INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO RIO GRANDE DO NORTE

LUCAS MATHEUS AUGUSTO OLIMPIO GUANABARA

O PROBLEMA DA TRISSECÇÃO DO ÂNGULO

LUCAS MATHEUS AUGUSTO OLIMPIO GUANABARA

O PROBLEMA DA TRISSECÇÃO DO ÂNGULO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte, em cumprimento às exigências legais como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Dr. Francisco Batista de Medeiros.

Guanabara, Lucas Matheus Augusto Olimpio.

G913p O problema ua unuscons Guanabara. – Natal, 2019. O problema da trissecção do ângulo / Lucas Matheus Augusto Olimpio

55 f : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) -Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte. Natal, 2019.

Orientador: Dr. Francisco Batista de Medeiros.

1. Trissecção do ângulo. 2. Construções geométricas. 3. Geometria -História. I. Medeiros, Francisco Batista de. II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte. III. Título.

CDU 51(813.2)

LUCAS MATHEUS AUGUSTO OLIMPIO GUANABARA

O PROBLEMA DA TRISSECÇÃO DO ÂNGULO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte, em cumprimento às exigências legais como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado e aprovado em <u>08/03/2019</u>, pela seguinte Banca Examinadora:

BANCA EXAMINADORA

Francisco Batista de Medeiros, Dr. - Presidente Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte

Dayvid Geverson Lopes Marques, Me. -

Examinador

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte

Emanuel Gomes Lourenço, Me. - Examinador Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte

Dedico este trabalho ao meu pai, por me ajudar incansavelmente durante minha trajetória no Instituto, me dando forças nos momentos em que mais precisei.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus por proporcionar momentos de alegria e por me ouvir quando as coisas estavam difíceis.

Ao meu pai Josenilson e à minha mãe Ana por sempre confiarem em mim.

À minha avó Josefina por garantir meus estudos até o ingresso no Instituto, permitindo assim, que eu construísse uma boa base, fundamental para chegar até aqui.

Aos meus amigos matemáticos por tornarem minha caminhada menos árdua, com nossas conversas sempre bem humoradas.

Aos meus professores da graduação, em especial meu orientador Francisco Medeiros, pela paciência e pelos vários ensinamentos e experiências alcançadas.

RESUMO

O problema da trissecção do ângulo é integrante de um conjunto de problemas de construções geométricas oriundos da Grécia Antiga, os quais se procuravam suas soluções usando apenas régua não graduada e compasso. Esses problemas surgiram quando esse povo esbarrou na dificuldade de, apenas com aqueles instrumentos, realizar algumas construções, como a de um heptágono regular. Além da trissecção do ângulo, existem outros dois problemas muito famosos e já bem estudados pela comunidade matemática: a quadratura do círculo e a duplicação do cubo. Apesar de os gregos terem um enorme potencial no campo geométrico, não dispunham na época de tantas ferramentas matemáticas como nos dias atuais, para mostrar que essas construções eram, na verdade, impossíveis, feito que viria a ocorrer somente no século XIX, com o desenvolvimento da álgebra abstrata. Nesse sentido, o presente trabalho aborda os estudos de alguns dos matemáticos ao longo da história, e suas mais diversas contribuições nas tentativas de resolução do problema da trissecção do ângulo. Dessa forma, objetiva destacar a importância do estudo das construções geométricas no ensino de geometria na Educação Básica. Palavras-chave: Trissecção. Régua e compasso. Construções geométricas.

ABSTRACT

The problem of angle trisection is part and parcel of a set geometrical constructions problems from the Ancient Greece, which were looking for your solutions just using ruler unmarked and compass. Those problems came up when this people bumped in the difficulty of, only those instruments, conduct some constructions, like the a regular heptagon. In addition to the angle trisection, there are two other problems very famous and well studied before by the mathematical community: the circle squaring and the cube duplication. Although greek have great potential in the geometric field, they could not afford at the time of many mathematical tools how in present day, to show that constructions were, actually, impossible, done that was have been occurring only in the 19th century, with the development of abstract algebra. In this regard, this works approaches the studies of some mathematicians throughout history and their various contributions in attempts to solve the problem of angle trisection. That way, aims to highlight the importance of the study of geometrical constructions in teaching of geometry in Basic Education. Keywords: Trisection. Ruler and compass. Geometrical constructions.

Sumário

1	INT	ΓRODUÇÃO	10	
2	CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA DOS TRÊS PROBLEMAS			
	CL	ÁSSICOS	12	
	2.1	A QUADRATURA DO CÍRCULO	12	
		2.1.1 Contribuições para a solução	13	
		2.1.2 Contribuições para a impossibilidade da construção	15	
	2.2	A DUPLICAÇÃO DO CUBO	16	
		2.2.1 Tentativas de solução	17	
		2.2.2 A "solução" do problema	19	
	2.3	A TRISSEÇÃO DO ÂNGULO	20	
		2.3.1 À procura da solução	22	
		2.3.2 Alcançando a impossibilidade	24	
	2.4	AS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS E O ENSINO DE		
		GEOMETRIA	27	
3	GA	USS E SUAS CONTRIBUIÇÕES	29	
	3.1	APROXIMANDO-SE DO MÉTODO	29	
	3.2	AS CONSEQUÊNCIAS DAS CONTRIBUIÇÕES DE GAUSS	30	
4	CO	NSTRUÇÕES APROXIMADAS	36	
4		•		
	4.1	O HEPTÁGONO REGULAR	36	
	4.2	O ENEÁGONO REGULAR	42	

	4.3 A TRISSECÇÃO DO ÂNGULO POR NICOMEDE	46
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	48
Referências Bibliográficas		50
Apêndice A – Construção da Bissecção do Ângulo no GeoGebra		53
Ap	oêndice B – Construção da Trissecção do Ângulo Reto no GeoGebra	55

1 INTRODUÇÃO

Os problemas matemáticos da Grécia Antiga formavam um conjunto de problemas geométricos em que se procuravam as soluções usando apenas régua e compasso, ou seja, problemas de construções geométricas, para usar um termo mais moderno. Para os gregos, construir significava construir apenas com régua não graduada e compasso. Esses problemas surgiam quando esse povo esbarrou na dificuldade de, apenas com aqueles instrumentos, realizar algumas construções, como a de um heptágono regular. Tais problemas receberam a atenção de muitos estudiosos da área, tanto profissionais quanto amadores, por mais de dois mil anos. Porém, apesar do enorme esforço e tentativas engenhosas destes matemáticos, não foi possível resolvê-los usando os instrumentos euclidianos.

Pode-se dizer que há três desses problemas muito famosos e já bem estudados pela comunidade matemática: o problema da quadratura do círculo, em que se buscava construir um quadrado cuja área fosse igual à área de um círculo dado; o problema da duplicação do cubo, em que se tentava construir um cubo cujo volume fosse o dobro do volume de um cubo dado; e o problema da trissecção do ângulo, em que se procurava construir o ângulo $\frac{\alpha}{3}$ a partir de um dado ângulo α . Apesar de os gregos terem um enorme potencial no campo geométrico, não dispunham na época de tantas ferramentas matemáticas como nos dias atuais, para mostrar que essas construções eram, na verdade, impossíveis, feito que viria a ocorrer somente no século XIX, com o desenvolvimento da álgebra abstrata.

É importante ressaltar que os instrumentos utilizados na Grécia Antiga eram diferentes daqueles com o mesmo nome dos dias de hoje. A régua era um objeto reto sem qualquer marcação, que servia apenas para ligar dois pontos de um plano, mas não para medir ou marcar distâncias. Já o compasso, era um objeto sem rigidez (isto é, não preservava sua abertura quando alguma de suas extremidades era retirada do plano), que permitia traçar um círculo a partir de dois pontos distintos, sendo um deles o centro e o outro um ponto do círculo.

Com base nesses instrumentos e regras, diz-se que um ponto A é construtível, se podemos determiná-lo por meio da intersecção de duas retas, da intersecção de uma reta com um círculo

ou da intersecção de dois círculos, tendo as retas e/ou círculos previamente construídos.

Dito isso, é importante compreender as noções históricas que rodeiam os três problemas, antes de entender como eles funcionam propriamente ditos, para que assim, haja uma contextualização entre a régua e o compasso, muito utilizados antigamente, e os recursos computacionais, dos quais dispomos atualmente, no processo de ensino da geometria, promovendo dessa forma, um avanço no campo da aprendizagem da Matemática.

No capítulo 2, será apresentada uma contextualização histórica acerca dos três problemas, sobretudo com as principais contribuições de alguns matemáticos ao longo da história na tentativa de alcançar a solução desses problemas. Também, será destacada a importância das construções geométricas para o ensino de geometria. Mais adiante, no capítulo 3, serão mostradas as contribuições de Gauss para o problema da trissecção do ângulo, além da convergência entre os trabalhos do matemático alemão e os estudos dos geômetras gregos. Em seguida, no capítulo 4, serão exibidas algumas aproximações de construções geométricas impossíveis de serem realizadas com os instrumentos euclidianos. Finalmente, no capítulo 5, será proposta uma alternativa para colaborar com o ensino de geometria, mais precisamente, a utilização paralela do GeoGebra com a régua e o compasso.

Vale salientar que todas as figuras referentes a construções geométricas encontradas no presente trabalho foram elaboradas no *software* GeoGebra.

2 CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA DOS TRÊS PROBLEMAS CLÁSSICOS

No presente capítulo, será apresentada uma contextualização histórica acerca dos três problemas, sobretudo com as principais contribuições de alguns matemáticos ao longo da história na tentativa de alcançar a solução desses problemas. Também, será destacada a importância das construções geométricas para o ensino de geometria.

2.1 A QUADRATURA DO CÍRCULO

Com origem por volta de 1650 a.C., o problema da quadratura do círculo, que buscava construir um quadrado cuja área fosse igual à área de um círculo dado, envolveu algumas civilizações antigas, como a egípcia e a babilônica. Quase 400 anos antes do surgimento desse problema, esses povos tinham a noção de que o quociente entre a circunferência C e o seu diâmetro d resultava em uma constante para qualquer círculo, isto é, $\frac{C}{d} = \pi$. O primeiro valor estimado para π foi determinado por um escriba egípcio chamado Ahmes, no século XVII. Homenageando o advogado e antiquário escocês A. H. Rhind, o documento conhecido como Papiro de Rhind (vide figura 1 abaixo), no qual discutia-se o valor de π , teve tradução completa somente no século XIX, com a publicação do egiptólogo alemão August Eisenlohr, Ein Mathematisches Handbuch der alten Aegypter. Papyrus Rhind des British Museum, em 1877.

Em outras palavras, Ahmes orientava que fosse realizado o corte equivalente a $\frac{1}{9}$ do diâmetro do círculo e, em seguida, construísse um quadrado com o restante; esse quadrado teria a mesma área do círculo. Isto é, subtraindo do diâmetro sua nona parte e elevando o restante ao quadrado, determinaríamos a área do círculo dado.



