INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO RIO GRANDE DO NORTE

AMANDA RAPHAELA PACHÊCO DE MELO

# ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA PARA ALÉM DO LIVRO DIDÁTICO

SANTA CRUZ – RN
2017

AMANDA RAPHAELA PACHÊCO DE MELO

# ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA PARA ALÉM DO LIVRO DIDÁTICO

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte, como Trabalho de Conclusão de Curso, em cumprimento às exigências legais como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Dra. Lenina Lopes Soares Silva
Co-orientadora: M. ª Rosângela Araújo da Silva

SANTA CRUZ – RN
2017

AMANDA RAPHAELA PACHÊCO DE MELO

**ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA PARA ALÉM DO LIVRO DIDÁTICO**

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte, como Trabalho de Conclusão de Curso, em cumprimento às exigências legais como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Monografia apresentada e aprovada em ___/___/_____, pela seguinte Banca Examinadora:

BANCA EXAMINADORA

_____
Lenina Lopes Soares Silva, Dra. – Presidente
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte

_____
Rosângela Araújo da Silva, M. ª – Examinadora
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte

_____
Emanuel Adriano Dantas, M. e – Examinador
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte

_____
Rita de Cássia Rocha, M. ª – Examinadora
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte

*In memoriam*

A minha amada avó, Marinete Alves da Silva Araújo, um exemplo de força e honestidade.

A minha irmã Ana Karina Pachêco de Melo.

## AGRADECIMENTOS

A minha mãe Auciene Araújo, que sempre esteve ao meu lado, me incentivando e acreditando na minha caminhada. Agradeço pela dedicação e pelo sincero amor que tens dedicado a mim em todos os momentos.

Aos meus irmãos, Lucas Melo e Isabela Melo, pelo amor, estímulo e paciência.

A minha tia Eridan Araújo, pelo apoio e carinho.

Agradeço ainda com afeto a todos os meus familiares e amigos.

A professora Lenina Lopes, que sempre incentivou meus estudos e pesquisas. Agradeço pela confiança, dedicação e pelas inúmeras orientações. Lenina, tuas contribuições foram de suma importância para minha formação.

A professora Rosângela Araújo, pela disponibilidade e colaboração. Tenho enorme respeito e admiração pela profissional que és.

Aos professores do IFRN, em especial a Aldrin Rufino, Juan Carlo, Thiago Jefferson e Jamerson Confort.

Aos meus amigos do IFRN, Janielison Santos, Jorge Souza, Maxsuel Emiliano, Jobson de Farias, Josimário Basto e Josivânia Abdala, pela convivência e amizade durante todo o curso.

## RESUMO

A Análise Combinatória está inserida entre os conteúdos matemáticos trabalhados no Ensino Médio e constituiu-se como o objeto de estudo da pesquisa de base desta monografia. Nesta, objetivamos mapear para refletir sobre a produção do conhecimento acerca de Análise Combinatória publicada no Boletim de Educação Matemática (BOLEMA) e também analisar a forma com que esse conteúdo tem sido abordado na coleção de livros didáticos Conexões com a Matemática (LEONARDO, 2013). De posse das informações coletadas e analisadas construímos a explicação sobre a temática em dois capítulos e elaboramos quatro atividades para o ensino de Matemática como propostas para trabalhar o conteúdo em estudo no Ensino Médio, visando colaborar com esse ensino para além do que preceituam os livros didáticos, como uma ação demandada dos resultados da pesquisa, o que a configura como uma pesquisa aplicada. Diante disso, a metodologia de pesquisa empregada se insere na área de ensino de Matemática com ênfase em procedimentos derivados de pesquisas bibliográficas e documentais em perspectiva aplicada, portanto, pode ser entendida como uma forma de pesquisa-ação-aplicada. Nesse sentido, pretendemos contribuir para a compreensão da forma como esse conteúdo é ensinado e tem sido tratado no processo de ensino e de produção de conhecimento e sugerimos atividades de ensino a fim de apoiar o trabalho pedagógico realizado no Ensino Médio para além do livro didático.



**Palavras-chave:** Análise Combinatória; Ensino Médio; Bolema; Livro Didático.

**ABSTRACT**

The Combinatorial Analysis is inserted among the mathematical contents worked in High School and was constituted as the object of study of the research of this monograph basis. In this paper, we aim to map to reflect on the production of knowledge about Combinatorial Analysis published in the Bulletin of Mathematical Education (BOLEMA) and also for analyzing how this content has been approached in the Connections didactic textbooks collection with Mathematics (LEONARDO, 2013). By the information collected and analyzed, we constructed the explanation on the theme in two chapters and we elaborated four activities for the teaching of Mathematics as proposals to work the studying content in High School, aiming to collaborate with this teaching beyond what of precepts didactic textbooks, as a demanded action of the research results, which configures it as an applied research. Therefore, the applied research methodology is inserted in the area of Mathematics teaching with emphasis on procedures derived from bibliographic and documentary research in applied perspective, therefore, can be understood as a form of applied-action research. In this sense, we intend to contribute to the understanding of how this content is taught and has been treated in the process of teaching and production of knowledge and we suggest teaching activities in order to support the pedagogical work carried out in High School beyond the didactic book.
**Keywords:** Combinatorial Analysis; High school; Bolema; Didactic Textbook.

**SUMÁRIO**

**INTRODUÇÃO** ..... 09
**2 ANÁLISE COMBINATÓRIA: DA CONSTRUÇÃO HISTÓRICA À PRODUÇÃO DO CONHECIMENTO NO BRASIL** ..... 13
2.1 ANÁLISE COMBINATÓRIA NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA ..... 13
2.2 CONCEITOS DA ANÁLISE COMBINATÓRIA ..... 19
**2.2.1 Princípios Fundamentais da Contagem** ..... 20
**2.2.2 Permutações** ..... 20
**2.2.3 Arranjo Simples** ..... 21
**2.2.4 Combinação Simples** ..... 21
2.3 A PRODUÇÃO DO CONHECIMENTO ACERCA DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NO BOLETIM DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DO BRASIL ..... 22
**3 ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO** ..... 29
3.1 O LIVRO DIDÁTICO NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM ..... 31
3.2 O QUE PROPÕEM OS LIVROS DIDÁTICOS DA COLEÇÃO CONEXÕES COM A MATEMÁTICA PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DE ANÁLISE COMBINATÓRIA ..... 34
**3.2.1 Identificação do livro** ..... 34
**3.2.2 Critérios de análise geral do livro** ..... 35
**3.2.3 Critérios de análise do capítulo sobre Análise Combinatória** ..... 38
**4 PESQUISA-AÇÃO-APLICAÇÃO: ATIVIDADES PROPOSTAS** ..... 49
4.1 ATIVIDADE 1 – UTILIZANDO PERMUTAÇÃO NA CRIPTOGRAFIA ..... 49
**4.1.1 Plano da Atividade 1** ..... 49
4.2 ATIVIDADE 2 – QUANTAS RODAS DE CIRANDA PODEMOS FORMAR? ..... 54
**4.2.1 Plano da atividade 2** ..... 54
4.3 ATIVIDADE 3 – ANALISANDO OS JOGOS DO CAMPEONATO POTIGUAR DE FUTEBOL FEMININO DE 2017 ..... 56
**4.3.1 Plano de Atividade 3** ..... 56
4.4 ATIVIDADE 4 – *SOFTWARE* GEOMETRIA DO TÁXI – CONTAGEM ..... 58
**4.4.1 Plano da Atividade 4** ..... 59
**CONCLUSÃO** ..... 64
**REFERÊNCIAS** ..... 66

## INTRODUÇÃO

A Análise Combinatória é um ramo da Matemática voltado para o estudo das estruturas e relações discretas. Esse conteúdo tem um vasto campo de aplicação, atuando como ferramenta no estudo de outros ramos da Matemática, assim como em outras áreas do conhecimento, tais como: Informática, Química, Geologia, Engenharia, entre outras.

O ensino de Análise Combinatória, quando explorado de maneira adequada, contribui para o desenvolvimento do raciocínio lógico e colabora com a aquisição de competências relativas à formação do cidadão. Neste sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais + (PCN+) apontam que,

> Este tema estruturador permite o desenvolvimento de várias competências relativas à contextualização sociocultural, como a análise de situações reais presentes no mundo contemporâneo e a articulação de diferentes áreas do conhecimento. Contribui também para a compreensão e o uso de representações gráficas, identificação de regularidades, interpretação e uso de modelos matemáticos e conhecimento de formas específicas de raciocinar em Matemática (BRASIL, 2002, p. 127).

Desde 2013, quando ainda estava no 1º período do curso de Licenciatura em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte, desenvolvi atividades como bolsista vinculada ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID). No decorrer dos acompanhamentos de aulas dos professores de Matemática e nas aulas de reforço escolar, mostrou-se evidente que o ensino desse conteúdo no Ensino Médio tem se limitado a aplicação e memorização de fórmulas, esse modo sugere uma prática de ensino meramente instrumental. Isto, em nosso entendimento, prejudica a aprendizagem dos alunos, mesmo que esses tenham o reforço do livro didático.

Considerando que, Análise Combinatória representa uma importante ferramenta para a formação do sujeito como cidadão e usuário dos conhecimentos de Matemática por esses estarem relacionados com atividades do cotidiano, este trabalho tem como objeto de estudo a abordagem da Análise Combinatória no Ensino Médio.

Neste contexto, sendo um conteúdo imprescindível à formação do aluno, consideramos que seu ensino deva ser analisado de forma substantiva e em contexto pela via de sua produção em termos de como ele é produzido para a área e

como é abordado para o ensino? De igual modo, como os seus conteúdos são veiculados nos livros didáticos para a etapa de ensino referida? São essas questões que conduzirão nossas investigações sobre Análise Combinatória no contexto do Ensino Médio.

Portanto, este trabalho tem como objetivo investigar a produção de conhecimento acerca da Análise Combinatória visando mapeá-la para que possamos fazer reflexões sobre seu ensino e, além disso, para subsidiar a análise da forma como esse conteúdo tem sido abordado na coleção de livros didáticos Conexões com a Matemática (LEONARDO, 2013). De posse das informações coletadas e analisadas elaboramos atividades de ensino como propostas para trabalhar o conteúdo de Análise Combinatória no Ensino Médio, visando colaborar com esse ensino para além do que preceituam os livros didáticos.

A metodologia empregada no presente trabalho se insere predominantemente no campo das pesquisas bibliográfica e documental, tal que buscamos levantar e analisar de forma reflexiva fontes já publicadas por meios escritos e eletrônicos.

Concernente ao caráter bibliográfico, utilizamos o formato de pesquisa conhecida como “estado da arte” ou “estado do conhecimento”. Esta metodologia de pesquisa visa mapear, analisar e discutir acerca da produção acadêmica de um determinado saber científico. Ainda, de acordo com Ferreira (2002), as pesquisas do estado do conhecimento

> [...] também são reconhecidas por realizarem uma metodologia de caráter inventariante e descritivo da produção acadêmica e científica sobre o tema que busca investigar, à luz de categorias e facetas que se caracterizam enquanto tais em cada trabalho e no conjunto deles, sob os quais o fenômeno passa a ser analisado. (FERREIRA, 2002, p. 258).

Desse modo, este estudo assume encadeamentos que o inserem na pesquisa-ação, todavia, salientamos que a ação aqui é como produção de atividades para aplicação no ensino de Matemática, e não como, método de pesquisa, mas como sua finalidade. Segundo Severino,

> A pesquisa ação é aquela que, além de compreender, visa intervir na situação, com vistas a modificá-la. O conhecimento visado articula-se a uma finalidade intencional de alteração da situação pesquisada. Assim, ao mesmo tempo que realiza um diagnóstico e a análise de uma determinada situação, a pesquisa-ação propõe ao conjunto de sujeitos envolvidos mudanças que levem a um aprimoramento das práticas analisadas. (SEVERINO, 2007, p. 120).

A pesquisa-ação como estratégia de pesquisa supõe uma participação planejada do pesquisador na situação trabalhada, que é o formato no qual desenvolvemos esta pesquisa. Desse modo, Fonseca (2002, *apud* GERHARDT; SILVEIRA, 2009, p.40) destaca que, “o processo de pesquisa recorre a uma metodologia sistemática, no sentido de transformar as realidades observadas, a partir da sua compreensão, conhecimento e compromisso para a ação dos elementos envolvidos na pesquisa”. Então, esta pesquisa pode ser assim considerada, pois parte de uma realidade observada *in loco*, vai à produção de conhecimentos sobre o assunto observado, passa por um dos instrumentos de acesso a esse conhecimento e chega à ação, portanto, em termos metodológicos podemos considerá-la como pesquisa-ação-aplicação.

Este trabalho está estruturado em cinco seções. Na primeira (introdutória) discutimos o objeto e a formulação deste como temática, os problemas, os objetivos e a metodologia de pesquisa, bem como a justificamos. Além disso, apontamos a metodologia empregada, refletindo acerca da pesquisa bibliográfica e documental, estado da arte e/ou estado de conhecimento, bem como salientando os encadeamentos dos caminhos metodológicos que conduzem à pesquisa-ação-aplicação, termo cunhado por nós para esta pesquisa. Isso porque ao enveredarmos para a elaboração de atividades como proposta de ensino consideramos ser essa uma forma de ação-aplicação derivada de uma pesquisa.

