

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO RIO
GRANDE DO NORTE

ANA PAULA DA SILVA ZUZA

**UMA ANÁLISE DA PROPOSTA DOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DO
ENSINO MÉDIO SOBRE AS DEMONSTRAÇÕES E CONDIÇÕES DE EXISTÊNCIA
DE UM POLIEDRO CONVEXO**

NATAL

2019

ANA PAULA DA SILVA ZUZA

**UMA ANÁLISE DA PROPOSTA DOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DO
ENSINO MÉDIO SOBRE AS DEMONSTRAÇÕES E CONDIÇÕES DE EXISTÊNCIA
DE UM POLIEDRO CONVEXO**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Curso Superior de
Licenciatura em Matemática do Instituto
Federal de Educação, Ciência e
Tecnologia do Rio Grande do Norte, em
cumprimento às exigências legais como
requisito parcial à obtenção do título de
Licenciada em Matemática

Orientador: Dr. Francisco Batista de
Medeiros

NATAL
2019

Zuza, Ana Paula da Silva.
Z96a Uma análise da proposta dos livros didáticos de matemática do ensino médio sobre as demonstrações e condições de existência de um poliedro convexo / Ana Paula da Silva Zuza. – Natal, 2019.
51 f : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática)
– Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte. Natal, 2019.

Orientador: Dr. Francisco Batista de Medeiros.

1. Livros didáticos - Matemática. 2. Poliedros. 3. Relação de Euler. I. Medeiros, Francisco Batista de. II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte. III. Título.

CDU 51(813.2)

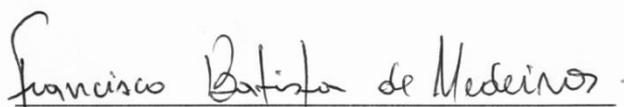
ANA PAULA DA SILVA ZUZA

**UMA ANÁLISE DA PROPOSTA DOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DO
ENSINO MÉDIO SOBRE AS DEMONSTRAÇÕES E CONDIÇÕES DE EXISTÊNCIA
DE UM POLIEDRO CONVEXO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte, em cumprimento às exigências legais como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado e aprovado em 08/03/2019, pela seguinte Banca Examinadora:

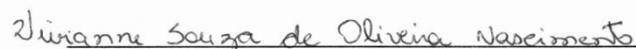
BANCA EXAMINADORA



Francisco Batista de Medeiros, Dr. – Presidente
Instituto Federal de Educação, Ciência e
Tecnologia do Rio Grande do Norte



Rafael Pereira de Melo, Me. – Examinador
Instituto Federal de Educação, Ciência e
Tecnologia do Rio Grande do Norte



Vivianne Souza de Oliveira Nascimento, Dr. – Examinadora
Instituto Federal de Educação, Ciência e
Tecnologia do Rio Grande do Norte

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo analisar a proposta dos livros didáticos de matemática do Ensino Médio sobre as demonstrações e condições de existência de um poliedro convexo. Faz-se uma breve análise da definição de Poliedros e apresenta-se algumas considerações históricas a respeito da Relação de Euler e sobre seu autor. Nos procedimentos metodológicos, foram utilizados três livros didáticos para análise das propostas de apresentação da fórmula de Euler, as condições de existência e a abordagem geral sobre Poliedros. Optou-se também pela aplicação de questionário com cinco professores de matemática do Ensino Médio que responderam à questionamentos acerca do uso do livro didático em sala de aula. Os resultados mostraram que mesmo sendo um dos materiais mais utilizados dentro da sala de aula, muitos dos livros didáticos não apresentam algumas etapas importantes para o processo ensino-aprendizagem, e são deixadas apenas para materiais considerados “de apoio” destinados para aqueles que querem um estudo mais aprofundado.

Palavras-chave: Livro didático. Poliedros. Relação de Euler. Demonstrações.

ABSTRACT

The objective of this work is to analyze the proposal of high school math books about the demonstrations and conditions of existence of a convex polyhedron. A brief analysis of the definition of Polyhedra is presented and also some historical considerations regarding Euler's Relation and its author. In the methodological procedures, three textbooks were used for analyzing the proposals of Euler's formula presentation, the conditions of existence and the general approach on Polyhedra. It was also decided to apply a questionnaire with five high school mathematics teachers who answered questions about the use of the textbook in the classroom. The results showed that even though it is one of the materials most used in the classroom, many of them do not present some important steps for the teaching-learning process, and are left only for materials considered "supportive" intended for those who want a depth study.

Keywords: Textbook. Polyhedra. Euler's Relation. Demonstrations.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

| | |
|---|----|
| Figura 1 - Leonhard Euler..... | 17 |
| Figura 2 - René Descartes..... | 19 |
| Figura 3 - Elementos de um poliedro | 21 |
| Figura 4 - Poliedro Convexo..... | 21 |
| Figura 5 - Poliedro não convexo (côncavo) | 21 |
| Figura 6 - Polígono regular | 22 |
| Figura 7 - Poliedros Regulares de Platão..... | 22 |
| Figura 8 – Poliedro Irregular..... | 23 |

SUMÁRIO

| | | |
|--------------|--|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 13 |
| 2 | METODOLOGIA DA PESQUISA E CONSIDERAÇÕES SOBRE PROVAS E DEMONSTRAÇÕES | 14 |
| 2.1 | A PESQUISA: METODOLOGIA | 14 |
| 2.2 | AS DEMONSTRAÇÕES EM MATEMÁTICA | |
| 2.2.1 | Considerações sobre provas e demonstrações | 14 |
| 3 | A HISTÓRIA DE EULER, CONTEXTO HISTÓRICO E DEFINIÇÕES SOBRE A RELAÇÃO DE EULER | 17 |
| 3.1 | LEONHARD EULER | 17 |
| 3.2 | A RELAÇÃO DE EULER: CONTEXTO HISTÓRICO | 18 |
| 3.3 | DEFINIÇÕES FUNDAMENTAIS | 20 |
| 3.3.1 | Poliedros | 20 |
| 3.3.2 | Poliedro convexo e não convexo | 21 |
| 3.3.3 | Poliedro regular e irregular | 21 |
| 4 | LIVROS DIDÁTICOS ANALISADOS | 25 |
| 4.1 | ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS | 25 |
| 4.1.1 | Livro didático 1 | 26 |
| 4.1.2 | Livro didático 2 | 27 |
| 4.1.3 | Livro didático 3 | 28 |
| 4.2 | DIFERENÇAS E SEMELHANÇAS ENTRE OS LIVROS DIDÁTICOS | 29 |
| 4.2.1 | Condição de existência apresentada nos livros analisados | 29 |
| 4.2.2 | Definição de poliedros regulares apresentadas nos livros analisados | 31 |
| 4.2.3 | A relação de Euler apresentada nos livros analisados | 31 |
| 4.3 | ANÁLISE DO QUESTIONÁRIO | 32 |
| 4.3.1 | Aplicação do questionário | 32 |
| 5 | MATERIAIS COMPLEMENTARES E ROTEIRO DE AULA SOBRE POLIEDROS UTILIZANDO MATERIAL COMPLEMENTAR | 36 |
| 5.1 | MATERIAIS COMPLEMENTARES | 36 |
| 5.1.1 | Revista do Professor de Matemática | 36 |

| | | |
|--------------|--|-----------|
| 5.1.2 | Livros | 37 |
| 5.1.3 | Artigos | 38 |
| 5.2 | ROTEIRO DE AULA | 39 |
| 5.2.1 | Plano de aula | 39 |
| 5.2.2 | Descrição do roteiro de aula | 41 |
| 6 | CONSIDERAÇÕES FINAIS | 44 |
| | REFERÊNCIAS | 46 |
| | APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO APLICADO AOS PROFESSORES DO IFRN-CNAT | 50 |

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta um tema que é de muito valor para os professores do Ensino Médio e seus alunos. A Fórmula de Euler, também conhecida como Relação de Euler, Teorema de Euler e Característica de Euler, relaciona os elementos de um poliedro, sendo eles Face, Aresta e Vértice, foi escolhido como tema, fundamentalmente pela importância que ela tem nas aulas de geometria do Ensino Médio. Nessa etapa de ensino, o estudo da geometria espacial tende a ser mais curioso e significativo pois podemos encontrar objetos concretos fora de sala de aula que justificam o aprendizado desse conteúdo, ou seja, são elementos que fazem parte do dia a dia dos alunos. Os poliedros, encontrados nos capítulos de geometria espacial dos livros didáticos, como veremos, são apresentados de uma forma rápida e bem ilustrada, o que o torna atrativo e de fácil compreensão para os alunos. Enquanto o teorema de Euler, que relaciona os elementos do poliedro convexo, é exposto para fins de verificação e logo o conteúdo é finalizado. De fato, além de alguns livros didáticos não deixarem claro que existem condições necessárias e suficientes para existência de um poliedro, também omitem as demonstrações ou justificativas, que podem ser de bastante importância para o raciocínio e aprendizagem do aluno, sendo deixada de ser repassada para os nossos alunos do Ensino Médio, e passando a ser de posse apenas dos alunos do Ensino Superior em diante.

A presente pesquisa, tem o objetivo de analisar as propostas do livro didático de matemática do ensino médio sobre as demonstrações e condições de existência de um Poliedro convexo através da análise de três livros didáticos de matemática do ensino médio escolhidos dentre os livros que foram analisados pelos professores do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte (IFRN), Campus Natal Central (CNAT), para ser adotado como livro didático. Além de elaborar um questionário e aplica-lo a cinco professores do IFRN-CNAT. Ao final, propor um roteiro de aula sobre Poliedros abordando materiais complementares que mencionaremos neste trabalho.

No decorrer deste trabalho, que tem como foco principal os poliedros convexos e o Teorema de Euler, iremos sequencia-lo por seções. Na seção 2, apontaremos a

metodologia da pesquisa e algumas considerações sobre provas e demonstrações discutidas por autores da área.

Na seção 3, tratamos da história da Relação de Euler juntamente com o seu precursor Leonhard Euler durante sua trajetória no estudo de poliedros, do mesmo modo, sua importância para o que sabemos hoje sobre o tema. Além de definir poliedros e seus elementos, face, aresta e vértice; as classificações de um poliedro, tais quais, poliedro convexo e não convexo, poliedro regular (Poliedros de Platão) e irregular.

