

$$W(\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}) = -\Delta U \Rightarrow W(0 \rightarrow x) = -\Delta U \Rightarrow qE_0 x = -(U(x) - U(0)) \Rightarrow U(x) = -qE_0 x.$$

Note que o trabalho realizado por  $F$  entre dois pontos 1 e 2 ao longo de qualquer caminho é dependente apenas de suas coordenadas  $x_1$  e  $x_2$ , ou seja, ele é independente do caminho, e sua força é conservativa.

Ressaltando que para uma força ser conservativa, tem-se que atender a duas condições fundamentais. Assim, a primeira delas é que a força  $F$  tenha dependência somente da posição  $\mathbf{r}$  da partícula, a outra condição é que o trabalho realizado por  $F$ , não tenha dependência nenhuma com o caminho adotado, sendo sempre o mesmo. Neste caso, atendendo as duas condições, a força é designada como uma força conservativa perante o sistema, conforme se viu no problema desta seção.

Diante disto, as ferramentas matemáticas utilizadas nesta aplicação da força elétrica, tem-se a integração, fazendo uso da variação infinitesimal de determinados elementos, desenvolvidos para encontrar o trabalho diante desta força. Constituindo uma ferramenta útil para se obter o trabalho e a energia potencial com dependência de uma dada variável ao longo do percurso, que neste caso é a posição.

#### 4.2.2 Energia potencial gravitacional e conservação da energia mecânica

Deduzir a expressão do trabalho realizado por  $F$  em termos da energia potencial  $U(r)$ . Mostrar que a energia da partícula é conservada.

Prova:

Sejam,

$$W(r_0 \rightarrow r_2) = W(r_0 \rightarrow r_1) + W(r_1 \rightarrow r_2) \quad \text{ou} \quad \text{ainda,} \quad W(r_1 \rightarrow r_2) = W(r_0 \rightarrow r_2) - W(r_0 \rightarrow r_1).$$

Vale ressaltar que cada um dos termos à esquerda é (menos) a energia potencial no ponto correspondente. Logo, demonstramos que o trabalho à esquerda é exatamente a diferença dessas duas energias potenciais:

$$W(r_1 \rightarrow r_2) = -[U(r_2) - U(r_1)] = -\Delta U \quad (\text{I})$$

Usando o teorema do trabalho-energia cinética, temos que:

$$W = \Delta K \Rightarrow W(r_1 \rightarrow r_2) = \Delta K \quad (\text{II})$$

Comparando (I) e (II), tem-se o seguinte:

$$\Delta K = -\Delta U \Rightarrow \Delta K + \Delta U = 0 \Rightarrow \Delta(K + U) = \text{Constante}$$

Então, essa constante é o que se conhece por energia mecânica. Sendo que não ocorre variação da energia à medida que a partícula se move de  $r_1$  para  $r_2$ . Desde que os pontos  $r_1$  e  $r_2$  sejam quaisquer dois pontos sobre a trajetória da partícula, tem-se uma importante conclusão: Se a força sobre a partícula é conservativa, então a energia mecânica da partícula não varia, isto é, a energia da partícula é conservativa, o que explica o uso do adjetivo “conservativa”.

Assim, esta aplicação faz uso de operações algébricas simples, diante das variações entre energias no campo da mecânica, como forma de obtenção do trabalho.

### 4.2.3 Energia Potencial Elástica

A força exercida por uma mola unidimensional, fixa em de suas extremidades, é  $F = -kx$ , onde  $x$  é o deslocamento da outra extremidade com relação ao seu ponto de equilíbrio. Assumindo que esta força é conservativa (o que de fato é), mostrar que a energia potencial correspondente é  $U = \frac{1}{2} kx^2$  se considerarmos  $U$  como sendo zero na posição de equilíbrio.

Prova:

$$U = - \int_0^x F(x') dx' = k \int_0^x x' dx' = \frac{1}{2} kx^2$$

Nesta aplicação, para se obter a equação da energia potencial elástica, tem-se a implementação da integração, diante da lei de Hooke, utilizada como forma de obtenção da energia potencial. Então, esta aplicação utiliza um elemento matemático importante para o campo físico, que é a integral. Sendo necessário para o caso de elementos variantes ao longo de um percurso, em vez de somar todas as energias potenciais elásticas, que transformaria em um somatório. Assim, este somatório se resulta em um processo de integração, facilitando sua resolução e empregabilidade.



### 4.3 OSCILADOR HARMÔNICO

Considere a seguinte situação: Uma partícula de massa  $m$ , estando presa a extremidade livre de uma mola de constante  $k$ , em que a energia potencial, em relação a lei de Hooke vale o seguinte:

$$U = \frac{1}{2} kx^2$$

Então, para a questão da energia  $E$ , tem-se que a partícula tende a oscilar entre os pontos  $x = \pm A$ , isto é,  $E = \frac{1}{2} kA^2 = U(\pm A)$ . Neste sentido, realizando uma substituição matemática entre

$$U = \frac{1}{2} kx^2, E = \frac{1}{2} kA^2 = U(\pm A) \text{ e } v(x) = \pm \sqrt{\left(\frac{2}{m}\right) [E - U(x)]},$$

obtem-se o seguinte:

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\left(\frac{2}{m}\right) \left(\frac{1}{2} kA^2 - \frac{1}{2} kx^2\right)} = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{A^2 - x^2}$$

Logo,  $\sqrt{\frac{k}{m}} dt = \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}}$

Em vista disso, para a partícula realizar um deslocamento de uma determinada posição, no caso de  $x_0$  para  $t = 0$ , indo até a posição  $x$  em um instante  $t$ , e fazendo uso da integração, temos:

$$\sqrt{\frac{k}{m}} \int_0^t dt' = \sqrt{\frac{k}{m}} t = \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{A^2 - x'^2}}$$

Realizando uma mudança de variável para resolver a integral  $\int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{A^2 - x'^2}}$ , pode-se citar:

$$x' = A \operatorname{sen} \varphi' \quad \{\sqrt{A^2 - x'^2} = A\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \varphi'} = A \operatorname{cos} \varphi'\}$$

E,  $\frac{dx'}{d\varphi'} = A \operatorname{cos} \varphi' \{dx' = A \operatorname{cos} \varphi' d\varphi'\}$

Então, para  $x = A \operatorname{sen} \varphi$ ,  $x_0 = A \operatorname{sen} \varphi_0$

Resulta-se no seguinte:

$$\int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{A^2 - x'^2}} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{A \cos \varphi' d\varphi'}{A \cos \varphi'} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi' = \varphi - \varphi_0$$

Assim,

$$\varphi = \sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi_0$$

Portanto, a lei horária do movimento é definida como:

$$x = A \operatorname{sen}(wt + \varphi_0), \text{ em que } t = \frac{2\pi}{w} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Neste contexto, pode-se obter a velocidade da partícula, conforme abordada no capítulo, por meio do processo de derivação. Então, temos que:

$$v = \frac{dx}{dt} = wA \cos(wt + \varphi_0)$$

Pode-se também obter a aceleração:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -w^2x$$

Dessa forma, obtêm-se a segunda lei de Newton para o movimento da partícula:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = ma = -kx = F(x)$$

Com algumas condições, encontra-se que:

$$\begin{cases} x(0) = x_0 = A \operatorname{sen} \varphi_0 \\ v(0) = v_0 = wA \cos \varphi_0 \end{cases}$$

Usando a relação fundamental da trigonometria:  $\operatorname{sen}^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0 = 1$ , segue que:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{w}\right)^2}$$

Por fim, a energia total do sistema, neste caso a energia mecânica, é composta pela energia cinética e pela energia potencial, em que a partícula fica oscilando entre ambas, perante o oscilador harmônico.

A respeito da aplicação descrita acima, pode-se observar que o emprego de elementos matemáticos é feito de forma profunda, em termos do número de passos e técnicas algorítmicas utilizadas. Diante disso, a partir do momento que se pretende descrever algum evento físico, por meio de suas peculiaridades e comportamentos dentro

de um sistema, seja ele simples ou complexo, a matemática é utilizada de forma objetiva, para representar as ideias diante da interpretação científica e analítica

Em suma, o papel do campo matemático na área da Física se torna ainda mais característico, desde uma abordagem simples e intuitiva até uma aplicação moderna. A partir do momento que a ciência está em pleno desenvolvimento, no âmbito do campo da Física, tem-se novas formas de se explicar fenômenos por meio da interpretação e do contexto físico inserido, assim, os elementos matemáticos estão presentes ao longo desta evolução, colaborando com a interação entre estas ciências.

#### 4.4 CORPO EM QUEDA LIVRE

Considere a seguinte situação: Uma pedra é largada do topo de uma torre no instante  $t = 0$ . Usar a conservação da energia para determinar a posição  $x$  da pedra (medida para baixo a partir do topo da torre, onde  $x = 0$ ) como função de  $t$ . Despreza-se a resistência do ar.

Prova: A única força atuando sobre a pedra é a gravidade, na qual é uma força conservativa. A energia potencial correspondente é

$$U(x) = -mgx.$$

Assim, o foco agora para resolver este problema, é fazer uso das seguintes notações:

Usar a conservação da energia para obter uma solução completa do movimento, isto é, para determinar a posição  $x$  como função do tempo. Como  $E = K + U(x)$  é conservada, sendo  $U(x)$  uma função conhecida (no contexto de um dado problema) e  $E$  determinada pelas condições iniciais, como é o caso da pedra, pode-se resolver da seguinte forma:

$$K = E - U(x) \Rightarrow K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = E - U(x), \text{ ou ainda,}$$

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = E - U(x) \Rightarrow \dot{x}^2 = \frac{2}{m} [E - U(x)] \Rightarrow \dot{x}(x) = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - U(x)},$$

obtendo-se a velocidade  $x$  em função de  $x$ .

Conhecendo a velocidade como uma função de  $x$ , pode-se agora determinar  $x$  como uma função de  $t$ . Usando o método de separação de variáveis, tem-se o seguinte:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dt = \frac{dx}{\dot{x}}$$

Note que:  $\dot{x} = \dot{x}(x)$ , isso separa as variáveis  $t$  e  $x$ . Integrar entre o ponto inicial e final, obtém-se:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\dot{x}} \Rightarrow t_2 - t_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\dot{x}}$$

Substituindo  $\dot{x}$  na expressão acima e adotando que  $\dot{x}$  é positivo, tem-se que o tempo para ir da posição inicial  $x_1$  no instante 0 até um dado ponto arbitrário  $x$  no instante  $t$  é:

$$\begin{aligned} t &= \int_{x_1}^x \frac{dx'}{\dot{x}(x')} \Rightarrow t = \int_{x_1}^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - U(x)}} \Rightarrow t = \int_{x_1}^x \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx'}{\sqrt{E - U(x)}} \Rightarrow t \\ &= \int_{x_1}^x \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx'}{\sqrt{E - U(x')}} \end{aligned}$$

Portanto, retornando ao problema em questão, tem-se o seguinte:

Como  $x$  é medido no sentido para baixo, segue que a pedra está em repouso quando  $x = 0$ , a energia total é  $E = 0$  e, de acordo com  $\dot{x}(x) = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - U(x)}$ , a

velocidade é dada por  $\dot{x}(x) = \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - U(x)} = \sqrt{2gx}$

(um resultado que é bem conhecido da cinemática elementar). Logo,

$$t = \int_0^x \frac{dx'}{\dot{x}(x')} = \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{2gx'}} = \sqrt{\frac{2x}{g}}.$$

Como antecipado, a expressão fornece  $t$  como uma função de  $x$  e daí, através de manipulações matemáticas, chega-se a um resultado bastante familiar.

$$x = \frac{1}{2}gt^2$$

Esse exemplo envolvendo a energia potencial gravitacional  $U(x) = -mgx$ , pode ser resolvido de várias formas (e algumas mais simples), mas o método da energia aqui demonstrado pode ser usado para qualquer energia potencial  $U(x)$ . Em alguns casos, a integral  $t = \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\dot{x}(x')} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{E - U(x)}}$  pode ser calculada em termos de funções elementares, sendo possível obter uma solução analítica do problema.

Observa-se que nesta aplicação, a matemática apresenta um grau de complexidade maior, quando comparado com as aplicações anteriores. Para isso, foram introduzidos elementos simbólicos e implementados uma quantidade significativa de operações

matemáticas, as quais destacam-se a integração e algumas substituições diversas e formas algébricas.

Neste cenário, para entender teoricamente a conservação da energia, foi recorrente a inserção matemática de forma equivalente e precisa. Assim, a obtenção de determinadas variáveis físicas, é encontrada por meio do estudo interno da integração neste caso, na troca de limites, capacidade analítica de elementos variantes no sistema, além da própria interpretação física aliada a matemática a cada passo realizado, como por exemplo, as modalidades empregadas da energia mecânica.

#### 4.5 CONSERVAÇÃO DA FORÇA DE COULOMB

Considere a força  $F$  agindo sobre uma carga  $q$  devido à presença de uma carga fixa  $Q$  na origem. Mostrar que ela é conservativa e determinar a respectiva energia potencial  $U$ . Verificar que  $-\nabla U = F$ .