Na segunda seção, abordamos os aspectos históricos da Análise Combinatória, apresentando também os conceitos e definições básicas deste conhecimento. Exploramos ainda, o estudo sobre a produção de conhecimento presente no Boletim de Educação Matemática (BOLEMA), um dos principais periódico brasileiro vinculado ao ensino de Matemática como forma de explicação do objeto de pesquisa.

Na terceira seção discutimos sobre a abordagem do conteúdo de Análise Combinatória no Ensino Médio e apresentamos reflexões sobre o livro didático e seu papel no contexto escolar. Por fim, analisamos a coleção de livros didáticos Conexões com a Matemática (LEONARDO, 2013), verificando o que propõe e a forma como se organizam e orientam os conteúdos para o ensino e a aprendizagem de Análise Combinatória.

Na quarta seção apresentamos um material de apoio para professores de Matemática, como proposta de atividades para o ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio, combinamos os resultados da produção do conhecimento e da pesquisa bibliográfica com a análise dos livros para a construção dessas atividades. Essa foi a forma que encontramos para conduzir esta pesquisa da ação à aplicação no ensino de Matemática.

Por fim, tratamos na última e quinta seção das considerações finais da pesquisa, nas quais explicitamos de forma crítica nossa percepção sobre os resultados obtidos e ressaltamos os aspectos que nossa proposta buscou atingir para o processo de ensino e aprendizagem de Análise Combinatória no Ensino Médio.

# 2 ANÁLISE COMBINATÓRIA: DA CONSTRUÇÃO HISTÓRICA À PRODUÇÃO DO CONHECIMENTO NO BRASIL

Esta seção traz uma discussão sobre o desenvolvimento da Análise Combinatória, assim como apresenta os conceitos fundamentais desse conteúdo. Num primeiro momento, mostramos um panorama histórico da combinatória, destacando aspectos como seu surgimento, contexto histórico-social de seu desenvolvimento e os principais estudiosos que colaboraram para a construção da teoria combinatória.

Em seguida, são apresentados de forma gradual e sequencial os conceitos fundamentais da Análise Combinatória. Dessa forma, abordamos as definições dos princípios fundamentais da contagem, permutação simples, permutação com elementos repetidos, arranjo simples e combinação simples.

Por fim, finalizamos a seção expondo o mapeamento da produção do conhecimento acerca da Análise Combinatória encontrada no Boletim de Educação Matemática (BOLEMA). Os documentos encontrados foram analisados com o intuito de compreender a forma como esse conteúdo tem sido tratado/trabalhado pelos educadores e pesquisadores.

Realizamos, assim, um estudo que se insere na metodologia bibliográfica e documental, mediante pesquisa em fontes já publicadas, por meios escritos e eletrônicos em domínio público. Concernente ao caráter bibliográfico, tomamos encaminhamento metodológico fundamentados na pesquisa denominada de “estado da arte” ou “estado do conhecimento”, visando mapear, analisar e discutir sobre a produção acadêmica referente ao conteúdo de combinatória, conforme já explicitado na seção introdutória.

## 2.1 ANÁLISE COMBINATÓRIA NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

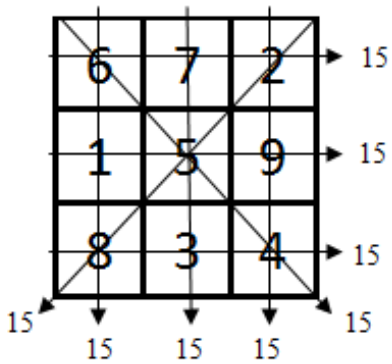
Ao estudar a história da Análise Combinatória é possível observar que este conhecimento nem sempre esteve relacionado ao cálculo aritmético. De acordo com Wieleitner (1932 *apud* VAZQUEZ; NOGUTI, 2004), o problema mais antigo que se relaciona com a teoria dos números e com a Análise Combinatória é a formação dos quadrados mágicos.

Assim, o quadrado mágico (de ordem **n**),

> [...] é um arranjo quadrado de $n^2$ inteiros distintos dispostos de maneira tal que os números de uma linha qualquer, de uma coluna qualquer ou da diagonal principal têm mesma soma, chamada *constante mágica* do quadrado. (EVES, 2011, p. 269).

Na Figura 1 temos um exemplo, cuja constante mágica é 15:

Figura 1: Quadrado Mágico.

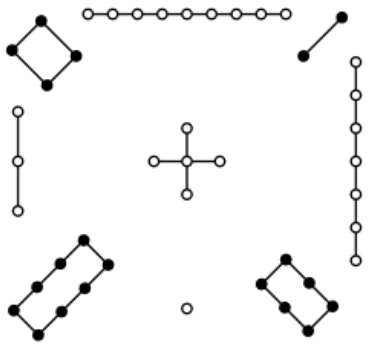



Fonte: Acervo da autora.

O quadrado mágico mais antigo conhecido é denominado de *lo-shu,* citado por Eves (2011). Ele foi encontrado em um antigo livro clássico matemático chinês, o *I-King* ou Livro das Permutações. O *lo-shu* está associado a uma lenda, tal que conta-se que o imperador chinês Yu, por volta do ano 2200 a. C., estava às margens do rio Amarelo quando avistou uma tartaruga (considerado um animal divino). Observando-a notou que em seu casco existia marcas semelhantes a nós.

Yu associou as marcas do casco a números de 1 ao 9 e percebeu que quando os somava em todas as direções o resultado era sempre 15, como se os algarismos fossem mágicos.

Figura 2: Representação do *lo-shu*.



Fonte: EVES, 2011, p. 269.

De acordo com Vazquez e Noguti (2004), a ideia dos quadrados mágicos passou dos chineses para os árabes, tal que estes contribuíram e construíram quadrados de ordem superior ao *lo-shu.*

Outro problema antigo que carrega de forma implícita o raciocínio combinatório está na obra *Liber Abaci*[1] (1202), de Leonardo Fibonacci, que conforme Vazquez e Noguti informam que existe no livro supracitado a seguinte passagem:

> Há sete senhoras idosas na estrada de Roma. Cada senhora tem sete mulos; cada mulo transporta sete sacos; cada saco contém sete pães; com cada pão há sete facas; para cada faca há sete bainhas. Entre mulheres, mulos, sacos, pães, facas e bainhas, quantos estão na estrada de Roma? (VAZQUEZ E NOGUTI, 2004, p.03).

Há ainda, um poema infantil, de aproximadamente 1730, com contexto similar. Os versos são os seguintes:

> *As I was going to St. Ives,*
> *I met a man with seven wives,*
> *Each wife had seven sacks,*
> *Each sack had seven cats,*
> *Each cat had seven kits,*
> *Kits, cats, sacks and wives,*
> *How many were going to St. Ives?*[2] *(*BIGGS, 1979, p. 110).

Observando o problema do livro *Liber Abaci* e o poema exposta por Biggs, é possível notar a semelhança entre eles, embora ocorra o aparecimento de novos elementos.

Em 1881, Leon Rodet associou o problema de Fibonacci com o problema 79 do papiro de Rhind, também conhecido como papiro de Ahmes (documento egípcio de cerca de 1600 a. C.). No papiro, o problema de número 79 aparece como um conjunto de dados:

| | |
|---|---|
| Casas | 7 |
| Gatos | 49 |
| Ratos | 343 |
| Espigas de trigo | 2401 |

[1] Livro histórico sobre aritmética que introduz na Europa a numeração árabe e a notação posicional, no qual fica esclarecido o uso do zero.

[2] Quando ia a Sto. Ives,/ encontrei um homem com sete mulheres;/ cada mulher tinha sete sacos,/ cada saco tinha sete gatos,/ cada gato tinha sete gatinhos./ Gatinhos, gatos, sacos e mulheres,/ quantos iam a Sto. Ives? (BOYER; MERZBACH, 2012, p. 33).

Hekat[3] $\frac{16807}{19607}$. (BIGGS, 1979, p. 111, tradução nossa).

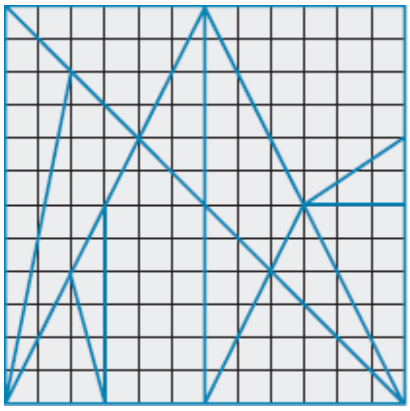
Com a associação feita, Rodet aludiu que o problema 79 foi o percussor do problema de Fibonacci, e, além disso, sugeriu a seguinte interpretação para o conjunto de dados encontrado no papiro de Rhind: *"There are seven houses, each with seven cats; each cat kills seven mice; each mouse would have eaten seven heads of wheat, each of which would have produced seven hekat measures of grain.*[4]*"* (BIGGS, 1979, p. 111).

De acordo com Boyer e Merzbach, "o problema evidentemente não pedia uma resposta prática, que seria o número de medidas de grãos poupadas, mas a não prática soma dos números de casas, gatos, ratos, espigas e medidas de grão". (BOYER; MERZBACH, 2012, p. 33).

A existência de problemas tão similares indica que o problema número 79 foi preservado e transmitido ao longo dos séculos para Fibonacci e posteriormente, incorporado em versos infantis.

Segundo Tavares e Brito (2005), o matemático grego Arquimedes (287 a. C. – 212 a.C.) também contribuiu para o estudo da Análise Combinatória. Ele instigou a curiosidade de matemáticos e historiadores ao longo de muitos anos com o *Stomachion*, também conhecido como *Loculus Archimedius*, um quebra-cabeça composto por 14 peças poligonais variadas que devem ser encaixadas para formar um quadrado.

Figura 3: *Stomachion.*



Fonte: TAVARES; BRITO, 2005, p. 34.

[3] Segundo Vazquez e Noguti (2004), hekat é uma unidade de medida de grãos egípcia que atualmente equivale a 4,8 litros.

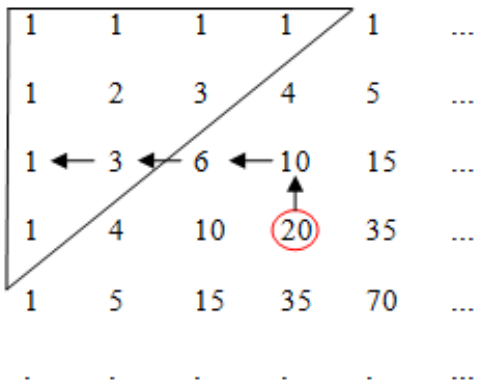
[4] Há sete casas, cada uma com sete gatos; cada gato mata sete ratos; cada rato teria comido sete espigas de trigo, cada uma delas teria produzido sete hekat de grãos.

A relação entre o *Stomachion* e a combinatória foi apontada pelo historiador de Matemática Reviel Netz, da Universidade de Stanford, Califórnia. Ele publicou em dezembro de 2003, no jornal *The New York Times* o artigo intitulado de *In Archimedes Puzzle, a New Eureka Moment*. A publicação trouxe os resultados da pesquisa realizada pelo historiador, tal que Netz examinou um manuscrito do século XIII e concluiu a partir desse, que o *Stomachion* não era apenas um jogo, mas, sim, um objeto planejado por Arquimedes para fins de Análise Combinatória.

Assim, considerando um trecho encontrado no manuscrito, Netz afirma que: Arquimedes desejava descobrir de quantas maneiras distintas as 14 peças poderiam ser organizadas para formar um quadrado. Desse modo, dá um grande salto no tempo.

Tavares e Brito (2005) afirmam que, o matemático francês Blaise Pascal (1623 – 1662) escreveu o livro *Traité du triangle arithmétique*. Nele encontramos a construção do triângulo aritmético, em que para obter qualquer elemento (da segunda linha em diante) tem-se que somar todos os elementos da linha anterior localizados exatamente acima e à esquerda do elemento desejado. Observe a Figura 4, na quarta linha, **20 = 10 + 6 + 3 + 1**.

Figura 4 - Triângulo de Pascal




Fonte: Acervo da autora.

Para obter o triângulo, de qualquer ordem, basta desenhar uma diagonal como mostra a Figura 4.