Na seção 4, traremos a análise dos três livros didáticos do Ensino Médio, como o conteúdo de poliedros é abordado, quais condições os autores apresentam para que exista um poliedro, se os conceitos apresentados são suficientes para alcançar o objetivo inicial e através de um questionário aplicado a cinco professores que atuam no Ensino Técnico Integrado ao Médio do IFRN-CNAT, verificamos se eles utilizam apenas os livros didáticos adotado pela instituição ou utilizam outras fontes para complementar suas aulas e se existe uma preocupação desses professores em tornar o conteúdo mais significativo, através da demonstração e outros afins.

A seção 5 será destinado a apresentação de um roteiro de aula sobre poliedros convexos utilizando materiais de apoio ao professor, como por exemplo, a Revista do professor de Matemática (RPM) publicada pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), que julgamos ser de fácil acesso e de baixo custo.

Por fim, na seção 6, apresentamos algumas considerações finais relativas ao desenvolvimento deste trabalho.

2 METODOLOGIA DA PESQUISA E CONSIDERAÇÕES SOBRE PROVAS E DEMONSTRAÇÕES

Esta seção se destina a metodologia utilizada no decorrer desta pesquisa e apresenta discussões sobre o papel e a utilização das provas e demonstrações.

2.1 A PESQUISA: METODOLOGIA

Para a concretização deste trabalho, foi desenvolvida uma pesquisa quantitativa, com a utilização de questionários, assim como uma pesquisa bibliográfica, por meio da análise de livros didáticos. Inicialmente, pesquisamos autores que abordam temas como provas e demonstrações, estudo da Geometria Espacial (Poliedros), materiais complementares no estudo da Matemática do Ensino Médio, aplicação de questionário e análise de livros didáticos.

Elegemos o questionário como meio para coleta de dados por ser a forma mais utilizada em pesquisas e pela precisão que se obtém quando realizado (CERVO; BERVIAN; SILVA, 2007, p. 53). Formado por cinco questões tanto abertas quanto fechadas, o questionário foi aplicado com cinco professores do Ensino Médio do IFRN-CNAT, pois julgamos ser uma amostra significativa em relação ao quadro docente atual da área lotados no referido Campus, constituído por 17 professores de Matemática. De acordo com Monzato e Santos [s.d.], a utilização de questionário

É um método de pesquisa quantitativa, que de modo geral, são utilizados quando se quer medir opiniões, reações, sensações, hábitos, atitudes e etc. de um universo (público-alvo) através de uma amostra que o represente de forma estatisticamente comprovada.

Ou seja, pretendemos, com os resultados do questionário, inteirarmos sobre a metodologia que os docentes utilizam nas aulas sobre Poliedros, sobretudo, se preparam suas aulas com base apenas no livro didático adotado pela instituição.

Nossa pesquisa bibliográfica, além da análise dos três livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, contou com a pesquisa de materiais úteis nos estudos sobre Poliedros de forma que se observarmos falhas nos conteúdos dos livros didáticos (sejam elas conceituais, visuais, entre outras), os materiais pudessem servir de aporte para complementar o ensino sobre o mesmo conteúdo. A análise de livros

didáticos, por se tratar de um processo investigativo, é classificada, segundo Fiorentini e Lorenzato (2007), como pesquisa bibliográfica. Na mesma linha de pensamento, a pesquisa bibliográfica

Busca a resolução de um problema (hipótese) por meio de referenciais teóricos publicados, analisando e discutindo as várias contribuições científicas. Esse tipo de pesquisa trará subsídios para o conhecimento sobre o que foi pesquisado, como e sob que enfoque e/ou perspectivas foi tratado o assunto apresentado na literatura científica. (BOCCATO, 2006, p. 266)

Há uma relevância em investigar as abordagens do conteúdo de Poliedros pois no Ensino Médio, esse conteúdo é apresentado de uma forma resumida (incompleta), e por diversos fatores, o conteúdo nem sequer é ministrado. Como descrito por Sartor (2013, p.15), “[...] o estudo de poliedros no Ensino Médio é, na maioria das vezes, muito superficial. Isto porque o vemos como uma introdução para ensinarmos prismas, pirâmides, e em seguida corpos redondos.”. Alguns livros didáticos apresentam um breve resumo da ideia de Poliedros e algumas aplicações e já passam para o próximo capítulo, apresentam uma das condições para a existência de um poliedro convexo (a Relação de Euler) e o conteúdo é finalizado. É diante desse contexto, que por vezes a matemática é vista como uma disciplina mecânica, cheia de símbolos e regras sem aplicação e sem conexão com a prática. Pensamento que pode ser concordado por Notare e Berrar (2009, p.1), quando descrevem que o ensino da matemática hoje está praticamente resumido em fórmulas mecânicas que aprendemos a decorar apenas para efeito de avaliação.

O livro intitulado Exame de Textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio, publicado pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), contém uma detalhada análise de 12 coleções de livros didáticos do Ensino Médio utilizado em escolas brasileiras, chegando a totalizar 36 obras. Os autores selecionaram quatorze assuntos e descreveram as qualidades e os defeitos encontrados na maior parte deles (pelo menos oitenta por cento). Nos comentários sobre o conteúdo de Geometria Espacial, afirmaram que a geometria é tratada de um modo insatisfatório, entre vários tópicos do conteúdo, afirmaram que o Teorema de Euler para Poliedros é demonstrado incorretamente além de ser incorreto também a definição de Poliedros. Ou seja, quando finalmente uma amostra considerável de livros apresentam a

demonstração da Relação de Euler, foi notado, de acordo com os dados desse livro, que trazem conceitos incorretos.

Sobretudo, quando o livro didático não traz a fórmula seguida da prova ou demonstração, alimenta a ideia que esta não é necessária para o que se propõe, assim, o professor por vezes esquece-se da sua tarefa de conduzir o aluno ao raciocínio lógico e pensamento crítico. O que de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1997, p. 40, grifo nosso) é fundamental para o aluno,

[...] a Matemática no Ensino Médio não possui apenas caráter formativo ou instrumental, mas também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas. É importante que o aluno perceba que as definições, **demonstrações** e encadeamento conceituais e lógicos têm a função de **construir novos conceitos e estruturas** a partir de outros e que servem para **validar intuições** e dar **sentido às técnicas aplicadas**.

Assim, pode-se inferir que a omissão de uma reflexão sobre a importância das demonstrações nos cursos de geometria espacial das escolas, formam cada vez mais alunos sem uma preocupação de questionar criticamente problemas no meio onde ele está inserido e um pensamento errôneo que matemática é apenas um amontoado de fórmulas e símbolos sem importância prática. Além disso, prevê não somente a importância de o professor buscar materiais que complementem os livros didáticos, mas que haja uma formulação nos conteúdos visando sempre apresentar, quando possível, uma propriedade seguida de sua prova, ou passos que induzam à sua demonstração.

2.2 AS DEMONSTRAÇÕES EM MATEMÁTICA

Homologada recentemente, dezembro de 2018, pelo Ministério da Educação (MEC), a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), segundo o site Nova Escola (2017), é um documento elaborado conforme os princípios dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) sendo ela mais específica. Os livros didáticos deverão passar por revisão para que os conteúdos contemplem o que pede a BNCC. No entanto, nos apropriamos dos fundamentos dos PCN, por a BNCC só ter sido homologada pelo MEC após a maior parte deste trabalho já ter sido elaborado.

O estudo de poliedros no Ensino Médio é mencionado no PCN+ (BRASIL, 2002, grifo nosso) dentro de um dos três temas que foram divididos de acordo com a articulação lógica das ideias e conteúdos matemáticos (tema 1 - álgebra: números e funções; tema 2 - geometria e medidas e tema 3 - análise de medidas), o tema dois, foi subdividido nas seguintes unidades temáticas: geometria plana, geometria espacial, geometria métrica e geometria analítica. Dentro da geometria espacial, foram organizados os conteúdos e habilidades da seguinte forma:

- a) Elementos dos poliedros, sua classificação e representação; sólidos redondos; propriedades relativas à posição: intersecção, paralelismo e perpendicularismo; inscrição e circunscrição de sólidos.
- b) Usar formas geométricas espaciais para representar ou visualizar partes do mundo real, como peças mecânicas, embalagens e construções.
- c) Interpretar e associar objetos sólidos a suas diferentes representações bidimensionais, como projeções, planificações, cortes e desenhos.
- d) Utilizar o conhecimento geométrico para leitura, compreensão e ação sobre a realidade.
- e) Compreender o significado de postulados ou axiomas e teoremas **e reconhecer o valor de demonstrações para perceber a Matemática como ciência com forma específica para validar resultados.**

O estudo dos Poliedros deve estar inserido nos cursos de geometria do Ensino Médio como mencionado acima, mas sabendo disso, é fundamental investigar se esse conteúdo está sendo ensinado de maneira proveitosa e se o professor busca meios de complementar o aprendizado de seus alunos, pois uma relevância de estudar os conteúdos geométricos no Ensino Médio de forma eficaz, possibilita ao aluno uma percepção diferenciada do mundo em que vive. Para Brianez (2013, p.14), “É por meio dos conceitos da Geometria Espacial que os estudantes desenvolvem uma maneira especial de pensar capaz de lhes possibilitar compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo no qual habitam.”. Quem concorda com esse pensamento é MASCARENHAS (2013, p. 23) que defende que a matemática e a Geometria, são fundamentais ferramentas intelectuais no processo de aprendizagens e construção de outros conhecimentos.

Mais além do que apenas estudar a geometria sem inserção das demonstrações de conceitos relevantes, observar o que está por trás de todos aqueles desenhos, símbolos e fórmulas, segundo Pietropaolo (2005 p. 84), [...] “habilita o aluno a transferir o raciocínio empregado para outras áreas da Matemática e do currículo em geral”. Esse tipo de desenvolvimento de raciocínio, pode não ser uma tarefa fácil para o professor e muito menos para o aluno, e se esse raciocínio não nos é incentivado a ser colocado em prática, poderá parecer mais complexa ainda em outros momentos da vida acadêmica. Assim, a Matemática deve ser ensinada de modo a estabelecer o maior sentido possível no decorrer de cada conteúdo, de tal maneira que o aluno consiga “[...]expressar-se, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as **demonstrações em Matemática.**” (BRASIL,1997, P. 42, grifo nosso).

Há frequentes estudos que relatam sobre a importância das provas e demonstrações no ensino de Matemática da Educação Básica, no geral, esses estudos indicam que

[...] a não-proposição de provas nas aulas de matemática pode significar erro de representação do papel e da natureza da prova na Matemática. Além disso, sugerem que essa ausência pode privar os alunos de uma educação mais ampla. (PIETROPAOLO, 2005, p. 205)

Neste raciocínio, Pietropaolo (2005), complementa sua exposição afirmando que é inerente ao ensino da matemática propor ao aluno vivências que possibilitem uma compreensão real do que é a matemática, deste modo, a importância das provas, já está inteiramente preestabelecida, ou seja, não é possível um ensino sem provas se pretendemos que os alunos dominem as características essenciais da matemática.