Prova:

$$\vec{F} = \frac{kqQ}{r^2} \hat{r}, \text{ onde } \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\text{Fazendo } \gamma = kqQ \Rightarrow \vec{F} = \frac{\gamma}{r^3} \vec{r}, \text{ em que: } F_x = \frac{\gamma}{r^3} x, F_y = \frac{\gamma}{r^3} y \text{ e } F_z = \frac{\gamma}{r^3} z$$

$$\text{Logo, } \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$$

Então,

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \frac{\partial F_z}{\partial y} i + \frac{\partial F_x}{\partial z} j + \frac{\partial F_y}{\partial x} k - \frac{\partial F_x}{\partial y} k - \frac{\partial F_y}{\partial z} i - \frac{\partial F_z}{\partial x} j = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) i + \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) j + \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) k = \vec{0}$$

Assim, pode-se extrair cada componente de  $F$ , então a componente em  $x$  é:

$$(\nabla \times F)_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}$$

$$\text{Note que } F_z = \frac{\gamma}{r^3} z \text{ e } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_z}{\partial y} &= \frac{\partial [\gamma z (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}]}{\partial y} = \gamma z \left( \frac{-3}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} 2y = \\ &= -3\gamma z r^{-\frac{5}{2}} y = -\frac{3\gamma y z}{r^5} \end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial[\gamma y(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}]}{\partial z} = \gamma y \left(\frac{-3}{2}\right)(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} 2z = -\frac{3\gamma yz}{r^5}$$

Assim,

$$(\nabla_x F)_x = -\frac{3\gamma yz}{r^5} + \frac{3\gamma yz}{r^5} = 0$$

Portanto:  $(\nabla_x F)_x = 0$ 

As outras componentes são trabalhadas exatamente da mesma forma.

O percurso da conservação da energia, pode ser analisado em outras áreas da Física, como é o caso desta aplicação, em que elementos matemáticos e ideias presentes no cenário da Mecânica, estão implementados no campo da eletrostática, no que se refere à conservação da força de coulomb, entre os quais se destaca o emprego algébrico, fazendo uso do produto vetorial, matrizes e bem como manipulações algébricas de equações.

Portanto, usa-se importantes elementos matemáticos para demonstrar simbolicamente o que a teoria física aborda, transpondo de forma clara e explícita, uma comunicação entre as ideias físicas e a linguagem matemática.

## 5. ANÁLISE DA LITERATURA DE FÍSICA DO ENSINO SUPERIOR

Analizamos dois capítulos de cada livro, citados a seguir, relacionados à temática energia, incluindo uma análise de algumas definições de conceitos físicos, formulação matemática de equações da Física e aplicações em exemplos e situações, integrando assim, a própria linguagem conceitual, bem como, a funcionalidade da linguagem matemática. A partir disso, serão analisados os seguintes livros:

Para efeito de estudo, denominaremos de Livro 1, o livro “Física I – Mecânica”, de autoria de Francis Sears e Mark Zemansky, tendo como coautores Hugh D. Young e Roger A. Freedman, livro este, que traz toda uma estrutura conceitualizada de conteúdos voltados para a área da Mecânica, compondo-se de problemas para fixar o pensamento físico por trás de eventos relacionados as situações naturais, empregando a resolução matemática posteriormente. Escolhemos esse livro, pois trabalha uma abordagem linguística de fácil compreensão, em termos conceituais e de caráter discursivo e matemático, favorecendo assim, a constituição do saber científico no campo da Física.

O Livro 2 analisado foi o “Curso de Física Básica: Mecânica”, de autoria de H. Moisés Nussenzveig, sendo um livro de Física Básica, o qual apresenta uma linguagem em nível mais demonstrativo, abordando aplicações que apresentam um grau de dificuldade maior nas suas explicações, em termos de ferramentas matemáticas quando comparado com os demais livros analisados neste estudo. Além de ser um livro com uma linguagem comum aos cursos de engenharias e bacharelados/licenciaturas em Física.

Por último, o Livro 3, intitulado de “Fundamentos de Física: Mecânica”, de autoria de Halliday e Resnick. É um livro constituído por uma linguagem matemática interligada de conceitos físicos. Assim, o Halliday, como popularmente o livro é mais conhecido, emprega variadas técnicas e aplicações matemáticas em diversos campos da Física, sendo um livro utilizado em diversos cursos da área de exatas.

### 5.1 ANÁLISE DO LIVRO 1

Neste campo, serão analisadas as abordagens dos conteúdos, tendo por base os elementos matemáticos utilizados pelos autores na elaboração dos capítulos 6 e 7, inseridos entre as páginas 181 a 236. No quadro 1, tem-se os principais dados constituintes do livro 1, além dos conteúdos característicos analisados ao longo deste estudo.

**Quadro 1** – Dados do livro 1

<b>Livro Sears</b>	
<b>Nome:</b>	Física I
<b>Área:</b>	Mecânica
<b>Autor:</b>	Sears e Zemansky
<b>Edição:</b>	12ª edição
<b>Editores:</b>	Pearson
<b>ISBN:</b>	978-85-88639-30-0
<b>Total de Capítulos:</b>	11
<b>Total de páginas:</b>	403
<b>Capítulos analisados:</b>	Capítulo 6: Trabalho e Energia Cinética. Capítulo 7: Energia potencial e conservação da energia.
<b>Seções:</b>	Capítulo 6: 6.1. Trabalho – pág. 181 6.2. Energia Cinética e o Teorema do Trabalho – energia – pág. 186 6.3. Trabalho e Energia com forças variáveis – pág. 192 6.4. Potência – pág. 198
	Capítulo 7: 7.1. Energia Potencial Gravitacional – pág. 213 7.2. Energia Potencial Elástica – pág. 222 7.3. Forças Conservativas e Forças Não Conservativas – pág. 228 7.4. Força e Energia Potencial – pág. 231 7.5. Diagramas de Energia – pág. 234

Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

### 5.1.1 Análise do capítulo 6

Partindo da definição de trabalho, ao longo da primeira seção do capítulo, observou-se que este tópico é discutido de forma contextualizada, representado matematicamente pela notação vetorial e algorítmica. Assim, define-se o trabalho de uma força constante atuando na direção e sentido do deslocamento retilíneo, da seguinte maneira:

$$W = F \cdot d$$

Desse modo, há trabalho somente com a componente da força paralela ao deslocamento, expressado por  $W = F \cdot d \cos \Phi$  (sendo  $\Phi$  o ângulo formado entre a componente da força paralela ao deslocamento). Dessa maneira, na forma de notação vetorial, mediante o produto escalar obtêm-se que:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

Aborda-se a decomposição vetorial, além da própria exemplificação de imagens e gráficos perante situações que realizam trabalho. Dessa forma, nesta seção, as



expressões matemáticas trazem significados físicos relacionados ao trabalho mecânico. No entanto, até o momento, não há nada de novo no ramo do cálculo em relação ao cenário físico.

Por conseguinte, na próxima seção, foi analisado o teorema do trabalho-energia cinética, teorema este de fundamental importância no campo da Mecânica, em especial para o caso da conservação da energia mecânica. Nesse sentido, os autores o definem da seguinte forma:

Utilizando uma das equações do espaço para aceleração constante, temos que:

$$v_2^2 = v_1^2 + 2a_x d$$

$$a_x = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2d}$$

Em seguida, multiplicando a equação acima por  $m$  (simbologia da massa), obtemos o seguinte:

$$m \cdot a_x = m \cdot \frac{v_2^2 - v_1^2}{2d}$$

Reconhecendo a 2ª lei de Newton:  $m \cdot a_x = F$

Tem-se que:  $F = m \cdot \frac{v_2^2 - v_1^2}{2d}$

Ou ainda:  $Fd = \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_1^2$

Nota-se que o produto  $Fd$  representa o trabalho ( $W$ ) realizado pela força resultante  $F$ , sendo então, o trabalho total realizado por todas as forças que atuam sobre determinada partícula. Assim, o termo:  $\frac{1}{2} m \cdot v^2$  é denominado energia Cinética ( $K$ ), associada ao movimento da partícula. Logo, a energia cinética é uma grandeza física escalar, onde apresenta dependência de variáveis como massa e velocidade.

Diante disso, tem-se que o teorema do trabalho-energia é expresso da seguinte maneira:

$$W_{tot} = K_2 - K_1 = \Delta K$$

Portanto, o teorema apresentado é feito de forma algébrica, com algumas manipulações matemáticas interligando diversos conceitos físicos em uma única expressão final, possibilitando sua aplicabilidade em diversas situações, com base nas

variáveis físicas presentes, utilizando para sua dedução outros conceitos físicos como a 2ª lei de Newton e a equação de Torricelli.

Na seção seguinte, tem-se o caso de forças variáveis. A partir deste momento se inicia a empregabilidade de elementos do cálculo, tais como o emprego da integração usada para representar de forma simbólica, forças variando ao longo do percurso, em um dado deslocamento inicial até um final, como se pode analisar:

$$W = F_{ax}\Delta x_a + F_{bx}\Delta x_b + \dots$$

Logo, a representação acima, compõem um somatório que pode ser transformado em uma integral, tal como:  $W = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx$ . Para exemplificar, temos a deformação de uma mola, o movimento retilíneo de uma partícula, entre outros. Particularmente, para casos em que a componente x da força é constante, tem-se que:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx = F_x \int_{x_1}^{x_2} dx = F_x(x_2 - x_1)$$

Neste cenário, a força necessária para esticar uma mola, é formulada pela lei de Hooke, definida por:

$$F_x = kx$$

Assim, o trabalho por uma força F, quando o alongamento da mola varia de zero a um dado valor máximo x, é representado da seguinte forma:

$$W = \int_0^x F_x dx = W = \int_0^x kx dx = \frac{1}{2}kx^2$$

Vale ressaltar que o trabalho acima, pode ser obtido a partir da área do gráfico de uma força por sua deformação, seguindo um trajeto linear, formando uma figura geométrica conhecida.

Ainda nesta seção, foi deduzido anteriormente, o teorema do trabalho-energia para o caso de forças constantes. Com base nisto, deduz-se este teorema para um movimento retilíneo com força variável. Assim, tem-se que:

Partindo da aceleração instantânea de uma dada partícula:  $a_x = \frac{dv_x}{dt}$ , e usando a regra da cadeia, pode-se escrever:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{dx} \frac{dx}{dt} = v_x \frac{dv_x}{dx}$$

Com isso, o trabalho total realizado por uma força resultante é definido da seguinte forma:

$$W_{tot} = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx = \int_{x_1}^{x_2} ma_x dx = \int_{x_1}^{x_2} mv_x \frac{dv_x}{dx} dx$$

Trocando-se as variáveis de integração e seus respectivos limites, retoma-se a expressão para o teorema do trabalho-energia:

$$W_{tot} = \int_{v_1}^{v_2} mv_x dv_x \Rightarrow W_{tot} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

As informações matemáticas presentes ao longo desta seção, foram constituídos de uma linguagem matemática estruturada em ferramentas do ramo do cálculo, tais como os elementos infinitesimais, a integração e o somatório. Além do mais, empregou-se também a regra da cadeia e a substituição de variáveis, tendo base a partir das taxas de variações.

Desse modo, a seção relacionada a potência é definida por:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

A equação acima, expressa a potência média definida como a taxa de variação do trabalho pela variação do tempo. Logo, para o caso da potência instantânea, usa-se a notação matemática de limite, definindo-a da seguinte maneira:

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

Empregando-se, para isso, elementos matemáticos, entre eles cita-se taxa de variação instantânea, limites e a própria notação infinitesimal. Sendo fundamentais para exemplificar determinados fenômenos da Física.

Portanto, os elementos matemáticos utilizados no capítulo, foram limites, derivadas e integrais. De forma geral, abordou-se o algebrismo vetorial perante as seções, além da análise gráfica voltada para a representação vetorial, bem como na esquematização de situações, vinculadas as suas grandezas.

No caso do trabalho, utiliza-se a questão da álgebra vetorial, por meio da decomposição de grandezas vetoriais e da manipulação de equações, como é o caso da equação de Torricelli para alcançar o teorema do trabalho-energia cinética.

Para explicação do trabalho em forças variáveis, apresentou-se o somatório de todos os trabalhos do sistema, constituído das forças infinitesimais e das variações de distâncias, além destas, fez-se uso de integrais simples para constituição do trabalho. Encerrando com a própria notação de limites para definição de potência.

O emprego matemático, ao longo do capítulo, é realizado posteriormente a definição de um dado conceito ao longo das seções. Dessa maneira, a própria matemática é expressa de forma não tão complexa e definida por simples relações, em que a manipulação algébrica é empregada ao longo da obtenção de uma equação que representa uma determinada lei física.

Por isso, para explicação e interpretação de alguns eventos mecânicos relacionados ao campo do trabalho e da energia cinética, parte estas introdutórias para se trabalhar conservação da energia, foram inseridos elementos básicos do cálculo, necessários para favorecer uma explicação racional sobre fatos da realidade, além de teoremas chave que são utilizados para diversos campos.

Em síntese, o livro em si, proporciona elementos básicos para os leitores compreenderem o comportamento de determinadas situações físicas ao nosso redor. Para explicitar isso, Sherin (2001) aborda em relação a literatura científica, que é importante uma aprendizagem baseada na interpretação das formas simbólicas, constituídas de equações, para que assim, possa associar um dado esquema conceitual, seja o mais simples possível, com um padrão simbólico.

Durante as análises do capítulo, pode-se observar que a partir do momento que se define ou apresenta um conceito físico novo, existe todo um contexto histórico-científico por trás dele, para que os cidadãos possam dialogar entre a ponte conceitual da Física e o percurso matemático da linha de raciocínio.

Outra questão que se pode constatar, é com base no formato que o livro abrange, isto é, além dos capítulos analisados, sua estrutura é constituída de sistemas que podem facilitar os leitores no processo de conhecimento físico. De fato, se fundamenta de ferramentas que proporcionam habilidades de estruturação das ideias, provenientes da interpretação física. Além de colaborar com habilidades mecânicas, que é a sistematização e manipulação matemática, esta última é proveniente da concepção científica adquirida ao longo do emprego interpretativo da abordagem conceitual. Na visão de Ausubel (2000) o conhecimento significativo que está presente na estrutura cognitiva, pode ser construído mediante informações e elementos chaves que proporcionem uma ligação entre o conceito e o conhecimento matemático, para que

depois se possa fazer uso da resolução matemática aplicada aos elementos científicos presentes.

### 5.1.2 Análise dos objetivos do capítulo 6

Neste cenário, a proposição dos objetivos que se pretende alcançar para um cidadão que toma conhecimento deste tipo de conteúdo, torna-se mais fácil e flexível, por meio da esquematização das ideias e estratégias formuladas com base no capítulo, proporcionado à aprendizagem da temática ‘Trabalho e Energia Cinética’. Por conseguinte, é por meio dos objetivos, que se pode obter informações relacionadas a cada conceito e conteúdo específico, em termos de conhecimento, aplicabilidade e avaliação. Sendo assim, se eles foram atendidos ao final do capítulo ou se é necessário retornar o assunto pendente.