Figura 1: Papiro de Rhind.

Fonte: RHIND, Papiro de (2018).

Assim, $A = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2 = \left(\frac{8d}{9}\right)^2$. Seguindo a orientação de Ahmes, considerando que a área do círculo é dada por $\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2$, e que a área do quadrado construído é $\left(\frac{8d}{9}\right)^2$, onde d é o diâmetro do círculo, temos que:

$$\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \left(\frac{8d}{9}\right)^2 \Rightarrow \pi \cong \frac{256}{81} \cong 3,16049382716...$$

De outra maneira, o lado do quadrado deveria ser igual a $\frac{8}{9}$ do diâmetro do círculo. Embora não seja uma construção exata, o erro do valor alcançado por Ahmes é inferior a um por cento do valor de π com cinco casas decimais (3,14159), o que demonstra uma boa aproximação.

De lá para cá, literalmente milhares de pessoas trabalharam no problema, e a despeito de já se ter uma demonstração de que a construção é impossível com os instrumentos euclidianos, não há um ano que não tenha sua safra de "quadradores de círculo". (EVES, 2004, p. 140)

2.1.1 Contribuições para a solução

Se afastando um pouco das regras pré-estabelecidas para as construções geométricas de uma forma geral, Hípias de Élis, que viveu em torno de 420 a.C., desenvolveu uma curva mecânica chamada trissectriz ou quadratriz (denominações dadas pelo fato de resolver a quadratura do círculo e a trissecção do ângulo).

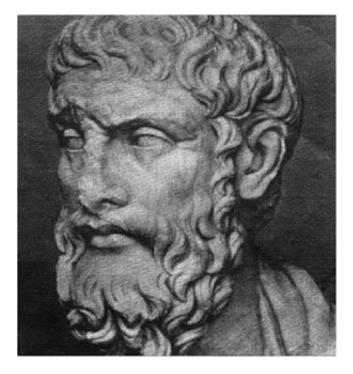


Figura 2: Hípias de Élis (460-400 a.C.).

Fonte: ÉLIS, Hípias de (2018).

A quadratriz foi criada com o intuito de resolver primeiramente a trissecção de um ângulo arbitrário, mas quem aplicou pela primeira vez essa curva para obter a quadratura do círculo foi Dinostrato, que viveu em torno de 350 a.C. Mais detalhes sobre a quadratriz podem ser encontrados na obra História da Matemática, de Carl Benjamin Boyer e Uta Caecilia Merzbach, publicada em 2012.

Diversos matemáticos dedicaram-se aos estudos sobre π e os problemas relacionados a ele. Um deles foi Leonhard Euler (1707-1783), propondo questionamentos como "Que tipo de número é o π ?" "É racional ou irracional?" "É algébrico ou transcendental?", conceitos inexistentes na época do problema da quadratura do círculo.

Uma curiosidade interessante acerca de Euler, é o fato de que a letra grega π tornou-se bastante aceita na comunidade matemática a partir do momento em que o matemático a utilizou na publicação do seu famoso livro *Introductio in Analysin Infinitorum*, em 1748. Acredita-se que tal notação foi adotada por ser a primeira letra do alfabeto grego a remeter perímetro e periferia.



Figura 3: Leonhard Euler (1707-1783).

Fonte: EULER, Leonhard (2018).

2.1.2 Contribuições para a impossibilidade da construção

Outros matemáticos dos séculos XVIII e XIX proporcionaram diversas contribuições para mostrar a impossibilidade da quadratura do círculo. Um deles foi Adrien-Marie Legendre (1752-1833). Legendre, em 1794, verificou e provou as irracionalidades de π e π^2 . No final de sua obra, ele propõe que π não é algébrico.

Somente com a diferença estabelecida entre números algébricos e números transcendentais foi possível provar a impossibilidade do problema usando instrumentos euclidianos. A existência de números transcendentais foi provada pelo matemático francês Joseph Liouville (1809-1882), na obra *Journal de Mathématique Pures et Appliquées*, publicada em 1840.

Em 1882, no artigo Über die Zahl π , o matemático alemão Carl Louis Ferdinand Von Lindemann (1852-1939) se apropriou da fórmula de Euler $e^{i\pi}+1=0$ e provou a transcendência de π . Isto quer dizer que π não é solução de nenhuma equação polinomial com coeficientes inteiros não todos nulos. Em consequência disso, não é possível expressar π com uma quantidade finita de números inteiros, de frações racionais ou suas raízes.

A construção geométrica de π está relacionada com o problema da quadratura do círculo e com a questão de π ser algébrico ou transcendente. De fato, "quadrar" um círculo de raio r consiste em determinar o lado l do quadrado cuja área é igual à do círculo, isto é, tal que $\ell^2 = \pi r^2$, ou seja, $\ell = r\sqrt{\pi}$ pelo que, se for possível construir um número transcendente, neste

caso π , talvez seja possível construir πr^2 (FIGUEIREDO, 2011).

A classificação de π como número transcendente impossibilita a resolução do problema da quadratura do círculo. Ainda de acordo com Figueiredo (2011), como π não é algébrico, não é possível construí-lo só com régua não graduada e compasso; como $\sqrt{\pi}$ também não é, consequentemente é impossível construir, usando instrumentos euclidianos, um quadrado cuja área seja precisamente igual à área de um círculo dado.

2.2 A DUPLICAÇÃO DO CUBO

O problema da duplicação do cubo (datado de aproximadamente 427 a.C.) emergia do conhecimento de filósofos pré-socráticos pertencentes à Escola Pitagórica (570-500 a.C.). Eles sabiam que dado um quadrado, era possível construir um novo quadrado com o dobro da área do quadrado dado inicialmente. Este problema é destacado por Platão (428-348 a.C.) em uma de suas obras, *Mênon*, diálogo que retrata Sócrates ensinando um escravo a duplicar um quadrado. Os gregos teriam então tentado transpor o problema para as figuras sólidas, partindo do cubo. Assim, procuravam construir um cubo cujo volume fosse o dobro do volume de um cubo dado.

"Há duas lendas sobre a origem da duplicação do cubo, com detalhes contraditórios. Uma delas se refere à duplicação de um túmulo e a outra à duplicação de um altar" (WAERDEN, 1954, p. 160-161).

Conta a lenda que, em 429 a.C., os atenienses dirigiram-se ao célebre oráculo de Apolo na ilha de Delos, suplicando a graça de fazer cessar uma peste que até então assolava a sua cidade. O oráculo respondeu, exigindo que fosse construído outro altar no templo da divindade, com o dobro do tamanho do que lá existia. Os atenienses construíram então o novo altar, dobrando a aresta do antigo (em forma de um cubo), o que, naturalmente, multiplicou o volume do altar por oito (a nova aresta, claro, deveria ser $\sqrt[3]{2}$ vezes a anterior). Devido a esta falha, a peste continuou e dizimou um grande número de atenienses. Assim, o problema de "duplicar o cubo" ficou conhecido como o "problema de Delos". (WAGNER, 2007, p. 103-104)

Já a outra história provavelmente surgiu quando o sábio Eratóstenes escreve ao Rei Ptolomeu III, em torno de 240 a.C., relatando que Minos, rei de Creta, já havia determinado os métodos para a construção do túmulo de seu filho Glauco, procurando assim, duplicar seu volume, mantendo sua forma cúbica. Para isso, Minos afirma que seria preciso duplicar cada aresta do cubo. Ao ouvir tal afirmação, Eratóstenes argumenta que o rei estaria equivocado, já que ao duplicar cada aresta, o volume seria aumentado oito vezes e não duas como desejado (JONES; MORRIS; PEARSON, 1991. p. 01).



Figura 4: Ruínas em Delos.

Fonte: DELOS, Ruínas em (2018).

2.2.1 Tentativas de solução

Obedecendo a cronologia exposta por Heath (1981), o matemático inaugural na tentativa de resolução do problema da duplicação do cubo foi Hipócrates de Quios (470-410 a.C.), reduzindo o problema à construção de médias proporcionais. A partir daqui, as tentativas de solução do problema e os raciocínios expostos por diversos matemáticos ao longo da história serão apresentadas de forma breve. Mais detalhes sobre as construções podem ser encontrados na tese Trissecção do Ângulo e Duplicação do Cubo: as Soluções na Antiga Grécia, de José Miguel Rodrigues de Sousa, publicada em 2001.

Hipócrates entendia que "se entre duas linhas rectas, das quais a maior seja a dupla da menor, se inscreverem duas médias em proporção contínua, o cubo ficará duplicado" (VASCONCELOS, 1925, p. 365). Desse modo, o problema assumiu o caráter de geometria plana, continuando sem solução por instrumentos euclidianos. Por outro lado, contribuiu com o surgimento de técnicas geométricas.

O matemático grego afirmava que se, dado um cubo de aresta a, encontrarmos dois segmentos de comprimentos x e y tais que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$, isto é, dois meios proporcionais entre os segmentos a e b, então o cubo de aresta x tem o volume ampliado na razão $\frac{b}{a}$.

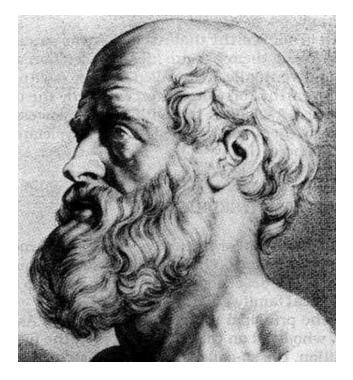


Figura 5: Hipócrates de Quios (470-410 a.C.)

Fonte: QUIOS, Hipócrates de (2016).

No caso da duplicação do cubo, b=2a, e procuramos assim, x e y tais que $\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a}$. De fato, facilmente é deduzido que o cubo de aresta x tem duas vezes o volume do cubo de aresta a. Ou seja, a razão dos volumes dos cubos em questão (de arestas a e x, respectivamente) é de um para dois, pois $\frac{a^3}{x^3}=\frac{a}{x}\cdot\frac{a}{x}\cdot\frac{a}{x}=\frac{a}{x}\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{2a}=\frac{1}{2}$. Concluindo, é evidente a equivalência entre os dois problemas - a duplicação do cubo e a construção de dois meios proporcionais entre a aresta do cubo inicial e o seu dobro.

Mais tarde, os geômetras reconheciam claramente que uma redução não é equivalente a uma solução do problema proposto. Mas será que Hipócrates já fazia esta distinção no seu tratamento do problema da duplicação do cubo? Uma passagem de Aristóteles sugere que sim. (KNORR, 1993, p. 24)

Arquitas de Tarento, que viveu em torno de 390 a.C., foi considerado por muitos o autor da mais antiga "solução" para o problema Deliano, da qual conhecemos. Quando falamos em solução, logicamente vem à tona uma saída para o problema que não atende às condições das construções (régua não graduada e compasso). Embora seu raciocínio seja puramente geométrico, sua solução, de acordo com Allman (1976), foi pioneira em utilizar movimentos mecânicos em problemas geométricos.