Pascal fazia aplicações a partir do seu triângulo e entre elas, determinava o número de combinações de **n** objetos tomados **r** a **r**, tal que ele afirmou corretamente ser:

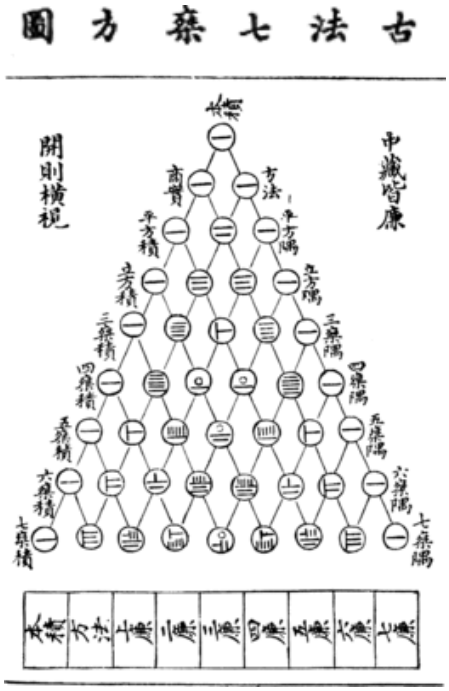
$$\frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{r!(n-r)!}}.$$

Ressaltamos que, a notação **n!** é utilizada atualmente para o produto: $\mathbf{n(n-1)(n-2)\ldots(3)(2)(1)}$. Esta simbologia foi introduzida em 1808, por Christian Kramp (1760 – 1820) e a chamamos de fatorial de **n**.

O triângulo aritmético ficou conhecido como triângulo de Pascal. No entanto, Eves (2011) destaca que esse arranjo numérico já era conhecido pelo escritor chinês Yang Hui, que nos deixou a mais antiga apresentação preservada do triângulo, datada do século XIII.

Ainda de acordo com Eves, “Há uma outra manifestação do triângulo num livro posterior escrito por Chu Shï-kié em 1303; é interessante que Chu fala do triângulo como algo já antigo em seu tempo.” (EVES, 2011, p. 246).

Figura 5 - Triângulo aritmético, da maneira como foi desenhado em 1303 por Chu Shï-kié.




Fonte: EVES, 2011, p. 250.

Em 1666, Leibniz (1646 – 1716) publicou a obra *Dissertatio de Arte Combinatória*, em que apresentou um estudo denominado de *Lógica Inventiva*. Segundo Frazon (2015), essa teoria lançou os princípios para à atual Análise Combinatória. Para estruturar a teoria da *Lógica Inventiva* Leibniz determinou

diversas definições até chegar ao conceito de *complexiones*, que atualmente tem o mesmo significado das combinações simples.

Outra figura que contribuiu com os estudos relativos à análise combinatória foi o alemão Athanasius Kircher (1601 – 1680) com a publicação da obra *Ars magna sciendi sive combinatoria* (1669).

A Análise Combinatória no século XVII tornou-se um novo ramo da Matemática, uma teoria que começou a se organizar e a se sistematizar. Os autores Vazquez e Noguti (2004) ressaltam que os trabalhos já citados de Pascal, Leibniz e Athanasius Kircher foram de grande relevância para a teoria combinatória. Destacam também as obras de Wallis (1673), Frénicle de Bessy (1693), J. Bernoulli (1713) e De Moivre (1718) para a sistematização desse conhecimento.

## 2.2 CONCEITOS DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

A Análise Combinatória está inserida entre os conteúdos matemáticos trabalhados no Ensino Médio e constituiu-se como nosso objeto de estudo nesta pesquisa. Dessa maneira, acreditamos que a Análise Combinatória é um ramo importante da Matemática, pois os conhecimentos derivados deste assunto contribuem para o desenvolvimento do raciocínio lógico e para a formação do cidadão, posto que a partir desses conhecimentos ele pode fazer relações entre fatos e fenômenos da realidade.

Desse modo, sendo considerado um conteúdo imprescindível à formação do aluno, podemos defini-la como a técnica usada para contarmos objetos de um conjunto finito, tal que esta contagem satisfaz determinadas condições/regras (algoritmos). Concernente a isto, Morgado *et al* (2006, p. 02) aponta que “a Análise Combinatória é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas”.

Os problemas de contagem mais frequentes são:

> 1) Demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições;
> 2) Contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas. (MORGADO *et al.*, 2006, p. 02).

Dessa forma, apresentamos nessa seção técnicas gerais que permitem a resolução de problemas combinatórios. Para esta abordagem, buscamos amparo teórico em Morgado *et al* (2006), Santos, Mello e Murari (2007) e Lima *et al* (2016).

### 2.2.1 Princípios Fundamentais da Contagem

O cálculo combinatório se baseia em dois princípios fundamentais, que são: o princípio de adição e o princípio da multiplicação. Esses artifícios matemáticos constituem as ferramentas básicas para a resolução dos problemas de contagem. Assim, o princípio de adição, de acordo com Morgado *et al* (2006) diz que, sejam **A** e **B** dois conjuntos disjuntos, tal que **A** contém **p** elementos e **B** contém **q** elementos, então, **A∪B** tem **p + q** elementos.

O princípio da multiplicação, também conhecido como princípio fundamental da enumeração, pode ser enunciado como: "se há *x* modos de tomar uma decisão $D_1$ e, tomada a decisão $D_1$, há *y* modos de tomar a decisão $D_2$, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões $D_1$ e $D_2$ é *xy*" (LIMA *et al*., 2016, p. 81).

### 2.2.2 Permutações

As permutações aparecem com frequência nos problemas de Análise Combinatória. Dessa forma, chamamos de permutação todos os agrupamentos que podem ser formados a partir de uma quantidade definida de elementos, de modo que cada agrupamento é obtido pela troca da posição dos elementos. Nesta subseção estudamos os tipos de permutações, que são: permutação simples, permutação com repetição e permutação circular.

Chama-se permutação simples de **n** elementos distintos todos os agrupamentos ordenados que podem se formar com **n** desses elementos. Lima *et al* (2016, p. 85) expõem que "o número de permutações simples de *n* objetos distintos é $Pn=n!$".

A permutação com repetição é a permutação de um conjunto, em que existem elementos repetidos. De acordo com Morgado *et al* (2006, p. 50), "o número de

permutações de *n* objetos dos quais α são iguais a *a*, β iguais a *b*, ..., λ iguais a *l* (α + β + ... + λ = *n*) é

$$P_n^{\alpha,\beta,\ldots,\lambda} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!}\text{''}.$$

Segundo Lima *et al*, a permutação circular é

> [...] o número de, modos de, colocar *n* objetos em círculo, de forma que as disposições que possam coincidir por rotação sejam consideradas iguais, isto é, o número de permutações circulares de *n* objetos é $(PC)n = \frac{n!}{n} = (n-1)!$. (LIMA *et al*., 2016, p. 88).

Nos problemas de contagem a permutação com repetição aparece, por exemplo, em questões que envolvem anagramas de palavras que contêm letras repetidas. Já nos problemas de permutação circular, em enunciados cujo objetivo seja dispor pessoas sentadas numa mesa circular ou organizadas em uma roda de ciranda.

### 2.2.3 Arranjo Simples

Considerando um conjunto com **n** elementos distintos, chamamos de arranjo simples de **n** elementos tomados **p** a **p** todo agrupamento formado por **p** elementos, tal que esses são escolhidos entre os **n** possíveis.

Segundo Santos, Mello e Murari (2007), podemos calcular o arranjo de **p** elementos de um conjunto de **n** elementos por:

$$\mathbf{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}\ .$$

Ressaltamos que, a permutação simples é um caso particular de arranjo simples, em que são utilizados todos os elementos do conjunto dado.

### 2.2.4 Combinação Simples

Dado um conjunto com **n** elementos, chamamos de combinações de **n** elementos, tomados **p** a **p**, aos subconjuntos constituídos por **p** elementos. De forma geral, Morgado *et al* (2006) aponta que, o número de Combinações Simples pode ser obtido a partir de:

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} .$$

Representamos o número de combinações simples dos **n** elementos tomados **p** a **p** pela notação $C_n^p$ ou $\binom{n}{p}$.

## 2.3 A PRODUÇÃO DO CONHECIMENTO ACERCA DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NO BOLETIM DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DO BRASIL

Esta subseção apresenta o mapeamento da produção de conhecimento sobre Análise Combinatória, delimitamos como local de averiguação para nossa pesquisa o Boletim de Educação Matemática (BOLEMA). Esse periódico brasileiro foi criado em 1985 por iniciativa do grupo de pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP) de Rio Claro e hoje, configura-se como um dos principais veículos de produção intelectual e científica em Educação Matemática no Brasil.

Nesta perspectiva, este periódico dissemina e divulga conhecimentos com a publicação de artigos, ensaios, resenhas de textos e resumos de dissertações e teses que abordem temas relacionados ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática e/ou ao papel da Matemática e da Educação Matemática para a sociedade. Consideramos que o BOLEMA é uma importante fonte de pesquisa para estudantes, professores e/ou interessados pelas temáticas que envolvem conhecimentos em Educação Matemática.

Assim, inicialmente visitamos o espaço virtual destinado ao BOLEMA (http://www2.rc.unesp.br/bolema/) e nos direcionamos ao ícone de pesquisa, onde consultamos pelo termo: “Análise Combinatória” e esse foi o único filtro. A produção encontrada foi de apenas dois artigos relacionados ao tema, um de 2009 e outro de 2010.

Em seguida, sistematizamos os dados coletados, esses foram organizados em quadros contendo o título do artigo, o (s) autor (es) e o ano de publicação. Por fim, exploramos os trabalhos encontrados, visamos analisar os objetivos, as metodologias utilizadas, o nível e etapa de ensino para o qual são dirigidos e as referências básicas empregadas em ambos os trabalhos.

Os Quadros 1 e 2 apresentam os resultados da produção sobre Análise Combinatória publicados no Boletim de Educação Matemática.

Quadro 1: BOLEMA, ano 22, n° 34, 2009, p. 27 a 56.

| Título | Autor (es) |
|---|---|
| Seqüência Didática com Análise Combinatória no Padrão SCORM | Claudia Lisete Oliveira Groenwald, Lisiane Neto Zoch e Agostinho Iaqchan Ryokiti Homa |

Fonte: http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/viewFile/3298/2791.

Quadro 2: BOLEMA, v. 23, n° 36, 2010, p. 657 a 682.

| Título | Autor (es) |
|---|---|
| Um Novo Jogo para o Estudo do Raciocínio Combinatório e do Cálculo de Probabilidade | José Marcos Lopes e Josiane de Carvalho Rezende |

Fonte: http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/viewFile/4035/3272.

Os dois artigos encontrados apresentam propostas visando o processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de Análise Combinatória. Ressaltamos ainda que, o trabalho sistematizado no Quadro 2 também aborda esse processo quanto aos conhecimentos de Probabilidade.

Na análise do trabalho mostrado no Quadro 1, observamos que esse traz uma proposta de *e-learning* (aprendizagem eletrônica) para o conteúdo de Análise Combinatória. Além disso, relata a aplicação da proposta para 9 alunos do curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Luterana do Brasil (ULBRA), em Canoas – RS.

Assim, esse estudo tem como objetivo geral investigar o processo de entrega de conteúdo, utilizando os princípios construtivistas/colaborativos de ensino e o desenvolvimento de abordagens que respeitem o ritmo e as individualidades de cada estudante. Como objetivos específicos, podemos notar a preocupação em investigar a adaptação dos estudantes aos multicaminhos oferecidos, assim como, as etapas e os cenários apresentados pela proposta didática.

Dessa maneira, a proposta apresentada no artigo utiliza novas tecnologias para oferecer uma sequência didática composta por quatro etapas. A primeira etapa expõe os conceitos de conjuntos, princípio aditivo, princípio multiplicativo e fatorial. Nessa etapa, quando são explorados os princípios aditivo e multiplicativo, se

introduz o uso da árvore de possibilidades[5], donde tal artifício é citado pelos autores como essência para a compreensão da Análise Combinatória.

A segunda etapa apresenta os assuntos de permutação simples, arranjo simples e combinação simples. Na terceira, são exibidos os conceitos de permutação cíclica, arranjo com repetição, combinação com repetição e o princípio da inclusão-exclusão. Já a última etapa é opcional, tal que são expostos problemas referentes a todos os conteúdos expostos anteriormente.

De acordo com Groenwald, Zoch e Homa (2009, p. 35), autores do artigo (Quadro 1) analisado, as 3 primeiras etapas da proposta podem ser percorridas em 3 cenários distintos, são eles: “livro virtual, com apresentação formal dos conteúdos e exercícios (cenário 1); atividades didáticas, que permitem a construção dos conceitos (cenário 2); atividades de recuperação (cenário 3)”.

Outros aspectos da sequência didática são: apresentação sequencial linear e mecanismos adaptativos, em que o indivíduo só parte de uma etapa para outra quando identificado um desempenho adequado. O desempenho dos alunos é verificado a partir de uma atividade avaliativa proposta no fim de cada cenário. Vale ressaltar também que, os autores não deixam claro para qual nível e etapa de ensino a proposta se destina, entretanto, pela descrição dos conteúdos é possível notar que se direciona para o Ensino Médio.

Ainda analisando o artigo do Quadro 1, notamos que os autores defendem a necessidade de desenvolver nos indivíduos competências para lidar com as tecnologias da informação. Além disso, no campo educacional, ressaltam com base em Grossi (2008), que os educadores enfrentam desafios para oferecer aos alunos situações instrucionais que despertem a curiosidade e que respeitem as subjetividades dos mesmos. Com base nessa problematização, sugerem que o *e-learning* pode oferecer uma alternativa para solucionar esse quadro.