Nesse contexto, a forma como os objetivos são abordados no capítulo, é bem definida, oferecendo inicialmente ao leitor as informações relevantes deste estudo, pois tais objetivos só podem ser alcançados por completo, com o auxílio da matemática, seja em linguagem, técnicas do cálculo e na própria Álgebra.

Portanto, a definição de energia cinética de um corpo é empregada de forma conceitual e matemática, proporcionando de forma explícita o significado físico desta energia.

Outra questão observada, baseia-se na formulação feita em relação ao teorema do trabalho-energia cinética, tendo por base o trabalho total realizado sobre um corpo, implicando consequentemente numa variação da energia cinética, relação expressa de forma matematizada, assim como a própria definição de potência.

Para concluir, por meio da análise do capítulo, pode-se constatar que os conceitos físicos são empregados de forma precisa, de fácil compreensão e bem aliados com a matemática. Assim, a definição de um dado conceito no livro, tomando como base o formato do capítulo, ao longo das seções é assegurada quando a linguagem matemática é empregada posteriormente para dar suporte e descrição a determinadas informações de fenômenos físicos presentes.

Neste contexto, Karam (2012) traz como objetivo essencial de ensino e aprendizagem de conteúdos de Física, tendo por base livros como este, que a Matemática funciona como uma linguagem estrutural de forma expressiva de conceitos e ideias científicas da área Física. Assim sendo, ela está relacionada à capacidade de utilizá-la em

contextos internos e externos da Física, em outras palavras, de empregá-la de forma geral, para compreender os fenômenos físicos matematicamente.

Assim, de acordo com documentos oficiais, como as Diretrizes voltadas para o cenário da Física, eles trazem que esta área é interessante ser empregada de forma contextualizada e não somente trabalhar a matemática pela matemática. Então, é relevante abordar o que se interpreta, analisa e saber empregar as grandezas, com base nas variáveis físicas presentes, para depois utilizá-las matematicamente perante as teorias e leis da Física. Nesse aspecto, o próprio Sears (2008) trabalha a questão conceitual da Física, implementando elementos matemáticos como suporte necessário para enfatizar e descrever os fenômenos físicos, um importante item segundo BRASIL (2002) para a formação científica dos cidadãos contemporâneos atuantes perante a sociedade.

### 5.1.3 Análise do capítulo 7

Partindo da primeira seção do capítulo, composta pela energia potencial gravitacional, definindo matematicamente o seguinte:

$$W_{grav} = Fd = w(y_1 - y_2) = mgy_1 - mgy_2$$

Logo, expressa-se a energia potencial gravitacional como sendo:  $U_{grav} = mgy$

$$\text{Assim, } W_{grav} = U_{grav.1} - U_{grav.2} = -(U_{grav.2} - U_{grav.1}) = -\Delta U_{grav}$$

Dessa forma, a conservação da energia, mediante a atuação somente de forças gravitacionais, pode ser expressa da seguinte forma:

$$W_{tot} = \Delta K \Rightarrow W_{grav} = -\Delta U_{grav} \Rightarrow K_1 + U_{grav.1} = K_2 + U_{grav.2}$$

Portanto, para a questão da energia mecânica do sistema, tem-se:

$$E = K + U_{grav} = \text{constante}$$

Para o caso de outras forças, além da gravidade, realizarem trabalho, pode-se citar:

$$W_{outra} + W_{grav} = K_2 - K_1 \Rightarrow W_{outra} + U_{grav.1} - U_{grav.2} = K_2 - K_1$$

$$\text{Então, } K_1 + U_{grav.1} + W_{outra} = K_2 + U_{grav.2}$$

Na questão de movimentos ao longo de uma trajetória curva, vale ressaltar que para energia potencial gravitacional, o trabalho é designado por:

$$\vec{p} \cdot \Delta \vec{d} = -mg\hat{j} \cdot (\Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j}) = -mg\Delta y$$

Ao analisar esta primeira seção, pode-se observar a empregabilidade do teorema do trabalho-energia, em que as manipulações matemáticas são simples, relacionando trabalho e energia cinética, visto que, utiliza-se notações básicas da álgebra vetorial.

Assim, a matemática torna-se fundamental para obtenção de dados de determinadas situações envolvendo análises de referenciais, em ações envolvendo a energia potencial gravitacional.

Por conseguinte, tem-se a seção da energia potencial elástica, em que o trabalho realizado sobre a mola é definido como:

$$W = \frac{1}{2}k \cdot x_2^2 - \frac{1}{2}k \cdot x_1^2.$$

Mas, para o caso da mola realizando trabalho, a expressão a ser utilizada é:

$$W_{el} = \frac{1}{2}k \cdot x_1^2 - \frac{1}{2}k \cdot x_2^2.$$

$$\text{Daí, } W_{el} = \frac{1}{2}k \cdot x_1^2 - \frac{1}{2}k \cdot x_2^2 = U_{el.1} - U_{el.2} = -\Delta U_{el}$$

Logo, pelo teorema do trabalho-energia, conclui-se que:  $W_{tot} = W_{el} = U_{el.1} - U_{el.2}$

$$\text{Portanto, } K_1 + U_{el.1} = K_2 + U_{el.2}$$

Em vista disso, para situações em que há a presença da energia potencial elástica e da energia potencial gravitacional, além de outras forças, tem-se que:

$$W_{grav} + W_{el} + W_{outra} = K_2 - K_1$$

Então, de forma geral, vale ressaltar que:

$$K_1 + U_{grav.1} + U_{el.1} + W_{outra} = K_2 + U_{grav.2} + U_{el.2}$$

$$\text{De maneira análoga, tem-se o seguinte: } K_1 + U_1 + W_{outra} = K_2 + U_2$$

Até este momento, pode-se analisar que as definições expostas, são feitas sem nenhum tipo de demonstração e dedução de equações, sendo empregado manipulações simples e substituições algébricas sem tantos detalhes e dificuldades.

Neste cenário, a parte introdutória de forças conservativas e forças não conservativas é feita de forma puramente conceitual e discursiva, abordando temáticas voltadas para o que é e exemplos de tais forças.

Para a questão da lei da conservação, inserida no contexto da energia, tem-se que:

$$\Delta U_{int} = -W_{outra}$$

$$K_1 + U_1 - \Delta U_{int} = K_2 + U_2$$

Por fim, obtêm-se que para a lei da conservação da energia vale:

$$\Delta K + \Delta U + \Delta U_{int} = 0$$

Neste caso, são simples as operações matemáticas apresentadas, sem demonstrações e simbolismos complicados, mas que são essenciais para entender e descrever o processo de conservação da energia mecânica, mediante a empregabilidade

numérica para com o estado físico real de dadas situações apresentadas, cuja lei foi desenvolvida com base em estudo algébrico e pesquisas científicas.

A próxima seção, está voltada para a força e energia potencial, em que os elementos matemáticos utilizados são os seguintes:

Partindo de  $W = -\Delta U$

Assim,  $F_x(x)\Delta x = -\Delta U$  então,  $F_x(x) = -\frac{\Delta U}{\Delta x}$

Atribuindo o limite quando  $\Delta x \rightarrow 0$ , tem-se que:  $F_x(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$ , apresentando assim, a força obtida da energia potencial em uma dimensão.

Além disso, obtém-se também a força em função da energia potencial em três dimensões, conforme se observa a seguir:

$$F_x = -\frac{\Delta U}{\Delta x}, F_y = -\frac{\Delta U}{\Delta y} \text{ e } F_z = -\frac{\Delta U}{\Delta z}$$

Empregando o limite em  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$  e  $\Delta z \rightarrow 0$ , tem-se que:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \text{ e } F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

Logo, citando a energia potencial em termos dos vetores unitários, obtém-se o seguinte:

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right)$$

Portanto:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U$$

Pela análise desta seção, os elementos matemáticos utilizados são o uso de derivadas parciais (“Uma função com mais de uma variável, em que possui tantas derivadas parciais quantas forem suas variáveis independentes” LARSON, 2010, p. 470) em três dimensões, o emprego de limites e a inserção do gradiente (o estudo do gradiente pode ser encontrado no livro: Eletrodinâmica, de autoria de David J. Griffiths). Assim, o ramo da Física tem precisado de elementos matemáticos mais consistentes, pois a partir do momento que vai se aprofundando em determinados eventos físicos, é necessário o uso de uma linguagem matemática mais complexa, quando comparado com as demais seções até aqui analisadas.

Por fim, a última seção está voltada para o diagrama de energia, contendo a parte gráfica dos tipos de energias, neste caso, potencial gravitacional e elástica, por meio de gráficos e suas interpretações. Favorecendo assim, a sistematização de situações que são



empregadas nas equações matemáticas desenvolvidas e são utilizadas mediante a aplicabilidade gráfica.

Portanto, ao longo deste capítulo e suas respectivas seções, a utilização de técnicas e operações matemáticas, além da imersão gráfica e representacional, colabora para uma caracterização do que a Física traz com base nos fenômenos presentes no universo. Assim, desde o grau de exemplificação mais simples até o mais sofisticado, a Matemática caminha lado a lado com o contexto científico da Física, facilitando a interpretação, estruturação e a representação dos eventos físicos naturais.

#### **5.1.4 Análise dos objetivos do capítulo 7**

Ao longo deste capítulo e suas respectivas seções, foram definidos o conceito de energia potencial gravitacional, mediante situações em que ocorrem movimento na vertical, além da definição de energia potencial elástica para deformação de corpos flexíveis. Conseqüentemente, as energias foram expressas matematicamente, sendo que para definir uma equação precisa para cada uma destes tipos de energia potencial, foi iniciado com uma dada situação, feita uma análise para as variáveis que influenciam o movimento de um corpo em ação. Posteriormente é que foi deduzido de forma algébrica, uma abordagem algorítmica para cada forma de energia.

Na questão da distinção entre forças conservativas e não conservativas, foi utilizado uma abordagem conceitual, sem tanto uso e emprego da linguagem matemática. Então, para explicar e expressar a lei da conservação da energia mecânica, foram feitas de forma sucinta, simples manipulações algébricas.

Portanto, o capítulo é estruturado em uma abordagem conceitual e empregada posteriormente o uso algorítmico de equações. Com base nisso, foram utilizados elementos matemáticos vinculados ao estudo do cálculo, como é o caso dos limites, derivadas e integrais, por exemplo. Assim, a linguagem matemática ao longo do capítulo foi explicitada de forma simples e de fácil compreensão para o leitor, facilitando o que se propunha em termos de objetivos físicos e da aplicabilidade matemática.

## **5.2 ANÁLISE DO LIVRO 2**

Conforme já foi explicitado anteriormente, o segundo livro utilizado neste estudo, foi o livro curso de Física Básica 1, em que são analisadas as abordagens dos conteúdos,

além dos elementos matemáticos utilizados pelos autores na elaboração dos capítulos 6 e 7, compreendendo as páginas 105 a 143. No quadro 2, tem-se os dados básicos constituintes do livro, desde a autoria até os conteúdos dos capítulos analisados perante este campo de estudo.

**Quadro 2 – Dados do livro 2**

<b>Livro Moysés</b>	
<b>Nome:</b>	Curso de Física Básica 1
<b>Área:</b>	Mecânica
<b>Autor:</b>	H. Moysés Nussenzveig
<b>Edição:</b>	4º edição
<b>Editora:</b>	Blucher
<b>ISBN:</b>	978-85-212-0298-1
<b>Total de Capítulos:</b>	13
<b>Total de páginas:</b>	328
<b>Capítulos analisados:</b>	Capítulo 6: Trabalho e Energia Mecânica. Capítulo 7: Conservação da energia no movimento geral.
<b>Seções:</b>	Capítulo 6: 6.1. Conservação da energia mecânica num campo gravitacional uniforme – pág. 105 6.2. Trabalho e energia – pág. 108 6.3. Trabalho de uma força variável – pág. 111 6.4. Conservação da energia mecânica no movimento unidimensional – pág. 113 6.5. Discussão qualitativa do movimento unidimensional sob ação de forças conservativas – pág. 116 6.6. Aplicação ao oscilador harmônico – pág. 120
	Capítulo 7: 7.1. Trabalho de uma força constante de direção qualquer – pág. 126 7.2. Trabalho de uma força no caso geral – pág. 128 7.3. Forças conservativas – pág. 130 7.4. Força e gradiente da energia potencial – pág. 133 7.5. Aplicações: campos gravitacional e elétrico – pág. 136 7.6. Potência. Forças não - conservativas – pág. 140.

Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

### 5.2.1 Análise do capítulo 6.

A princípio, o capítulo se inicia com a conservação da energia mecânica num campo gravitacional, abrangendo desde noções básicas de Física e Matemática, isto é, tem início com o emprego da equação:  $v_1^2 = v_0^2 + 2g(z_0 - z_1) \Rightarrow v_1^2 = v_0^2 + 2glsen\theta$ . Além do emprego de figuras com noções básicas de trigonometria.