Resumindo, sua construção se afastava do plano, utilizando três dimensões para determinar certo ponto, alcançado a partir da intersecção de três superfícies de revolução (um cone, um

toro e um cilindro reto).

Menecmo, que viveu no século IV a.C., é um matemático conhecido geralmente pelas suas descobertas relacionadas ao estudo de curvas que hoje são denominadas de cônicas (elipse, hipérbole e parábola). Essas curvas foram alcançadas num esforço em tentar encontrar uma solução para o problema da duplicação do cubo, baseando-se também na redução de Hipócrates. Sendo assim, ele procurou construir um ponto que fosse a intersecção de duas cônicas.

2.2.2 A "solução" do problema

Tendo em vista que hoje em dia temos o auxílio da Geometria Analítica, campo de estudos desenvolvido por Descartes no século XVII, essa solução pode parecer simples, mas não podemos esquecer que Menecmo não dispunha desses conhecimentos na época.

Considerando a redução de Hipócrates, que buscava encontrar dois meios proporcionais entre os segmentos a e 2a, (onde a é a aresta do cubo a ser duplicado), isto é, obter x e y, tais que:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

Fazendo uso da álgebra moderna, percebemos que da relação anterior podemos extrair as seguintes equações:

$$x^2 = ay (2.1)$$

$$xy = 2a^2 \tag{2.2}$$

$$y^2 = 2ax (2.3)$$

Para encontrar equivalência entre as equações e a relação dada, é preciso que duas das equações acima sejam verificadas.

De (2.1) e (2.3), respectivamente, temos ainda que:

$$y = \frac{x^2}{a} \quad e \quad x = \frac{y^2}{2a}.$$

Desse modo, podemos obter x de duas maneiras, por meio da utilização da geometria analítica:

- como abscissa do ponto de intersecção da parábola $y = \frac{x^2}{a}$ com a hipérbole equilátera $xy = 2a^2$, a primeira solução de Menecmo;
- como abscissa do ponto de intersecção da parábola $y = \frac{x^2}{a}$ com a parábola $x = \frac{y^2}{2a}$, a segunda solução de Menecmo.

Veja que nos dois casos, conclui-se que $x^3 = 2a^3$, ou seja, o segmento x representa a aresta do cubo cujo volume é o dobro do volume do cubo de aresta igual ao segmento a.

As soluções atribuídas a Platão (427-347 a.C.) e a Eratóstenes (276-194 a.C.) são voltadas para construções mecânicas, se afastando muito dos requisitos euclidianos citados anteriormente, então vamos nos ater aqui apenas a referências de tais soluções.

A solução de Nicomede, que viveu em torno do século III a.C., também foi utilizada para resolver o problema da trissecção do ângulo. Por esse motivo, essa solução, a priori, será analisada sob aspectos informativos, sendo mais bem apresentada no capítulo 4.

2.3 A TRISSECÇÃO DO ÂNGULO

O problema da Trissecção do Ângulo, que procurava construir o ângulo $\frac{\alpha}{3}$ a partir de um dado ângulo α , possui algumas peculiaridades em relação aos problemas da Quadratura do Círculo e da Duplicação do Cubo. Além de sua origem não ser muito clara, datada do século VI a.C. aproximadamente, existe o fato de alguns ângulos admitirem trissecção, como o ângulo de 90°, enquanto um círculo não pode ser quadrado, nem um cubo pode ser duplicado, usando apenas régua e compasso, quaisquer que sejam seu raio e aresta, respectivamente.

Os problemas da quadratura do círculo e da duplicação do cubo possuem suas lendas, e até mesmo origens, bem aceitas pelos historiadores. Porém, as origens do problema da trissecção do ângulo são obscuras. Segundo Eves (2004), acredita-se que o problema surgiu num esforço dos gregos para resolver o problema análogo da multisecção de um ângulo. Além disso, há evidências na literatura que "[...] levam-nos a supor que a construção de polígonos regulares foi um assunto que ocupou os matemáticos na Antiga Grécia, talvez incentivados pela descoberta da construção do pentágono regular, pelos Pitagóricos" (SOUSA, 2001, p. 14).

Os antigos gregos achavam que podiam dividir ângulos em qualquer número de partes iguais por acharem ser possível construir um polígono regular com qualquer número de lados,

por meio da divisão de um círculo em n lados iguais (problema da construção do n-ágono). Eles conseguiram construir n-ágonos para n=3,4,5,6,8,10,12,15,16... Note que tanto o heptágono (n=7) quanto o eneágono (n=9) eram os polígonos de menores lados para os quais os geômetras gregos não tinham conhecimento de uma construção exata.

Há também suspeitas que o problema da trissecção do ângulo tenha ocupado os matemáticos no período do problema da duplicação do cubo:

É provável que o terceiro problema célebre, a trissecção do ângulo, tenha ocupado a atenção dos geômetras no período do problema da duplicação do cubo. Não há dúvida que os egípcios conheciam como dividir um ângulo ou o arco de um círculo, em duas partes iguais; assim eles também deviam saber como dividir um ângulo reto em três partes iguais. Nós já vimos, além do mais, que a construção do pentágono regular era conhecida de Pitágoras e podemos inferir que ele podia dividir um ângulo reto em cinco partes. Deste modo, nessa altura, o problema da trissecção do ângulo, ou o de dividir um ângulo num número qualquer de partes iguais, podia surgir naturalmente. (ALLMAN, 1976, p. 88)

Contudo, de acordo com a obra Os Elementos / Tradução e Introdução de Irineu Bicudo, publicada em 2009, não podemos excluir a hipótese desse problema originar-se no seguimento da bissecção de um ângulo, exercício relativamente fácil e possível de efetuar com régua não graduada e compasso (vide, por exemplo, figura 6 abaixo). O passo a passo dessa construção a partir do GeoGebra pode ser encontrado no Apêndice A.

Ainda, conforme Heath (1981) e Eves (2004), a divisão de um segmento de reta em várias partes iguais com esses instrumentos poderia, também, ter levado ao problema da trissecção do ângulo, transferindo assim, para ângulos o que era possível com segmentos de reta.

Considerando o simples enunciado dos três problemas, parecia que suas soluções seriam uma tarefa trivial. Talvez por este fato tenha sido difícil os gregos da antiguidade aceitarem que não era possível encontrar soluções usando aqueles instrumentos. No entanto, a clara aparência do problema da trissecção do ângulo revela uma resolução não tão simples.

Segundo Eecke (1982), o matemático Papo de Alexandria, no livro IV de sua obra Coleção Matemática (datada do século IV a.C.), afirma que os matemáticos gregos não conseguiram resolver o problema da trissecção do ângulo usando unicamente meios planos, ou seja, aplicando apenas linhas retas e circunferências, haja vista que o problema não era "plano", mas "sólido". Complementa ainda que, como os primeiros especialistas em geometria não estavam acostumados com as secções cônicas, o problema tornou-se incerto. Mesmo assim, depois, executaram a trissecção do ângulo, reduzindo-o a outro problema.

Figura 6: Bissecção do ângulo \widehat{AOB} .

Fonte: Elaboração própria em 2019.

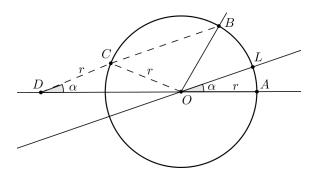
2.3.1 À procura da solução

As investidas na tentativa de resolução do problema da trissecção do ângulo foram muito importantes, pois contribuíram para o desenvolvimento da geometria e da álgebra. No período compreendido entre o século VI a.C. e o século V d.C., surgiram diversas soluções para este clássico problema, que evidentemente, não atendiam aos requisitos euclidianos. Conforme Sousa (2001), há quem diga que foi Hipócrates (por volta de 430 a.C.) quem fez a primeira contribuição aos problemas clássicos da Grécia Antiga, inclusive apresentando uma solução para o problema da trissecção do ângulo, todavia com uma construção impossível de se efetuar por meio das ferramentas existentes na época, e ainda, que há autores que defendem ser Nicomede o primeiro matemático a apresentar uma solução para os três problemas. Para isso, construiu uma curva mecânica que ficou conhecida como Concóide de Nicomede, tornando sua solução fora do universo das construções geométricas "permitidas" pelos gregos antigos.

Existe também uma solução para o problema da trissecção do ângulo dada por Arquimedes (287-212 a.C.), que reduziu o problema a outro, redução esta formalmente denominada de construção por ajustamento ou *construção por neusis* (do grego *neuein*, que significa apontar). Esse tipo de construção foi bastante importante, tendo em vista que permitiu o aparecimento de novas técnicas geométricas. Nessa forma de construção, ajusta-se um segmento dado entre duas curvas dadas, com a condição de que o segmento passe por um ponto dado.

Arquimedes então fez uso de uma régua com marcações inexistente no problema original: seja \widehat{AOB} o ângulo a ser trisseccionado usando uma régua com marcas indicando segmentos de comprimento igual a r. Primeiro, traçamos um círculo de raio r e centro O, com OA = OB = r.

Figura 7: Solução de Arquimedes para a trissecção do ângulo \widehat{AOB} .



Fonte: Elaboração própria em 2019.

Vejamos como marcar os pontos C e D, como na Figura 7, de modo que CD = r. Para tanto, observe que, mantendo uma extremidade da régua no ponto B, temos que a distância entre pontos alinhados com B, um sobre o círculo e o outro sobre a reta OA, varia de zero quando ambas coincidem com o ponto de intersecção do círculo com a reta OA até o infinito no caso em que a régua passando por B está paralela a OA. Assim, existem pontos C e D tais que CD = r.

Observe que os triângulos DCO e COB são isósceles, de maneira que $x = \widehat{CDO} = \widehat{COD}$. De modo análogo, $\widehat{BCO} = \widehat{OBC}$.

No triângulo DOC o teorema do ângulo externo fornece que $\widehat{BCO} = \widehat{CBO} = 2\widehat{CDO}$.

Aplicando o teorema do ângulo externo ao triângulo BDO, temos que:

$$\widehat{AOB} = \widehat{BDO} + \widehat{CBO} = 3\widehat{BDO}$$

e vemos assim que com esta construção foi possível dividir o ângulo \widehat{AOB} em três partes iguais, passando por O uma reta paralela ao segmento BD. Portanto, $\widehat{AOL} = \frac{\widehat{AOB}}{3}$.

Na prática, Arquimedes toma uma reta que passa por B e, tendo o cuidado para que ela passe sempre por esse ponto, movimenta-a para que o segmento CD seja igual ao raio r do círculo. Isso é exatamente o que se chama de construção *neusis*: ajusta-se um segmento (o raio r) entre o círculo e a linha reta que passa por B e por D. A partir desse movimento de ajuste, a construção descaracteriza os métodos propostos por Euclides, assumindo assim, um caráter de aproximação.