Dessa forma, iniciam a discussão sobre os princípios utilizados pela proposta e expõem as características e os fundamentos defendidos pela aprendizagem construtivista citando Driver (*apud* PORLÁN, 1998), Crook (1998) e Coll *et al* (2002). Outros teóricos apontados são Martí (1992), que sugere o uso de computadores como recurso em situações construtivistas e Carretero (1997) respectivamente, tal que esse reforça a importância da interação social.

---

[5] Árvore de possibilidades, também conhecida como diagrama de árvore, é um tipo de representação que auxilia no levantamento das possibilidades de uma dada situação.

Em seguida, discutem o conceito de Análise Combinatória e apontam baseando-se em Batenero, Godino e Pelayo (1996) que ensinar esse assunto pode gerar dificuldades para os estudantes, entretanto, representa um componente importante da Matemática discreta[6] e tem papel relevante na Matemática escolar. Assim, tendo como apoio teórico a opinião de Batenero, Godino e Pelayo (1996), justificam a escolha desse conteúdo para o desenvolvimento da proposta.

Outros aspectos discorridos foram às vantagens que o estudo da combinatória pode proporcionar. Assim, os autores relatam que o estudo desse conteúdo estimula a abstração e possibilita a apresentação de questões contextualizadas, componentes essas defendidas pelo PCN+, Ensino Médio (2002).

O artigo sistematizado no Quadro 2 tem como objetivo apresentar uma proposta de ensino para os conteúdos de Análise Combinatória e Probabilidade através de um jogo de tabuleiro original (Jogo do Quadrado), que é explorado juntamente com a metodologia de Resolução de Problemas. Essa proposta é voltada para alunos do último ciclo do Ensino Fundamental e segundo ano do Ensino Médio.

Assim, o jogo é composto por um tabuleiro 3x3 (o mesmo utilizado no Jogo da Velha[7]) e duas peças distintas que se movimentam de forma semelhante ao peão e a torre do Jogo de Xadrez. Desse modo, o jogo é disputado por 2 jogadores, tal que cada um tem apenas uma peça e essas são posicionadas na extremidade direita ou esquerda do tabuleiro. O objetivo do Jogo do Quadrado é eliminar a peça ou chegar ao ponto de partida do outro competidor e suas regras, de acordo com Lopes e Rezende (2010)

> 1ª) não pode voltar ao ponto de partida;
> 2ª) é permitida a eliminação da peça do adversário somente na diagonal e as peças se movem apenas uma casa na vertical ou uma casa na horizontal;
> 3ª) a eliminação da peça adversária, tal como a ocupação do ponto de partida do adversário, serão obrigatórias quando for à ocasião. (LOPES; REZENDE, 2010, p. 666).

---

[6] Segundo Picado (2009), a Matemática discreta é o ramo da Matemática voltado ao estudo de objetos e estruturas discretas ou finitas (discreta significa que é formada por elementos distintos entre si).

[7] O jogo da velha é um jogo e passatempo popular composto por um tabuleiro de três linhas e três colunas. Pode ser jogado por dois participantes que devem preencher, alternadamente, as lacunas vazias do tabuleiro com marcações no formato da letra X e círculos semelhantes à letra O. Desse modo, o objetivo principal é conseguir marcar três elementos iguais em linha, seja ela: vertical, horizontal ou diagonal.

Para trabalhar de forma mais proveitosa o jogo criado, os autores elaboraram situações problemas referentes a esse recurso. As questões envolvem o raciocínio combinatório e o cálculo de probabilidades. Dessa forma, de acordo com o que é defendido no artigo, o professor deve organizar os alunos em grupos e em seguida, propor os problemas para que os estudantes os resolvam utilizando os conhecimentos prévios e o trabalho em grupo.

Após isto, o docente deve formalizar e sistematizar os conteúdos matemáticos que foram usados para o desenvolvimento das resoluções apresentadas. Essa forma de se trabalhar problemas contribui para o processo de ensino e aprendizagem, pois o problema passa a ser o ponto de partida para a construção do conhecimento.

Vale ressaltar ainda que, o trabalho apresenta a resolução dos problemas propostos. As questões que envolvem contagem são exploradas com a árvore de possibilidades e, além disso, Lopes e Rezende (2010) apontam esse tipo de representação como o principal instrumento de contagem para o nível de ensino que a proposta busca atingir.

Com relação ao referencial básico exposto pelo artigo, os autores trazem no artigo a definição de Probabilidade e discutem a importância da combinatória para o desenvolvimento das ideias de Probabilidade. Assim, são citados Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1997) e Inhelder e Piaget (1951).

Em seguida, embasando-se mais uma vez em Inhelder e Piaget (1951) os autores apontam que o conhecimento em Análise Combinatória é fundamental para o raciocínio hipotético-dedutivo. Concernente a isto, citam os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997), que afirmam que a contagem permite uma nova forma de pensar em Matemática, além disso, questionam a aprendizagem desse conteúdo baseada no uso excessivo de fórmulas.

O artigo também relata sobre a dificuldade para a resolução de problemas combinatórios, tal que os indivíduos não identificam quais os conceitos que estão envolvidos nos enunciados. Posteriormente, citam Morgado *et al* (2004) que destacam a complexidade exigida para compreender a situação descrita pelos problemas que exploram esse conteúdo.

Com relação à Probabilidade, destacam com base em Lopes (2006) que esse conteúdo é o estudo e modelagem de fenômenos aleatórios e recomendam que o ensino probabilístico seja feito a partir da metodologia heurística e ativa. Os autores

seguem o texto citando os PCN (1997), tal que esse documento aponta que o estudo da probabilidade tem a finalidade de explorar nos estudantes situações reais, fazendo-o compreender que acontecimentos cotidianos são de natureza aleatória e possível de identificar possíveis resultados.

Outro ponto embasamento teórico mencionado foi Carvalho e Oliveira (2002). Assim, eles procuram evidenciar que o assunto de Probabilidade, assim como o de Análise Combinatória, passa pelo reducionismo quando abordados, no qual são explorados apenas como aplicação de fórmulas.

Além disso, os autores discutem sobre as potencialidades que os jogos podem proporcionar ao processo de ensino e aprendizagem. Destacam com base nos PCN (1997) e Borin (2004) que esse recurso quando usado em uma situação didática bem planejada pode gerar prazer, interesse e desenvolvem habilidades de raciocínio como: atenção, organização e concentração.

Outra metodologia utilizada pelo trabalho e abordada pelo referencial teórico é a resolução de problemas. Assim, segundo os PCN (1997) e Mendonça (1993), a resolução de problemas deve ser a peça central para o ensino. Por fim, cita Moura (1992) ressaltando que, esse teórico entende que é possível a junção entre os jogos e a resolução de problemas.

Consideramos que, ambos os artigos apontam informações detalhadas das propostas enunciadas, algo que possibilita a compreensão dos leitores. Além disto, observamos que existem pontos positivos nas pesquisas coletados, tal que o aprendizado pelo meio eletrônico oferece facilidade quanto ao acesso e o Jogo do Quadrado pode ser produzido com facilidade e sua construção é feita com material reciclável ou de baixo custo.

Ao realizarmos o mapeamento no Boletim de Educação Matemática, objetivamos compreender melhor a forma com que o conteúdo de Análise Combinatória tem sido tratado pelos educadores e pesquisadores da área. Ressaltamos que, a produção acerca dessa temática, apesar de importante, é muito pequena nesse repositório.

Dessa forma, buscamos discutir nesta seção o desenvolvimento histórico e as técnicas básicas que permitem resolver problemas combinatórios. Exploramos também, a produção de conhecimento presente no BOLEMA, com o intuito de investigar como essa temática tem sido produzida e abordada.

Com isso, compreendemos os avanços e analisamos pesquisas atuais, tal que essas apontam pela busca por propostas que visam o processo de ensino e aprendizagem da Análise Combinatória. Diante destas perspectivas, encaminharemos nossas discussões, neste trabalho, para entender o ensino da Análise Combinatória, com ênfase no contexto do Ensino Médio.

## 3 ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO

O Ensino Médio em conformidade com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) n° 9.394/1996 constitui-se como a etapa final da Educação Básica. Essa etapa tem como finalidades a consolidação e aprofundamento dos conhecimentos vistos no Ensino Fundamental, preparação para o trabalho, formação da cidadania, o aprimoramento do educando como pessoa humana e a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática.

Para Saviani (2007),

> [...] no Ensino Médio já não basta dominar os elementos básicos e gerais do conhecimento que resultam e ao mesmo tempo contribuem para o processo de trabalho na sociedade. Trata-se, agora, de explicitar como o conhecimento (objeto específico de processo de ensino), isto é, como a ciência, potência espiritual, se converte em potência material no processo de produção. Tal explicitação deve envolver o domínio não apenas teórico, mas também prático sobre o modo como o saber se articula como processo produtivo. (SAVIANI, 2007, p. 160).

Diante disso, é perceptível que a educação escolar tem objetivos intencionais para com seus estudantes. Dessa forma, os conteúdos e os procedimentos metodológicos aplicados em sala de aula devem considerar as competências e habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos.

Com relação ao ensino de Matemática na etapa final da escolaridade básica, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) – (2000) e os PCN+ (2002) destacam que os conhecimentos matemáticos podem contribuir para o desenvolvimento de habilidades relacionadas à representação, compreensão, comunicação, investigação e contextualização sociocultural.

Os PCNEM ressaltam ainda que,

> A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas. (BRASIL, 2000, p.40).

Vê-se, portanto, que o ensino de Matemática desempenha um papel fundamental na formação dos cidadãos. A aprendizagem de seus conhecimentos

favorece o desenvolvimento cognitivo, além de preparar os indivíduos para se situarem na sociedade de forma mais consciente.

No Ensino Médio, dentre os conteúdos matemáticos que precisam ser trabalhados, está a Análise Combinatória. O estudo desse conteúdo é de grande relevância, pois fornece fundamentação para o cálculo de probabilidades e atua como ferramenta em outros ramos do conhecimento.

Nas palavras de Roa e Navarro-Pelayo

> *Los problemas combinatorios y las técnicas para su resolución tienen y han tenido también profundas implicaciones en el desarrollo de otras ramas de lãs matemáticas como la probabilidad, teoría de números, teoria de autómatas e inteligencia artificial, investigación operativa, geometría y topología combinatorias.*[8] (ROA; NAVARRO-PELAYO, 2001, p. 255).

Além dessas implicações para a aprendizagem de Matemática expostos por Roa e Navarro-Pelayo, segundo os PCN+ (2002), a contagem possibilita o desenvolvimento de uma nova forma de pensamento matemático, denominado de raciocínio combinatório. Neste sentido,

> [...] decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação. (BRASIL, 2002, p. 126).

Entretanto, observamos que, na maioria das vezes, o ensino desse conteúdo no Ensino Médio tem se limitado apenas a aplicação de fórmulas em situações padrão. Fato esse que pode ocasionar aos discentes certas dificuldades, pois a resolução de problemas combinatórios exige criatividade e interpretação dos enunciados.

Concernente a isso, Morgado *et al* (2006) destacam que

> [...] se a aprendizagem destes conceitos se faz de maneira mecânica, limitando-se a empregá-los em situações padronizadas, sem procurar habituar o aluno com a análise cuidadosa de cada problema, cria-se a impressão de que a Análise Combinatória é somente um jogo de fórmulas complicadas. (MORGADO *et al*., 2006, p. 03).

---

[8] Os problemas combinatórios e as técnicas para sua resolução tiveram e têm profundas implicações no desenvolvimento de outras áreas da matemática como a probabilidade, teoria dos números, a teoria dos autônomos e inteligência artificial, investigação operativa, geometria e topologia combinatórias.

Desse modo, acredita-se que o processo de ensino e aprendizagem de Análise Combinatória deve favorecer a construção de ideias e conceitos matemáticos, valorizando sempre a compreensão e atribuição de significado. Para tanto, o uso da resolução de problemas frente ao ensino desse conhecimento pode favorecer o desenvolvimento do pensamento combinatório, desde que não seja ensinado de forma mecânica ou apenas operativa.

Neste sentido, encontram-se nos PCN+ (2002) fórmulas referentes ao conteúdo de Contagem que devem ser consequência do raciocínio combinatório, cuja função é simplificar cálculos quando existe uma grande quantidade de dados. Além disso, esse documento destaca que o trabalho com Análise Combinatória no Ensino Médio deve se manter perto da perspectiva da resolução de problemas, evitando a teorização excessiva e estéril.

## 3.1 O LIVRO DIDÁTICO NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM

Os procedimentos de ensino, no âmbito escolar, buscam construir e utilizar ferramentas que auxiliem e estimulem a aprendizagem dos estudantes. Em virtude disto, existem inúmeros materiais didáticos que influenciam o trabalho docente em sala de aula.