Com base nas diferentes abordagens sobre a importância do estudo da geometria espacial e a demonstração em matemática, percebe-se semelhanças nas reflexões dos autores que estudam a união desses dois temas. A grande maioria concorda com um ensino mais significativo da geometria espacial, utilizando demonstrações que podem resultar em uma aprendizagem mais significativa. Assim, a inserção das demonstrações nas aulas de matemática, pode possibilitar maior e melhor significado na vida dos estudantes que estudam geometria.

2.2.1 Considerações sobre provas e demonstrações

No Ensino Médio, nível onde os alunos já passaram por vários anos estudando conceitos e propriedades matemáticas, muitas vezes sem entender o processo que se passou para obtê-los, é possível que a inserção de provas e demonstrações nesse momento da vida acadêmica não seja bem aceita pelos alunos. Mas segundo Lima,

Para que o aluno consiga se desenvolver nesse trabalho faz-se necessário que o professor as reconheça como importantes, sabendo que é preciso, primeiramente, adequá-las ao grau de maturidade dos alunos e aos conhecimentos prévios que os mesmos possuem da Matemática. (s.d, p. 2)

Para Aguilar Jr e Nasser (2012, p. 136 apud LIMA ,s.d., p. 2), ensinar por meio de uma prova “consiste em mostrar ao educando a validade da declaração feita, exibindo as etapas do processo dedutivo, para assim desenvolver no educando o raciocínio lógico-dedutivo”. Já para Almoulound (2007), a demonstração é considerada como um processo de validação ao qual caracteriza a matemática e a diferencia das demais ciências.

Pode ser considerado inerente ao professor, buscar maneiras distintas de explicar algum conceito novo para seus alunos, principalmente se envolve um grau de raciocínio maior do que o aluno é acostumado. Segundo Balachef (1982), conforme citado por Almoulound (2007, p.2), há uma diferença entre explicação, prova e demonstração.

A explicação situa-se no nível do sujeito locutor com a finalidade de comunicar ao outro o caráter de verdade de um enunciado matemático. A explicação, reconhecida como convincente por uma comunidade, adquire um estatuto social, constituindo-se uma prova para esta comunidade, seja a proposição “verdadeira” ou não. Quando a prova se refere a um enunciado matemático, Balacheff a chama, somente neste caso, de demonstração.

As provas são explicações aceitas por outros num determinado momento, podendo ter o status de prova para determinado grupo social, mas não para um outro. As demonstrações são provas particulares com as seguintes características:

- a) são as únicas aceitas pelos matemáticos;

- b) respeitam certas regras: alguns enunciados são considerados verdadeiros (axiomas), outros são deduzidos destes ou de outros anteriormente demonstrados a partir de regras de dedução tomadas num conjunto de regras lógicas;
- c) trabalham sobre objetos matemáticos com um estatuto teórico, não pertencentes ao mundo sensível, embora a ele façam referência.

De acordo com diversos autores, as demonstrações são utilizadas como um argumento que leva alguém a se convencer de algo. Mas para Villiers, além da função de convencer, as demonstrações têm outros papéis importantes:

- a) verificação que diz respeito à verdade da afirmação;
- b) explicação que fornece explicações quanto ao fato de ser verdadeira;
- c) sistematização na organização dos vários resultados num sistema dedutivo de axiomas, conceitos principais e teoremas;
- d) descoberta ou invenção de novos resultados;
- e) comunicação como sendo a transmissão do conhecimento matemático;
- f) desafio intelectual que gera realização pessoal/gratificação resultantes da construção de uma demonstração.

Não é novidade que as demonstrações foram e ainda são motivos de muita discussão em torno do decorrer do desenvolvimento da Matemática que conhecemos hoje. Desse modo, é que podemos nos sustentar na ideia de que dentro da matemática, as demonstrações necessitam ser desenvolvidas e apoiadas em argumentos devidamente comprovados e que ao final, a união desses argumentos possa resultar em uma hipótese matemática que seja irrefutável, tornando-a assim, verdadeira e demonstrada.

3 A HISTÓRIA DE EULER, CONTEXTO HISTÓRICO E DEFINIÇÕES SOBRE A RELAÇÃO DE EULER

Nesta seção, estudaremos parte da história de Leonhard Euler, o autor, dentre outras, da famosa fórmula que estudamos no Ensino Médio que relaciona os elementos de um Poliedro e que é tema fundamental deste trabalho, além de percorrer alguns fatos históricos que fizeram resultar nela.

3.1 LEONHARD EULER

Figura 1 - Leonhard Euler



Fonte: wikipedia (2018)

Um dos matemáticos que mais contribuiu para a matemática moderna que conhecemos hoje, Leonhard Euler, é filho mais velho de Paulus Euler e Margaretha Brucker, nasceu no ano de 1707, na cidade de Basileia que fica na Suíça. Foi educado até os 13 anos de idade com o seu pai que tinha habilidades matemáticas e após esse período, matriculou-se no curso de Filosofia da Universidade de Basileia em 1720 para seguir o mesmo ramo religioso do seu pai. Além de Teologia, Euler estudava matemática, a que mais gostava, e também outras disciplinas. Pela amizade que o seu pai tinha com Jakob Bernoulli, Euler conseguiu estudar com um dos maiores matemáticos da época até então, Johann Bernoulli (irmão de Jakob). Em 1727, Euler conseguiu tornar-se membro da Academia de São Petesburgo, recém-criada por Pedro, o Grande, com indicação dos irmãos Daniel e Nicolaus Bernoulli. Mais tarde,

Euler virou o cabeça da seção de matemática da Academia. Nesse período de permanência na Rússia, em 1735, Euler que tinha uma doença desde a sua infância, perdeu a visão direita e ficou com a esquerda prejudicada, o que incrivelmente não o impediu de continuar estudando e contribuindo resultados para a matemática.

Após quatorze anos na Academia de São Petesburgo, Euler aceitou o convite de Frederico, o Grande, para chefiar a seção de matemática da Academia de Berlim, na qual permaneceu por vinte e cinco anos. Após esse tempo, retornou à Academia de São Petesburgo, a convite de Catarina, a Grande, onde permaneceu por mais dezessete anos da sua vida. Pouco tempo após seu retorno, em 1771, Euler perdeu a visão do olho esquerdo, ficando totalmente cego. Nesse período, surpreendentemente, Euler produziu intensamente, pois tinha uma memória incrível que o permitia expor suas ideias verbalmente ou manuscritamente (com giz em uma lousa grande) para seu assessor o qual anotava suas ideias.

Em vida, Euler publicou 530 trabalhos entre livros e artigos e não houve ramo na matemática e que seu nome não fosse mencionado. Mesmo após sua morte (em 1783, aos setenta e seis anos de idade), foram encontrados uma série de manuscritos que chegou a resultar junto aos anteriores, 886 trabalhos.

3.2 A RELAÇÃO DE EULER: CONTEXTO HISTÓRICO

Vários matemáticos ao longo de seus estudos, mesmo admirando tanto os Poliedros, não descobriram uma relação entre os seus elementos. Matemáticos gregos como Pitágoras, Teeteto, Platão, Euclides, Arquimedes e o astrônomo Johannes Kepler não chegaram a nenhum resultado sobre os Poliedros.

As primeiras ideias sobre uma fórmula que relaciona os elementos de um Poliedro, deve-se à René Descartes (figura 2), um filósofo e matemático nascido próximo a cidade de Tours, na França em 1596. Muitas de suas principais contribuições na matemática vão desde a Álgebra até Geometria. Seu texto, *La Géométrie* foi o auge da álgebra formal e na obra *Discours*, Descartes relata sobre importância da álgebra e da geometria. Uma das contribuições mais importantes na matemática, foi a fundação de geometria analítica.

Figura 2 - René Descartes



Fonte: kurious (2017)

Em 1619, Descartes iniciou sua carreira militar no exército bávaro, nesta época, continuava empenhado na matemática com grande intensidade e durante aproximadamente nove anos servindo as forças armadas, neste mesmo período, em seus estudos matinais diários, descobriu resultados que poderiam levar a expressão $V - A + F = 2$, que relaciona os elementos de um poliedro convexo.

Gottfried Wilhelm Leibniz, matemático, filósofo, teólogo e formado em direito, em 1675 encontrou o manuscrito deixado por Descartes que continha dados que poderiam se chegar a fórmula como consequência imediata, mas Descartes não deixou claro que notou isso.

Após a morte de Descartes, em 1650, na cidade de Estocolmo, um navio que levava seus pertences, entre eles, o manuscrito encontrado por Leibniz, naufragou no rio Sena e perdeu-se, sendo encontrado três dias depois. A cópia feita por Leibniz também se perdeu, só sendo encontrada em 1860, na Alemanha. Em 1758, o matemático Leonhard Euler, apresentou sua descoberta sobre elementos de um poliedro ao seu amigo Christian Goldbach, ressaltando que se surpreendeu pelo fato de ninguém a ter notado ainda. A fórmula que leva seu nome até hoje, foi demonstrada por ele um ano após sua conversa com seu amigo. E por ter sido o primeiro matemático a publicar esses resultados, em homenagem a ele, a relação hoje é conhecida por “Teorema de Euler” ou “Relação de Euler”.

3.3 DEFINIÇÕES FUNDAMENTAIS

Apresentaremos nesta seção as definições que serve de base para a compreensão do próprio tema que estamos estudando e dos objetivos no qual queremos chegar. Definiremos poliedro, assim como seus elementos e algumas de suas propriedades.

3.3.1 Poliedros

Etimologicamente, a palavra Poliedro é a junção de duas palavras derivadas do grego “*polys*” (que derivou o prefixo poli), que traduzido significa muitos ou vários, e “*hédrai*” (que derivou o sufixo edro), que traduzido significa faces, ou seja, várias faces.

A definição apresentada a seguir, encontra-se no livro que estamos utilizando nesta pesquisa, como livro de apoio do professor. A saber, a definição se encontra nas páginas 232 e 233 do livro “A Matemática do Ensino Médio”, volume 2, de Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado.