Matematicamente tem-se:  $\frac{1}{2}v_1^2 + gz_1 = \frac{1}{2}v_0^2 + gz_0$

Logo, emprega-se um exemplo de uma máquina de Atwood, o que nos fornece:

$$\Delta l_1 = (z_1 - z_0) = -\Delta l_2 = -(z_1 - z_0)$$

Assim,

$$\left\{ \begin{array}{l} T - mg = ma \\ T - Mg = -Ma \end{array} \right\} (M - m)g = (M + m)a \left\{ a = \frac{(M - m)}{M + m}g \right.$$

Com base nisso, tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1^2 = v_0^2 = 2a(z_1 - z_0) \\ V_1^2 = V_0^2 = 2(-a)(z_1 - z_0) \end{array} \right\}$$

Ou ainda,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}v_1^2 + gz_1 = \frac{1}{2}v_0^2 + gz_0 - \frac{2Mg}{m+M}(z_0 - z_1) \\ \frac{1}{2}V_1^2 = gZ_1 = \frac{1}{2}V_0^2 = gZ_0 - \frac{2Mg}{m+M}(Z_0 - Z_1) \end{array} \right\}$$

Portanto,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}v_1^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = g\left(\frac{m-M}{m+M}\right)(z_0 - z_1) = g(z_0 - z_1) - \frac{2M}{m+M}g(z_0 - z_1) \\ \frac{1}{2}V_1^2 - \frac{1}{2}V_0^2 = g\left(\frac{M-m}{M+m}\right)(Z_0 - Z_1) = g(Z_0 - Z_1) - \frac{2m}{m+M}g(Z_0 - Z_1) \end{array} \right.$$

Mediante manipulações algébricas, resulta-se no seguinte:

$$\left(\frac{1}{2}mv_1^2 + mgz_1\right) + \left(\frac{1}{2}MV_1^2 + mgZ_1\right) = \left(\frac{1}{2}mv_0^2 + mgz_0\right) + \left(\frac{1}{2}MV_0^2 + mgZ_0\right)$$

Então,

$$E = \sum \left(\frac{1}{2}mv^2 + mgz\right)$$

Nesta primeira seção, pode-se observar que a empregabilidade matemática está bastante frequente na descrição e exemplificação dos conceitos físicos. Deste modo, os elementos matemáticos presentes são o somatório e fundamentos de matemática básica, como o uso trigonométrico e algébrico.

Na seção a seguir, aborda-se a questão do trabalho e energia, em que se podem citar como ferramentas matemáticas o seguinte:

Apresenta-se a energia cinética matematicamente, definida por:  $E = \frac{1}{2}mv^2$

Logo, pela segunda lei de Newton:  $-F = ma$ , usando  $v^2 = -2a\Delta z$

Assim,  $T = \frac{1}{2}mv^2 = F\Delta z \Rightarrow \Delta W = F\Delta z$ .

Para o caso da energia potencial, é definida como  $U = mgz$

A partir disso, tem-se que  $E = T + U = \frac{1}{2}mv^2 + mgz$

Outro termo matemático presente no capítulo, foi o seguinte:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + ma(x_1 - x_0)$$

Assim sendo,

$$W_{x_0 \rightarrow x_1} = F(x_1 - x_0) = T_1 - T_0 = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

Por conseguinte, tem-se o trabalho de uma força variável, partindo de

$$\mathbf{F} = F(x)\hat{\mathbf{x}}$$

Logo,  $\Delta W_i \simeq F(x_i)\Delta x_i$ , em vista disso, pode-se citar:

$$W_{x_0 \rightarrow x_1} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_i F(x_i)\Delta x_i \Rightarrow W_{x_0 \rightarrow x_1} = \int_{x_0}^{x_1} F(x)dx$$

Sabendo que  $F(x) = -Kx$ , segue que:

$$W_{x_0 \rightarrow x_1} = -k \int_{x_0}^{x_1} x dx \Rightarrow W_{x_0 \rightarrow x_1} = -\frac{k}{2}(x_0 + x_1)(x_1 - x_0) \Rightarrow W_{x_0 \rightarrow x_1} = -\left(\frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_0^2\right)$$

Empregando a 2ª lei de Newton, tem-se:

$$F = ma = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow dx = v dt = \frac{dx}{dt} dt$$

Então,

$$W_{x_0 \rightarrow x_1} = \int_{t_0}^{t_1} mv \frac{dv}{dt} dt \Rightarrow W_{x_0 \rightarrow x_1} = \int_{v_0}^{v_1} mv dv$$

Portanto, conclui-se que:

$$W_{x_0 \rightarrow x_1} = \int_{x_0}^{x_1} F(x)dx = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = k_1 - k_0 = \Delta K$$

Nesta seção, foram utilizados elementos matemáticos entre os quais se destacam o estudo dos limites, integrais e derivadas, constituintes básicos no estudo do cálculo.

A próxima seção, será fundamentada na conservação da energia mecânica no movimento unidimensional, assim pode-se citar o seguinte:

Para o caso do movimento na vertical, tem-se:  $F = -mg$

Então,

$$W_{z_0 \rightarrow z_1} = -mg \int_{z_0}^{z_1} dz = -mg(z_1 - z_0) = -(U_1 - U_0) = -\Delta U$$

Em que  $U(z) = mgz$

Logo,

$$\Delta T = -\Delta U \{ \Delta(T + U) = \Delta E = 0$$

Portanto,  $W_{x_0 \rightarrow x_1} = -[U(x_1) - U(x_0)] = -\Delta U$ , sendo que  $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$

Conclui-se que:

$$E = T + U(x) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Outro fator que será estudado ao longo desta seção é o seguinte:

$$\Phi(x) = \int_{x_0}^x F(u)du = W_{x_0 \rightarrow x}$$

Logo,

$$\Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \int_{x_1}^{x_0} F(u)du + \int_{x_0}^{x_2} F(u)du = \int_{x_1}^{x_2} F(u)du = W_{x_1 \rightarrow x_2}$$

Por fim, tem-se que:

$$U(x) = -\Phi(x) = -\int_{x_0}^x F(u)du$$

Assim,  $\Delta\Phi = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) \Rightarrow \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) \simeq F(x)\Delta x$

Aplicando o limite, quando  $\Delta x \rightarrow 0$ , tem-se:

$$\frac{d\Phi}{dx} = F(x)$$

Onde,  $F(x) = -\frac{dU}{dx}$

Certamente, obtém-se:

$$\begin{cases} U(z) = mgz \Rightarrow -\frac{dU}{dz} = mg = F \\ U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow -\frac{dU}{dx} = -kx = F \end{cases}$$

Neste cenário, pode-se citar:

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x)dx = W_{x_0 \rightarrow x_1} = U_0 - U_1 \Rightarrow \int_{x_1}^{x_0} F(x)dx = W_{x_1 \rightarrow x_0}$$

$$= - \int_{x_0}^{x_1} F(x)dx = U_1 - U_0$$

Então,  $W_{x_0 \rightarrow x_1} + W_{x_1 \rightarrow x_0} = 0$ .

A próxima seção do capítulo, está voltada para discussão qualitativa, tendo por base o movimento unidimensional sob a ação de forças conservativas. Assim, de linguagem matemática, tem-se o seguinte:

Partindo de  $F(x) = -\frac{dU}{dx}$

Considerando-se que  $E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x) = \text{Constante} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = E - U(x)$

Assim,  $U(x) \leq E$ .

Então,  $v(x) = \pm \sqrt{\left(\frac{2}{m}\right)[E - U(x)]}$

Logo,  $U(x) = E$

Analisando este capítulo, pode-se constatar que o emprego da linguagem matemática é feito de forma mais profunda no cenário do cálculo. Assim, os elementos matemáticos inseridos ao longo do capítulo, são o uso de limites, derivadas e integrais. Sendo que há um aprofundamento no desenvolvimento algorítmico, para formulação de equações que simbolizam determinadas leis físicas.

Nesse sentido, tem-se um capítulo composto por símbolos e expressões algébricas que tendem a desenvolver uma maior representatividade e significado de conceitos físicos, em particular, no campo do trabalho e da energia cinética, contribuinte com o estudo da conservação da energia, por meio de demonstrações matemáticas. O percurso em si, parte de uma situação inicial como exemplo, seguida da coleta de informações desenvolvidas anteriormente ao campo introdutório da Mecânica, na questão do uso de equações do espaço, notação vetorial, bem como de elementos básicos da própria matemática, como é o caso de relações trigonométricas.

Neste contexto, vale ressaltar que o livro, de forma geral, explicita uma linguagem matemática bem diversificada, explicando os fenômenos independente da abstração e do processo matemático necessário para descrever determinado evento com precisão e de

forma macro ou microscópica. Neste estudo FOURRIER *apud* ABRANTES (1998) aborda o seguinte:

[...] a análise matemática é tão extensiva quanto a própria Natureza; ela define todas as relações perceptíveis, mede tempos, espaços, forças, temperaturas [...] Ela associa fenômenos os mais diversos e descobre as analogias ocultas que os unem [...] [A análise matemática] parece ser uma faculdade da mente destinada a compensar a reduzida duração da vida e a imperfeição dos sentidos. (FOURRIER *apud* ABRANTES, 1998, p. 168)

Em suma, uma das coisas notáveis acerca do comportamento do mundo é que ele parece fundamentar-se na matemática num grau totalmente extraordinário de precisão. Para PENROSE (1998, p.19) “Quanto mais entendermos sobre o mundo físico, quanto mais profundamente entramos nas leis da natureza, mais parece que o mundo físico quase se evapora e ficamos apenas com a matemática”.

Assim, quanto mais profundamente entendermos as leis da física, mais somos conduzidos para dentro desse mundo da matemática e de conceitos matemáticos.

### 5.2.2 Análise dos objetivos do capítulo 6

O capítulo, assim como todo o livro não apresenta os objetivos contidos ao longo de cada um deles. Entretanto, no seu aspecto geral, o autor utiliza um tipo de linguagem que facilita uma melhor compreensão dos conceitos básicos de Física, por meio de uma matemática mais precisa, essencial na questão de introduzir ideias e aplicações físicas.

Assim, ao longo do capítulo, a linguagem matemática é feita mediante o aprofundamento de passos e a introdução de simbologias mais diversificadas, tendo o apoio de técnicas e manipulações algébricas. Assim, no contexto da visão científica, ele é estruturado de forma satisfatória, atendendo ao suporte e discussão de ideias básicas de Física, neste caso, trazendo para o campo da conservação da energia mecânica, que é feito por meio da linguagem matemática aliada com ferramentas conceituais.

Paralelamente, com o adjunto da evolução científica, os fenômenos físicos também evoluem e o uso da matemática vem se tornando cada vez mais inserido no corpo da Física. Por isso, os conhecimentos matemáticos não podem ser adicionados externamente, é relevante uma conexão, sobre o que se explicita em pensamento com o que se demonstra em sua eventual efetividade. Diante disso, para transcrever conteúdos relacionados a conservação da energia, o livro apresenta esta linha de raciocínio, na qual

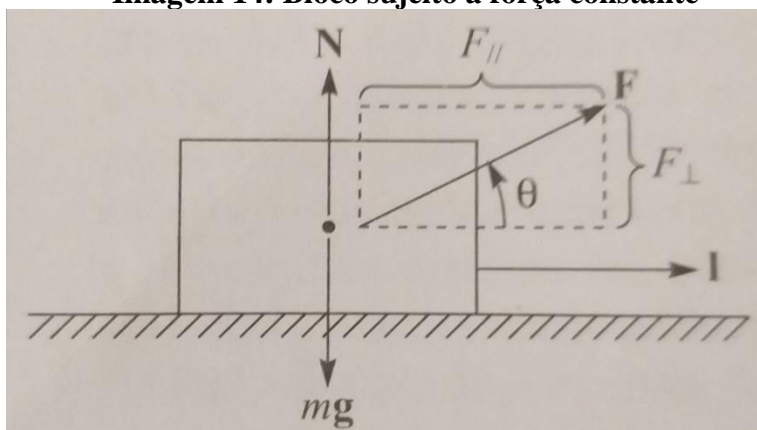
não se pode explicitar determinadas situações físicas sem empregar a Matemática, mediante as teorias físicas que se construíram ao longo do contexto científico na modernidade.

Contudo, Boniolo e Budinich (2005) enfatizam que as teorias físicas que se formularam até a atualidade, são constituídas por signos físico-matemáticos. Assim, estes são algo que não podem ser separados entre uma parte matemática e uma não matemática, pois as situações físicas não apresentariam significância, uma vez que a matemática designa uma parte indivisível da Física contemporânea e como não dizer da Física Moderna. Ênfase esta, transcrita neste capítulo analisado, no papel da estruturação científica das ferramentas matemáticas necessárias em relação aos problemas físicos surgidos.

### 5.2.3 Análise do capítulo 7

O capítulo 7, inicia-se com a abordagem do trabalho de uma força constante em qualquer direção, trazendo o exemplo de um bloco sendo puxado por uma força ( $F$ ) inclinada, ação realizada no plano horizontal, com atrito desprezível. A partir disto, os elementos matemáticos empregados são os seguintes:

**Imagem 14: Bloco sujeito a força constante**



Fonte: Nussenzveig (2002, p. 126).

De acordo com a imagem, partindo de  $N = P - F \sin \theta$ , onde  $P = mg$  e  $F \cos \theta = ma$ , tem-se que para um dado deslocamento  $l$ ,  $v_1^2 - v_0^2 = 2al = \frac{2}{m} F \cos \theta l$ , em que  $l = |\mathbf{l}|$ , eventualmente, pela definição de trabalho:  $W = \frac{1}{2} m \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_0^2 = T_a - T_0 = F \cos \theta l$ .



Assim, pode-se notar que o trabalho é expresso pela análise algébrica e dedutiva, partindo de uma situação e por meio das demonstrações matemáticas se obtém o trabalho, mediante a força constante paralela ao deslocamento. Dessa forma, os elementos matemáticos são empregados logo no início do capítulo.

Ainda nesta seção, tem-se o emprego de informações adicionais que serão utilizadas ao longo do capítulo, isto é, aborda-se uma base teórica sobre produto escalar, ortogonalidade e operações com vetores, praticamente noções básicas de vetores.

Em seguida, tem-se a seção do trabalho de uma força no caso geral, cujos elementos matemáticos presentes são os descritos abaixo:

Partindo de:  $P_i P_{i+1} = \Delta l_i$ , segue:

$$W_{P_1 \rightarrow P_2}^{(c)} = \lim_{|\Delta l_i| \rightarrow 0} \sum_i F_i \Delta l_i = \int_{P_1}^{P_2} F \cdot dl$$

É importante ressaltar que há o emprego de integral de linha (integral feita ao longo de um caminho. Este tipo de integral pode ser encontrado no livro Mecânica Clássica, autoria de John R. Taylor, editora Maria Eduarda Fett Tabajara).