Mas, o que são materiais didáticos? Segundo Lajoto (1996), é o conjunto de instrumentos envolvidos nas atividades-fim da escola, ou seja, todo objeto que pode ajudar no processo de ensino e aprendizagem. Portanto, material didático vai desde o quadro e giz até um instrumento qualquer que proporcione subsídio para os fins pedagógicos, como livros, revistas, calculadoras, impressoras, entre outras coisas.

Na mesma perspectiva, Freitas (2007) define que materiais didáticos, também conhecidos como recursos ou tecnologias educacionais são todo e qualquer instrumento utilizado no processo de ensino com o intuito de estimular e aproximar os alunos ao conteúdo trabalhado. O autor ainda destaca que o recurso didático mais utilizado nas escolas brasileiras são os livros didáticos.

O livro didático é destinado ao professor e ao aluno. De acordo com o Guia de Livros Didáticos de Matemática[9],

[9] O Guia do Livro Didático é elaborado pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). Trata-se de uma política pública, do Estado Brasileiro, destinada a alunos e professores das escolas de educação básica pública e inclui estudantes da educação de jovens e adultos.

> No processo de ensino e aprendizagem, o livro didático é um interlocutor que dialoga com o professor e com o aluno. Nesse diálogo, o livro é portador de uma perspectiva sobre o saber a ser estudado e sobre o modo mais eficaz de aprendê-lo. (GUIA DE LIVROS DIDÁTICOS: PNLD 2014: MATEMÁTICA, 2013, p.12).

Os livros didáticos buscam organizar os conhecimentos de forma que auxilie no processo de transmissão, assim como no de assimilação dos alunos. Além disto, é possível perceber que esse recurso manifesta uma ideologia sobre como proceder diante dos conteúdos.

Conforme o PNLD

> Outra função que tem sido muitas vezes realizada pelo livro didático é a de levar à sala de aula as modificações didáticas e pedagógicas propostas em documentos oficiais, assim como resultados de pesquisas sobre a aprendizagem da Matemática. (GUIA DE LIVROS DIDÁTICOS: PNLD 2014: MATEMÁTICA, 2013, p. 13).

Ao longo da história, o livro didático assumiu grande influência nas instituições de ensino do Brasil. Romanatto (2009) destaca que, esse instrumento acompanhou o desenvolvimento do processo de escolarização do país. Porém, foi só a partir da década de trinta que o Estado desenvolveu políticas governamentais para legislar e controlar o livro didático.

Atualmente, o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) é o responsável pela organização, regulamentação e distribuição desse material. Esse programa foi implantado por meio do Decreto n° 91.542, de 19 de agosto de 1985.

Torna-se evidente a presença e a relevância do livro didático durante o percurso escolar dos indivíduos. Segundo Freitas (2007, p. 89), desde o Ensino Fundamental até o Ensino Superior, “o livro torna-se um poderoso instrumento na mediação dos conhecimentos necessários à construção do sujeito”.

Contudo, ainda de acordo com Freitas (2007), esse instrumento quando utilizado de maneira inadequada ou como único suporte de conteúdos e métodos de ensino pode tornar-se ineficiente. O uso indiscriminado do livro didático pode afetar negativamente a construção do conhecimento.

Lajolo (1996, p. 04) argumenta que a escolha e a utilização do livro didático “precisam ser fundamentadas na competência dos professores que, junto com os alunos, vão fazer dele (livro) instrumento de aprendizagem”. Desse modo, cabe ao

professor manter-se autônomo para fazer a seleção e a articulação entre o livro e a sala de aula.

Sendo assim, é necessária uma análise criteriosa desse material antes de sua adoção. O professor precisa levar em consideração a qualidade dos conteúdos, a adequabilidade das linguagens apresentadas e, simultaneamente, verificar quais são os valores éticos que a obra veicula.

Entretanto, Lajolo ressalta que

> Nenhum livro didático, por melhor que seja, pode ser utilizado sem adaptações. Como todo e qualquer livro, o didático também propicia diferentes leituras para diferentes leitores, e é em função da liderança que tem na utilização coletiva do livro didático que o professor precisa preparar com cuidado os modos de utilização dele, isto é, as atividades escolares através das quais um livro didático vai se fazer presente no curso em que foi adotado. (LAJOLO, 1996, p. 08-09).

Isto ocorre porque o livro didático é apenas um apoio didático. Assim, o docente deve planejar sua prática, buscando estratégias que atendam as demandas do seu alunado. De acordo com Libâneo,

> Ao selecionar os conteúdos da série em que irá trabalhar, o professor precisa analisar os textos, verificar como são enfocados os assuntos, para enriquecê-los com sua própria contribuição e a dos alunos, comparando o que se afirma com fatos, problemas, realidades da vivência real dos alunos. (LIBÂNEO, 2013, p. 155).

Entendemos que os livros didáticos são uma fonte importante de informação. No entanto, os professores não devem utilizá-los como único suporte no ato docente. O PNLD (2013) aponta que é sempre desejável complementá-lo, buscando ampliar as informações e as atividades propostas, para contornar deficiências ou alcançar objetivos do grupo de estudantes que o utilizam.

Diante do apresentado, buscamos compreender as potencialidades e as limitações do livro didático no contexto escolar. Visto que esse instrumento é utilizado pelos professores de Matemática realizaremos, neste trabalho, uma análise acerca de como o conteúdo de Análise Combinatória vem sendo abordado na coleção de livros didáticos Conexões com a Matemática (LEONARDO, 2013).

## 3.2 O QUE PROPÕEM OS LIVROS DIDÁTICOS DA COLEÇÃO CONEXÕES COM A MATEMÁTICA PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

O livro didático, como discutido anteriormente, constitui-se como um instrumento fundamental na prática docente. Dessa maneira, realizaremos uma análise da coleção de livros didáticos Conexões com a Matemática (LEONARDO, 2013), utilizada usualmente no Ensino Médio. Temos como objetivo principal verificar o que esses livros propõem e a forma como se organizam e orientam o ensino e a aprendizagem do conteúdo de Análise Combinatória.

Durante o sexto período do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte – *campus* Santa Cruz, junto ao desenvolvimento das atividades do Estágio Curricular Supervisionado II, foi proposto aos alunos analisar livros didáticos. Nesta ocasião escolhi analisar a coleção de livros didáticos Conexões com a Matemática (LEONARDO, 2013) que é adotada pelo referido *campus*, no nível médio. Dessa forma, preferimos também utiliza-la para a elaboração da presente pesquisa.

Para realizarmos a análise seguimos um roteiro usado no Estágio Curricular Supervisionado II. Esse instrumento foi adaptado a partir dos critérios de seleção de livros do Plano Nacional do Livro Didático 2015.

Observa-se que a coleção escolhida aborda os conceitos de contagem apenas no livro destinado ao 2° Ano do Ensino Médio, assim, analisaremos somente o livro didático proposto para esse Ano.

Num primeiro momento, faz-se a identificação do livro, em seguida, uma análise geral. Por fim, a análise se restringe a investigar a organização didática acerca do conteúdo de Análise Combinatória.

### 3.2.1 Identificação do livro

a) Título: Conexões com a Matemática.

b) Autor(es): Fabio Martins de Leonardo (editor responsável).

c) Edição: 2ª edição.

d) Editora, cidade e ano: A obra foi desenvolvida e produzida pela Editora Moderna, cidade de São Paulo, no ano de 2013.

e) Etapa de Ensino a que se destina e o Ano-Série: O livro é destinado ao 2° ano do Ensino Médio.

f) Quantidade de páginas: 319 páginas.

g) Volume: 2° volume.

h) Faz parte do PNLD (caso sim, em que ano): A coleção analisada foi aprovada no PNLD 2015/Ensino Médio.

### 3.2.2 Critérios de análise geral do livro

Os critérios adotados para a análise do livro são: Adequação da capa do livro, Apresentação Geral do Livro e Proposta de Abordagem do Conteúdo, Adequação dos conteúdos e atividades à faixa etária dos usuários, ano/série e Uso adequado de imagens, ilustrações e gráficos conforme expõe-se a seguir.

| **Adequação da capa do livro** |
| --- |

O painel frontal da capa traz informações de identificação (editora, editor responsável, título e componente curricular) e é ilustrado por fractais. Já a lombada, mostra o título e a componente curricular da obra. Ressalta-se que, ambas as partes não deixam claro a que etapa de ensino o livro se destina.

Com relação à contracapa, exibe apenas a letra do Hino Nacional Brasileiro.

Figura 6 – Painel frontal do livro didático Conexões com a Matemática, volume 2.

Fonte: LEONARDO, 2013.

## Apresentação Geral do Livro e Proposta de Abordagem do Conteúdo

O livro apresenta uma linguagem acessível e divide os conteúdos por capítulos, de acordo com o quadro abaixo:

Quadro 3: Estrutura do livro didático Conexões com a Matemática, volume 2.

| CONEXÕES COM A MATEMÁTICA (VOLUME 2) | |
|---|---|
| Capítulo 1 | Ciclo trigonométrico (1ª volta) |
| Capítulo 2 | Principais funções trigonométricas |
| Capítulo 3 | Complementos e aprofundamento |
| Capítulo 4 | Superfícies poligonais, círculo e áreas |
| Capítulo 5 | Introdução à Geometria espacial |
| Capítulo 6 | Poliedros |
| Capítulo 7 | Corpos redondos |
| Capítulo 8 | Matrizes e determinantes |
| Capítulo 9 | Sistemas lineares |
| Capítulo 10 | Análise combinatória |
| Capítulo 11 | Probabilidade |

Fonte: Elaborado pela autora com informações retiradas do livro didático Conexões com a Matemática, volume 2.

Cada capítulo é organizado por uma sequência didática definida, onde inicialmente são expostas imagens e situações contextualizadas relacionadas ao assunto. Após isto, o conteúdo é apresentado aos leitores acompanhado por

Exemplos/Exercícios resolvidos, que trazem questões com soluções e Exercícios propostos, que sugerem uma lista de atividades referente ao assunto estudado.

Segue que, os capítulos incluem as seções intituladas:

a) Exercícios complementares: tal que é proposto uma série de questões permitindo o aprofundamento dos conteúdos matemáticos explorados;
b) Autoavaliação: na qual são apresentadas questões que abrangem os assuntos trabalhados no capítulo. Essa seção propõe ainda o tópico denominado de Retomada de conceitos, que possibilita o aluno a se autoavaliar.

Em alguns capítulos, o livro também traz as seções Pesquisa e Ação, Resolução Comentada, Compreensão de Texto e Sugestões de Leitura. Essas seções buscam complementar e enriquecer a abordagem dos assuntos.

**Adequação dos conteúdos e atividades à faixa etária dos usuários, ano/série**

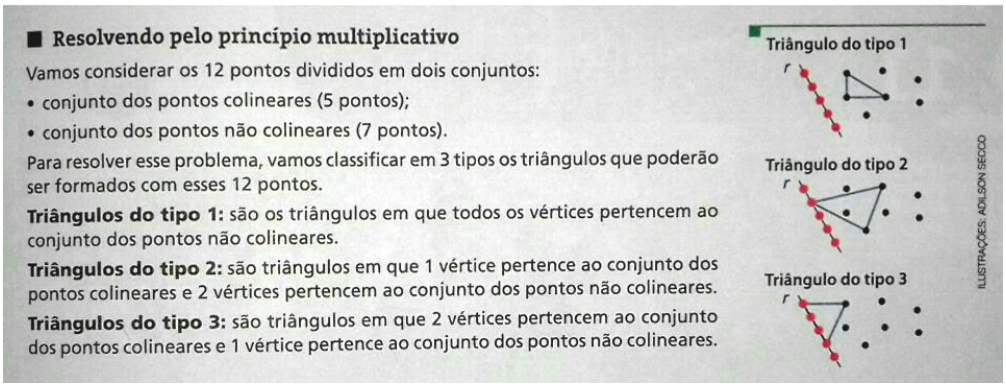
Os conteúdos expostos são condizentes aos tradicionalmente trabalhados no 2° Ano do Ensino Médio. Ao longo da obra, notamos que as atividades propostas também são adequadas à faixa etária dos estudantes.

**Uso adequado de imagens, ilustrações e gráficos**

As imagens, ilustrações e gráficos utilizados auxiliam a parte textual, pois mostram informações adicionais e retratam as situações descritas e/ou propostas. Com respeito às características estéticas, estes componentes são apresentados de forma equilibrada.

No capítulo relativo à Análise Combinatória, na seção Resolução comentada podemos observar, por exemplo, a resolução de um problema do vestibular da Universidade Federal de Pernambuco. Nessa situação são expostas duas formas de soluções, uma aplicando fórmula e outra, o princípio multiplicativo. É perceptível que o livro faz uso de ilustrações para auxiliar a explicação, observe a Figura 7.

Figura 7 – Trecho da seção Resolução comentada.



**Resolvendo pelo princípio multiplicativo**

Vamos considerar os 12 pontos divididos em dois conjuntos:

- conjunto dos pontos colineares (5 pontos);
- conjunto dos pontos não colineares (7 pontos).

Para resolver esse problema, vamos classificar em 3 tipos os triângulos que poderão ser formados com esses 12 pontos.