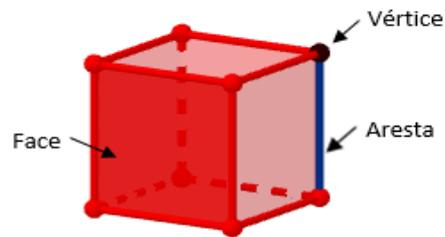
Poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos plano chamados *faces* onde:

- a) cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono;
- b) A interseção de duas *faces* quaisquer ou é um lado comum, ou é um *vértice* ou é vazia;

Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado uma *aresta* do poliedro e cada vértice de uma face é um *vértice* do poliedro.

- c) É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice (ou seja, cruzando apenas arestas)

Figura 3 - Elementos de um poliedro

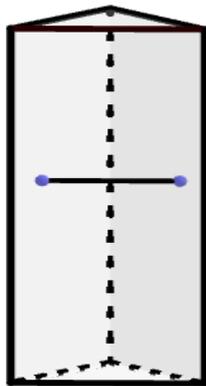


Fonte: Elaboração própria em 2018

3.3.2 Poliedro Convexo e não convexo

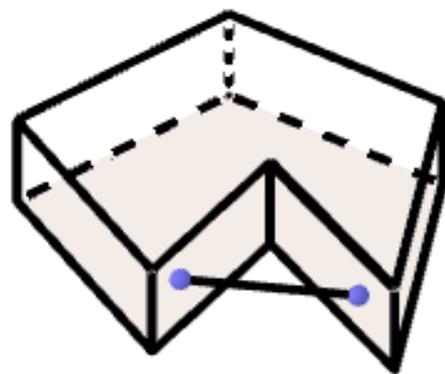
De acordo com a definição de poliedros, todo poliedro limita uma região do espaço chamada de **interior** desse poliedro. Um Poliedro é **convexo** se seu interior é convexo, ou seja, se qualquer reta (não paralela a nenhuma de suas faces) o corta em, no máximo, dois pontos (figura 4). Por outro lado, um poliedro é **não convexo** ou **côncavo**, quando existe pelo menos uma reta (não paralela as faces) que o corta em mais de dois pontos (figura 5)

Figura 4 – Poliedro Convexo



Fonte: Elaboração própria em 2018

Figura 5 - Poliedro não convexo(côncavo)



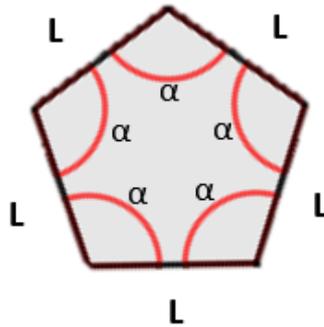
Fonte: Elaboração própria em 2018

3.3.3 Poliedro regular e irregular

Um poliedro é **regular** quando todas as faces são polígonos regulares congruentes e em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas. Lembre-se que um polígono é dito regular se possui todos os ângulos internos congruentes e

todos os lados congruentes (figura 6). Os poliedros que além das duas condições dadas acima, satisfazem a relação de Euler, são chamados de Poliedros de Platão, e destes, existem apenas cinco tipos (figura 7).

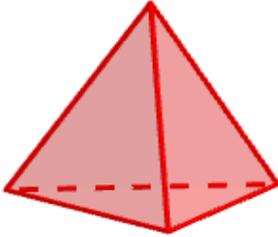
Figura 6: Polígono regular



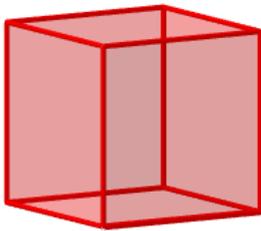
Fonte: Elaboração própria em 2018

Embora os Poliedros regulares existentes serem chamados de “Poliedros de Platão”, Eves (2007, p. 114), afirma que esse nome é utilizado erroneamente, pois três dos cinco poliedros regulares que existem, foram contribuições deixadas pelos pitagóricos e os outros dois, se deve a Teeteto. Os cinco Poliedros Regulares existentes, são denominados de acordo com o número de faces que possuem como mostra a figura 7.

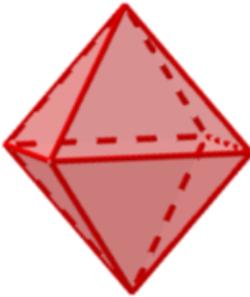
Figura 7 – Poliedros Regulares de Platão



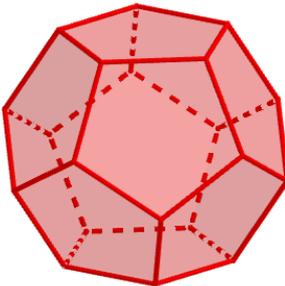
TETRAEDRO REGULAR (4 TRIANGULOS EQUILÁTEROS)



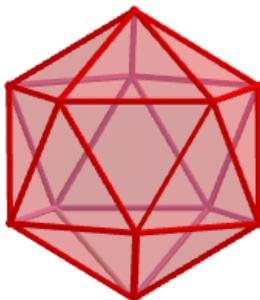
HEXAEDRO REGULAR (6 QUADRADOS)



OCTAEDRO REGULAR (8 TRIANGULOS EQUILATEROS)



DODECAEDRO REGULAR (12 PENTAGONOS REGULARES)

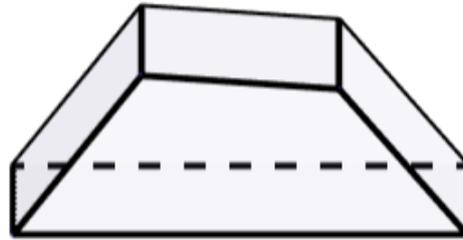


ICOSAEDRO REGULAR (20 TRIANGULOS EQUILATEROS)

Fonte: Elaboração própria em 2018

Um poliedro é dito **irregular** quando pelo menos uma de suas faces não for um polígono regular e/ou pelo menos um vértice concorrer um número de arestas diferente das demais (figura 8).

Figura 8: Poliedro



Fonte: Elaboração própria em 2018

4 LIVROS DIDÁTICOS ANALISADOS

O livro, por ser considerado um dos principais meios que viabilizam o processo ensino-aprendizagem, a análise do livro didático é uma tarefa extremamente importante e ao mesmo tempo complexa. Por esse motivo, o professor é um dos principais responsáveis na busca por um material que leve em consideração não somente o conteúdo isolado, mas que se atente ao público que irá alcançar. Assim, o professor

[...] precisa desenvolver uma competência, individualmente ou em parceria com seus colegas, de buscar orientações ou subsídios que auxiliem na escolha de materiais e metodologias alternativos, projetos coletivos, que atendam a interesses individuais, ações de alcance comunitário ou social. (BRASIL, 2000, p.143)

Nesse momento deve-se levar em conta uma série de fatores que são decisivos na formação dos discentes, pois os educadores precisam conhecer as abordagens dos livros para que possam pensar suas práticas pedagógicas e meios que possam favorecer e melhorar a qualidade das suas abordagens em sala de aula. A organização dos conteúdos; linguagem; relação dos conceitos com elementos conhecidos fora de sala; relação do conteúdo com outras áreas de conhecimento; definições coerentes; ilustrações que facilitam a visualização de conceitos; justificativas de afirmações; entre outros, são alguns dos aspectos que merecem atenção na hora da escolha do livro didático, pois

Cada aluno tem perspectivas diferentes ao entrar em contato com o conhecimento, mais ambos querem estabelecer uma relação entre o conhecimento formal, adquirido na escola, e o conhecimento informal, adquirido nas vivências sociais. (SILVA, FERNANDES; GARCIA, 2015, p.3)

Assim, é notório os motivos pelos quais é necessário analisar não somente os livros didáticos de todos os níveis de ensino, mas também todo material que sirva como objeto de ensino dentro de sala de aula.

4.1 ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

Três livros de matemática do 2º ano do Ensino Médio foram escolhidos dentre os que foram analisados pelos professores de Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, *Campus* Natal – Central, para ser adotado como livro didático neste campus. Neles, serão verificados exclusivamente os capítulos que foram destinados ao conteúdo de Poliedros. Nosso objetivo é analisar a proposta de cada autor quanto a abordagem do conteúdo, a forma que apresentam a fórmula de Euler, as condições de existência para se ter um poliedro e se há demonstração, ou passos que induzem os leitores a demonstrar. Os livros escolhidos estão listados abaixo e durante o nosso trabalho, os chamaremos de Livro 1, Livro 2 e Livro 3, respectivamente:

- a) Matemática contexto e aplicações de autoria de Luiz Roberto Dante, é a 3ª edição publicada pela editora ática no ano de 2016;
- b) Matemática ciência e aplicações de autoria de Gelson Iezzi, Oswaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida é a 9ª edição publicada pela editora Saraiva em 2016;
- c) Conexões com a matemática, a obra é a 3ª edição organizada pela editora Moderna e editado por Fábio Martins de Leonardo, no ano de 2016.

4.1.1 Livro didático 1

No livro 1, o capítulo denominado “Poliedros: prismas e pirâmides”, foi dividido em seções. A primeira seção foi organizada como apresentação, definição de face, aresta, poliedro, poliedro convexo e não convexo. Esta seção é apresentada com uma fotografia do museu de Londres - onde há uma parte dedicada aos poliedros - e outras figuras poliédricas. A definição de poliedro foi feita a partir da caracterização de cada elemento (aresta, vértice e face), em seguida, os poliedros convexo e não-convexo foram definidos, sendo utilizado também ilustrações no decorrer de toda a definição.

A segunda seção foi destinada à apresentação da Relação de Euler, exercícios resolvidos, exercícios propostos e uma aplicação da relação. Ao iniciar esta seção, o

autor fez menção a Leonhard Euler, ilustrou seis dos mais conhecidos poliedros, sendo eles o cubo, tetraedro, dodecaedro, prisma de base pentagonal, pirâmide de base quadrangular e o tronco de pirâmide de base retangular. Abaixo de cada sólido, evidenciou o número de faces, vértices e aresta para que o leitor já pudesse observar a relação entre elas antes mesmo de ser apresentada. Três considerações importantes foram feitas antes dos exercícios, a primeira é que em alguns casos de poliedros não convexos a relação também é válida; a segunda é que a expressão $V - A + F$ pode assumir outros valores quando o poliedro não é convexo e finalmente a terceira que diz que dados três número V , A e F , tais que $V - A + F = 2$, nem sempre existe um poliedro que tenha V vértices, A arestas e F faces. Com esta observação, o leitor poderia se convencer que somente obedecer a fórmula, não é condição suficiente para a existência de um Poliedro.