Outros exemplos de construção foram propostos, mas "descobriram-se várias curvas planas superiores que resolvem o problema de neusis ao qual o problema da trissecção do ângulo pode ser reduzido. Uma das mais antigas é a Concóide inventada por Nicomede" (SÁ, 1999, p. 4).

2.3.2 Alcançando a impossibilidade

Apesar da comunidade matemática se debruçar durante um longo tempo na tentativa de resolver o problema da trissecção, não se conseguiu encontrar uma solução apenas com o uso dos instrumentos euclidianos. O problema só foi resolvido no final do século XIX, depois dos trabalhos dos matemáticos Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e Niels Henrik Abel (1802-1829), relativos à resolução de equações algébricas por meio de radicais. Mais especificamente, ao se traduzir o problema da trissecção para o universo algébrico, notou-se que a solução depende da teoria de equações cúbicas, ou seja, conceitos algébricos que foram sendo desenvolvidos ao longo do tempo.

Não podemos nos esquecer de que a impossibilidade na existência de uma solução no campo da geometria analítica foi discutida por René Descartes (1556-1650) na sua obra *A Geometria*, publicada em 1637, de onde pode ter surgido a noção de tal impossibilidade.

Foi então a geometria analítica (obra do século XVII) que permitiu estabelecer a ligação entre as figuras e os números e que possibilitou a tradução das operações com régua e compasso da geometria nas operações fundamentais da aritmética mais extração de raiz quadrada. Num dos sentidos, esta tradução passou pela criação duma *álgebra de segmentos* e podemos até ver a linguagem em que Descartes tratou o problema no livro primeiro de *A Geometria*, de 1637. (VIEGAS, 1998, p. 99-100)

O primeiro avanço considerável na solução do problema foi o Teorema de Gauss, encontrado na obra *Disquisitiones Arithmeticae*, publicado em 1801. Em sua obra, o "príncipe da matemática", como ficou conhecido o matemático alemão, caracterizou os n-ágonos regulares construtíveis. Contudo, Gauss mostrou que se n é um número da forma $2^r p_1 p_2 \dots p_s$ com $r \ge 0$ e $p_1 < p_2 < \dots < p_s$ primos de Fermat, então o n-ágono regular é construtível por régua e compasso. Mas ele não mostrou que essa condição também é necessária. Veremos no capítulo seguinte que a construtibilidade de polígonos regulares está diretamente relacionada com a forma desses números, relação esta que conecta-se aos estudos dos matemáticos da Grécia Antiga.

A primeira demonstração efetiva da impossibilidade da trissecção do ângulo foi apresentada pelo matemático Pierre Laurent Wantzel (1814-1848) no artigo *Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas*, publicado em 1837. Sua obra tinha como finalidade revelar porque algumas construções podem ser realizadas por meio dos instrumentos euclidianos, enquanto outras não. Baseando-se nesses conhecimentos, Wantzel conseguiu provar a impossibilidade do problema utilizando esses instrumentos.

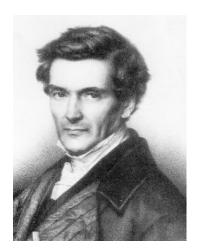


Figura 8: Pierre Laurent Wantzel (1814-1848).

Fonte: WANTZEL, Pierre Laurent (2017).

O caminho seguido por Wantzel foi, em primeiro lugar, traduzir o problema geométrico para uma linguagem algébrica. Essa ideia foi discutida por Lützen (2009), o qual afirma que toda equação representante de um problema geométrico deve ter um polinômio irredutível de grau dois para que esse problema seja solucionado exclusivamente com régua não graduada e compasso. Do contrário, tal problema não será solucionado utilizando tais instrumentos.

Em seguida, o francês mostrou como sair de um problema de construção geométrica para um problema sobre número construtível. Depois, ele determinou que as construções com régua e compasso são efetivamente aquelas tais que os números que as compõem possam ser obtidos por meio de uma quantidade finita de operações de soma, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes quadradas. Isso porque com os instrumentos euclidianos é possível efetuar, finitamente, todas essas operações.

Wantzel conclui então, que o problema da trissecção do ângulo leva a equações cúbicas irredutíveis, o que as tornam impossíveis de ser construídas com régua e compasso. Mais detalhes sobre sua história são encontrados em O Último Capítulo de Dois dos Três Problemas Clássicos, de João Paulo Carneiro Barbosa e Fernando Raul de Assis Neto, publicado em 2011.

A demonstração do teorema principal de Wantzel pode ser encontrada em sua obra. Voltando ao problema, ele observou, sem prova, que a trissecção de um ângulo depende da equação $x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}a = 0$, que por sua vez, é irredutível. Portanto, esse problema não pode ser solucionado utilizando apenas os instrumentos euclidianos: "La trissection de l'angle dépend de l'équation $x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}a = 0$; cette équation est irréductible si elle n'a pas arrive tant que a rest algébrique; ainsi Le problème ne peut être résolu em general avec la règle et Le compass" (WANTZEL, 1837, p. 366-372).

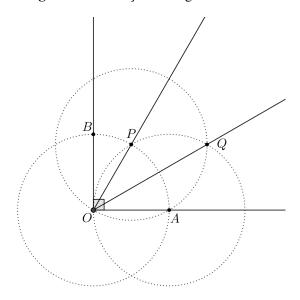


Figura 9: Trissecção do ângulo de 90°.

Fonte: Elaboração própria em 2019.

Conforme dito anteriormente, o problema da trissecção do ângulo possui uma curiosidade em relação aos outros problemas de construção geométrica: alguns ângulos, como o de 90° podem ser trisseccionados. Vejamos agora, como mostrar a trissecção desse ângulo.

Primeiro, note que dividir o ângulo de 90° em três ângulos de mesma medida é o mesmo que construir o ângulo de 30° a partir de uma semirreta ou de duas semirretas de mesma origem que formam um ângulo reto, que pode ser feito usando a linguagem algébrica (porque seu cosseno, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, é um número construtível), ou usando, efetivamente, a régua e o compasso, como ilustrado na figura 9 acima. Vale ressaltar que a trissecção do ângulo de 90° , por meio de régua e compasso, era conhecida pelos gregos antigos. O passo a passo dessa construção a partir do GeoGebra pode ser encontrado no Apêndice B.

2.4 AS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS E O ENSINO DE GEOMETRIA

Todas as coisas estão sujeitas a mudanças. Com o ensino não foi diferente, sobretudo o ensino da Matemática. A maneira como certo conteúdo matemático foi abordado na década passada, talvez seja diferente na forma como ela é vista nos dias atuais. Os recursos utlizados tanto pelos professores quanto pelos alunos também foram modificados. Esse processo de mudança então requer que o ensino evolua ao longo do tempo, a fim de que a aprendizagem não fique para trás.

Evidentemente, a tecnologia é um dos principais aspectos no qual a evolução se destaca em larga escala. Dessa forma, o leque de ferramentas das quais se dispõe hoje cresceu consideravelmente, proporcionando *softwares* que auxiliam em diversas tarefas e serviços, desde controle e monitoramento de informações, até lazer e entretenimento.

Nesse sentido, por exemplo, o campo da geometria quando estudado apenas pela perspectiva da aula tradicional, pode tornar-se abstrato para os alunos na visualização espacial dos seus elementos e, consequentemente, na compreensão de seus objetos de estudo. A título de exemplo, destacam-se os sólidos geométricos. Felizmente, tem-se acesso atualmente, a aplicativos como o GeoGebra, tornando dinâmico momentos de construções geométricas que, anteriormente, só eram possíveis com a utilização de régua e compasso. É importante deixar claro que isso não quer dizer que uma aula considerada tradicional não atinge o processo de aprendizagem.

Num cenário repleto de aulas repetitivas, nas quais o uso apenas do quadro e de exercícios carregados de fórmulas é constante, cenário este no qual a construção do conhecimento não é estabelecida, mas entregue, não é de se estranhar que os alunos conceituem as aulas como algo fora de contexto, sem aplicações cotidianas e desestimulantes.

Diante desse cenário, parece-nos importante que os professores busquem alternativas para proporcionar uma melhora no ensino, não só da Geometria, como também da Matemática como um todo.

[...] a Matemática é componente importante na construção da cidadania, na medida em que a sociedade utiliza, cada vez mais, de conhecimentos científicos e recursos tecnológicos, dos quais os cidadãos devem se apropriar. A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado; aprender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos. Recursos didáticos como jogos, livros, vídeos, calculadora, computadores e outros materiais têm um papel importante no processo de

ensino aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão, em última instância, a base da atividade matemática. (BRASIL, 1997, p. 10)

Assim, a contextualização na geometria pode tornar a aprendizagem significativa, despertando a curiosidade e o resgate do interesse dos alunos, quando eles se veem envolvidos diretamente com exercícios de construções geométricas que utilizam especificamente a régua e o compasso. Desse modo, a experiência em construir a bissetriz de um ângulo arbitrário ou determinar o ponto de intersecção de dois círculos, por exemplo, são determinantes para ofertar ao aluno uma prática diferenciada, na qual muito provavelmente, o pensamento crítico e reflexivo será aprofundado.

3 GAUSS E SUAS CONTRIBUIÇÕES

Conforme observado no segundo capítulo, de acordo com Sousa (2001), uma das hipóteses de surgimento do problema da trissecção do ângulo apoia-se na ideia de que a construção de polígonos regulares foi um assunto bastante estudado pelos matemáticos da Antiga Grécia. Ainda nesse mesmo capítulo, vimos também, que os geômetras gregos construíram n-ágonos para n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16...

Nesse sentido, no presente capítulo serão abordadas mais detalhadamente as contribuições de Carl Friedrich Gauss para o problema da trissecção do ângulo, sobretudo a convergência entre seus estudos e os resultados obtidos pelos geômetras gregos.

3.1 APROXIMANDO-SE DO MÉTODO

"Gauss, ainda jovem em 1796, descobriu uma construção de um polígono regular de 17 lados, e uma condição suficiente para que um polígono regular de n lados seja construtível" (BRISON, 2001, p. 49). Para realizar essas construções, foi necessário se debruçar no plano complexo \mathbb{C} (com o eixo real ao invés do eixo das abscissas e o eixo imaginário ao invés do eixo das ordenadas).

O matemático considerou um polígono regular de n lados, aqueles cujos vértices são as n raízes n-ézimas da unidade. Assim, seja n um número natural, maior do que 3 (a fim de evitar trivialidades). O polinômio t^n-1 tem n raízes distintas da forma $e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ ($k=0,1,\ldots,n-1$) ou, tomando $\gamma=e^{\frac{2\pi i}{n}}$, da forma γ^k ($k=0,1,\ldots,n-1$). Estas n raízes são os vértices no plano complexo de um polígono regular inscrito na circunferência de centro 0 e raio 1, com vértice em 1. Logo, temos:

$$t^{n}-1=(t-1)(t^{n-1}+t^{n-2}+\ldots+t+1).$$

Os pontos 0 e 1 (= γ^n) são dados e interessa-nos construir os pontos $z \in \mathbb{C}$ tais que:

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1 = 0.$$

"Para mostrar a resposta de Gauss, demos uma breve passada de olhos pelo polígono regular de 17 lados. O que há com o número 17 que permite a construção de um polígono regular de 17 lados? Por que isso não acontece com os números 11 ou 13?" (STEWART, 2012, p. 162).