**Triângulos do tipo 1:** são os triângulos em que todos os vértices pertencem ao conjunto dos pontos não colineares.

**Triângulos do tipo 2:** são triângulos em que 1 vértice pertence ao conjunto dos pontos colineares e 2 vértices pertencem ao conjunto dos pontos não colineares.

**Triângulos do tipo 3:** são triângulos em que 2 vértices pertencem ao conjunto dos pontos colineares e 1 vértice pertence ao conjunto dos pontos não colineares.



Fonte: LEONARDO, 2013, p. 273.

Ressaltamos ainda que, as imagens e os gráficos contêm os respectivos créditos, entretanto, algumas tabelas não indicam o título e/ou fonte. Conforme as normas vigentes da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), que orienta a padronização de trabalhos acadêmicos – NBR 14724 (2011) – nos remetendo às Normas de Apresentação Tabular do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), “toda tabela deve ter título, inscrito no topo, para indicar a natureza e as abrangências geográfica e temporal dos dados” (IBGE, 1933, p. 13).

Além disso, toda tabela deve ter a fonte, localizada na primeira linha do seu rodapé, indicando o(s) responsável(veis) (pessoa física ou jurídica) pelos dados.

### 3.2.3 Critérios de análise do capítulo sobre Análise Combinatória

Os critérios de análise do capítulo que trata de Análise Combinatória são os seguintes: Sistematização do capítulo, Apresentação de retomada de conhecimentos, Apresentação de erros conceituais e/ou induções a erros, Apresentação de diversidade nas atividades propostas pelo capítulo, Apresentação do conhecimento de forma contextualizada e Estimulação para o uso de outros recursos didáticos.

| **Sistematização do Capítulo** |
|---|

O capítulo referente à Análise Combinatória discorre sobre os conteúdos em seções, onde cada uma delas apresenta explanação teórica, seguida de exemplos e/ou exercícios resolvidos e exercícios propostos.

Destacamos que, o capítulo traz ainda as seções: Exercícios complementares, Autoavaliação, Pesquisa e ação e Resolução comentada. Desse modo, mostraremos no Quadro 4 uma síntese da análise do capítulo denominado de Análise Combinatória.

Quadro 4 – Síntese da análise do capítulo Análise Combinatória

| Seção | Análise |
|---|---|
| Contagem | Inicialmente, esta seção apresenta três problemas resolvidos e contextualizados, tais que as soluções são dadas por meio de linguagem natural concomitantemente aos conceitos de contagem, árvore de possibilidades e organização de informações em tabela. Dessa forma, os problemas expostos são utilizados como suporte para definir o princípio multiplicativo.<br>Após isto, há cinco exercícios resolvidos, onde destacamos o R4 (pg. 250) que aplica de forma implícita o princípio de adição e o R5 (pg. 250) que retoma uma situação-problema enunciada no texto introdutório do capítulo.<br>A seção é finalizada com uma lista de exercícios propostos. São sugeridas 15 questões, bem contextualizadas e com níveis de dificuldades variados. |
| Fatorial de um número natural | Num primeiro momento, é citado, de forma sucinta, que boa parte dos problemas de Análise Combinatória são resolvidos pelo produto de números naturais consecutivos. Em seguida, é enunciada a definição de fatorial de um número natural.<br>Posteriormente, são apresentados quatro exemplos que exploram os mecanismos de simplificação de fatorial. Há ainda, dois exercícios resolvidos e seis exercícios propostos, tal que as questões 19, 20 e 21 (pg. 253) são aplicações do princípio multiplicativo. |
| Permutações | A seção apresenta a abordagem teórica de permutação simples e permutação com elementos repetidos. Não explora o conceito de permutação circular.<br>Dessa maneira, para o estudo de permutação simples são utilizados três problemas resolvidos com o intuito de induzir a conceituação. Já na definição de permutação com elementos repetidos, é empregada à mesma estratégia didática, entretanto, são usados apenas dois problemas.<br>A seção expõe ainda, três exercícios resolvidos e sugere uma |

| | |
|---|---|
| | lista com nove exercícios propostos, observamos que desses estão de acordo com o conteúdo. Destacamos o exercício proposto 31 (pg. 255) que incentiva o trabalho em grupo e tem um bom nível de dificuldade. |
| Arranjo simples | Esta seção retoma um dos problemas utilizados na introdução do conteúdo de permutação simples e o explora para induzir a conceituação de arranjo simples. Após isto, a fórmula para calcular a quantidade de arranjos simples é demonstrada.<br>Ressaltamos que o livro didático apresenta uma observação, tal que alerta aos leitores que os problemas que envolvem Permutações ou arranjos simples podem ser resolvidos aplicando o princípio multiplicativo.<br>Logo após, são expostos dois exercícios resolvidos, estes trazem duas soluções distintas, uma aplicando a fórmula de arranjo simples e a outra, o princípio multiplicativo. Há também uma lista de oito exercícios propostos, destacamos a questão 38 (pg. 258) que exige do estudante mais que aplicação de fórmulas e a 39 (pg. 258) que incentiva o trabalho em grupo. |
| Combinação simples | Para introduzir o conteúdo a seção opta, novamente, por explorar exercícios resolvidos a fim de induzir o conceito. Desse modo, são abordados dois exercícios, tal que o primeiro é retomado da introdução do assunto de arranjo simples e o segundo, trata de determinar o número de subconjuntos de um conjunto finito.<br>Assim, a partir dos exercícios é dada a definição de combinação simples e a fórmula do número de combinações simples é deduzida. Em seguida, são apresentados três exercícios resolvidos, observamos que o R14 (pg. 259-260) traz duas resoluções distintas, uma aplicando a fórmula e outra, o princípio multiplicativo. Nesse caso, percebemos que a solução pelo princípio é mais trabalhosa.<br>A seção é encerrada por quatorze exercícios propostos, tais que as questões trazem variados contextos e situações. Ressaltamos nesta lista o exercício 49 (pg. 260), que mostra uma problemática envolvendo baralho. Percebemos que, não são todos os leitores que conhecem como se constitui a organização das cartas de um baralho, assim, é de suma importância que o livro e/ou professor tragam essas informações. |
| Coeficiente binomial | Inicialmente, a seção apresenta o desenvolvimento de $\mathbf{(x + y)^n}$ |

| | |
|---|---|
| | para **n** = (0, 1, 2, 3). Em seguida, utiliza o raciocínio recursivo para apontar que qualquer outra potência do binômio **(x + y)** com expoente natural pode ser obtido a partir dos anteriores.<br>Após isto, traz um exemplo e um exercício resolvido, tal que nesse aplica o princípio multiplicativo para obter a quantidade de termos de $(x + y)^4$ e combinação simples para encontrar o coeficiente de um determinado termo.<br>Segue que o capítulo explora o desenvolvimento de $(x + y)^4$, em que calcula os coeficientes de todos os termos e define coeficiente binomial.<br>Há ainda dois exemplos e cinco exercícios propostos. |
| Somatório | Para introduzir o conteúdo, a seção apresenta um problema resolvido e contextualizado envolvendo a adição de várias parcelas. Em seguida, enuncia a definição de Somatório.<br>Segue que são expostos dois exemplos, um exercício resolvido e três exercícios propostos, tal que esses são mecânicos. |
| Binômio de Newton | A seção inicia definindo o triângulo de Pascal e aponta que as linhas que o formam são os coeficientes do desenvolvimento binomial $(x + y)^n$. Em seguida, explora os termos que formam a n-ésima linha do triângulo de Pascal, enunciando a fórmula do binômio de Newton.<br>Após isto, desenvolve alguns termos de $(x + y)^n$ e chega ao termo geral do binômio de Newton. Por fim, apresenta três exercícios resolvidos e seis exercícios propostos. |
| Exercícios complementares | É proposta uma lista contendo vinte e seis questões, com vários níveis de dificuldades.<br>Destacamos que, as questões propostas cobrem todo o conteúdo abordado pelo capítulo, além disso, trazem problemas de vestibulares e do ENEM[10]. |
| Autoavaliação | Sugere uma lista contendo dez questões referentes aos conteúdos expostos. Há também um quadro denominado de Retomada de conceitos que relaciona as questões com os objetivos do capítulo.<br>Esta seção permite que o aluno se autoavalie e tenha acesso a outros exercícios de contagem. |

[10] O ENEM foi criado em 1998, pelo Instituto Nacional de Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), do Ministério da Educação. Esse exame é regulamentado pela Portaria n° 438, de 28 de maio de 1998 e constitui-se como procedimento de avaliação do desempenho do aluno, tendo como objetivos conferir ao cidadão parâmetro para autoavaliação, criar referência nacional para os egressos de todas as modalidades do Ensino Médio e fornecer subsídios para o acesso à educação superior, assim como em cursos profissionalizantes pós-médio.

| | |
|---|---|
| Pesquisa e ação | A seção sugere uma pesquisa em grupo, na qual trabalha a aplicação da Análise Combinatória com o auxílio de recursos tecnológicos.<br>Salientamos que, essa atividade incentiva à investigação, argumentação e a troca de ideias entre aluno-aluno e professor-aluno. |
| Resolução comentada | Esta seção traz um problema do vestibular da Universidade Federal de Pernambuco respondido de duas maneiras distintas. A primeira resposta é dada pela aplicação da fórmula de combinação simples e a segunda, pelo princípio multiplicativo.<br>Segue que o livro propõe aos leitores que comparem as resoluções dadas, além disso, instiga que elaborem uma resposta diferente das já apresentadas. Por fim, a seção traz três variações do problema.<br>Percebemos que, ao apresentar duas formas de resolução para um problema o livro potencializa e amplia o repertório dos alunos. |

Fonte: Elaborado pela autora.

## Apresentação de retomada de conhecimentos

Observamos que o capítulo retoma a definição do triângulo de Pascal antes de abordar o binômio de Newton. Desse modo, o livro traz o seguinte enunciado:

> Chamamos de triângulo de Pascal a disposição dos coeficientes binomiais em linhas e colunas de forma que os coeficientes binomiais de mesmo numerador fiquem dispostos numa mesma linha, enquanto os de mesmo denominador são colocados numa mesma coluna. (LEONARDO, 2013, p. 264).

Entendemos que os conteúdos, triângulo de Pascal e binômio de Newton, estão estritamente relacionados, assim, a explanação feita pelo livro contribui para a abordagem dessa temática.

## Apresentação de erros conceituais e/ou induções a erros

O capítulo aborda de forma correta o princípio multiplicativo, definindo-o para acontecimentos compostos por duas etapas sucessivas e independentes. Em

seguida, acrescenta que essa técnica de combinatória também é válida para acontecimentos com três ou mais etapas.

A definição de fatorial de um número natural é dada de forma objetiva, sem equívocos. Observe na Figura 8:

Figura 8 – Definição de fatorial de um número natural

O **fatorial** de um número natural *n* é representado por *n*! (lemos: "*n* fatorial") e é definido por:

- $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$, para $n \geqslant 2$
- $1! = 1$
- $0! = 1$

Fonte: LEONARDO, 2013, p. 251.

O livro também traz a definição de permutação, tal que essa é dividida em permutação simples e com elementos repetidos. O enunciado de permutação simples é apresentado como: "Dado um conjunto de *n* elementos, chama-se **permutação simples** dos *n* elementos qualquer sequência (agrupamento ordenado) desses *n* elementos" (LEONARDO, 2013, p. 253).

Além disso, é indicado que o número de permutações simples de n elementos é dado pela seguinte fórmula algébrica: $\mathbf{P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!}$.

Com relação à de permutação com elementos repetidos, o capítulo traz a fórmula:

$$\mathbf{P_n^{n_1,\, n_2,\, \ldots,\, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \ldots \cdot n_k!}}.$$

Dessa forma, os enunciados referentes ao conteúdo de permutação estão corretos. Entretanto, sugerimos que na definição de permutação simples seja salientado que os elementos do conjunto dado são distintos.

A abordagem sobre arranjo simples está bem estruturada, tal que o livro fornece uma definição correta e, em seguida, apresenta a fórmula para o cálculo do número de arranjos simples, com uma demonstração.

Para desenvolver a demonstração, inicialmente é enunciado: "Vamos calcular o número total de agrupamentos simples de n elementos distintos, arranjados *p* a *p*, com $0 < p \leq n$, indicado por $A_{n,\,p}$" (LEONARDO, 2013, p. 256).