Na seção 3, o autor trata dos Poliedros regulares, iniciando com a definição e com exemplos de sólidos regulares, e logo parte para o que chama de propriedade: “existem apenas cinco poliedros regulares convexos”. Nesta parte, a propriedade é demonstrada para que o leitor saiba que para que exista um poliedro convexo regular, além de obedecer a relação de Euler, tenha no mínimo o número de arestas e vértices maiores ou iguais a três. A seção é concluída com os cinco Poliedros de Platão e cada uma de suas planificações e um exercício que se pede para completar uma tabela com o nome do poliedro, número de faces, vértices, arestas a forma das faces de cada um e finalmente verificar pela relação de Euler se funciona para cada um dos sólidos.

4.1.2 Livro didático 2

No livro 2, o capítulo denominado “Poliedros”, é dividido em quatro partes, sendo elas Introdução, Prisma, Pirâmides e Complementos sobre poliedros. O capítulo é introduzido com exemplos de obras arquitetônicas e objetos encontrados diariamente no nosso cotidiano e que remetem aos sólidos e figuras estudados na geometria, na sequência, encontramos a definição de poliedros e de seus elementos (face, aresta e vértice).

A segunda parte, destinada aos Prismas, é abordada as características, elementos e classificações seguidas de dois tipos de prismas, tais quais,

paralelepípedo e cubo. Em cada um dos dois tipos, é apresentado o cálculo de áreas (área da base, lateral e total), volume (além do Princípio de Cavalieri) e cálculo da medida da diagonal. Na sequência, é feita a abordagem da terceira parte denominada de Pirâmide, que segue a mesma ordem de apresentação da segunda parte, sendo elementos de uma pirâmide e sua classificação seguidas de dois tipos de sólidos derivados da pirâmide, sendo eles, tetraedro regular (sendo explorado a área total, altura e volume) e o tronco de cone (que explora as áreas e o volume). Ainda nesta parte, é exposto as semelhanças entre sólidos, dado como exemplo as pirâmides semelhantes, situações em que ocorre a semelhança e situação que não ocorre.

A quarta e última parte do capítulo aqui analisado, denominada de “Complementos sobre poliedros”, inicia-se com três exemplos de poliedros evidenciando-se o número de vértices, faces e arestas de cada um. Para definir poliedros convexos e não convexos, utiliza os mesmos três sólidos do início e em cada um, destaca um plano que contém uma face de cada poliedro, sendo dois deles convexos (deixa todas as outras faces do poliedro em um mesmo semiespaço) e o outro não convexo (deixa algumas faces em semiespaços opostos). Finalmente, o último ponto desta quarta parte, aborda a relação de Euler. A relação é apresentada, alguns exemplos são mostrados para evidenciar que todo poliedro convexo satisfaz a relação de Euler, mas nem todo poliedro que satisfaz é convexo. Logo em seguida, vem os Poliedros que satisfazem três condições (todas as faces têm o mesmo número n de arestas, todos os vértices são pontos em que concorre o mesmo número de m de arestas e o poliedro deve satisfazer a relação de Euler), são chamados de Poliedros de Platão. Os autores provam a propriedades destes poliedros de que existem apenas cinco tipos de poliedros Platão, de forma que as três condições são satisfeitas para apenas cinco poliedros. O capítulo é concluído com a definição e exemplificação de poliedros regulares.

4.1.3 Livro didático 3

O livro 3 é dividido em quatro seções e cada seção dividida em subseções. A primeira seção é destinada exclusivamente para definição de poliedros, poliedros convexos e não convexos e planificação da superfície de um poliedro. Para definir

poliedro, recorre a etimologia da palavra, e em seguida a definição de cada elemento de um poliedro. Posteriormente, diferencia-se poliedro convexo de um não convexo, utilizando figuras para facilitar a visualização dos conceitos, ainda nesta seção, os autores mostram a Relação de Euler, utiliza um exemplo para que o leitor teste a validade da relação em alguns poliedros convexos e a subseção termina com o conceito de poliedros regulares. Na seguinte subseção, é mostrado exemplos de planificação de sólidos. A terceira e quarta seções são exemplos particulares de poliedros, a saber, Prismas e Pirâmides (tronco de pirâmide). No decorrer das subseções destas duas seções, há a definição, classificação, exploração das medidas, cálculos de áreas da base lateral e total, volume e no caso dos prismas, o Princípio de Cavalieri. Ao final de cada seção os autores trazem exercícios resolvidos e não resolvidos.

4.2 DIFERENÇAS E SEMELHANÇAS ENTRE OS LIVROS DIDÁTICOS

Ao analisar os livros escolhidos, notamos que no decorrer da exposição dos conteúdos, os autores seguiam praticamente a mesma sequência lógica, como por exemplo, definição de poliedros, poliedros convexos e não convexos, poliedros regulares, a Relação de Euler, Prismas e Pirâmides. Utilizaremos três tópicos dos que foram analisados nos livros, de acordo com o nosso objetivo, para facilitar e sintetizar a apresentação da nossa análise. A saber,

- a) Condição de Existência
- b) Definição de Poliedros Regulares
- c) A Relação de Euler

4.2.1 Condição de existência apresentada nos livros analisados

Os livros que analisamos não evidenciaram as condições de existência para que dado V vértices, A arestas e F faces, exista um poliedro, embora o livro 1 tenha feito três observações em que uma delas permita ao leitor ter a ideia que obedecer a relação não é suficiente para que exista um poliedro. A terceira observação feita pelo livro 1 diz “Dado três números, V , A e F , tais que $V - A + F = 2$, nem sempre existe

um poliedro que tenha V vértices, A arestas e F faces". Ou seja, apenas um dos três livros, deu uma ideia sobre a condição de existência dos Poliedros. Além do mais, ao apresentarem a relação de Euler, não a demonstraram. Os outros livros, em nenhum momento aborda sobre condições que um poliedro convexo deve ter, para que possa existir.

Já comentamos aqui que para garantirmos a existência de um Poliedro convexo, devemos impor algumas condições aos seus números de Vértice, Arestas e Faces. A seguir, mencionaremos as condições suficientes e as necessárias, além da relação de Euler, que garantem a existência de um Poliedro.

Condições necessárias:

Seja um Poliedro P , com V vértices, A arestas e F faces, então:

- a) $3F = 2A$, se P possui apenas faces triangulares;
- b) $3F < 2A$, se P possui alguma face não triangular;

Sendo assim, é condição necessária que $3F \leq 2A$. (1)

- c) $3V = 2A$, se cada vértice for ponto comum a três arestas (pois, contando as arestas que incidem em cada vértice, teremos contado cada uma duas vezes);
- d) $3V < 2A$, se P possui algum vértice onde incidem mais de 3 arestas;

Sendo assim, é condição necessária que $3V \leq 2A$. (2)

Se o Poliedro é convexo, então, $V - A + F = 2$ ou $6 = 3V - 3A + 3F$ e utilizando (1), obteremos $A + 6 \leq 3V$, usando (2), obtemos $A + 6 \leq 3F$

Portanto, para a existência de um poliedro convexo com V vértices, A arestas e F faces, é necessário que, além da relação de Euler, e de que $A \geq 6$, tenhamos: $A + 6 \leq 3F \leq 2A$ e $A + 6 \leq 3V \leq 2A$

Condições suficientes

Teorema: Existe um poliedro convexo com V vértices, A arestas e F faces se, e somente se:

- a) $A \geq 6$
- b) $V - A + F = 2$
- c) $A + 6 \leq 3F \leq 2A$
- d) $A + 6 \leq 3V \leq 2A$

A prova deste teorema encontra-se no artigo “ $V - A + F = 2$. Existe o Poliedro?”, de autoria do professor Eduardo Wagner, que mencionamos como material complementar e optamos por não o demonstrar aqui.

4.2.2 Definição de poliedros regulares apresentadas nos livros analisados

Na sequência, os livros 1 e 2 ao exporem os poliedros regulares, comentam sobre os Poliedros de Platão e provam que existe apenas cinco poliedros convexos regulares, consistindo em mostrar que existe apenas cinco poliedros que obedecem as seguintes três condições “Todas as faces têm o mesmo número de arestas; em todos os vértices concorre o mesmo número de arestas e o poliedro é eulerino”. Na prova, supõe-se inicialmente um poliedro euleriano, para que na sequência, possa utilizar a relação de Euler sem nem ao menos tê-la provado. Já o livro 3, ao mencionar os poliedros regulares, apenas estabelece as condições para um poliedro ser regular, mas não demonstra essa propriedade e, além disso, não menciona que os cinco poliedros convexos são os chamados “Poliedros de Platão”.

4.2.3 A relação de Euler e sua demonstração apresentada nos livros analisados

Todos os autores ao expor a Relação de Euler para poliedros convexos, não utilizaram demonstração (ou passos que facilite o leitor demonstrar), apenas tenta “convencer” o leitor de que a relação funciona usando exemplos de sólidos geométricos convexos e casos particulares de poliedros não convexos no qual a relação pode ou não funcionar.

A partir dessa análise, constatamos que no geral, os livros fazem relação do conteúdo com elementos encontrados corriqueiramente fora de sala de aula, apresentam figuras que podem facilitar a visualização dos elementos e propriedades dos sólidos geométricos, abordam exercícios propostos e resolvidos e apresentam as fundamentais informações que envolvem o estudo dos Poliedros. Como já comentado, os livros não apresentam demonstrações da principal fórmula para a aprendizagem dos Poliedros, a relação de Euler, o que mais uma vez nos leva a afirmar que é necessário a utilização de materiais complementares dentro de sala de aula como mencionado anteriormente pelos PCN:

O livro didático é um material de forte influência na prática de ensino brasileira. É preciso que os professores estejam atentos à qualidade, à coerência e a eventuais restrições que apresentem em relação aos objetivos educacionais propostos. Além disso, é importante considerar que o livro didático não deve ser o único material a ser utilizado, pois a variedade de fontes de informação é que contribuirá para o aluno ter uma visão ampla do conhecimento. (BRASIL, 1998, p. 67)

Ou seja, estar em constante procura por atualizações nos aparatos didáticos que detém, poderá de fato, aos profissionais da educação, promover um ensino de qualidade para seus discentes.

4.3 ANÁLISE DO QUESTIONÁRIO

Para realizar a verificação da metodologia utilizada por alguns professores nas aulas sobre Poliedros, utilizamos um questionário de nossa autoria. O questionário possui cinco questões no total, sendo questões abertas e fechadas e que foram aplicadas a cinco professores do Ensino Técnico Integrado ao Médio do IFRN, *Campus* Natal Central, que estão ministrando o conteúdo ou que já ministraram pelo menos uma vez. A realização da aplicação ocorreu em sua maioria, de forma presencial, sendo apenas uma na forma virtual.