Como elementos matemáticos no campo da Física, tem-se

$$dl = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$$

Assim, pode-se citar que:  $F \cdot dl = F_x dx + F_y dy + F_z dz$

Então,

$$\int_{P_1}^{P_2} F \cdot dl = \int_{P_1}^{P_2} F_x \cdot dx + \int_{P_1}^{P_2} F_y \cdot dy + \int_{P_1}^{P_2} F_z \cdot dz$$

Portanto,

$$F_x dx = ma_x dx = m \frac{dv_x}{dt} \frac{dx}{dt} dt = mv_x \frac{dv_x}{dt} dt = mv_x dv_x$$

Ou ainda,

$$\int_{P_1}^{P_2} F_x \cdot dx = m \int_{P_1}^{P_2} v_x \cdot dv_x = \frac{1}{2} m \cdot v_{2x}^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_{1x}^2$$

Diante disso, tem-se o seguinte:

$$\int_{P_1}^{P_2} F \cdot dl = \frac{1}{2} m \cdot (v_{2x}^2 + v_{2y}^2 + v_{2z}^2) - \frac{1}{2} m \cdot (v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + v_{1z}^2)$$

Em que:  $v_2^2 = v_{2x}^2 + v_{2y}^2 + v_{2z}^2$  e  $v_1^2 = v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + v_{1z}^2$

Por fim,

$$W_{P_1 \rightarrow P_2}^{(c)} = \int_{P_1}^{P_2} F \cdot dl = \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_1^2 = K_2 - K_1 = \Delta K$$

Portanto, ao longo desta seção foram analisadas importantes ferramentas matemáticas para descrição de determinados conceitos físicos, tais como a questão do limite, integral de linha, além da própria manipulação algébrica presente no exposto acima, utilizada para demonstrar por exemplo, o teorema do trabalho-energia cinética.

Nota-se que o emprego matemático abordado, não é tão simples quando comparado com o desenvolvido no livro 1. Assim, a linguagem matemática tornou-se ainda mais precisa, na exemplificação de algumas equações, empregando o uso de notação vetorial e de produto escalar para a aplicabilidade, seja na energia cinética, trabalho, como também, no próprio teorema.

Na seção seguinte, trabalhou-se o caso de forças conservativas, partindo do seguinte raciocínio matemático:  $F_x = F_y = 0$  e  $F_z = -mg$ , para o caso de um sistema de coordenadas tridimensional, direcionado verticalmente para cima, mediante as componentes da força gravitacional. Logo, tem-se que:

$$\int_{P_1}^{P_2} F \cdot dl = \int_{P_1}^{P_2} F_x \cdot dx + \int_{P_1}^{P_2} F_y \cdot dy + \int_{P_1}^{P_2} F_z \cdot dz \Rightarrow \int_{P_1}^{P_2} F \cdot dl = -mg \int_{z_1}^{z_2} dz = -mg(z_2 - z_1).$$

Em vista disso,

$$W_{P_1 \rightarrow P_2}^{(c)} = \int_{P_1}^{P_2} F \cdot dl = -[U(P_2) - U(P_1)] = -(U_2 - U_1) = -\Delta U$$

Sendo:  $U(P) = U(x, y, z) = mgz = U(z)$

Para o caso de forças conservativas, adota-se para a conservação total da energia mecânica a expressão:  $E = T + U \Rightarrow \Delta E = \Delta K + \Delta U = 0$

Então,  $U(P) = - \int_{P_1}^{P_2} F \cdot dl$ , em que  $U(P_0) = 0$

Até o momento, foi utilizado integrais simples, para abordagem do trabalho da energia potencial gravitacional, além da própria conservação da energia mecânica, mediante a atuação de forças conservativas. Sendo evidente que as ferramentas matemáticas são essenciais para determinadas explicações no campo físico da Mecânica.

A seguir, foi utilizado uma propriedade de representação das integrais de linha ou curvilínea, para os próximos passos matemáticos,

$$\int_{P_1}^{P_2} F \cdot dl = - \int_{P_2}^{P_1} F \cdot dl$$

Então, para dois caminhos diferentes (I) e (II), tem-se:

$$\int_{P_1}^{P_2} F \cdot dl = \int_{P_1}^{P_2} F \cdot dl$$

(I)      (II)

Logo,  $\int_{P_1}^{P_2} F \cdot dl + \int_{P_2}^{P_1} F \cdot dl = 0$

(II)      (I)

Por fim, tem-se o seguinte:

$$\oint F \cdot dl = 0$$

Analisando os elementos matemáticos utilizados acima, é importante ressaltar o emprego de propriedades das integrais curvilíneas, demonstrando matematicamente a sua notação ao longo de um caminho fechado, fatos estes importantes na questão gráfica para se obter o trabalho neste percurso, como também a própria manipulação e técnicas de integração no campo da conservação da energia mecânica.

Por conseguinte, tem-se a seção voltada para força e gradiente da energia potencial, ressaltando que esta parte do gradiente (o estudo do gradiente pode ser encontrado no livro: Eletrodinâmica, de autoria de David J. Griffiths) é empregada como base para fundamentação deste estudo. A partir disto, apresenta-se as seguintes ferramentas matemáticas:

$$U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1) = - \int_{P_1}^{P_2} F_x \cdot dx - \int_{P_1}^{P_2} F_y \cdot dy - \int_{P_1}^{P_2} F_z \cdot dz$$

Sendo:  $P_1 = P_1(x_1, y_1, z_1)$  e  $P_2 = P_2(x_2, y_2, z_2)$

Então,  $(x, y, z) \rightarrow (x + \Delta x, y, z)$

Assim,  $U(x + \Delta x, y, z) - U(x, y, z) = - \int_x^{x+\Delta x} F_x(x', y, z) dx' = -F_x(x, y, z)\Delta x$

Logo,  $-F_x(x, y, z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{U(x + \Delta x, y, z) - U(x, y, z)}{\Delta x} \right) = \frac{\partial U}{\partial x}(x, y, z)$

$$\text{Onde: } F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \text{ e } F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\text{Nesse contexto, tem-se o seguinte: } dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz) = -F \cdot dl$$

Assim sendo,

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} i + \frac{\partial U}{\partial y} j + \frac{\partial U}{\partial z} k \Rightarrow dU = \nabla U dl, \text{ em que: } \nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$$

$$\text{Portanto, } F = -\nabla U$$

Além disso, pode-se citar de notação matemática, o seguinte:

$$F \cdot dl = (\hat{s} \cdot F) ds = F_s ds = -\nabla U dl = -dU$$

Então,  $F_s = -\frac{\partial U}{\partial s}$ , sendo  $\frac{\partial U}{\partial s} = \hat{s} \cdot \nabla U$  e  $dU = \frac{\partial U}{\partial s} ds$ . Nesse caso, tem-se:

$$U(x, y, z) = U_0 \text{ (constante)}$$

Diante disso, tem-se a abordagem da potência e das forças não conservativas.

Então, a seção expressa a potência média como sendo:

$$\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Para a potência instantânea, define-se:  $P = \frac{dW}{dt}$

Neste estudo, segue que:

$$dW = F \cdot dl \Rightarrow P = \frac{dW}{dt} = F \cdot \frac{dl}{dt} = F \cdot v$$

Então,

$$P = F \cdot v = m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot v = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{dT}{dt}$$

No entanto, para o caso de uma força conservativa, adota-se:

$$P = F \cdot v = F \cdot \frac{dl}{dt} = -\frac{\nabla U \cdot dl}{dt} \text{ ou } P = -\frac{dU}{dt}$$

Assim, com algumas combinações algébricas, obtém-se a fórmula diferencial da conservação da energia:

$$\frac{d}{dt}(T + U) = \frac{dE}{dt} = 0$$

Para o caso da força não conservativa, implica dizer que o trabalho depende do caminho. Nesse caso, o capítulo aborda o seguinte:  $F = Cxj$ , apresentando dois caminhos distintos ligando a origem  $O$  a um ponto  $P_0 = (x_0, y_0)$ :  $OP_1P_0$  e  $OP_2P_0$ . Então, considerando as situações em há e não há trabalho, tem-se:

$$\int_{(P_1)}^{P_0} F \cdot dl = Cx_0y_0 \neq \int_{(P_2)}^{P_0} F \cdot dl = 0$$

Conclui-se que o trabalho depende do caminho, mediante a força não-conservativa, assim:

$$\oint F \cdot dl \neq 0 \Rightarrow \oint_{OP_1P_0P_2O} F \cdot dl = Cx_0y_0$$

Finaliza-se esta seção demonstrando que a variação da energia mecânica total de uma dada partícula é igual ao trabalho sobre ela mediante forças não-conservativas. Para uma partícula, sujeita a forças conservativas e não conservativas simultaneamente, tem-se:

$$\sum_i W_i^{(c)} + W_i^{(nc)} = \Delta T$$

Assim,  $W_i^{(c)} = -\Delta U_i$ , sendo que  $U = \sum_i U_i$ . Logo,

$$\sum_i W_i^{(nc)} = \Delta T + \sum_i \Delta U_i = \Delta(T + U) \Rightarrow \Delta E = \sum_i W_i^{(nc)}$$

Nesta seção, de forma geral, constata-se que foram utilizados elementos matemáticos para com o campo da potência, no caso de forças não-conservativas, além de importantes ferramentas para o estudo da conservação da energia mecânica, empregando a notação de gradiente, uso de derivadas parciais, notações básicas de limites, integrais, somatórios, a questão das taxas de variação, além das próprias notações vetoriais e manipulações algébricas.

Assim, a partir do momento que se quer explicar e descrever determinados fenômenos físicos, a empregabilidade da matemática pode se tornar cada vez mais evidente, através do uso de teoremas fundamentais e de técnicas essenciais. De forma complementar, segundo Davis e Hersh (1995) o papel da Matemática em Física é o de uma poderosa ferramenta para o raciocínio em situações complexas, como se pode observar com precisão dos fatos, a interação e função entre a área da Matemática dentro do cenário físico.

#### 5.2.4 Análise dos objetivos do capítulo 7

Como citado anteriormente, o livro 2 não apresenta objetivos definidos ao longo dos capítulos. De forma geral, a sua funcionalidade é levar o leitor a entender e utilizar determinadas ideias básicas de Física. Para isso, utiliza-se uma linguagem matemática mais aprofundada em técnicas e elementos matemáticos simbólicos, em meio ao contexto que pode garantir uma compreensão do significado físico que vai além de simples conceitos.

Nessas condições, torna-se evidente que ao longo do capítulo e porque não dizer do livro por completo, a questão de que a Física não se resume somente à Matemática, entretanto, parece não existir sem ela. Pietrocola (2002) traz que a matemática é o que sustenta a Física, ao passo que o esqueleto sustenta o corpo humano. Por isso, enfatiza-se a inter-relação entre estas duas ciências, tanto observado ao longo do capítulo, quanto no percurso moderno da ciência.

É importante frisar que, mesmo o livro não se constituindo de objetivos definidos ao longo do capítulo, quando comparado com o livro 1, é interessante citar que sua função de forma geral neste capítulo é trabalhar a conservação da energia, isto é, trabalha-se leis físicas diante de situações diárias ao longo deste, tendo uma base na sofisticação matemática para obtenção de resultados. Por isso, aborda-se conceitos como trabalho, energia mecânica e sua conservação, a questão de quando uma força é ou não é conservativa, além do estudo da potência. Sendo a Matemática indispensável neste contexto, uma vez que a própria energia mecânica é fundamentada em equações matemáticas em sua descrição. A partir disso, de acordo com POINCARÉ (1995):

O objetivo da Física matemática não é só de facilitar ao físico o cálculo numérico de certas constantes, ou a integração de certas equações diferenciais. Mas é ele, sobretudo, o de facilitar ao físico o conhecimento da harmonia oculta das coisas, fazendo com que as veja sob uma nova perspectiva (POINCARÉ, 1995, p. 94).

Diante disso, o Moisés colabora com a formação científica do cidadão, proporcionando uma base teórica, composta de um teor e simbologias matemáticas mais próximos de um sistema real, fornecendo os elementos básicos e diversificados para explicação dos fenômenos.

### 5.3 ANÁLISE DO LIVRO 3

Nesta seção, são analisadas as abordagens dos conteúdos, tendo o foco nos elementos matemáticos utilizados para explicação de conceitos da Física, utilizados pelos autores na elaboração dos capítulos 7 e 8, entre as páginas 148 a 199. No quadro 3, tem-se os principais dados relacionados ao livro Halliday e Resnick, além dos próprios conteúdos característicos, analisados ao longo deste estudo.

**Quadro 3** – Dados do livro 3

<b>Livro Halliday</b>	
<b>Nome:</b>	Física
<b>Área:</b>	Mecânica
<b>Autor:</b>	Halliday e Resnick
<b>Edição:</b>	4ª edição
<b>Editores:</b>	LTC Editora – GEN
<b>ISBN:</b>	978-85-216-3035-7
<b>Total de Capítulos:</b>	11
<b>Total de páginas:</b>	327
<b>Capítulos analisados:</b>	Capítulo 7: Energia Cinética e Trabalho. Capítulo 8: Energia Potencial e Conservação da Energia.
<b>Seções:</b>	Capítulo 7: 7.1. Energia Cinética – pág. 148 7.2. Trabalho e Energia Cinética – pág. 150 7.3. Trabalho realizado pela força gravitacional – pág. 154 7.4. Trabalho realizado por uma força elástica – pág. 198 7.5. Trabalho realizado por uma força variável genérica – pág. 161 7.6. Potência – pág. 165
	Capítulo 8: 8.1. Energia Potencial Gravitacional – pág. 176 8.2. Conservação da energia mecânica – pág. 183 8.3. Interpretação de uma curva de Energia Potencial – pág. 186 8.4. Trabalho realizado por uma força externa sobre um sistema – pág. 190 8.5. Conservação da energia – pág. 194

Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

#### 5.3.1 Análise do capítulo 7

Iniciando o estudo deste capítulo, observa-se que o mesmo apresenta uma linguagem conceitual, acompanhada de uma abordagem matemática de forma precisa. O capítulo tem início com questionamentos simples, como por exemplo, “o que é física?”