Devemos ressaltar que os três números são primos. É fácil demonstrar que um polígono regular de n lados pode ser construído, por isso o mesmo se aplica a polígonos regulares de p lados para todos os números primos p divisores de n. Vamos examinar todos os $\frac{n}{p}$ -ésimos vértices. Por exemplo, todos os terceiros vértices de um poligono regular de 15 lados formam um polígono regular de 5 lados. Por isso, faz sentido pensar em um número primo de lados, e usar os resultados dos primos para nos encaminharmos no sentido de uma solução completa. (STEWART, 2012, p. 162)

Tomando como ponto de partida o fato de que o número 17 é primo, e reformulando os estudos de Gauss aos tempos atuais, no qual a álgebra é vigente, as soluções da equação $x^{17} - 1 = 0$ constituem os vértices de um heptadecágono regular no plano complexo. Sendo x = 1 uma das raízes, temos que as soluções restantes são as raízes do polinômio de grau 16 a seguir:

$$x^{16} + x^{15} + x^{14} + \dots + x^2 + x + 1 = 0.$$

Note que, em outras palavras, para o procedimento de Gauss temos que:

$$z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \left[\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]^k, (k = 0, 1, \dots, n - 1).$$

Lembrando que para as raízes *n*-ésimas, verifica-se que:

$$z_1^{n-i} = \frac{1}{z_1^i}, i = 0, \dots, n$$
 (3.1)

e para fins de trabalho menor, a partir de agora, $z_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ será denotado apenas por z.

Como $\frac{1}{z} = \overline{z}$, temos que $\lambda = z + \frac{1}{z} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$. Assim, construir um polígono regular de n lados consiste em construir um segmento de comprimento λ . Desse modo, e apropriando-se de alguns conhecimentos matemáticos, estaremos em condição de expor a construtibilidade algébrica de alguns polígonos regulares.

3.2 AS CONSEQUÊNCIAS DAS CONTRIBUIÇÕES DE GAUSS

Para apresentarmos a construtibilidade de alguns polígonos regulares, tais como o pentágono e o heptadecágono, nos apoiaremos também, nas seguintes definições, teoremas e

31

proposição, enunciadas, respectivamente, a seguir:

Definição 1: Um *polinômio irredutível* é um polinômio (de grau maior do que zero) que não pode ser fatorado em polinômios de graus menores. Em particular, um polinômio é irredutível sobre \mathbb{Q} quando não possui raízes em \mathbb{Q} e, portanto, não possui fatores de grau 1.

Definição 2: Um *número construtível* é um número real em que é possível construir, com régua e compasso, a partir do segmento tomado por unidade, um segmento de comprimento igual a esse número.

Definição 3: Um *número algébrico* é qualquer número real ou complexo que é solução de alguma equação polinomial com coeficientes inteiros.

Teorema 1 (Critério de Eisenstein): Seja $f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ um polinômio não constante de coeficientes inteiros e p um primo tal que:

- $p \nmid a_n$;
- $p|a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, e;$
- $p^2 \not|a_0$.

Então f(x) é irredutível sobre \mathbb{Q} .

Teorema 2: Um número real β é construtível se, e somente se, β é algébrico sobre \mathbb{Q} e o seu grau é uma potência de 2.

Proposição 1: Seja f um polinômio não constante de coeficientes racionais, j um número racional dado e g(x) = f(x+j). Então f é irredutível sobre $\mathbb Q$ se, e somente se, g o for.

As demonstrações do Teorema 1 e das Proposições 1 e 2, podem ser encontrados no livro *Introdução à Álgebra*, de Adilson Gonçalves, publicado em 2017.

Sendo $z^n - 1 = 0$ e descartando a raiz z = 1, temos:

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z^2 + z + 1 = 0. (3.2)$$

Acordando com o Teorema 2, para que $z+\frac{1}{z}$ seja construtível, é preciso verificar que esse número é raiz de um polinômio mínimo de grau igual a segunda potência. Desse modo, precisamos reescrever a equação (3.2) apropriando-se da relação (3.1). Como resultado, obteremos uma igualdade que envolve apenas potências de $z+\frac{1}{z}$. Abaixo, temos uma lista com as potências necessárias para expor a construtibilidade dos polígonos regulares citados anteriormente, entre as quais, apenas as duas primeiras serão utilizadas na construção do pentágono regular, enquanto que as oito equações da lista serão empregadas na construção do heptadecágono regular.

$$x = (z + \frac{1}{z})$$

$$x^{2} = (z + \frac{1}{z})^{2} = (z^{2} + \frac{1}{z^{2}}) + 2$$

$$x^{3} = (z + \frac{1}{z})^{3} = (z^{3} + \frac{1}{z^{3}}) + 3(z + \frac{1}{z})$$

$$x^{4} = (z + \frac{1}{z})^{4} = (z^{4} + \frac{1}{z^{4}}) + 4(z^{2} + \frac{1}{z^{2}}) + 6$$

$$x^{5} = (z + \frac{1}{z})^{5} = (z^{5} + \frac{1}{z^{5}}) + 5(z^{3} + \frac{1}{z^{3}}) + 10(z + \frac{1}{z})$$

$$x^{6} = (z + \frac{1}{z})^{6} = (z^{6} + \frac{1}{z^{6}}) + 6(z^{4} + \frac{1}{z^{4}}) + 15(z^{2} + \frac{1}{z^{2}}) + 20$$

$$x^{7} = (z + \frac{1}{z})^{7} = (z^{7} + \frac{1}{z^{7}}) + 7(z^{6} + \frac{1}{z^{6}}) + 21(z^{3} + \frac{1}{z^{3}}) + 35(z + \frac{1}{z})$$

$$x^{8} = (z + \frac{1}{z})^{8} = (z^{8} + \frac{1}{z^{8}}) + 8(z^{6} + \frac{1}{z^{6}}) + 28(z^{4} + \frac{1}{z^{4}}) + 56(z^{2} + \frac{1}{z^{2}}) + 70.$$

Isto é,

$$z + \frac{1}{z} = x$$

$$z^2 + \frac{1}{z^2} = x^2 - 2$$

$$z^3 + \frac{1}{z^3} = x^3 - 3x$$

$$z^4 + \frac{1}{z^4} = x^4 - 4x^2 + 2$$

$$z^5 + \frac{1}{z^5} = x^5 - 5x^3 + 5x$$

$$z^6 + \frac{1}{z^6} = x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 2$$

$$z^7 + \frac{1}{z^7} = x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x$$

$$z^8 + \frac{1}{z^8} = x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 16x^2 + 2.$$

Considere como (3.3) o conjunto das oito equações acima.

Portanto, de (3.2) e (3.1), e usando (3.3), encontraremos uma equação polinomial, da qual o número $z+\frac{1}{z}$ é raiz. Precisamos agora, verificar se o polinômio em questão é irredutível sobre \mathbb{Q} . Caso seja, conclui-se que $z+\frac{1}{z}$ é construtível, se seu grau for uma potência de 2 e não construtível, se seu grau não for uma potência de 2. Mas, se o polinômio não for irredutível, é necessário fatorá-lo e, em seguida, realizar o mesmo estudo para o fator irredutível no qual $z+\frac{1}{z}$ é raiz.

Como visto no capítulo anterior, os gregos tinham conhecimento de como construir o pentágono regular. Então, vejamos agora como determinar a construtibilidade do pentágono e do heptadecágono regulares.

• **Pentágono:** Nesse caso, a equação (3.2) é dada por:

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$

Utilizando (3.1), podemos reescrever a equação acima:

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + z^2 + z + 1 = 0,$$

ou seja,

$$\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1 = 0.$$

Assim, de (3.3), temos:

$$x^2 - 2 + x + 1 = x^2 + x - 1 = 0.$$

Veja que se $v(x) = x^2 + x - 1$, então $w(x) = v(x+2) = x^2 + 5x + 5$. Aplicando o Critério de Eisenstein, com p = 5, conclui-se que w(x) é irredutível sobre \mathbb{Q} . Portanto, $\lambda = 2\cos\frac{2\pi}{5}$ é um número algébrico de grau 2, pois é raiz do polinômio irredutível $x^2 + x - 1$. Logo, λ é construtível, isto é, podemos construir o pentágono regular.

• **Heptadecágono:** Aqui, a equação (3.2) é dada por:

$$z^{16} + \ldots + z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$

De maneira análoga, utilizando (3.1), tem-se

$$\left(z^{8} + \frac{1}{z^{8}}\right) + \left(z^{7} + \frac{1}{z^{7}}\right) + \dots + \left(z^{2} + \frac{1}{z^{2}}\right) + \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1 = 0.$$

Assim, de (3.3), temos:

$$x^{8} + x^{7} - 7x^{6} - 6x^{5} + 15x^{4} + 10x^{3} - 10x^{2} - 4x + 1 = 0.$$

Veja que se $s(x) = x^8 + x^7 - 7x^6 - 6x^5 + 15x^4 + 10x^3 - 10x^2 - 4x + 1$, então $t(x) = s(x+2) = x^8 + 17x^7 + 119x^6 + 442x^5 + 935x^4 + 1122x^3 + 714x^2 + 204x + 17$. Aplicando o Critério de Eisenstein, com p = 17, conclui-se que t(x) é irredutível sobre \mathbb{Q} . Portanto, $\lambda = 2\cos\frac{2\pi}{17}$ é um número algébrico de grau 8, pois é raiz do polinômio irredutível $x^8 + x^7 - 7x^6 - 6x^5 + 15x^4 + 10x^3 - 10x^2 - 4x + 1$. Logo, λ é construtível, em outras palavras, podemos construir o heptadecágono regular.

Mais detalhes sobre essas e outras construções algébricas podem ser encontrados no trabalho Construções Euclidianas e o Desfecho de Problemas Famosos da Geometria, dos autores Juliana Conceição Precioso e Hermes Antônio Pedroso, publicado em 2011.

Resumindo, Gauss provou que quando p é um número primo ímpar, o polígono regular de p lados só pode ser construído se, e somente se, p-1 for uma potência de 2. Esses números são chamados de primos de Fermat, pois ele foi o primeiro a estudá-los. Os gregos tinham conhecimento de como construir os polígonos regulares de 3 e de 5 lados. Observe que 3-1=2, e que 5-1=4, são duas potências de 2. Não à toa, os resultados

dos gregos coincidiam com os estudos de Gauss, além disso, 3 e 5 são os dois primeiros primos de Fermat. Em contrapartida, note que 11 - 1 = 10, e que 13 - 1 = 12, ambos resultados não são potências de 2, sendo assim, impossível construir os polígonos regulares de 11 e de 13 lados.