Embora os livros didáticos que analisamos sejam todos do segundo ano do Ensino Médio, nos Projetos Políticos Pedagógicos dos Cursos (PPC's) do IFRN o conteúdo de Geometria Espacial (onde aparece os Poliedros) é abordado no terceiro ano do Ensino Médio. Assim, os professores que aplicamos o questionário, estavam atuando nessa etapa de ensino ou já haviam atuado.

Por questões de ética, os dados dos voluntários que responderam ao questionário, como nome e idade serão mantidos em sigilo. O questionário encontra-se no Apêndice A deste trabalho.

4.3.3 Aplicação do questionário

A primeira questão, composta por uma pergunta fechada a qual o voluntário poderia escolher dentre as quatro opções, uma ou mais opções, eles deveriam responder sobre qual material que adota no decorrer das suas aulas sobre Poliedro.

Dos cinco professores, quatro responderam que utilizam o livro didático adotado pela instituição, três recorrem à material lúdico, como, por exemplo, sólidos geométricos e dois utilizam outro material. Dos que utilizam outro material durante suas aulas sobre Poliedros, um deles justificou que adota uma apostila de autoria própria para melhor visualização, e o outro, justificou que utiliza outro material elaborado por ele e por outro professor.

A segunda questão, também fechada, só que dicotômica, ou seja, com as opções “sim” e “não”, os voluntários deveriam responder se eles concordam que o livro didático ao qual utiliza, aborda de maneira clara o conteúdo de poliedros. Dentre os cinco professores, quatro responderam que **sim** e apenas um respondeu que **não**. Dos dois que justificaram as suas respostas, um que respondeu **sim**, julgava apropriado o conteúdo em si, mas não os exercícios, por serem em pouca quantidade e por serem simples. O outro, que respondeu **não**, justificou que em geral, não há muita aplicação e não abordam demonstrações no decorrer da apresentação do conteúdo.

A pergunta seguinte, os participantes deveriam responder a uma questão também fechada dicotômica, sobre a utilização de demonstrações nas suas aulas sobre poliedros. Todos responderam que recorrem sim às demonstrações. Dos que responderam, três justificaram que recorrem a diversos materiais didáticos para a realização das aulas. Um deles utilizam o livro da coleção Fundamentos de Matemática Elementar, juntamente com vídeos que fazem abordagem lúdicas e que justificam alguns conceitos. O segundo participante que justificou, recorre às construções de poliedros e planificações. O terceiro, recorre em suas aulas à apostila elaborada por ele e por outro professor, e o último, utiliza as demonstrações mais simples no quadro.

A quarta questão, composta por uma pergunta aberta, a qual os participantes deveriam mencionar maneiras que acreditam melhorar as suas aulas sobre poliedros. Os participantes responderam que poderiam melhorar aprimorando cada vez mais a questão da conceituação dos objetos envolvidos; estabelecer uma estratégia associada a prática com a teoria; melhorar os desenhos geométricos e procurar fazer aplicações práticas e utilizar ferramentas para ajudar na visualização das abstrações

e sempre que possível, utilizar softwares para abrir as figuras sólidas para os alunos entenderem melhor a planificação delas.

A última questão, os participantes deveriam responder se julgam importante usar demonstrações em sala para ensinar matemática na Educação Básica. A esta pergunta fechada, todos responderam que era **sim** importante as demonstrações. As justificativas das respostas foram várias, dois deles responderam que as demonstrações consolidam mais o conhecimento, ideias e argumentos. Os outros, justificaram que as demonstrações promovem o amadurecimento matemático do discente e oferece explicações para boa parte dos porquês matemáticos, e além disso, é importante que o aluno compreenda o caminho de formação dos conceitos matemáticos e não somente memorize o ponto já finalizado, sempre dentro do nível de maturidade da turma.

Constatamos, principalmente pelos resultados obtidos nas questões três e cinco, que os professores se sentem preocupados em que os seus alunos entendam o processo no qual um resultado foi obtido. De acordo com a questão um, apesar de a maioria dos participantes manusearem o livro didático, a questão três nos revela que principalmente no momento da demonstração os participantes recorrem à materiais diversificados pois nem sempre o livro didático traz aplicações sobre poliedros, demonstrações e exercícios que consideram como complexos.

A associação da teoria com a prática; ferramentas para a visualizações das abstrações; softwares para apresentação de sólidos; conceituação dos objetos envolvidos, foram os resultados obtidos da questão quatro. Ou seja, pela experiência dos docentes, o que mais julgaram dificultar a aprendizagem dos alunos no conteúdo de Geometria Espacial, foi a abstração que ela apresenta em determinados elementos.

Os resultados obtidos, dizem respeito a realidade vivenciada pelos professores da rede federal de ensino, mais especificamente no estado do Rio Grande do Norte, *Campus* Natal Central, embora seja provável encontrar uma realidade parecida nos outros institutos federais. Tratando-se da rede estadual de ensino, é notório que muitas escolas não oferecem um meio que favoreça aos professores a realizarem suas atividades com êxito, seja pelo espaço físico ou pela precariedade de materiais. Outro fator que pode ser decisivo no bom desempenho do profissional da educação é

o tempo que alguns dispõem para elaborar suas aulas, pois é comum assumirem dois ou até mesmo três turnos de aula seguidos, muitas vezes em escolas diferentes, ficando praticamente impossibilitados de realizarem os seus planejamentos.

Segundo o último Relatório de Pesquisa de Acompanhamento de Egressos (PAE), realizada em 2017 com egressos do IFRN, 84,2% dos egressos do nível médio estão **satisfeitos com a formação obtida** e cerca de 95,7% dos egressos do técnico integrado se mostram entre “muito satisfeitos” (50,4%) a “satisfeitos” com a **competência do corpo docente**. E especificamente no campus Natal-Central, se mostraram entre “muito satisfeitos” (64,0%) e “satisfeitos” (32,1%) sobre o **nível de satisfação geral do campus**. Uma das principais motivações de um professor, é querer fazer a diferença na vida dos seus alunos, e o que pode ser mais comum para isso acontecer, é tentar tornar seus métodos e técnicas cada vez mais interessantes e diversificadas. Essa pesquisa nos revela o quanto que adotar estratégias semelhantes às dos profissionais do IFRN-CNAT – utilizar outros materiais para complementar suas aulas, quando possível, ou sempre que julgar necessário, elaborar materiais com abordagens que sejam apropriadas para o público conhecido; apresentar materiais manipuláveis para os alunos para melhorar a visualização de conceitos abstratos, entre outros – pode mudar cada vez mais a realidade encontrada em sala de aula (alunos sem motivação para estudar, não conseguem enxergar aproximação dos conteúdos com a realidade fora de sala, entre outros).

Assim, mesmo em meio a tantas dificuldades encontradas na vida profissional dos educadores, é sempre satisfatório conduzir novos caminhos que levem os discentes a experiências diferentes. É claro que não é apenas papel do professor tornar o ensino um sucesso, muitos fatores envolvem esse processo, mas tratamos aqui apenas esse.

5 MATERIAIS COMPLEMENTARES E ROTEIRO DE AULA SOBRE POLIEDROS UTILIZANDO MATERIAL COMPLEMENTAR

O livro continua sendo o mais fiel aliado do professor e um recurso imprescindível para os alunos (VERCEZE, 2008). Por outro lado, o livro didático não pode ser considerado como uma fonte considerada capaz de proporcionar aos professores, argumentos suficientes que possa impulsionar o desenvolvimento completo da personalidade dos alunos e conceber uma responsabilidade de natureza política e social. (VERCEZE, 2008, p. 87). Nesse aspecto, com tantos aparatos didáticos que estão todos os dias sendo disponibilizados nos meios físicos e virtuais, cabe ao educador, selecionar e organizar diferentes alternativas para viabilizar o processo ensino-aprendizagem.

É diante desse contexto que este trabalho propõe um roteiro de aula com materiais que complementam o livro didático e que está de certa forma ao alcance dos professores de Matemática, visando auxiliar o professor na busca de materiais que apresentam o conteúdo de Poliedros, ampliando as opções de abordagens de demonstrações e das condições de existências de um poliedro convexo.

5.1 MATERIAIS COMPLEMENTARES

Apresentaremos materiais virtuais disponíveis sem custo pelo acesso e materiais físicos que são encontrados com facilidade em livrarias e sites.

5.1.1 Revista do professor de Matemática (RPM)

Bastante conhecida pela comunidade que apreciam e estudam matemática, de acordo com o site da própria revista, suas publicações são destinadas aos que ensinam matemática, especialmente nas séries finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. A revista publica artigos de matéria de nível elementar ou avançado, que seja acessível ao professor do Ensino Médio e a alunos de cursos de Licenciatura

em Matemática. Publica também experiências interessantes em sala de aula, um problema que suscita uma questão pouco conhecida, uma história que mereça ser contada ou até uma nova abordagem de um assunto conhecido.

Além dos artigos há as seções: Problemas, O Leitor Pergunta, Livros, Cartas do Leitor, Painéis, etc. Nas seções a revista "conversa" com o leitor, publicando problemas e/ou soluções propostas por eles, cartas, resenhas de livros, erros encontrados em textos didáticos, etc. sempre visando o aperfeiçoamento do trabalho do professor na sua sala de aula.

5.1.2 Livros

a) A Matemática do Ensino Médio volume 2

O livro A Matemática do Ensino Médio, volume 2, foi escrito por Elon Lages Lima (e outros autores) para professores do Ensino Médio e estudantes de Licenciatura em Matemática e cobre os principais assuntos estudados na segunda série do Ensino Médio. A obra é dividida em duas partes bem distintas, a primeira é dedicada à Matemática discreta e a segunda, a que mais nos interessa aqui, é dedicada à Geometria Espacial e tem duas preocupações principais. A primeira é oferecer uma boa fundamentação do assunto para o professor, discutindo diversas formas de levar esses fundamentos para os alunos. A segunda é apresentar, em cada tópico, sugestões de atividades em sala de aula que visam tornar o assunto mais interessante para o aluno e facilitar o desenvolvimento de sua visão e intuição espacial.

b) Meu Professor de Matemática e outras histórias

Pensado e escrito para ser útil aos professores de Matemática dos últimos anos de ensino, aos alunos dos cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática, o livro Meu professor de Matemática e outras histórias, apresenta crônicas e comentários de temas estudados nos últimos três anos que antecedem a Universidade. Os tópicos do livro são abordados de forma clara e sutil, mas com a devida seriedade de modo a situar a matemática num contexto cultural, histórico e

didático. A obra foi desenvolvida também por Elon Lages Lima e contém um material considerado mais aprofundado do que o livro anterior sobre a Relação de Euler.

c) Fundamentos de Matemática Elementar

Fundamentos da Matemática Elementar é uma coleção que oferece conteúdos de matemática elementar para atender alunos do Ensino Médio que procuram uma formação mais aprofundada, estudantes em fase pré-vestibular e também universitários que necessitam rever a Matemática Elementar. Os volumes contêm teoria e exercícios de aplicação, além de uma seção de testes de vestibulares, acompanhados de respostas. Há ainda uma série de artigos sobre a história da Matemática relacionados aos temas abordados

O volume 10 dessa coleção, trata do conteúdo de Geometria Espacial. No capítulo sobre Poliedros, podemos encontrar a demonstração do Teorema de Euler, que assim como alguns materiais que mencionaremos a seguir, também utiliza a fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono convexo, o que o torna bastante viável para ser utilizado com alunos do Ensino Médio.