“O que é energia?” Estas perguntas são usadas, para os leitores refletirem antes de iniciarem os estudos desses conteúdos.

A primeira seção, cuja temática aborda a energia cinética, é constituída pela definição de energia vinculada ao movimento, seguida da relação matemática, designada por:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

Relação esta, apresentada de forma simples e direta, sem uso de elementos matemáticos sofisticados. Em seguida, tem-se a segunda seção, intitulada de trabalho e energia cinética, abordando conceitos e características das variáveis que o constitui, como energia, força e deslocamento. Assim, partindo da segunda lei de Newton, temos que:

$$F_x = ma_x$$

Então, utilizando a equação de Torricelli, tem-se:  $v^2 = v_0^2 + 2ad$ . Isolando a aceleração na segunda lei de Newton e substituindo na equação de Torricelli, obtemos o seguinte:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = F_x d$$

Nota-se que o termo  $F_x d$ , corresponde ao trabalho realizado por um determinado corpo. A partir disso, expressa-se:

$$W = F_x d$$

Como a componente perpendicular não realiza trabalho, conseqüentemente define-se que:

$$W = Fd \cos \Phi$$

Então, o trabalho realizado por uma força constante pode ser escrito da seguinte forma:

$$W = \vec{F} \vec{d}$$

Neste campo, expressa-se a relação algorítmica do teorema do trabalho-energia cinética por:

$$\Delta K = K_f - K_i = W \Rightarrow K_f = K_i + W$$



Pode-se observar que nestas duas primeiras seções, os conceitos físicos relacionados a trabalho e energia cinética estão interligados por meio de equações matemáticas que os descrevem na natureza. Observa-se que as ferramentas matemáticas presentes, estão expostas com um formalismo algébrico de forma simples, fazendo uso de uma abordagem básica e elementar para entender o comportamento mecânico de eventos físicos do cotidiano.

A terceira seção está relacionada ao trabalho realizado pela força gravitacional, definido da seguinte forma:

$$W = mgd\cos\Phi$$

Dessa maneira, tem-se que durante a subida de um corpo, a força apresenta um sentido contrário ao deslocamento, resultando em:

$$W = mgd\cos 180^\circ \Rightarrow mgd(-1) \Rightarrow W = -mgd$$

Para o caso do corpo descendo, a força e o deslocamento são paralelos, assim:

$$W = mgd\cos 0^\circ \Rightarrow mgd(+1) \Rightarrow W = mgd$$

Neste estudo, a questão do trabalho realizado para levantar e abaixar um objeto é abordado matematicamente da seguinte forma:

$$\Delta K = K_f - K_i = W_a + W_g,$$

Onde  $W_a$  é o trabalho realizado por uma força levantando um objeto para cima e  $W_g$  é o trabalho realizado pela gravidade.

Para o caso de  $K_f$  e  $K_i$  nulos, obtém-se  $W_a + W_g = 0 \Rightarrow W_a = -W_g$ ,

Por fim, o trabalho utilizado para subir e abaixar um corpo, será:

$$W_a = -mgd\cos\Phi$$

A respeito desta seção, foi visto que as ferramentas matemáticas são empregadas de maneira puramente algébrica, com base nas expressões do trabalho, energia cinética e o teorema do trabalho-energia cinética. Elementos estes fundamentais para entender o comportamento de dados fenômenos físicos que servem de base para a caracterização da própria lei da conservação da energia mecânica.

A seção seguinte, trata do trabalho realizado por uma força elástica, na qual se pode citar a lei de Hooke:

$$\vec{F}_s = -k\vec{d}$$

Assim,

$$F_x = -k_x$$

Então, o trabalho será:

$$W_s = \sum -F_{ij}\Delta x$$

Diante disso, no limite quando  $\Delta x$  tender para zero, temos o seguinte:

$$\begin{aligned} W_s &= \int_{x_i}^{x_f} -F_x dx \Rightarrow W_s = \int_{x_i}^{x_f} -kx dx \Rightarrow -k \int_{x_i}^{x_f} x dx = \left(-\frac{1}{2}k\right) [x^2]_{x_i}^{x_f} \\ &= \left(-\frac{1}{2}k\right)(x_f^2 - x_i^2) \end{aligned}$$

Portanto, o trabalho de uma força elástica é dado por:

$$W_s = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$

Além do mais, para o caso de  $x_i = 0$ , temos que:  $W_s = -\frac{1}{2}kx^2$

E, para o caso do trabalho de uma força aplicada, segue que:

$$\Delta K = K_f - K_i = W_a + W_g,$$

Então,  $W_a = -W_g$ ,

Analisando esta seção, pode-se constatar que foram introduzidos elementos do ramo do cálculo, como é o caso do somatório resultando em integração, sendo necessário para explicação e exemplificação do trabalho e de sua relação com a energia cinética, tendo como base a lei de Hooke, utilizada no processo de resolução de integrais.

Por conseguinte, tem-se o trabalho realizado por uma força variável genérica, utilizando forças que variam ao longo do percurso. Com base nisso, em uma perspectiva de análise unidimensional, tem-se que:

$$\Delta W_j = F_{j,méd}\Delta x$$

Assim,

$$W = \sum \Delta W_j = \sum F_{j,méd}\Delta x$$

Logo,

$$W = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} F_{j,méd}\Delta x$$

Portanto, o trabalho de uma força variável resulta em:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx$$

Para uma análise tridimensional, temos o seguinte:

$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$$

E,

$$d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$

Para o caso do trabalho na forma infinitesimal, em três dimensões resulta no seguinte:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Portanto,

$$W = \int_{r_i}^{r_f} dW = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y dy + \int_{z_i}^{z_f} F_z dz$$

Neste cenário, tem-se também o caso do teorema do trabalho-energia cinética para uma força variável, o qual podemos citar:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx = \int_{x_i}^{x_f} madx$$

Sabendo que  $a = \frac{dv}{dt}$ , segue:

$$madx = m \frac{dv}{dt} dx$$

Então, usando a regra da cadeia, obtém-se:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v$$

Logo,  $madx = m \frac{dv}{dx} v dx = mv dv$

A partir disso, retornando a W, temos:

$$W = \int_{v_i}^{v_f} mv dv = m \int_{v_i}^{v_f} v dv = \frac{1}{2} mv_f^2 - \frac{1}{2} mv_i^2$$

Resultando em:

$$W = K_f - K_i = \Delta K$$

Observa-se a presença de ferramentas matemáticas utilizadas como recurso de descrição, explicação e relação entre os conceitos físicos presentes. Neste caso, foi utilizado a integração, limites, notação vetorial e regras do cálculo, como a regra da cadeia empregada para demonstrar a relação entre o trabalho e a energia cinética, partindo da segunda lei de Newton.

Falando do cálculo, STEWART (2013, p. 72) explicita o seguinte “como a chave de fenda, o cálculo é simplesmente uma ferramenta indispensável ao arsenal do engenheiro e do cientista. Mais do que qualquer outra técnica matemática, ele criou o mundo moderno”.

Assim, para que o leitor possa ter uma melhor compreensão, foram empregadas técnicas algébricas, além de definições de equações matemáticas, facilitando o processo de interpretação física e conexão estrutural das ideias, por meio das ferramentas algorítmicas.

A última seção deste capítulo, está vinculada a potência, definida da seguinte forma:

$$P_{méd} = \frac{W}{\Delta t}$$

Assim, para o caso da potência instantânea, expressa-se:

$$P = \frac{dW}{dt}$$

Logo,

$$P = \frac{dW}{dt} \Rightarrow \frac{F \cos \Phi dx}{dt} = F \cos \Phi \left( \frac{dx}{dt} \right)$$

Portanto, a potência instantânea se transforma em:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Nesta última seção, tem-se o uso de taxas de variações, no caso da potência instantânea, definida a partir da potência média. Com isso, foram inseridas manipulações matemáticas por meio de equações, para manter uma conexão mediante a interpretação física de dado conceito com sua representação algorítmica.

O capítulo, assim como, o livro é constituído das seguintes características: Define-se um determinado conceito físico, interligando-o por meio de variáveis que o compõem matematicamente. Assim, a cada lei e teorema físico formulado, a linguagem matemática torna-se mais precisa, assegurando o comportamento do evento em relação ao universo real, trazendo mais propriedade e fornecendo elementos para os leitores percorrerem as situações físicas, estruturando o raciocínio por meio da Matemática.

Na visão Feynman (2000), a Matemática é a linguagem lógica, que proporciona o raciocínio, produzindo resultados baseados em pensamentos cuidadosos, permitindo a relação entre enunciados, que neste cenário, a área Matemática está intimamente ligada com a Física.

### 5.3.2 Análise dos objetivos do capítulo 7

O capítulo é composto por definições de conceitos interligados com suas representações matemáticas. Assim, proporciona uma interpretação de forma clara, precisa e objetiva. Ao longo de cada seção, têm-se os objetivos de aprendizagem vinculados a cada conteúdo físico apresentado. A primeira seção relacionada a energia cinética, tem por foco a aplicação e constituição das variáveis que compõem a energia cinética, que é o caso da massa e da velocidade, além de entender que a energia cinética é uma grandeza escalar.

A partir disso, os objetivos da seção podem ser atendidos a partir do momento que se emprega a definição de energia cinética de forma algorítmica, cujas manipulações matemáticas com as variáveis que a constitui resultaram em um número, neste caso, abordando a energia cinética como algo que pode ser medido. Assim, estes objetivos estão explicitamente interligados com as ferramentas matemáticas definidas durante a etapa.

Para a segunda seção, que está focada no trabalho e na energia cinética, tem-se como objetivo a relação entre força e trabalho realizado por um determinado corpo, relação esta abordada pela equação matemática do trabalho para uma força constante, além da obtenção do trabalho, ao realizar o produto da força pelo deslocamento.

Neste cenário, o cálculo do trabalho, por meio da atuação de várias forças, é realizado pelo emprego matemático da equação do trabalho diante de forças constantes ou forças variáveis. Além do mais, o próprio teorema do trabalho-energia cinética, definindo como uma importante ferramenta da Física, é expresso por meio de símbolos e relações matemáticas necessárias para obtenção de qualquer variável, seja a energia cinética final ou inicial, além do próprio trabalho, por exemplo.

Ao calcular o trabalho relacionado a força, é necessário conhecer qual é a força que está realizando trabalho no sistema, como exemplo, o capítulo exemplifica a força gravitacional e a força elástica. Adotando uma base matemática a partir da definição de trabalho algorítmicamente, podendo identificar se o trabalho é positivo, negativo ou nulo. Por isso, a Matemática colabora no processo de sistemas em que há a presença de forças variáveis, a aplicabilidade do teorema do trabalho-energia cinética para diversas situações e campos de atuação das forças, tendo como base a análise do sistema, variáveis relacionadas e a possibilidade de técnicas colaborativas no processo, como por exemplo, o uso de gráficos para calcular o trabalho a partir da curva, em função da força e deformação da mola.

Ao citar forças variáveis, pode-se obter o trabalho por meio de integrais durante o percurso. A representação gráfica de uma função, análise de curvas e de posições foram elementos favoráveis para entender o comportamento de fenômenos físicos. Desse modo, estas forças podem atuar no campo unidimensional, bidimensional ou tridimensional, trazendo aspectos algébricos mais precisos e detalhados, propiciando a manipulação de técnicas matemáticas diante das variáveis constituintes de teoremas abordados, como é o caso de derivadas, limites, entre outras, em aplicações do teorema do trabalho-energia cinética no campo tridimensional.

Os objetivos vinculados a seção de potência, estão relacionados a própria definição de potência, expressa fisicamente por meio de uma relação matemática, entre trabalho e variação de tempo, sejam por meio de taxa de variação média ou instantânea, colaborando com a aprendizagem no fato dos leitores utilizarem variáveis desenvolvidas ao longo desta seção, trabalhando o processo de medição e aplicabilidade de forma simples em problemas de fácil resolução, isto é, sem utilizar elementos matemáticos mais diversificados. Assim, para resolver situações físicas envolvendo potência, é fundamental que os leitores conheçam e entendam o trabalho mecânico, a energia cinética, entre outras variáveis trabalhadas anteriormente neste capítulo. Portanto, o próprio capítulo é estruturado dessa forma, esquematizando desde conceitos simplificados até os mais enriquecidos, ou seja, aqueles que precisam de outros conceitos para ser entendidos.

Nesse sentido, os objetivos do capítulo estão estritamente inter-relacionados com as equações matemáticas que regem os conceitos e definições físicas, entre trabalho e energia cinética. Assim, o papel da Matemática aqui, tende a facilitar e organizar as ideias e pensamentos surgidos no percurso de cada seção, sendo que os leitores analisam o cenário físico e aplicam algebricamente as variáveis relacionadas a cada elemento matemático explicitado, produzindo uma espécie de significado entre os elementos presentes. Na visão de Lozada (2008) é necessário que os cidadãos implementem aos modelos matemáticos uma espécie de sentido agregado ao fenômeno natural estudado, produzindo significados as incógnitas nas equações e não produzindo variáveis sem conexão.

### **5.3.3 Análise do capítulo 8**

A primeira seção do capítulo está voltada para a energia potencial, a qual se inicia com um questionamento básico sobre o que é Física. Pergunta esta que proporciona ao

leitor a capacidade de reflexão sobre o campo de estudo que está por vir, isto é, uma melhor análise sobre a área que se está estudando, conhecendo e interagindo.