A partir daí, é elaborado o seguinte raciocínio construtivo:

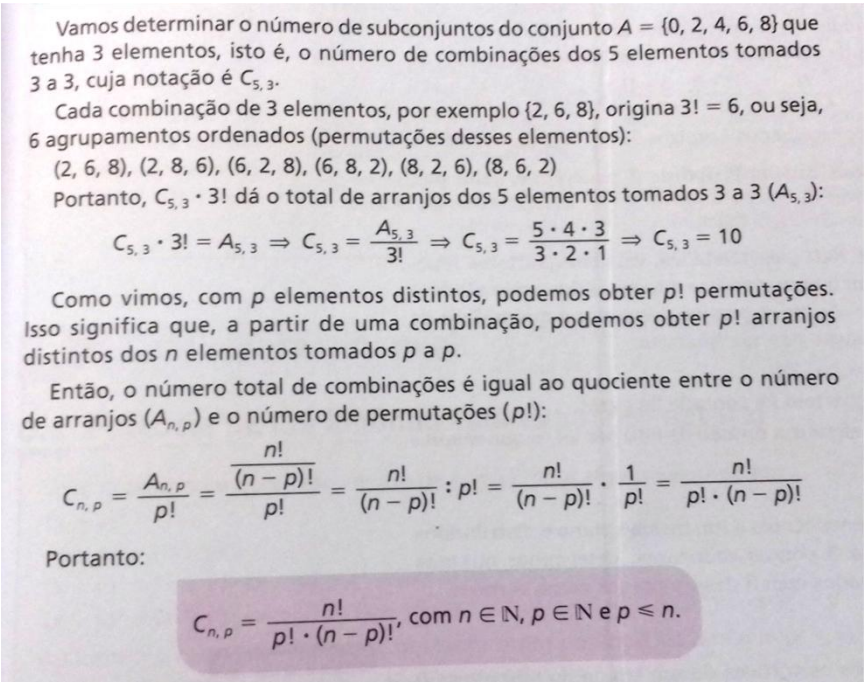
> Existem n possíveis escolhas para o primeiro elemento do agrupamento, n – 1 possíveis escolhas para o segundo agrupamento, n – 2 para o terceiro elemento,..., n – (p – 1) possíveis escolhas para o p-ésimo elemento do agrupamento. (LEONARDO, 2013, p. 256).

Após isto, ocorre a aplicação do princípio multiplicativo e multiplica-se o segundo membro por $\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$, obtendo assim, $\mathbf{A_{n,\,p} = \frac{n!}{(n-p)!}}$.

Ao explanar o conteúdo de combinação simples, o capítulo expõe corretamente a seguinte definição: “Dado um conjunto de *n* elementos, chama-se **combinação simples** dos *n* elementos, tomados *p* a *p*, qualquer agrupamento não ordenado (subconjunto) de *p* elementos escolhidos entre os *n* possíveis” (LEONARDO, 2013, p. 258).

Para determinar a fórmula de combinação simples o livro trata, a princípio, de um exemplo resolvido. Diante disso, deduz uma demonstração informal, em que o número de combinações simples de **n** elementos tomados **p** a **p** é igual ao quociente entre o número de arranjos **($\mathbf{A_{n,p}}$)** e o número de permutações **(p!)**.

Figura 9 – Dedução da fórmula de combinação simples.



Vamos determinar o número de subconjuntos do conjunto $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ que tenha 3 elementos, isto é, o número de combinações dos 5 elementos tomados 3 a 3, cuja notação é $C_{5,\,3}$.

Cada combinação de 3 elementos, por exemplo {2, 6, 8}, origina 3! = 6, ou seja, 6 agrupamentos ordenados (permutações desses elementos):

(2, 6, 8), (2, 8, 6), (6, 2, 8), (6, 8, 2), (8, 2, 6), (8, 6, 2)

Portanto, $C_{5,\,3} \cdot 3!$ dá o total de arranjos dos 5 elementos tomados 3 a 3 ($A_{5,\,3}$):

$$C_{5,\,3} \cdot 3! = A_{5,\,3} \Rightarrow C_{5,\,3} = \frac{A_{5,\,3}}{3!} \Rightarrow C_{5,\,3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} \Rightarrow C_{5,\,3} = 10$$

Como vimos, com *p* elementos distintos, podemos obter *p*! permutações. Isso significa que, a partir de uma combinação, podemos obter *p*! arranjos distintos dos *n* elementos tomados *p* a *p*.

Então, o número total de combinações é igual ao quociente entre o número de arranjos ($A_{n,\,p}$) e o número de permutações (*p*!):

$$C_{n,\,p} = \frac{A_{n,\,p}}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!} : p! = \frac{n!}{(n-p)!} \cdot \frac{1}{p!} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$$

Portanto:

$$C_{n,\,p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}, \text{ com } n \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{N} \text{ e } p \leq n.$$

Fonte: LEONARDO, 2013, p. 259.

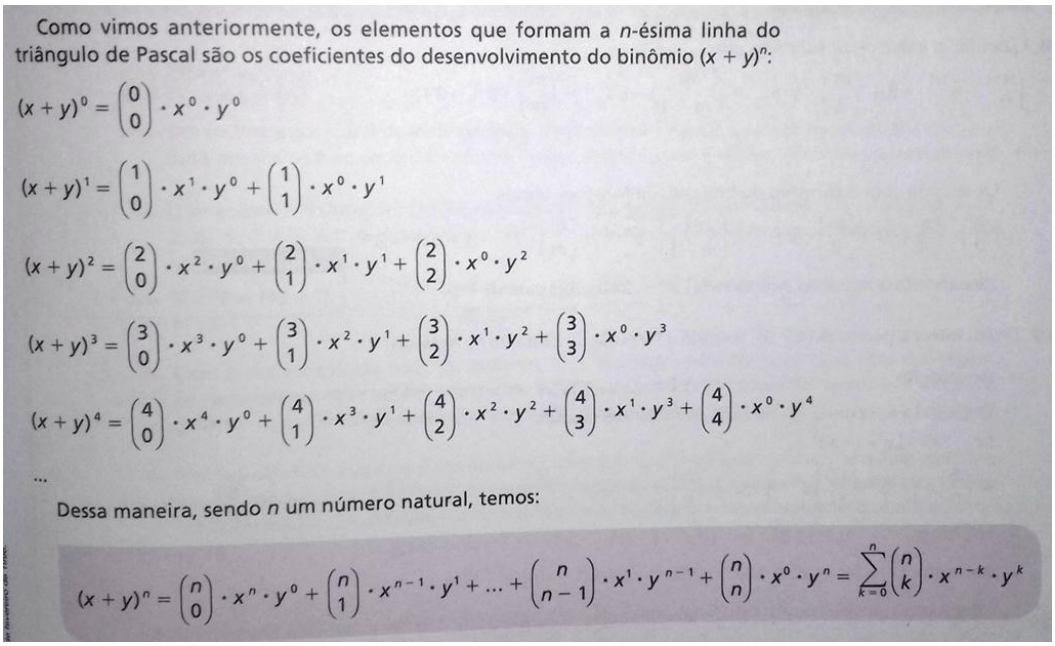
O livro traz, ainda, o conceito de coeficiente binomial, fornecendo uma definição correta. Além disso, apresenta a notação de somatório, definindo-o como: “Na sequência ($a_m$, $a_{m+1}$, $a_{m+2}$, …, $a_{n-1}$, $a_n$), a soma dos termos

$a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{n-1} + a_n$ pode ser representada por $\sum_{i=m}^{n} a_i$, com *m* e *n* naturais e *m* < *n* (lemos; 'somatório de $a_i$ com *i* variando de *m* a *n*')" (LEONARDO, 2013, p. 263).

Para encerrar a discussão teórica do capítulo dedicado à Análise Combinatória, o livro faz uma explanação sobre o binômio de Newton. Nesse momento, inicia definindo e representando o triângulo de Pascal. A partir daí, indica que as linhas desse triângulo são os coeficientes do desenvolvimento binomial $\mathbf{(x+y)^n}$.

Assim, segue desenvolvendo os primeiros casos do binômio $\mathbf{(x+y)^n}$ e generaliza, chegando a fórmula do binômio de Newton. Como indica a Figura 10 abaixo:

Figura 10 – Fórmula do binômio de Newton.



Como vimos anteriormente, os elementos que formam a *n*-ésima linha do triângulo de Pascal são os coeficientes do desenvolvimento do binômio $(x + y)^n$:

$$(x+y)^0 = \binom{0}{0} \cdot x^0 \cdot y^0$$

$$(x+y)^1 = \binom{1}{0} \cdot x^1 \cdot y^0 + \binom{1}{1} \cdot x^0 \cdot y^1$$

$$(x+y)^2 = \binom{2}{0} \cdot x^2 \cdot y^0 + \binom{2}{1} \cdot x^1 \cdot y^1 + \binom{2}{2} \cdot x^0 \cdot y^2$$

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0} \cdot x^3 \cdot y^0 + \binom{3}{1} \cdot x^2 \cdot y^1 + \binom{3}{2} \cdot x^1 \cdot y^2 + \binom{3}{3} \cdot x^0 \cdot y^3$$

$$(x+y)^4 = \binom{4}{0} \cdot x^4 \cdot y^0 + \binom{4}{1} \cdot x^3 \cdot y^1 + \binom{4}{2} \cdot x^2 \cdot y^2 + \binom{4}{3} \cdot x^1 \cdot y^3 + \binom{4}{4} \cdot x^0 \cdot y^4$$

...

Dessa maneira, sendo *n* um número natural, temos:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} \cdot x^n \cdot y^0 + \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} \cdot y^1 + \ldots + \binom{n}{n-1} \cdot x^1 \cdot y^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot x^0 \cdot y^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^k$$

Fonte: LEONARDO, 2013, p. 265.

O capítulo, novamente, desenvolve os primeiros termos do binômio $\mathbf{(x+y)^n}$ e determina a seguinte fórmula para o termo geral do binômio de Newton: $\mathbf{T_{k+1} = \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^k}$, com $\mathbf{0 \leq k \leq n}$.

## Apresentação de diversidade nas atividades propostas pelo capítulo

O tópico Exercícios resolvidos e as seções Exercícios propostos e Exercícios complementares apresentam uma quantidade considerável de questões, tais que muitas são selecionadas de provas de vestibulares ou do ENEM. Percebemos que o capítulo oferece uma diversidade de questões, permitindo que os alunos explorem a aplicação da Análise Combinatória em diferentes contextos e situações.

O capítulo também traz as seções: Autoavaliação, que exibe questões que retomam os conceitos trabalhados, além de permitir que o aluno se autoavalie; Pesquisa e ação, que sugere uma pesquisa elaborada em grupo; e Resolução comentada, que apresenta um problema de vestibular respondido por abordagens diferentes.

Dessa forma, notamos que essas atividades incentivam a retomada de conceito, autoavaliação, pesquisa, trabalho em grupo e utilização de diferentes estratégias na resolução de um problema.

## Apresenta o conhecimento de forma contextualizada

A abordagem inicial do capítulo, no primeiro tópico da seção Contagem, ocorre de forma contextualizada, tal que é apresentado um infográfico sobre a evolução do número de automóveis no Brasil. Nesse momento, o texto também traz informações relativas à implantação e as alterações que as placas de identificação de veículos passaram.

A partir disso, é enunciado um problema relativo às informações contidas no infográfico, esse diz respeito ao número de placas que podem ser formadas com três letras e quatro algarismos. Seguindo a explanação, é ressaltado que situações como essas, de quantificar combinações possíveis, são problemas de contagem.

O texto introdutório também enfatiza que o conhecimento combinatório tem aplicação na Probabilidade e na Estatística, assim como na Química ou em atividades cotidianas (esporte e nos campos industrial, comercial, científico e governamental).

Ainda na seção Contagem, observamos que o livro inicia o estudo do princípio multiplicativo utilizando três problemas contextualizados. Após a resolução das

situações apresentadas ocorre a conceituação do princípio multiplicativo. Assim, percebe-se que nesta situação o conceito foi introduzido de forma contextualizada, tal que a estratégia metodológica utilizada foi a Resolução de Problemas.

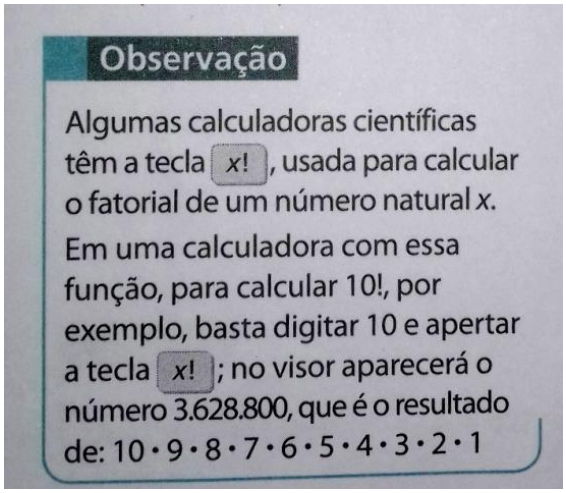
Para desenvolver as abordagens teóricas das seções: permutação, arranjo simples, combinação simples e somatório, o capítulo segue o mesmo procedimento, num primeiro momento expõe exemplos contextualizado e resolvido e, em seguida, induz a sistematização dos conceitos.

## Estimulação para o uso de outros recursos didáticos

Percebemos que o uso de calculadora e de aparato tecnológico como recursos é incentivado no capítulo analisado. Desse modo, a seção intitulada de Fatorial de um número natural aborda como calcular o fatorial de um número natural na calculadora científica. Contudo, nesta abordagem só ocorre à exploração de aspectos técnicos acerca do emprego de calculadoras.