5.1.3 Artigos

a) Demonstração do teorema de Euler para poliedros convexos

Esse artigo, publicado na RPM nº 3 (1983) pelo professor Zoroastro Azambuja Filho, é tão importante para o estudo dos Poliedros, que a demonstração contida nele é mencionada e apresentada nos dois livros que mencionamos acima. Trata-se de uma demonstração para poliedros convexos que foi motivada por outra feita pelo professor Elon Lages Lima, e que é considerada acessível aos alunos do Ensino Médio por ser utilizada a soma dos ângulos interno de um polígono convexo.

b) $V - A + F = 2$ Existe o Poliedro?

Publicado na RPM nº 47, o artigo foi desenvolvido pelo professor Eduardo Wagner e trata sobre as condições que devem ser impostas aos números V , F e A , além do Teorema de Euler para que se possa garantir a existência de um Poliedro

com esses números de vértices, faces e arestas. Pelos materiais que mencionamos aqui, esse artigo nos atenta para uma importante ferramenta de compreensão no estudo sobre poliedros, no qual, os outros deixam um pouco a desejar.

5.2 ROTEIRO DE AULA

As sugestões que apresentaremos, objetiva incentivar os educadores do Ensino Médio a buscarem materiais que abordam temas de maneira mais minuciosa do que normalmente os livros didáticos propõe. Não só pelo fato de poder trazer à sala um conteúdo mais diversificado, mas também para que o professor possa estar seguro sobre o conteúdo no qual está trabalhando. A proposta busca estimular o uso da demonstração do Teorema de Euler e também dar uma atenção a mais às condições que devem ser impostas para a existência de um poliedro, conteúdos nos quais podemos perceber que são deixados de lado em alguns livros didáticos e, possivelmente, na sala de aula.

Por ser considerado um conteúdo amplo, fica a critério do professor, dentro da sua realidade, mesclar as sugestões aqui indicadas com outras propostas de atividade, de forma que o conteúdo programático não seja comprometido.

5.2.1 Plano de aula

Quadro 1- Plano de aula

| | | |
|--|----------------------|---------------|
| Escola: | | |
| Ano: | Turma: | Turno: |
| Data: | Duração: 6h/a | |
| Professor: | | |
| TEMA | | |
| Geometria Espacial: Poliedros e Relação de Euler | | |
| CONTEÚDOS | | |

Poliedros convexos e côncavos;

Relação de Euler

Contexto histórico da Relação de Euler e vida de Leonhard Euler;

Soma dos ângulos internos de um polígono convexo;

Condições de existência de um Poliedro convexo;

Poliedros regulares (de Platão) e irregulares;

OBJETIVOS

Geral:

Compreender as principais definições, propriedades e especificidades dos Poliedros;

Específicos:

Diferenciar os elementos *face*, *aresta* e *vértice* de um Poliedro;

Identificar os Poliedros convexos e os côncavos;

Identificar os Poliedros eulerianos;

Identificar os Poliedros de Platão;

Identificar os Poliedros regulares;

Relembrar da fórmula da soma dos ângulos internos de um Poliedro convexo;

Entender os processos que resultaram na Fórmula de Euler;

Reconhecer as condições de existência de um Poliedro convexo.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Apresentamos a seguir, os tópicos do roteiro da aula que se encontra mais detalhado na seção 4.2.2.

1. Iniciar as aulas apresentando elementos como embalagens de produtos normalmente utilizados com frequência, obras arquitetônicas, entre outras. Fazer relação desses elementos com o conteúdo que será estudado.
2. Definir Poliedros a partir da identificação dos seus elementos.
3. Apresentar a Fórmula de Euler e comentar sobre a vida de Leonhard Euler;
4. Relembrar a fórmula da soma dos ângulos internos de um Poliedro convexo para iniciar a demonstração da Relação de Euler;
5. Ressaltar que a Relação vale para todo Poliedro convexo, embora seja possível encontrar um não convexo no qual a relação também vale (exemplificar);
6. Apresentar as demais condições para a existência de um Poliedro convexo;
7. Continuar o conteúdo com as definições e exemplos de Poliedros Regulares, ressaltando as condições para ser um Poliedro de Platão;

| AVALIAÇÃO |
|---|
| Avaliação poderá ser feita levando em consideração a participação individual, envolvimento, interesse na aula e nos exercícios propostos. |
| INDICAÇÕES BIBLIOGRÁFICAS |
| DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de Matemática elementar . 5 ed. São Paulo: Atual, 2005. |
| FILHO, Zoroastro Azambuja. Demonstração do teorema de Euler para poliedros convexos . 3. Ed., 1983. Disponível em < http://rpm.org.br/cdrpm/3/5.htm >. Acesso em 15 de maio de 2018. |
| LIMA, Elon Lages et al. A matemática do Ensino Médio, volume 2 . Rio de Janeiro: SBM, 2006. |
| LIMA, Elon Lages. Meu professor de Matemática e outras histórias . 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. |
| WAGNER, Eduardo. V-A+F=2. Existe o Poliedro? 47. ed., 2001. Disponível em < http://rpm.org.br/cdrpm/47/2.htm >. Acesso em 15 de maio de 2018. |

Fonte: Elaboração própria em 2019

5.2.2 Descrição do roteiro de aula

Para introduzir o conteúdo, o professor poderá levar alguns exemplos (em *slides*, por exemplo) de poliedros ou até mesmo os construídos com cartolina, palito ou qualquer tipo de material que não seja muito frágil. Poderá buscar também imagens das obras de engenharia, arquitetura, embalagens de produtos que normalmente são utilizados com frequência, entre outros. Pois quanto mais próximo da realidade dos alunos o conteúdo pareça estar, mais significativo será para eles (PERUZZI; FOFONKA, s.d., p.1). Será importante algumas figuras ter seus elementos (vértice, face e arestas) bem evidenciados, já que será necessário definir cada um deles. Após definir o que é um Poliedro, o professor poderá falar sobre a convexidade e concavidade de um poliedro, podendo também ser projetado por meio de *slides* exemplos dos dois tipos. Nessa parte introdutória poderá ser utilizado o conteúdo do próprio livro didático ou nos materiais que aqui mencionamos.

Dando continuidade, poderá comentar sobre a Relação de Euler. Para isso, o professor poderá relatar alguns aspectos sobre a vida de Euler, as contribuições na matemática e sua surpreendente história de superação quando ficou cego. Após isso, apresentar a fórmula e dar início a demonstração. A demonstração poderá ser a encontrada nos materiais que mencionamos. Porém, antes de ser iniciada, será indispensável uma breve revisão sobre a fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono convexo, já que é a principal ferramenta nessa demonstração.

Feito isso, é bastante relevante ser deixado claro para o aluno que a relação vale para todo poliedro convexo, embora seja possível encontrar exemplos de poliedros não convexos no qual a relação ainda funcione (distinguir com figuras os dois casos dos poliedros não convexo onde um obedece a relação e o outro não, e o caso mais comum do poliedro convexo). Além dessa observação, o educador poderá ressaltar também que dados três números V , A e F , tais que $V - A + F = 2$, nem sempre existe um poliedro que tenha V vértice, A arestas e F faces, e mostrar um exemplo onde isso ocorre. Após perceber que os alunos compreenderam bem esta observação, explicar para eles que são necessárias outras condições para que possamos garantir a existência de um poliedro. Essas condições estão bem definidas em um dos artigos que mencionamos, e em sala poderá ser feito apenas uma explicação bem detalhada sobre cada uma das condições (com contraexemplos, por exemplo) ou fica a critério do professor demonstra-las.

Na sequência, iniciar o estudo dos poliedros regulares, começando pelas definições e exemplos de poliedros regulares e não regulares. Em alguns livros didáticos, há a demonstração da propriedade que diz que existe apenas cinco poliedros regulares convexos, podendo ser encontrada também nos livros que aqui mencionamos. Por ser considerada curta e de fácil acesso, a demonstração motiva mais ainda sua apresentação no decorrer do conteúdo. Após comentar que existem apenas cinco poliedros regulares convexos, concluir que são conhecidos como poliedros de Platão e ressaltar que um poliedro é denominado de Platão se e somente se, forem verificados três condições, sendo elas: todas as faces têm o mesmo número de arestas, em todos os vértices concorre o mesmo número de arestas e vale a relação de Euler. Ou seja, todos os poliedros regulares convexos são poliedros de Platão.

O estudo dos Poliedros a partir daqui, poderá ser decidido pelo professor, através da sequência que propõe os livros didáticos, ou da forma que decidir conveniente.