Nesse contexto, aborda-se o trabalho e a energia potencial, definindo o seguinte:

$$\Delta U = -W$$

No estudo, cita-se a questão das forças conservativas e dissipativas, abordadas no capítulo como necessárias para a aplicabilidade das variáveis utilizadas na atuação das leis da natureza. Além disso, apresenta as definições de forças conservativas e não conservativas.

Diante disso, uma força é conservativa quando o trabalho de um corpo é nulo durante uma trajetória fechada. Outra forma considerada para a força ser conservativa é quando o trabalho realizado por um corpo não tem dependência com o trajeto realizado por este. Assim, como exemplos de forças conservativas, tem-se a força gravitacional, a força elástica, entre outras. Há também as forças dissipativas, tais como atrito, arrastos, resistência do ar, que são aquelas forças que vão transformar a energia mecânica em outras formas de energias, dissipando-a no sistema.

Para comprovar que o trabalho depende do caminho, para uma força conservativa, aborda-se a presente demonstração:

Tomando como referência o exemplo de uma partícula se movendo de um ponto  $a$  até um ponto  $b$ , nesse caso, tem-se que, para a força conservativa, o trabalho realizado pelo trajeto é o mesmo. Daí, temos que:

$$W_{ab,1} = W_{ab,2} \quad (I)$$

Logo, na expressão acima, tem-se que para ida e volta o trabalho é nulo. Assim:

$$W_{ab,1} + W_{ab,2} = 0 \Rightarrow W_{ab,1} = -W_{ab,2} \quad (II)$$

E,

$$W_{ab,2} = -W_{ba,2} \quad (III)$$

Substituindo  $-W_{ba,2}$  por  $W_{ab,2}$ , na equação (I), obtém-se:  $W_{ab,1} = W_{ab,2}$

Ainda nesta seção, verifica-se a energia potencial, estruturada em potencial gravitacional e potencial elástica. Assim sendo, pode-se definir a energia potencial gravitacional matematicamente da seguinte maneira:

Uma partícula de massa  $m$  se deslocando para cima, no sentido positivo de  $y$ , temos que:

$$\Delta U = - \int_{y_i}^{y_f} -(mg)dy = mg \int_{y_i}^{y_f} mg[y]_{y_i}^{y_f}$$

$$\Delta U = mg(y_f - y_i) = mg\Delta y \Rightarrow U - U_i = mg(y - y_i)$$

Então, para  $U_i = 0$  e  $y_i = 0$ . Temos que a energia potencial gravitacional é dada por:

$$U(y) = mgy$$

No caso da energia potencial elástica, fazendo uso da lei de Hooke ( $F = -kx$ ), para um sistema bloco-mola, movendo-se em um trajeto horizontal, onde a lei de Hooke realiza trabalho, tem-se que:

$$\Delta U = - \int_{x_i}^{x_f} (-kx)dx = k \int_{x_i}^{x_f} xdx = \frac{1}{2}k[x^2]_{x_i}^{x_f} \Rightarrow \Delta U = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2$$

Assim, para  $U_i = 0$  e  $x_i = 0$ , obtém-se:

$$U - 0 = \frac{1}{2}kx^2 - 0$$

Portanto, a energia potencial elástica pode ser calculada por:

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

Nesta seção, cita-se ferramentas matemáticas relacionadas ao estudo introdutório do cálculo, como é o caso do processo de integração, item necessário para a obtenção de expressões utilizadas tanto no cálculo da energia potencial gravitacional quanto da energia potencial elástica, além do uso de derivadas. A partir disso, os elementos matemáticos inseridos ao longo desta seção facilitam a análise física, baseada em algorítmicos provenientes para determinada lei e conceito da Física.

A segunda seção, está fundamentada na conservação da energia mecânica, na qual se define a energia mecânica por meio da relação.

$$E_{mec} = K + U$$

Assim, sabendo que o teorema do trabalho-energia cinética vale:

$$W = \Delta K$$

Para o caso da energia potencial,

$$\Delta U = -W \Rightarrow \Delta K = -\Delta U$$

Logo,

$$K_2 - K_1 = -(U_2 - U_1)$$

Portanto, obtemos a conservação da energia mecânica como sendo:

$$K_2 + U_2 = K_1 + U_1$$



Então, o princípio da conservação da energia mecânica é designado pela seguinte expressão:

$$\Delta E_{mec} = \Delta K + \Delta U = 0$$

Ao longo desta seção, a conservação da energia mecânica é expressa por meio de manipulações algébricas, baseadas em definições de conceitos empregados na Matemática. Desse modo, o princípio da conservação da energia mecânica é uma lei de extrema importância para a resolução de diversos problemas difíceis de se resolver pelas leis de Newton, por exemplo. Então, com o uso de definições precisas e análises de símbolos algébricos, entre conceitos físicos e elementos matemáticos, pode-se facilitar o percurso de resolução de vários problemas.

Utilizando os elementos matemáticos relevantes para uma dada ocasião, isto é, saber manipular e empregar as técnicas e definições certas dos conceitos físicos, colabora no desenvolvimento do processo de aprendizagem dos cidadãos perante o conhecimento científico.

A seção seguinte, está fundamentada na interpretação de uma curva de energia potencial, por meio de sua representação gráfica, sendo utilizada, para isso, uma ferramenta matemática importante na compreensão das abordagens físicas trabalhadas para empregá-las em outras funcionalidades. Com base nisto, parte-se do seguinte:

$$\Delta U(x) = -W = -F(x)\Delta x$$

Fazendo  $\Delta x$  tendendo a zero, o movimento em uma dimensão corresponde a:

$$F(x) = - \frac{dU(x)}{dx}$$

A equação acima, está relacionada no caso de conhecermos a energia potencial  $U(x)$ , em um sistema de atuação unidimensional da força  $F(x)$  sobre um corpo.

Desprezando-se as forças dissipativas, temos um sistema conservativo de energia, definindo a energia cinética de um corpo, como sendo:

$$U(x) + K(x) = E_{mec} \Rightarrow K(x) = E_{mec} - U(x)$$

Lembrando que, para uma dada energia  $U(x)$  na forma de uma curva,  $x$  assume qualquer valor, logo, a força  $F(x)$  corresponde a parte negativa da inclinação da curva.

Vale citar que a energia cinética é nula, no ponto de retorno (ponto  $x$  onde o movimento de um corpo muda de sentido). Além deste, há também o ponto de equilíbrio em que a força é nula, consistindo em um ponto  $x$  na inclinação da curva onde  $U(x)$  é zero.

Constata-se o importante papel gráfico na caracterização de conceitos físicos, aliados a outros elementos matemáticos, na representatividade do comportamento de fenômenos em sistemas mecânicos.

A quarta seção, está relacionada ao trabalho realizado por uma força externa sobre um sistema. A seção apresenta a seguinte definição de trabalho:

“Trabalho é a energia transferida para um sistema ou de um sistema por meio de uma força externa que age sobre o sistema”. (HALLIDAY; RESNICK, 2010, p. 191). Conceito este definido após toda uma base e discussão matemática relacionada. Assim, para o caso de um sistema sem atrito, tem-se que para um sistema bola-Terra, obtemos que:

$$W = \Delta K + \Delta U$$

Assim, para o caso de um sistema com atrito, mediante um bloco se movendo proveniente de uma força  $\vec{F}$ , fazendo uso da segunda lei de Newton, tem-se:

$$F - f_k = ma$$

Sabendo que as forças e a aceleração são constantes, podemos substituir na expressão acima a equação de Torricelli,

$$v^2 = v_0^2 + 2ad \Rightarrow a = \frac{v^2 - v_0^2}{2d}$$

Resultando em:

$$F - f_k = m \left( \frac{v^2 - v_0^2}{2d} \right) \Rightarrow Fd = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 + f_k d \Rightarrow Fd = \Delta K + f_k d$$

Generalizando para casos em que há a presença da energia potencial, como o bloco subindo uma rampa, temos que a equação obtida anteriormente se transforma em:

$$Fd = \Delta E_{mec} + f_k d$$

Neste estudo, definindo o aumento da energia térmica, devido a presença do atrito, define-se:

$$\Delta E_t = f_k d$$

Assim,

$$Fd = \Delta E_{mec} + \Delta E_t$$

Portanto, o trabalho realizado por um sistema com atrito será:

$$W = \Delta E_{mec} + \Delta E_t$$

Analisando as simbologias definidas, há a presença de mudanças de variáveis físicas, empregadas por meio de demonstrações de equações necessárias para explicar fenômenos físicos.

A quinta seção, relacionada a conservação da energia, é iniciada com a definição da energia total de um sistema, apresentando o seguinte:

“A energia total  $E$  de um sistema pode mudar apenas por meio da transferência de energia para dentro do sistema ou para fora do sistema” (HALLIDAY; RESNICK, 2010, p. 194).

$$W = \Delta E + \Delta E_{mec} + \Delta E_t + \Delta E_{int}$$

Para o caso do sistema isolado, tem-se:

$$\Delta E_{mec} + \Delta E_t + \Delta E_{int} = 0$$

Sabendo que  $\Delta E_{mec} = E_{mec.2} - E_{mec.1}$ , então temos o seguinte:

$$\Delta E_{mec} + \Delta E_t + \Delta E_{int} = 0 \Rightarrow \Delta E_{mec} = -\Delta E_t - \Delta E_{int}$$

Logo,

$$E_{mec.2} - E_{mec.1} = -\Delta E_t - \Delta E_{int} \Rightarrow E_{mec.2} = E_{mec.1} - \Delta E_t - \Delta E_{int}$$

Por conseguinte, tem-se o caso das forças externas e transferências internas de energia. Assim, utilizando a equação  $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = F_x d$ , segue que:

$$K - K_0 = (F \cos \Phi) d \Rightarrow \Delta K = F d \cos \Phi$$

Considerando-se a variação de energia potencial, diante da mudança de altura, tem-se:

$$\Delta U + \Delta K = F d \cos \Phi$$

Por fim, aborda-se a definição de potência utilizada no capítulo 7, como sendo a taxa de variação com que determinada força realiza trabalho, havendo transferência de energia, mediante a aplicação da força para outra forma de energia. Assim,

$$P_{méd} = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

No caso da potência instantânea, tem-se:

$$P = \frac{dE}{dt}$$

Neste estudo, abordam-se técnicas matemáticas de forma simples e trazendo simbologias trabalhadas na área da Física. Assim, a relação Física-Matemática está relacionada a capacidade da Matemática descrever fenômenos e estruturar ideias físicas com base em variáveis, sejam desde os mecanismos mais simples até os mais sofisticados e abstratos. Na visão de Borges (2004) a Matemática é tida como uma maneira natural

que busca descrições e formula uma Física mais sofisticada, trazendo uma proximidade entre estes dois ramos do conhecimento.

### 5.3.4 Análise dos objetivos do capítulo 8

Ao longo de cada seção, são expostos os objetivos de aprendizagem relacionados a cada temática. De início, tem-se a distinção entre força conservativa e não conservativa, sendo estas representadas por meio de conceitos e demonstrações voltadas para o campo do trabalho mecânico. Assim, faz-se uso do próprio cálculo do trabalho obtido por meio das equações matemáticas definidas ao longo das seções, para casos em que a força é conservativa.

Além disso, tem-se as energias potencial gravitacional e elástica, calculadas por meio de equações específicas para cada forma de energia. Neste cenário, as relações matemáticas abordadas para exemplificação dos conceitos são realizadas diante de manipulações algébricas, facilitando a compreensão dos cidadãos no campo científico da Física, quando se fala em implementar os conceitos físicos com suas respectivas fórmulas matemáticas.

Na conservação da energia mecânica, sua definição é exposta de forma matemática, como sendo a soma da energia potencial com a energia cinética. Facilitando o processo de aprendizagem quando se analisa situações em que há a presença destas formas de energia, além da própria conservação, definidas por meio de expressões algébricas destas energias. Sendo assim, as definições matemáticas constituintes do princípio da conservação da energia mecânica, têm sua relevância no fato do cidadão poder entender o comportamento de fenômenos mecânicos, descritos por meio de variáveis físicas e suas relações desenvolvidas pelos elementos matemáticos. De acordo com Borges (2004) a matemática é a linguagem apropriada que interveem nos problemas físicos, proporcionando estruturas algorítmicas que atentem aos fenômenos da própria natureza física.

Diante disso, ao abordar a interpretação de conceitos perante situações gráficas, tem-se por base as ferramentas relacionadas a função presente. Assim, é possível calcular as forças a partir de interpretações e coletas de informações, para desenvolvê-las nas expressões matemáticas, baseados em pontos constituintes ao longo do gráfico. Para o caso de o sistema conter forças externas, implementa-se nas definições físicas, um novo

elemento matemático que simboliza cada força externa, trazendo outra configuração no sistema, baseado no princípio da conservação.

Falando em sistema, é importante analisar se o dado sistema é isolado ou se há a presença de forças externas, pois isso irá influenciar diretamente na conservação da energia mecânica. Assim, a definição matemática que regem o princípio da conservação da energia mecânica só será utilizada se este sistema não houver dissipação de nenhuma energia. Caso haja, há de se utilizar outra simbologia matemática, para a variação da energia mecânica no sistema. Portanto, há uma forte relação entre entender e saber aplicar as ideias, interpretações e esquematização das situações físicas, diante do cenário de conservação ou dissipação. Sendo assim, o palco inicial para se implementar as relações matemáticas necessárias no comportamento, descrição e explicação dos fenômenos físicos.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Física segundo Praxedes e Krause (2015) é tida como um instrumento, cuja função seja descrever momentos realizados pelo mundo teoricamente, por meio de conceitos, prática, como também, algoritmos, constituindo assim, a ciência que estuda os fenômenos da natureza. De modo que, eventos reais e acontecimentos ao longo dos tempos, podem ser explicados por meio da linguagem científica, baseados no núcleo das ciências exatas, tais como a Física especialmente, fazendo uso da matemática como instrumentação teórica. Porém, vale destacar que, o pensamento científico está voltado para uma interpretação inicial e tal como uma descrição de suas transformações naturais.