Assim, conforme as contribuições de Gauss, a construção do eneágono regular envolve a construção do ângulo de 40° , isto é, a trissecção do ângulo de 120° . "De forma geral, um ângulo α será construtível se e somente se $\cos \alpha$ for um número construtível" (MEDEIROS, 2017, p. 20). Como $\cos 40^{\circ}$, que representa a medida do lado do eneágono, não é um número construtível, o ângulo de 40° também não o é. Portanto, a trissecção do ângulo de 120° é impossível, impossibilitando também, a construção do eneágono regular por meio dos instrumentos euclidianos.

4 CONSTRUÇÕES APROXIMADAS

No presente capítulo serão expostas algumas aproximações de construções geométricas impossíveis de serem construídas com régua e compasso.

Consoante o segundo capítulo, o heptágono (n = 7) e o eneágono (n = 9) regulares foram os polígonos de menores lados para os quais os geômetras gregos não tinham conhecimento de uma construção exata.

No entanto, diante da impossibilidade de se construir com régua e compasso esses polígonos regulares, mostraremos a seguir, como construí-los tomando algumas aproximações, as quais se tornam muito viáveis em situações práticas.

Mais detalhes sobre essas e outras construções aproximadas de polígonos regulares podem ser encontrados na dissertação Geometria e Números Construtíveis: História e Prática, de Gibran Medeiros de Souza, publicada em 2018.

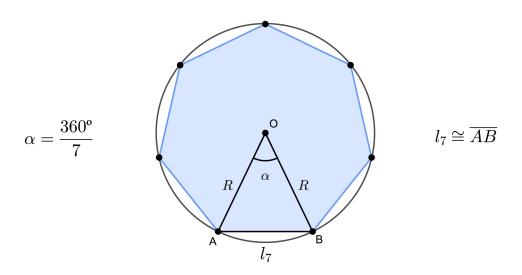
4.1 O HEPTÁGONO REGULAR

O heptágono regular é o primeiro polígono com impossibilidade de construção usando instrumentos euclidianos. Desse modo, a fim de apresentarmos sua construção aproximada, será utilizada a lei dos cossenos para encontrarmos o comprimento do lado do heptágono regular em função do raio da circunferência circunscrita. Veja a figura 10. Inscrito no círculo, tem-se o heptágono regular, com destaque para o triângulo OAB, no qual o ângulo \widehat{AOB} representa a sétima parte de uma rotação completa do círculo, onde pode-se escrever $\alpha = \frac{360^{\circ}}{7}$ ou $\alpha = \left(51\frac{3}{7}\right)^{\circ}$. Os segmentos \overline{OA} e \overline{OB} têm a mesma medida (raio do círculo). O segmento \overline{AB} é o lado do heptágono regular, o qual indicaremos por $\overline{AB} = l_7$.

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo *OAB*, temos que:

$$l_7^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos\left(51\frac{3}{7}\right)^{\circ}.$$

Figura 10: Construção do Heptágono Regular.



Isolando l_7 e ajustando a equação, chegamos ao seguinte resultado: $l_7 = R\sqrt{2-2\cos\left(51\frac{3}{7}\right)^\circ}$. Com o auxílio de uma calculadora, concluímos que $l_7 \cong 0.8677 \cdot R$ (adotando 4 casas decimais).

Na circunferência da figura 11, seguiremos alguns passos para determinar o comprimento de um segmento, e logo em seguida, o confrontaremos com o resultado encontrado na figura 10:

- 1. traçar uma reta que passe pelo centro de *O*, determinando os pontos *A* e *C*, como na figura 11. Depois, traçar uma perpendicular passando pelo centro de *O*;
- 2. traçar uma mediatriz pelo segmento \overline{OA} , determinando o ponto M e os pontos P e Q, sendo os dois últimos, na circunferência;
- 3. medir o segmento \overline{MP} em função do raio da circunferência. Nota-se que o segmento \overline{OP} mede o raio da circunferência, isto é, $\overline{OP}=R$. O segmento \overline{OM} mede a metade do raio $(\overline{OM}=\frac{R}{2})$. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo MOP, temos que $(\overline{MP})^2+(\frac{R}{2})^2=R^2$. Fazendo os devidos cálculos, encontramos $\overline{MP}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot R$. Novamente, com o auxílio da calculadora e usando apenas 4 casas decimais, concluímos que $\overline{MP}\cong 0.8660\cdot R$.

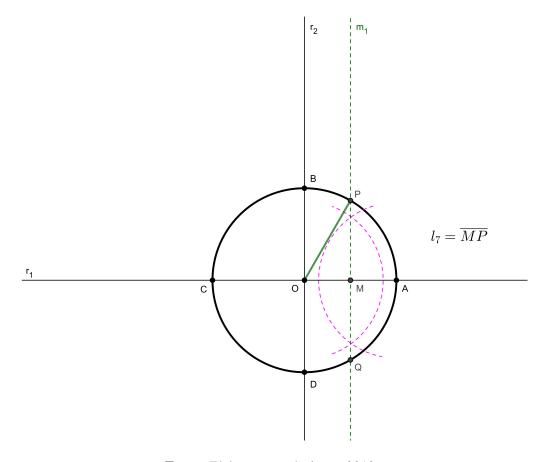


Figura 11: Construção do Heptágono Regular.

Confrontando o resultado que acabamos de encontrar com o lado do heptágono regular, tem-se $l_7\cong 0.8677\cdot R$ e $\overline{MP}\cong 0.8660\cdot R$. A diferença é mínima. Rigorosamente, não poderíamos dizer que $\overline{MP}=l_7$. Porém, aceitar que $0.8677\cong 0.8660$ ($\overline{MP}\cong l_7$) não interferiria profundamente na construção do heptágono regular.

Tomemos agora, a figura 12 com o círculo dado e uma reta passando pelo centro de O e interceptando o círculo nos pontos A e B. Adotando $\overline{MP}\cong l_7$, o erro será imperceptível. Logo, coloque a ponta seca em A e trace um arco que encontre o círculo nos pontos A_1 e A_2 . Faça o mesmo processo com os pontos A_1 e A_2 para encontrar os pontos A_3 e A_4 , respectivamente. Mais uma vez, repita o processo com os pontos A_3 e A_4 para determinar os pontos A_5 e A_6 , respectivamente. Unindo os pontos $A, A_2, A_4, A_6, A_5, A_3$ e A_1 , teremos uma construção aproximada do heptágono regular.

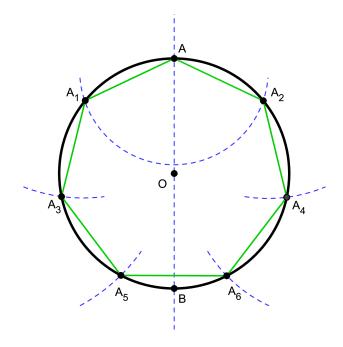


Figura 12: Construção do Heptágono Regular.

Apropriando-se do programa GeoGebra, podemos comprovar a aproximação encontrada de forma prática. Vejamos a seguir, um pouco sobre a história do *software*.

O GeoGebra é um *software* matemático gratuito e de livre acesso para todos os níveis de ensino, combinando ao mesmo tempo, áreas como a geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo numa única aplicação, e que vem recebendo diversas premiações de suporte educacional ao longo da Europa e dos Estados Unidos. Criado em 2001 por Markus Hohenwarter, o aplicativo é leve, de uso prático e bastante intuitivo, permitindo a elaboração de inúmeras construções geométricas, desde as mais simples até as mais complexas, sendo usada atualmente em quase 200 países e traduzida para mais de 50 idiomas ao redor do mundo.

Utilizando o programa, construiremos um heptágono regular inscrito em um círculo de raio unitário. Observamos que se o círculo tem raio unitário (R = 1), o lado do heptágono construído com régua e compasso mede aproximadamente 0,8660.

1. Pela figura 13, calcularemos o comprimento do segmento \overline{OM} . É importante ressaltar que nesta figura, os segmentos \overline{OA} e \overline{OB} medem 1 (raio do círculo). O segmento \overline{AB} mede aproximadamente 0,8660 (lado do heptágono regular) e M é o ponto médio de \overline{AB} . O segmento \overline{AM} mede $\frac{0,8660}{2} \cong 0,4330$. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OAM, temos que o segmento \overline{OM} mede aproximadamente 0,9013. Note que o segmento \overline{OM} é o apótema do heptágono regular;

A B

Figura 13: Construção do Heptágono Regular.

- 2. no plano cartesiano, marque os pontos A(-0.4330;0) e B(0.4330;0) e veja que a distância entre estes pontos vale 0.8660 (a medida aproximada do lado do heptágono regular);
- 3. em seguida, marca-se o ponto C(0;0,9013). A distância do ponto C ao eixo X mede 0,9013 (o apótema do heptágono regular) e o ponto C é o centro do círculo circunscrito ao polígono;
- 4. aplicando a função que permite construir um polígono regular (dado um lado), podemos construir o heptágono regular, visto que o segmento formado pelos pontos *A* e *B* é o lado do polígono de 7 lados;
- 5. por último, utilizando a função que permite construir um círculo com centro em um ponto e medida do raio determinados, na figura 14, o círculo tem centro *C* e raio unitário.

Lembrando que a figura abaixo reflete a aproximação da construção. Vale ressaltar que, com régua e compasso, não podemos construir um heptágono regular exato.

G C D

Figura 14: Construção do Heptágono Regular.

Pela figura gerada ao final de todo o processo, percebe-se que o erro é mínimo. Em suma, a construção com régua e compasso, se realizada com relativa exatidão, torna-se praticamente perfeita a olho nu.

4.2 O ENEÁGONO REGULAR

O eneágono regular é o segundo polígono regular não construtível nos parâmetros de Euclides. De maneira análoga a qual foi trabalhada no heptágono regular, vamos nos ater a uma mera aproximação de sua construção. Sendo assim, vamos ao passo a passo:

- 1. traçar uma circunferência de raio não nulo;
- 2. traçar duas retas pelo centro *O* do círculo, que sejam perpendiculares entre si, determinando os pontos *A*, *B*, *C* e *D*, como mostra a figura 15;
- 3. colocar a ponta seca do compasso no ponto *A* e a outra ponta no ponto *O* e traçar um arco, determinando o ponto *E* sobre a circunferência;
- 4. colocar a ponta seca do compasso no ponto C e a outra ponta no ponto E e traçar um arco que intercepte a reta determinada pelos pontos B e D, determinado assim, o ponto F, conforme a figura 15;
- 5. colocar a ponta seca no ponto F e a outra ponta no ponto A. Trace um arco de circunferência interceptando a reta determinada pelos pontos B e D no ponto G, destacado na figura 15.