A quantidade de aulas necessárias para o cumprimento desse conteúdo, dependerá muito do desenvolvimento da turma, do tempo disponível para a realização do conteúdo previsto, dentre outros fatores. Em média, pode-se considerar uma carga horária de seis horas aulas (6h/a) para o desenvolvimento do conteúdo. Entre uma explicação e outra, os exercícios para verificação de uma propriedade e para fixar bem cada conteúdo poderá melhorar ainda mais o desempenho dos alunos no decorrer das aulas.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em nosso trabalho, mencionamos e analisamos materiais que são destinados principalmente para os professores de Matemática do Ensino Médio. Além disso, contamos com a participação de alguns profissionais da área para contribuir com respostas à questionamentos acerca do uso desses materiais na prática (em sala de aula). Com a análise dos livros didáticos, podemos observar que apesar de ainda ser um dos materiais mais utilizados pelos professores na sala de aula, algumas etapas importantes para o processo ensino-aprendizagem são esquecidas e deixadas apenas para materiais considerados “de apoio”, destinados para aqueles que querem um estudo mais aprofundado. Por esse motivo, o livro didático não deve ser a única fonte que direciona o educador em suas aulas, por mais natural que possa ser. Observamos também, com a aplicação do questionário, que os professores que participaram, sempre que possível, utilizam outros materiais além do livro didático adotado pela instituição que ensina principalmente para ser possível utilizar as demonstrações em sala. Por intervenção dos resultados obtidos, foi possível elaborar um roteiro de aula e seleção de materiais complementares, pretendendo que os profissionais da educação tenham, com isso, maiores aparatos que justifiquem o que é ensinado em sala de aula, sintam segurança quanto a utilização de provas e demonstrações, além de trazer uma abordagem diferenciada em relação aos livros didáticos. Enquanto a Relação de Euler, encontramos contradição sobre as abordagens nos livros didáticos pesquisados. Enquanto nos três livros analisados não observamos demonstração da fórmula de Euler, a maioria dos livros analisados pela pesquisa do livro Exame de Textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio, embora incorreta, apresentaram a demonstração para a Relação de Euler. O que torna ainda mais um fator que deve ser levado em consideração nas abordagens do livro didático, não apenas abordar as provas e demonstrações, mas estar atento quanto a veracidade das mesmas.

Compreendendo melhor as propriedades, definições, o sentido de provas e demonstrações, a Geometria Espacial apresenta-se com maior sentido, ao passo que abordagens de materiais diversificados oferecem aos discentes uma ampliação do ensino obtido. É nesse sentido que o professor se torna um dos principais

responsáveis de viabilizar e favorecer um ensino com embasamentos tanto práticos quanto teóricos visando possibilitar a seus alunos um ensino cada vez mais consistente.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Cristóvão Domingos de; GUINDANI, Joel Felipe; SÁ-SILVA, Jackson Ronie. **Pesquisa documental: pistas teóricas e metodológicas.** Revista Brasileira de História e Ciências Sociais. Rio Grande do Sul, n.1, p. 1-15, jul. 2009.

ALMOULOUD, Saddo. **Prova e demonstração em Matemática:** problemática de seus processos de ensino aprendizagem. São Paulo, n.19, p. 1-18, 2007.

AZEREDO, Francieli Gonçalves; SANTOS, Mariana Domingues. **Análise de livro didático adotado por escola de população pesqueira e proposta de material complementar.** 2013. Trabalho de Conclusão de Curso (Ciências Biológicas) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2013.

BAGDATLI, Melda. **Descartes'in Beynindeki Tuhaf bombe.** Disponível em < <https://kurious.ku.edu.tr/haberler/descartesin-beynindeki-tuhaf-bombe/>> Acesso em : 2 dez. 2018.

BOCCATO, V. R. C. **Metodologia de pesquisa bibliográfica na área odontológica e o artigo científico como forma de comunicação.** Revista de Odontologia da Universidade Cidade de São Paulo. São Paulo, 2006.

BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.** 1997.

BRIANEZ, Fabiana. **Conceito e Propriedades Elementares de Poliedros e seu Ensino.** 2013. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2013.

CASTRO, José Victor Barbosa Jardim. **Poliedros.** Disponível em <<https://www.infoescola.com/geometria-espacial/poliedros>> Acesso em: 16 out. 2018

COSTA, Fabiano Armstrong Pinto. **Demonstrações matemáticas.** 2015. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2005.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática:** contexto e aplicações: ensino médio. 3. Ed. São Paulo: Ática, 2016.

UNIVERSIDADE DE COIMBRA. Departamento de Matemática. **História da geometria:** Os Poliedros. Disponível em <<http://www.mat.uc.pt/~mat1131/Historias%20Geometria.pdf> > Acesso em: 2 dez. 2018

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática elementar.** 5. ed. São Paulo: Atual, 2005.

FERNANDES, Adelgise Silva Moreno; SILVA, Anne Karine Muniz da; GARCIA; Maria de Fátima. **O livro didático e a prática docente: verificando a aprendizagem significativa no 4º ano do ensino fundamental.** Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, [s.d.].

FILHO, Zoroastro Azambuja. **Demonstração do teorema de Euler para poliedros convexos.** 3. ed, 1983. Disponível em < <http://rpm.org.br/cdrpm/3/5.htm>>. Acesso em: 15 maio 2018.

FIORENTINI, D; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos.** 2.ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2007. (Coleção formação de professores).

FARIA, Juliano Espezim Soares. **Demonstrações no ensino fundamental e médio.** 2002. 65f. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2002.

GUIMARÃES, Camila; SEMIS, Laís. **32 respostas sobre a Base Nacional Comum Curricular.** Nova Escola. Disponível em < <https://novaescola.org.br/conteudo/4784/32-respostas-sobre-a-base-nacional-comum-curricular>>. Acesso em 13 mar 2019.

IEZZI, Gelson *et al.* **Matemática: ciência e aplicação: ensino médio, volume 2.** 9. Ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

LIMA, Elon Lages *et al.* **A matemática do Ensino Médio, volume 2.** Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, Elon Lages. **Exame de Textos: Análise de livros de matemática para o Ensino Médio.** 1 ed. Rio de Janeiro. 2001.

LIMA, Elon Lages. **Meu professor de Matemática e outras histórias.** 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, Marcella Luanna da Silva. **Sobre Provas e Demonstrações na aprendizagem da Geometria no Ensino Médio utilizando o aplicativo GeoGebra.** [s.d.]

MARTINES, Mônica de Cássia Siqueira. **Algumas Observações sobre a Característica de Euler: Uma Introdução de Elementos da História da Matemática no Ensino Médio.** 2009. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2009.

MASCARENHAS, Jorge Alécio. **Uma Análise do Ensino de Geometria no Ensino Médio Através do Teorema de Euler para poliedros convexos.** 2013. Dissertação (mestrado em matemática) - Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2013.

- MIALICH, Flávia Renata. **Poliedros e Teorema de Euler**. 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2013.
- LEONARDO, Fábio Martins (ed.). **Conexões com a matemática**. 3. ed. São Paulo : Moderna, 2016.
- MONZATO, Antonio José; SANTOS, Adriana Barbosa. **A elaboração de questionários na pesquisa quantitativa**. Departamento de Ciência de Computação e Estatística – IBILCE – UNESP, São Paulo, [s.d.].
- PERUZZI, Sarah Luchese; FOFONKA, Luciana. **A importância da aula prática para a construção significativa do conhecimento: a visão dos professores das ciências da natureza**. [s.l.], 2014
- PIETROPAOLO, Ruy Cesar. **(Re) significar as demonstrações nos currículos da educação básica e da formação de professores de matemática**. 2005. Tese (Doutorado em educação matemática) – Pontifícia Universidade Católica , São Paulo, 2005.
- RICHESON, David S. **V - A + F = 2, a fórmula de Euler para os poliedros**. Disponível em <<https://www.publico.pt/2015/03/21/ciencia/noticia/v-a-f--2-a-formula-de-euler-para-os-poliedros-1689781>> Acesso em: 2 dez. 2018.
- RODRIGUES, Margarida. **O papel das funções da demonstração no desenvolvimento dos esquemas demonstrativos dos alunos**. Lisboa, p. 438-456, maio 2013.
- SAMPAIO, Marcus Vinicius Duarte. **Relatório da Pesquisa de Acompanhamento de Egressos (PAE) 2017**. Instituto Federal de educação, ciência e tecnologia do Rio Grande do Norte, Natal, 2018.
- SILVA, Danilo Bernardini. **DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS: Uma abordagem histórica desde a antiguidade até as aulas de Matemática atuais**. 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade federal do ABC, São Bernardo do Campo, 2013.
- TERTULINO, Ciro Italo *et al.* **Guia de normalização: trabalhos de conclusão de curso (tcc)**. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte, Natal, 2013.
- VERCEZE, Rosa Maria Aparecida Nechi; SILVINO, Eliziane França Moreira. **O livro didático e suas implicações na prática do professor nas escolas públicas de guajará-mirim**. 4.ed. v.4. Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, 2008.
- VILLIERS, Michael D. de. **Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad**. Educação e Matemática, n.62, abril 2001.

VYGOTSKY, L. S. Interação entre aprendizado e desenvolvimento. In: **A formação social da mente**. 4. ed. São Paulo : Martins Fontes, 1991.

WAGNER, Eduardo. **V-A+F=2. Existe o Poliedro?**. 47 ed, 2001. Disponível em <<http://rpm.org.br/cdrpm/47/2.htm>>. Acesso em: 15 maio 2018.

WIKIPEDIA. **Leonhard Euler**. Disponível em <https://en.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler> . Acesso em: 31 out. 2018.

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO APLICADO AOS PROFESSORES DO IFRN-CNAT

IFRN - CNAT- DIAC - COESUP
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Esta pesquisa tem por título “Uma análise da proposta dos livros didáticos de matemática do ensino médio sobre as condições de existência de um poliedro convexo” e objetiva analisar como o conteúdo de Poliedros está sendo abordado pelos livros didáticos e pelo professor de Matemática do Ensino Médio. A pesquisa é realizada pela aluna Ana Paula da Silva Zuza e orientada pelo professor Francisco Batista de Medeiros.

DATA: __/__/_____.

CONCORDA EM PARTICIPAR DA PESQUISA E AUTORIZA QUE AS INFORMAÇÕES SEJAM UTILIZADAS EM ESTUDOS ACADÊMICOS?

() SIM () NÃO

I - IDENTIFICAÇÃO

1 IDADE:

2 SEXO:

3 FORMAÇÃO:

4 TEMPO DE ATUAÇÃO NO 2º ANO DO ENSINO MÉDIO:

II - QUESTIONÁRIO

QUESTÃO 1: Que material didático você utiliza na sua aula sobre Poliedros?

- () Livro adotado pela instituição
() Outro livro
() Material lúdico como por exemplo, sólidos geométricos
() Outro material

JUSTIFIQUE O USO:

QUESTÃO 2: Você acha que o livro didático que utiliza aborda de maneira clara o conteúdo Poliedros?

() sim

() não

Por quê?

QUESTÃO 3: Você utiliza alguma demonstração durante suas aulas sobre Poliedro?

() Sim

() Não

Se utiliza, a qual material didático você recorre?

QUESTÃO 4: De que maneira você acha que poderia melhorar sua aula sobre Poliedros?

QUESTÃO 5: Você julga importante utilizar demonstração em sala para ensinar Matemática na Educação Básica?

- Sim
 Não
 Em parte

JUSTIFIQUE:

GRATA POR SUA COLABORAÇÃO!
A PESQUISADORA