Em paralelo, a importância do campo da Matemática, está também vinculado na capacidade sintética, pois de acordo com Pietrocola (2002), no fato de promover com exatidão importantes resultados em determinadas ações investigativas, além de manter uma espécie de comunicação universal, atentando aos elementos do universo, baseados em uma conexão lógica formal entre a razão, associada ao emprego matemático usual aplicados na explicação científica de fenômenos físicos.

Diante da relação entre Física e Matemática, SIMON (2005, p. 79), afirma que “a matemática possui um papel voltado à racionalidade humana, inserida no contexto de desempenho e da mesma maneira que na organização das teorias físicas”. Diante do exposto, a matemática é tida como uma linguagem, cuja funcionalidade está voltada para o estabelecimento de relações com o universo físico, que sustenta e vincula a mediação entre as ideias do cidadão para com a representação das coisas, por meio de leis físicas.

Este trabalho foi constituído de um estudo bibliográfico, abrangendo uma análise da literatura utilizada em livros de Física do Ensino Superior, explicitando conteúdos da área da Física Mecânica, tendo sua eficácia, na representatividade dos conceitos da Física fundamentados em elementos matemáticos, oferecendo assim, um suporte para a descrição de fenômenos da natureza, com base em conceitos matemáticos, que inicialmente parecem puramente abstratos.

A caracterização deste estudo foi baseada em seis capítulos, sendo este o último, relacionados aos conteúdos da área da Mecânica, em particular, o de energia e sua conservação no sistema, compreendendo desde leituras e análises históricas da relação entre a Física e a Matemática, percorrendo o cenário da Matemática, por meio da Lógica Matemática, algumas técnicas de demonstração e da própria análise vetorial, onde os

elementos de Matemática presentes foram essenciais para o caráter aplicável e analítico no campo da conservação da energia mecânica.

Assim sendo, os capítulos dos livros analisados (Sears, Moisés e Halliday) abordam os conteúdos da área da Física, fazendo uso de alguns elementos da linguagem matemática presentes no estudo do cálculo, empregando-os como suporte para descrições conceituais, bem como, gráficas, oferecendo uma consistência e característica na exemplificação das discussões iniciais sobre trabalho, energia cinética e energia potencial, temáticas estas constituídas como base central para posteriormente trabalhar a questão da conservação da energia mecânica.

A partir disso, pode-se obter que o uso da linguagem matemática, é usada de forma precisa, ampla e fundamental para a descrição de fenômenos da Mecânica, no âmbito da temática da conservação da energia, sendo empregadas para isso, algumas ferramentas matemáticas, tais como limites, derivadas, integrais, além de notações básicas de Álgebra, favorecendo a relevante relação constituída entre a Matemática e a Física.

Então, pode-se analisar o percurso histórico da relação entre a Física e a Matemática, a partir do nascimento do pensamento científico na Grécia, passando por fatos da Idade Média até a atualidade. Favorecendo assim, no âmbito da ciência, um cenário em plena transformação, em que teve seu percurso histórico-filosófico ao longo das sociedades que trabalhavam com o próprio conhecimento científico, mediante os fenômenos da área da Física e que foram sendo explicados cada vez mais com o uso de simbologias matemáticas, à medida que a ciência foi se desenvolvendo.

Com base neste estudo, as contribuições que esta pesquisa trouxe, em termos de aprimoramento de conhecimentos, foram as seguintes: capacidade reflexiva sobre temáticas importantes do percurso histórico da relação Matemática-Física, na abordagem filosófica, dedutiva e aplicável. Pode-se constatar que a Física, desde o seu desenvolvimento no pensamento científico até a contemporaneidade, passou a ser explicada mediante o aprimoramento de técnicas e elementos matemáticos mais precisos, devido ao grau de abstração de determinados fenômenos físicos. Contribuindo com uma relação científica que proporciona à sociedade mecanismos e elementos necessários para descrição e interpretação de eventos físicos em nosso Universo.

Com relação às principais dificuldades encontradas, tem-se a questão do ponto de partida para se abordar a relação histórica-científica entre a Física e a Matemática, pois não foram considerados estudos iniciais e aspectos científicos formulados anteriormente, antes da própria oficialização e desenvolvimento do pensamento científico na Grécia.

Estudos desenvolvidos em algumas civilizações e sociedades, como forma de sanar aspectos sociais e ambientais. Diante disso, o percurso evolutivo da relação histórica entre estas duas ciências, foi feito de forma superficial, isto é, pelo contexto sequencial real do período da história, os quais foram marcantes para o desenvolvimento científico.

Nesse contexto, a análise bibliográfica inicialmente foi feita em virtude de muito cuidado e atenção, pois foi necessário entender a aplicabilidade funcional da Matemática para com seu papel na descrição de situações do campo da conservação da energia. Assim, propiciar o diálogo entre as ciências Matemática e Física foi um desafio, na questão da abordagem desde o contexto histórico, elementos básicos do cálculo até a aplicabilidade na área da Mecânica.

Contudo, esta pesquisa pode propiciar uma base construtiva para diversos ramos do campo da Física e da Matemática, por intermédio do diálogo entre estas áreas do conhecimento científico. Com base nisso, abordou-se uma base sólida da Matemática, por meio de argumentos dedutivos e de lógica, linguagem teórica de introdução ao cálculo, assim como, aplicações perante situações do cotidiano na esfera da Física.

Portanto, este estudo pode ser eficaz para pesquisas voltadas na área da Física contemporânea, na questão da utilização da Matemática como argumento essencial para explicação de fenômenos físicos mais precisos, sendo necessário ferramentas matemáticas mais diversificadas para representação de eventos mais complicados e que apresentam uma espécie de dificuldade em sua exemplificação, como é o caso dos excepcionais estudos promovidos por Albert Einstein, na área da Mecânica Quântica, tendo base a partir de elementos relacionados à Mecânica Newtoniana.



## REFERÊNCIAS

- ABAR, Celina. **Noções de lógica matemática**. Disponível em: <http://www.pucsp.br/~logica/>. Acesso em: 12 Ago. de 2019.
- AUSUBEL, D. P. **The acquisition and retention of knowledge: a cognitive view**. Netherlands: Kluwer Academy Publishers, 2000.
- ARISTOTLE. **The Works of Aristotle**. Chicago: Encyclopedia Britannica, 1978 (Coleção Great Books of the Western World, vol. 8).
- BATISTA, M.; MOZOLEVSKI, I. **Métodos de física-matemática**. Universidade Federal de Santa Catarina/Consórcio ReDisul. Florianópolis: 2010.
- BONIOLO, G.; BUDINICH, P. **The Role of Mathematics in Physical Sciences and Dirac's Methodological Revolution**. In BONIOLO, G.; BUNIDICH, P.; TROBOK, M. *The Role of Mathematics in Physical Sciences – Interdisciplinary and Philosophical Aspects*. Dordrecht: Springer, p. 75-96, 2005.
- BRASIL ESCOLA. **Diocleciano**. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/biografia/diocleciano.htm>. Acesso em: 05 dez. 2019.
- BRASIL, MEC. PCN+ Ensino Médio. Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. **Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC, Secretária de Educação Média e Tecnológica, 2002.
- CARMO, A. B; CARVALHO, A. M. C. **Iniciando os estudantes na matemática da física através de aulas experimentais investigativas**. In: Encontro de Pesquisa em Ensino De Física, ed. X, São Paulo, 2005.
- CARVALHO, A. et al. **Ensino de física**. Cengage Learning: São Paulo, p. 79-94, 2010.
- EBIOGRAFIA. **Isaac Newton**. Disponível em: [https://www.ebiografia.com/isaac\\_newton/](https://www.ebiografia.com/isaac_newton/). Acesso em: 05 dez. 2019.
- GARBI, G. G. **A rainha das ciências**. São Paulo: Livraria da Física, 2006.
- GASPAR, Marisa. **Introdução à lógica matemática**. Disponível em: <http://mjgaspar.sites.uol.com.br/logica/logica>. Acessado em 12 de Ago. de 2019.
- GIL – PÉREZ, Daniel et al. Para uma imagem não-deformada do Trabalho Científico. **Ciência e educação**. 7. ed. p. 125-153, 2001.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de física 1**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018.
- HILBERT, David. **Só matemática**. Disponível em: <https://www.somatematica.com.br/biograf/hilbert.php/>. Acesso em: 05 dez. 2019.

HILBERT, D. Die logischen Grundlagen der Mathematik. **Mathematische Annalen** 88: 151–65, 1923.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de matemática mlementar**. 9. ed. São Paulo: Atual. 2013. v.1.

INFOESCOLA. **Ptolomeu**. Disponível em:  
<<https://www.infoescola.com/biografias/ptolomeu/>>. Acesso em: 05 dez. 2019.

KARAM, R. A. S. M. **Estruturação matemática do pensamento físico no ensino: uma ferramenta teórica para analisar abordagens didáticas**. Tese, Faculdade de Educação, USP, 2012.

KARAM, R. A. S.; PIETROCOLA, M. **Habilidades Técnicas Versus Habilidades Estruturantes: Resolução de Problemas e o Papel da Matemática como Estruturante do Pensamento Físico**. ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v. 2, n. 2, p. 181 – 205, 2009.

LARSON, R. **Cálculo aplicado**. 1. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

Marconatto, Arildo Luiz. Só filosofia: **Anaximandro**. Disponível em:  
[http://www.filosofia.com.br/historia\\_show.php?id=8](http://www.filosofia.com.br/historia_show.php?id=8). Acesso em: 05 dez. 2019.

MORTARI, Cezar Augusto. **Introdução à lógica**. Editora UNESP. São Paulo. 2001.

SILVA NETO, R. J. **Noções de curvas parametrizadas: teorema fundamental das curvas**. 1. ed. Rio Grande do Norte: Caicó, 2019.

NUSSENZWEIG, H. Moyses. **Curso de física básica 1**. 4. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2002.

OMNÉS, Roland. **Filosofia da ciência contemporânea**. São Paulo: Unesp, 1996.

PATY, Michel. **A matéria roubada**. São Paulo: EDUSP, 1995.

PATY, Michel. Conference on the philosophy of Marx Wartofsky, **The idea of quantity at the origino f the legitimacy of mathematization in physics**. New York, New School University, 5 – 6 march, p. 9, 1999.

PERONSE, R. **O grande, o pequeno e a mente humana**. Tradução Roberto Leal Ferreira. São Paulo: Fundação Editora da Unesp, 1998.

PIETROCOLA, M. A. matemática como Estruturante do Conhecimento Físico. **Caderno Brasileiro de Ensino de física**, v. 19, n. 1: p. 88–108, 2002.

PIETROCOLA, M. A. matemática como estruturante do pensamento científico. **Caderno Catarinense de Ensino de física**. v. 19, n.1, Florianópolis, p.89 – 109, 2002.

PIETROCOLA, M. A. Matemática como estruturante do conhecimento físico. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 19, n. 1, p. 93 – 114, 2002.

PIETROCOLA, M. Linguagem e estruturação no pensamento na ciência e no ensino de ciências. In: PIETROCOLA, M; FREIRE, O. (Eds). **Filosofia, Ciência e História**. São Paulo: Discurso editorial, 2005.

PIETROCOLA, M. A. **Mathematics as structural language of physical thought**. VICENTINI, M. and a SASSI, E. (org). Connecting Research in Physics Education with Teacher Education volume 2, ICPE – book, 2008.

PINHEIRO, T. de F.; ALVES FILHO. J. de P.; PIETROCOLA, M. Modelização de variáveis: uma maneira de caracterizar o papel estruturador da Matemática no conhecimento científico. In: **Ensino de Física: conteúdo, metodologia e epistemologia numa concepção integradora**. Florianópolis: Editora da UFSC, 2001.

PIRES, A. **Evolução das ideias da física**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

POINCARÉ, H. **O valor da ciência**. Tradução Maria Helena Franco Martins. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995.

PRAXEDES, Jacqueline Maria de Oliveira; KRAUSE, Jonas. O estudo da Física no Ensino Fundamental II: Iniciação ao conhecimento científico e dificuldades enfrentadas para inserção. Congresso Nacional de Educação, **Anais**, 2015.

ROSA, C. A. **História da ciência: da antiguidade ao renascimento científico** ed. 2. Brasília: FUNAG, 2012.

ROSSETTO, E. R.; ROSA, M. D. A matematização da natureza na revolução científica do século XVII. **Revista Eletrônica Georaguaia**. Mato Grosso: 2016.

ROTH, W. M. Competent worplace mathematics: How signs become transparente in use. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**, ed. 8. p. 161–189, 2003.

SEARS, F.; ZEMANSKY, M. **Física I**. 12. ed. São Paulo, 2008.

SHERIN, B. L. How students understand physics equations. **Cognition and Instruction**, 19(4), p. 479 – 541, 2001.

SILVIA, C. C.; MARTINS, R. A. Polar and axial vectors versus quaternions. **American Journal of Physics**, n. 70, p. 958–63, 2002.

SIMON, S. A adequação de teorias matemáticas às teorias Físicas: a teoria da relatividade. In: PIETROCOLA, M.; FREIRE, O. (Eds). **Filosofia, Ciência e História**. São Paulo: Discurso editorial, p. 79, 2005.

STEWART, Lan. **17 equações que mudaram o mundo**. 1. ed. São Paulo: Jorge Zahar, 2013.

TARNAS, R. **A epopeia do pensamento ocidental**: para compreender as ideias que moldaram nossa visão de mundo. 6. ed. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2003.

TAYLOR, J. **Mecânica clássica**. Porto Alegre: Bookman, 2013.

TODA MATÉRIA. **Anaxímenes**. Disponível em:  
<https://www.todamateria.com.br/anaximenes/>. Acesso em: 05 dez. 2019.

TODA MATÉRIA. **Galileu Galilei**. Disponível em:  
[https://www.todamateria.com.br/galileu-galilei/Toda matéria/](https://www.todamateria.com.br/galileu-galilei/Toda%20mat%C3%A9ria/). Acesso em: 05 dez. 2019.