Concluídos os cinco passos, alcançamos a figura abaixo, na qual será necessário o conhecimento da lei dos cossenos, artifício da trigonometria usado para determinar a medida de um lado ou de um ângulo desconhecido de um triângulo qualquer, conhecendo suas outras medidas.

Assim, a lei dos cossenos afirma que "em qualquer triângulo, o quadrado de um dos lados corresponde à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o dobro do produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo entre eles."

 $l_9 = \overline{DG}$

Figura 15: Construção do Eneágono Regular.

O comprimento do segmento \overline{DG} é aproximadamente o lado do eneágono regular.

Com isso, vamos calcular o comprimento do segmento \overline{DG} em função do raio da circunferência, em seguida, vamos calcular o lado do eneágono por meio da lei dos cossenos (ambos os resultados expressos em 4 casas decimais), finalizando com o confronto dos resultados.

Baseando-se na figura 15, tem-se que o triângulo \overline{CEO} , o qual $\overline{OE} = \overline{OC} = R$. O ângulo \widehat{AOE} mede 60° , então o ângulo \widehat{BOE} mede 30° . O ângulo \widehat{BOC} mede 90° . Veja a figura 16.

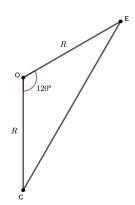


Figura 16: Construção do Eneágono Regular.

Fonte: Elaboração própria em 2019.

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo CEO para determinar o segmento \overline{CE} , temos que $(\overline{CE})^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos 120^\circ$, concluindo dessa forma, que $\overline{CE} = R\sqrt{3}$. Observamos também, que pela construção da figura 15, os segmentos \overline{CF} e \overline{FG} também medem $R\sqrt{3}$.

No triângulo COF da figura 15 podemos aplicar o teorema de Pitágoras, já que tem-se $\overline{CO} = R$ e $\overline{CF} = R\sqrt{3}$. Assim, teremos $(\overline{OF})^2 + R^2 = (R\sqrt{3})^2$, de onde chegaríamos que $\overline{OF} = R\sqrt{2}$.

Como $\overline{FG}=R\sqrt{3}$ e $\overline{FO}=R\sqrt{2}$, concluímos que $\overline{GO}=R\sqrt{3}-R\sqrt{2}=R(\sqrt{3}-\sqrt{2})$. Como $\overline{DO}=R$, temos-se que $\overline{DG}=\overline{DO}-\overline{GO}=R-(R\sqrt{3}-R\sqrt{2})$. Finalmente, chegamos a $\overline{DG}=R+R\sqrt{2}-R\sqrt{3}$.

Com a ajuda de uma calculadora (usando 4 casas decimais), vamos determinar que $\overline{DG} = R(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}) \cong 0.6821 \cdot R$.

Note agora, o que acontece ao tomarmos um eneágono regular, como destacado na figura 17. Os segmentos \overline{AO} e \overline{BO} medem R. O segmento \overline{AB} é o lado do eneágono regular (l_9) . O ângulo central mede $\frac{1}{9} \cdot 360^\circ = 40^\circ$. Aplicando novamente a lei dos cossenos, dessa vez no triângulo ABO, temos que $l_9^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos 40^\circ$.

Feitos alguns ajustes, chegamos a $l_9 \cong R\sqrt{2-2\cos 40^\circ}$. Mais uma vez, usando a calculadora (com 4 casas decimais), encontramos $l_9 \cong 0,6840 \cdot R$.

Não podemos nos esquecer de que, da mesma forma como ocorreu na construção do heptágono regular, durante o processo de construção do eneágono regular, usando apenas régua e compasso, alcançamos uma boa aproximação, também não sendo possível construir um eneágono regular exato utilizando esses instrumentos.

Além disso, é importante destacar que, segundo foi dito neste trabalho, o heptágono e o eneágono regulares foram os polígonos de menores lados para os quais os gregos não obtinham uma forma de construção exata. Mas isso não quer dizer que esse fato está atrelado unicamente a esses polígonos. A impossibilidade de construção exata também ocorre com o undecágono (n = 11), o tridecágono (n = 13) e o tetradecágono (n = 14), por exemplo.

Dadas as ressaltas, observe a figura a seguir. Agora, estamos em condições de comparar os resultados obtidos. Temos $l_9 \cong 0,6840 \cdot R$ e $\overline{DG} \cong 0,6821 \cdot R$. Fazendo um pequeno esforço, podemos admitir que $l_9 \cong \overline{DG}$.

Figura 17: Construção do Eneágono Regular.

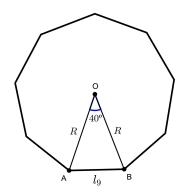
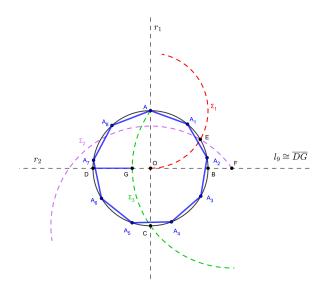


Figura 18: Construção do Eneágono Regular.



Fonte: Elaboração própria em 2019.

Baseando-se na figura 15, podemos construir nosso eneágono regular $AA_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$, como mostrado na figura 18 acima.

4.3 A TRISSECÇÃO DO ÂNGULO POR NICOMEDE

Anteriomente, no capítulo 2, vimos que existiram diversas tentativas de resolução do problema da trissecção do ângulo ao longo da história. Algumas delas, como a de Arquimedes, consistiam em reduzir o problema a outro, técnica conhecida formalmente de construção por ajustamento ou construção por *neusis*. Dessa forma, essa construção trata-se de uma aproximação, pelo motivo de afastar-se das regras estabelecidas pelo problema, mais precisamente, ao não cumprimento dos requisitos euclidianos. "Assim, uma linha reta colocada entre duas linhas ou curvas de maneira que passe por um ponto dado e o segmento determinado sobre ela pelas intersecções com as linhas ou curvas é igual a um cumprimento dado" (HEATH, 1953, p. c).

Vejamos agora, um exemplo de construção por ajustamento do problema da trissecção, proposta pelo matemático Nicomede.

Suponha que desejamos trissectar o ângulo $\alpha = \widehat{AOB}$. Com isso, vamos acompanhar o passo a passo e a figura 19 exibidos, respectivamente, a seguir:

- 1. por *B* trace uma reta perpendicular ao segmento \overline{OB} , e por *A* trace uma reta paralela a \overline{OB} ;
- 2. por O trace uma reta, determinando os pontos P e C, intersecções com os segmentos \overline{AB} e \overline{AC} , respectivamente. Movimente-a de maneira que $\overline{PC} = 2\overline{OA}$;
- 3. com isso, observe que $\widehat{POB} = \frac{\widehat{AOB}}{3}$.

De fato, seja D o ponto médio de \overline{PC} . Então, perceba que o triângulo APC está inscrito num círculo de centro D e raio \overline{PD} , assim $\overline{PD} = \overline{AD} = \overline{DC} = \overline{OA}$.

Sejam $\gamma = \widehat{AOD} = \widehat{ADO}$ e $\beta = \widehat{DAC} = \widehat{ACD}$. Aplique o teorema do ângulo externo ao triângulo ADC e veja que $\gamma = 2\beta$. Como \widehat{AC} e \widehat{OB} são paralelas, conclua que $\beta = \widehat{POB}$ e, portanto, $\alpha = 3\beta$.

A C

Figura 19: Construção neusis da Trissecção do Ângulo.

Vale ressaltar que Nicomede também foi o inventor da Concóide, a qual também pode ser utilizada para efetuar a construção *neusis* empregada nesse problema.

É importante relembrar que as construções *neusis* de Arquimedes e de Nicomede foram elaboradas no GeoGebra, software importante para o ensino, não só da Geometria, como também da Matemática como um todo, dinamizando, por exemplo, as construções geométricas.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em virtude do que foi mencionado, observa-se que de fato, a construção da trissecção de um ângulo arbitrário utilizando os instrumentos euclidianos, é impossível, sendo possível apenas, construirmos algumas boas aproximações. Desse modo, é natural surgirem questionamentos relacionados à forma de como esse problema de construção geométrica poderia ser abordado em sala de aula.

Considerando as circunstâncias atuais do ensino da Matemática, no qual a disciplina é muitas vezes tratada como um empecilho na vida escolar dos alunos e impactada por altos índices de reprovação, é importante que haja uma aplicação de métodos dinâmicos e responsáveis pela troca de experiências entre os alunos, despertando assim, o interesse dos alunos nas aulas de matemática.

Nesse sentido, é interessante ressaltar a maneira como as tecnologias atuais contribuem para a relação ensino-aprendizagem, proporcionando momentos de pesquisa, análise, reflexão e construção dos conhecimentos, atividades indispensáveis no contexto matemático.

Na vida cotidiana, cada vez maior número de pessoas são atingidas pelas novas tecnologias, pelos novos hábitos de consumo e indução de novas necessidades. Pouco a pouco, a população vai precisando se habituar a digitar teclas, ler mensagens no monitor, atender instruções eletrônicas. (LIBÂNEO, 2015, p. 10)

Por esse argumento, é visível a necessidade da utilização da tecnologia nas suas formas mais diversas e a exploração das vantagens por ela oportunizadas em sala de aula, auxiliando, portanto, na mediação do processo ensino-aprendizagem da Matemática.

Quando me deparei com o problema da trissecção do ângulo, jamais imaginei que a pesquisa de tal assunto seria atrelada à utilização de algum software matemático. Naquele instante, tinha apenas a ideia de que por se tratar de um conteúdo puramente matemático, seu estudo dispensaria completamente o auxílio de qualquer ferramenta tecnológica. Hoje, vejo que estava totalmente enganado. A partir do momento em que comecei a utilizar o GeoGebra, pude obter, não só uma melhor compreensão de como as construções geométricas

(utilizando instrumentos euclidianos) eram elaboradas, como também um considerável avanço nos resultados do presente trabalho, sobretudo com a reprodução de construções aproximadas, impossíveis de serem realizadas com régua não graduada e compasso.

Haja vista a importância da geometria para o ensino da Matemática, desde a visualização de formas, dimensões e direções encontradas em monumentos arquitetônicos e criações da natureza, até os famosos axiomas, postulados e teoremas estudados na geometria plana, destaca-se o cuidado que deve existir pelos docentes ao ensinarem conteúdos relacionados ao campo geométrico, sobretudo devido à capacidade que tais tópicos têm de ampliar a abstração e o raciocínio lógico dos alunos.

Por todos esses aspectos, uma alternativa viável e adequada para colaborar com o ensino de geometria é traçar um paralelo entre a utilização dos instrumentos euclidianos e a tecnologia, com o auxílio do GeoGebra, por exemplo. Nessa perspectiva, os alunos, num primeiro momento entrariam em contato com a régua e o compasso, se inserindo no universo de construções geométricas. Em seguida, eles seriam motivados a realizar as mesmas construções apresentadas inicialmente, dessa vez, apropriando-se do GeoGebra. Consequentemente, os professores devem atentar-se para o fato de que o *software* trata-se apenas de uma ferramenta, e o seu uso precisa ser feito de maneira consciente, a fim de diversificar a prática do ensino de geometria.

Referências Bibliográficas

ALLMAN, G. J. Greek Geometry from Thales to Euclid. New York: Arno Press, 1976.

BARBOSA, J. P. C.; NETO, F. R. de. **Pierre Laurent Wantzel:** O último capítulo de dois dos três problemas clássicos. *In*: IX SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 9, 2011, Aracaju. **Anais...** Recife: SBHM, 2011. p. 1-9.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da matemática.** Tradução de: Helena Castro. Prefácio de: Isaac Asimov. São Paulo: Blucher, 2012. 508 p.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Brasília, DF: MEC, 1997.

BRISON, O. Construções Geométricas. **Gazeta de matemática**, Lisboa, v. 141, n. 9, p.44-52, 01 jul. 2001. Quadrimestral. Disponível em: http://gazeta.spm.pt/getArtigo?gid=40. Acesso em: 20 dez. 2018.

D'ALEXANDRIE, P. La Collection Mathématique. Tradução, introdução e notas: Paul Ver Eecke. 2. ed. Paris: Albert Blanchard, 1982. 883 p.

DELOS, Ruínas em. *In*: Wikipédia, a enciclopédia livre. [S.l.: s.n.], 2019. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/DuplicaçãodoCubo. Acesso em: 15 de fev. de 2018.

EISENLOHR, A. A. Ein Mathematisches Handbuch der alten Aegypter. Papyrus Rhind des British Museum. Göttingen: J.C. Hinrichs' Buchhandlung, 1877.

ÉLIS, Hípias de. (460-400 a.C.). *In*: Pinterest. [S.l.: s.n.], 2019. Disponível em: https://br.pinterest.com/pin/575053446145891864/?lp=true. Acesso em: 17 de jul. de 2018.

EUCLIDES Os Elementos. Tradução de: Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009. 600 p.

EULER, L. **Introduction to Analysis of the Infinite:** Book II. Translated by: Blanton, J.D.. New York: Springer-Verlag, 1990. 504 p.

EULER, Leonhard (1707-1783). *In*: Wikipédia, a enciclopédia livre. [S.l.: s.n.], 2019. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/LeonhardEuler. Acesso em: 18 de out. de 2018.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Tradução de: Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas: Ed. UNICAMP, 2004. 848 p.

FIGUEIREDO, D. G. **Números irracionais e transcendentes.** 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011. 60 p.

GAUSS, C. F. **Disquisitiones Arithmeticae.** Translated by: Arthur A. Clarke. New Haven: Yale University Press, 1965. 500 p.

- GONÇALVES, A. Introdução à álgebra. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2017. 194 p.
- HEATH, T. L. **A History of greek mathematics:** Vol. 1: From Thales to Euclid. 2. ed. New York: Dover Publications, 1981. 464 p.
- JONES, A.; MORRIS, S. A.; PEARSON, K. R. **Abstract algebra and famous impossibilities**. New York: Springer-Verlag, 1991. 189 p.
- JÚNIOR, J. P. Grandes matemáticos Hipócrates de Quios. *In*: **Blog Professor Jairo Jr.** [*S.l.*], 28 abr. 2017. Disponível em: http://professorjairojr.blogspot.com/2009/02/grandes-matematicos-hipocrates-de-quios.html. Acesso em: 15 nov. 2016.
- KNORR, W. R. **The ancient tradition of geometric problems.** New York: Dover Publications, 1993. 411 p.
- LEGENDRE, A. M. Éléments de géométrie. Paris: Librairie de Firmin Didot Frères, 1794.
- LIBÂNEO, J. C. **Adeus professor, adeus professora?:** novas exigências educacionais e profissão docente. 13. ed. São Paulo: Cortez, 2015. 104 p.
- LINDEMANN, C. L. F. von. Über die Zahl π . **Mathematische Annalen.** Berlim, p. 213-225. set. 1882. Disponível em: http://eudml.org/doc/157031. Acesso em: 03 out. 2017.
- LIOUVILLE, J. Ou recueil mensuel de mémoires sur les diverses parties des mathématiques. **Journal de Mathématiques Pures et Appliquées**, Paris, v. 1, n. 1, p. 15-21, ago. 1840.
- LÜTZEN, J. Why was Wantzel overlooked for a century? The changing importance of an impossibility result. **Historia Mathematica**, Amsterdam, v. 36, n. 4, p. 374-394, nov. 2009.
- MEDEIROS, F. B. de; GUANABARA, L. O problema da trissecção do ângulo. *In*: VIII BIENAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 8, 2017, Rio de Janeiro. **Anais...** Natal: SBM, 2017. p. 1-27. Disponível em: http://www.im.ufrj.br/walcy/Bienal/textos/trisseccao.pdf. Acesso em: 03 de out. de 2018.
- PRECIOSO, J. C.; PEDROSO, H. A. Construções Euclidianas e o Desfecho de Problemas Famosos da Geometria. **Revista Ciências Exatas e Naturais**, São José do Rio Preto, v. 13, n. 2, p. 163-183, jul. 2011. Disponível em: https://revistas.unicentro.br/index.php/RECEN/article/view/1384/1566. Acesso em: 13 out. 2016.
- RHIND, Papiro de. *In*: Inovar. [S.l.: s.n.], 2019. Disponível em: http://www.inovar.pt/cre/phpwebquest/webquest/soportemondrianw.php?idactividad=391idpagina=1. Acesso em: 20 de jun. de 2018.
- SÁ, C. M.; ESTRADA, M. F.; ALVES, M. G. **A Concóide de Nicomedes:** O estudo da Concóide de Nicomedes e do Folium de Descartes, segundo Francisco Gomes Teixeira no Traité Des Courbes Spéciales Remarquables Planes et Gauches. 1999. Exposição PROFMAT99, Portimão, 1999.

SOUSA, J. M. R. de. **Trissecção do Angulo e Duplicação do Cubo:** as Soluções na Antiga Grécia. 2001. 114 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática - Fundamentos e Aplicações, Departamento de Matemática Pura, Universidade do Porto, Porto, 2001.

SOUZA, G. M. de. **Geometria e números construtíveis:** História e Prática. 2018. 78 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Departamento de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2018.

STEWART, I. **Uma história da simetria na matemática.** Tradução de: Claudio Carina. Rio de Janeiro: Zahar, 2012. 348 p.

VASCONCELLOS, F. A. **História das matemáticas na antiguidade.** Lisboa: Aillaud Bertrand, 1925. 654 p.

VIEGAS, M. **Divisão duma Circunferência em Partes Iguais usando apenas Compasso e Régua não Graduada:** Um Problema do Tempo de Euclides que Gauss Colocou nas Mãos de Fermat. 1998. Exposição - PROFMAT98, Lisboa, 1998.

WAERDEN, B. L. van der. **Science awakening:** volume 1. 3. ed. Groningen: Wolters Noordhoff, 1954. 306 p.

WAGNER, E. Construções geométricas. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007. 110 p.

WANTZEL, P. L. Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas. **Journal de Mathématiques Pures Et Appliquées.** Paris: Bachelier, Imprimiur-Libraire, p. 366-372, 1837.

WANTZEL, Pierre Laurent (1707-1783). *In*: Wikipédia, a enciclopédia livre. [S.l.: s.n.], 2019. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/PierreLaurentWantzel. Acesso em: 03 de out. de 2017.

APÊNDICE A – Construção da Bissecção do Ângulo no GeoGebra

Conforme comentado no capítulo 2, vejamos agora como construir a bissecção do ângulo \widehat{AOB} por meio do GeoGebra. Para isso, basta seguir o passo a passo abaixo:

- 1. trace um círculo de centro O (omitido da figura a fim de não sobrecarregá-la visualmente) passando por um ponto X sobre a semirreta OB e considere Y como sendo o ponto de intersecção desse círculo com o outro lado do ângulo \widehat{AOB} ;
- 2. em seguida, trace dois círculos de mesmo raio com centros em *X* e *Y*, ambos passando por *O*. A intersecção desses círculos determina um ponto *C* para a construção da bissetriz *OC*.

De fato, observe que a construção abaixo determina dois triângulos congruentes (pelo caso LLL): *OXC* e *OYC*.

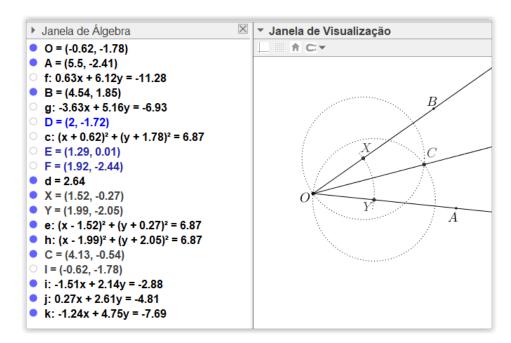


Figura 20: Construção da Bissecção do Ângulo \widehat{AOB} no GeoGebra.

Assim, o ângulo \widehat{AOB} foi dividido em dois ângulos de mesma medida: \widehat{AOC} e \widehat{COB} .

APÊNDICE B - Construção da Trissecção do Ângulo Reto no GeoGebra

De acordo com o que foi dito no capítulo 2, vejamos agora como construir a trissecção do ângulo de 90° por meio do GeoGebra. Diante disso, basta acompanhar o passo a passo a seguir:

- 1. trace um círculo de centro *O* passando por *A* e por *B*;
- em seguida, trace um circulo com centro em A passando por O. A intersecção desse círculo com o círculo do passo acima determina um ponto P para a construção do segmento OP;
- 3. depois, trace um círculo com centro em *P* passando por *O*. A intersecção desse círculo com o círculo centrado em A determina um ponto *Q* para a construção do segmento *OQ*.

Com efeito, observe que a construção abaixo determina a divisão do ângulo de 90° em três ângulos de mesma medida: \widehat{AOQ} , \widehat{QOP} e \widehat{POB} .

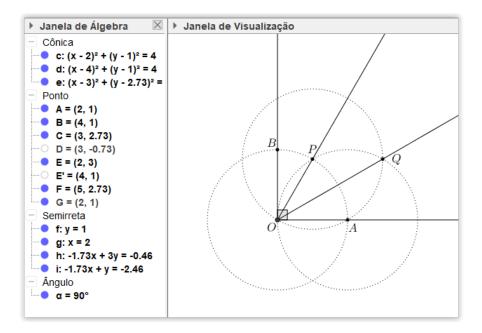


Figura 21: Construção da Trissecção do Ângulo de 90° no GeoGebra.

É importante ressaltar novamente que tanto a bissecção do ângulo quanto a trissecção do ângulo de 90°, por meio de régua e compasso, eram conhecidas pelos gregos antigos.