Em nosso entender, é necessário que os estudantes saibam como utilizar à calculadora, tendo autonomia e domínio de como executar, via teclado, as operações e funções dessa ferramenta. Entretanto, o uso da calculadora deve ocorrer de maneira reflexiva, desenvolvendo a habilidade de estimar, testar, deduzir e analisar a coerência dos cálculos, algo que não é estimulado pela abordagem feita no capítulo.

Figura 11 – Trecho do livro Conexões com a Matemática, volume 2.



**Observação**

Algumas calculadoras científicas têm a tecla [x!], usada para calcular o fatorial de um número natural *x*.

Em uma calculadora com essa função, para calcular 10!, por exemplo, basta digitar 10 e apertar a tecla [x!]; no visor aparecerá o número 3.628.800, que é o resultado de: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Fonte: LEONARDO, 2013, p. 251.

Já na seção Pesquisa e ação é apresentada uma proposta de atividade, tal que sugere o uso de programas computacionais para a criação de códigos *QR Code*[11]. Além disso, indica a utilização de telefones celulares com câmera fotográfica e aplicativos para decodificar *QR Code.*

De modo geral, a obra distribui de forma equilibrada os textos e imagens. No que diz respeito à linguagem empregada, essa é adequada e acessível à faixa de escolaridade dos alunos.

No capítulo destinado a Análise Combinatória, percebemos que a introdução dos conceitos, na maioria das vezes, ocorre por meio de exercícios e problemas resolvidos, que induzem o processo de conceituação. Neste ponto, as fórmulas de contagem são apresentadas de maneira mais intuitiva, omitindo aspectos formais da Matemática.

Destacamos a abordagem realizada na introdução do princípio multiplicativo, onde são apresentadas diferentes estratégias de resolução (linguagem natural concomitantemente aos conceitos de contagem, árvore de possibilidades e organização de informações em tabela).

Acreditamos que, a apresentação de formas distintas de representação auxiliam os estudantes no processo de compreensão conceitual. Além disso, os PCNEM (2000, p. 42) atribuem como uma das finalidades do ensino da Matemática no nível médio levar o aluno a “reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações”.

Outro aspecto que ressaltamos no capítulo é a abordagem do assunto de fatorial de um número natural. Entendemos que, este conceito poderia ter sido explorado por meio de problemas de permutação, para que sua explanação fosse mais natural.

Na abordagem relacionada ao conteúdo de permutação, é notável a ausência do conteúdo de permutação circular. O livro poderia propor alguns exercícios ou atividades complementares para tratar dessa temática.

Por fim, não poderíamos deixar de destacar a diversidades de questões e atividades propostas, muitas delas são contextualizadas. Além do que, ocorre o incentivo ao trabalho em grupo, socialização de ideias e a elaboração de pesquisa.

---

[11] De acordo com Nichele, Schlemmer e Ramos (2015), os *QR Codes* (*Quick Response Codes*) são códigos de barras bidimensionais que podem ser convertidos em informação.

# 4 PESQUISA-AÇÃO-APLICAÇÃO: ATIVIDADES PROPOSTAS

Nesta seção, apresentamos quatro propostas de atividades para trabalhar os conteúdos de Análise Combinatória no Ensino Médio. Essas atividades foram elaboradas a partir dos estudos realizados nas seções anteriores e oferecem aos professores de Matemática um material de apoio didático, portanto, de aplicação no ensino e aprendizagem de combinatória como conteúdo de Matemática.

Dessa forma, exploramos diferentes estratégias de abordagem, com o intuito de que os alunos compreendam os conhecimentos de combinatória. As atividades sugeridas envolvem situações do cotidiano e valorizam a construção de conceitos, não considerando as fórmulas como procedimento principal no processo de ensino e aprendizagem, tendo em vista que nossa observação *in loco* motivadora deste trabalho faz a crítica ao ensino apenas instrumental e/operativo de Análise Combinatória.

## 4.1 ATIVIDADE 1 – UTILIZANDO PERMUTAÇÃO NA CRIPTOGRAFIA

O envio de mensagens sigilosas tem acompanhado a história da humanidade e, ainda hoje, se faz presente no nosso cotidiano. Desse modo, buscamos nesta proposta utilizar a criptografia, que é uma ciência que estuda os métodos de envio e recepção de mensagens secretas, como ferramenta motivacional para o processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de permutação.

Sendo assim, utilizaremos problemas de criptografia por permutação como ponto de partida para a conceituação do conteúdo de permutação simples. Além disso, apoiaremos a introdução do conceito de fatorial de um número natural na resolução dos problemas abordados.

### 4.1.1 Plano da Atividade 1

**Tema:** Análise Combinatória

**Público-alvo:** Alunos do 2° ano do Ensino Médio

**Objetivos:**

- Compreender e sistematizar o conceito de permutação simples através da resolução de problemas;

- Entender o conceito de criptografia, identificando sua participação ao longo da história, assim como no nosso cotidiano;
- Compreender e sistematizar o conceito de fatorial de um número natural.

**Conteúdo:**

- Permutação simples;
- Fatorial de um número natural.

**Duração:** 45 minutos

**Material utilizado:**

- Folha de A4;
- Lápis e borracha;
- Pincel para quadro branco;
- Quadro branco.

**Desenvolvimento:** Inicialmente, será realizada uma aula expositiva e dialogada sobre criptografia. Nesse momento, o docente deve relatar, de forma sucinta, quais foram os principais motivos para o desenvolvimento dessa técnica, exemplificar aplicações da mesma na antiguidade e, por fim, ressaltar a utilização da criptografia hoje em dia.

Após isto, devem ser trabalhados com os estudantes os dois problemas abaixo. Nesse momento, o docente poderá encaminhar o desenvolvimento da aula da seguinte forma:

- Pedir que os alunos realizem a leitura individual da questão e, em seguida, que tracem estratégias próprias de resolução;
- Realizar a leitura dos problemas em voz alta;
- Conduzir uma pequena discussão, incentivando a socialização das estratégias utilizadas para solucionar os problemas;
- Ir ao quadro registrar possíveis resoluções para as questões.

**Problema 1 -** Ganassoli (2015, p. 24): Criptografe a mensagem abaixo em blocos de 4 letras permutando: 1ª com 2ª e 3ª com 4ª letras.

VAMOS ESTUDAR HOJE?

**Resolução:** A questão é bastante simples, tal que se deve separar as letras em blocos e, após isto, permutá-las entre si. Desse modo, a resolução deve ocorrer em dois passos:

1º) Separação de blocos com 4 letras ⟶ VAMO SEST UDAR HOJE

2º) Permutação das letras ⟶ AVOM ESTS DURA OHEJ

Assim, a mensagem criptografada é: AVOMESTSDURAOHEJ.

O professor, no 2º passo da resolução, deve fazer o seguinte questionamento aos estudantes: O que é uma permutação? A partir das respostas dadas, formalizará o conceito de permutação.

**Problema 2 -** Adaptado de Ganassoli (2015, p.25): Amanda cifrou as palavras PAZ e AMOR usando permutação das letras e mandou através de bilhetes para sua colega Júlia. De quantas, e quais as maneiras que Júlia pode ter recebido o bilhete com a palavra PAZ? E de quantas maneiras a palavra AMOR?

**Resolução**: Esta questão traz duas situações, em que, primeiramente, se deve indicar de quantas e quais são as maneiras que Amanda pode criptografar a palavra PAZ e de quantas maneiras pode-se criptografar a palavra AMOR.

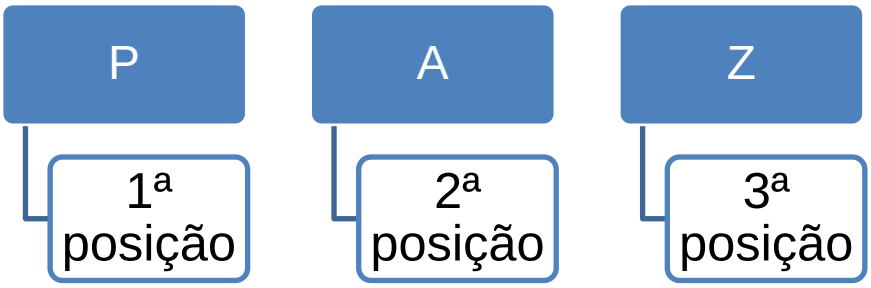
Inicialmente, o docente trabalhará com a turma as questões relacionadas à palavra PAZ. Dessa forma, a primeira estratégia que deve ser abordada é a listagem das possibilidades. Vejamos:

| | | |
|---|---|---|
| **PAZ** | **APZ** | **ZAP** |
| **PZA** | **AZP** | **ZPA** |

Ao aplicar esta estratégia, é importante que se desenvolva um processo organizado, como por exemplo: fixar a letra P na primeira posição e variar a segunda e terceira posição com as letras A e Z, em seguida, fixar a letra A na primeira posição e variar a segunda e terceira posição com as letras P e Z e, por fim, fixar a letra Z na primeira posição e variar a segunda e terceira posição com as letras A e P.

Outra forma para se obter a quantidade de modos de se criptografar a palavra PAZ é aplicando a ideia do princípio multiplicativo. Assim, inicialmente o docente deve organizar a execução dessa estratégia de resolução. Como a palavra é

composta por três letras, pode-se indicar que existem três posições para se acomodar as letras, por exemplo:




Dessa forma, resolvendo pelo princípio multiplicativo, temos que para a primeira posição de letra há três possibilidades de ocupação (P, A, Z); para a segunda posição existem outras duas e para a terceira posição existe apenas uma possibilidade, ou seja,

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

Agora, para indicar a quantidade de maneiras de criptografar a palavra AMOR, o docente mais uma vez deve utilizar como estratégia de resolução a listagem de possibilidades. Vejamos:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **AMOR** | **MAOR** | **OAMR** | **RAMO** |
| **AMRO** | **MARO** | **OARM** | **RAOM** |
| **AOMR** | **MOAR** | **OMAR** | **RMAO** |
| **AORM** | **MORA** | **OMRA** | **RMOA** |
| **ARMO** | **MRAO** | **ORAM** | **ROAM** |
| **AROM** | **MROA** | **ORMA** | **ROMA** |

A resolução desta questão apresenta um número de possibilidades maior do que o encontrado no problema anterior. Com isso, espera-se que os alunos percebam que se faz necessário buscar estratégias mais eficientes para solucionar os problemas, pois a listagem de possibilidades pode se tornar extensiva e cansativa.

Logo, o professor aplicará novamente a ideia do princípio multiplicativo, onde para a primeira posição de letra há quatro possibilidades de ocupação (A, M, O, R); para a segunda posição terá outras três possibilidades, e assim por diante, resultando em:

$$4\times3\times2\times1=24$$

Neste momento, deve ser ressaltado aos alunos que alguns problemas de Análise Combinatória apresentam um padrão na resolução, tal que essa é dada pelo produto de números naturais consecutivos. A partir disso, o professor deve formalizar o conceito de fatorial de um número natural.

Em seguida, o docente partirá desses casos particulares de cálculo de permutação, para uma situação mais geral, utilizando como técnica o princípio multiplicativo. Assim, desenvolverá com a turma a seguinte questão: de quantos modos é possível ordenar **n** objetos distintos.

Com isto, discutirá que nesse caso existe **n** maneiras de posicionar o primeiro objeto, **n-1** maneiras de posicionar o segundo, ..., 1 modo de posicionar o último objeto. Portanto, pelo princípio multiplicativo, se obtém que a permutação de **n** objetos, denotada por $\mathbf{P_n}$, é

$$n\,(n-1)\ldots1=n!$$

**Comentários:**

1º) É importante que os alunos já tenham conhecimento acerca do princípio multiplicativo.

2º) O docente poderá apresentar um terceiro problema envolvendo criptografia por permutação para enunciar o conceito de permutação com repetição.

**Exemplo:** Felipe quer enviar a palavra MATEMÁTICA, de forma criptografada, para um grupo no *WhatsApp*. Ele prometeu que pagaria uma pizza para quem a decifrasse. De quantas maneiras Felipe pode enviar a mensagem para o grupo?

**Resolução:** A palavra MATEMÁTICA tem 10 letras que serão permutadas, destas M e T se repetem duas vezes e a letras A três vezes, temos:

$$P_{10}^{3,\,2,\,2} = \frac{10!}{3!2!2!} = 151200\ .$$

3º) As estratégias de resolução adotadas pelos alunos devem ser valorizadas.

4º) Os problemas apresentados podem ser utilizados como aplicação do conceito de permutação simples.

**Avaliação:** Os alunos poderão ser avaliados de forma processual, tal que se analisará o desenvolvimento das estratégias realizadas por eles, a verbalização e a socialização de ideias.

## 4.2 ATIVIDADE 2 – QUANTAS RODAS DE CIRANDA PODEMOS FORMAR?

Esta atividade tem a finalidade de introduzir o conceito de permutação circular. Dessa forma, apresentamos um experimento que propõe a exploração da seguinte questão: De quantas maneiras podemos formar uma roda de ciranda?

### 4.2.1 Plano da atividade 2

**Tema:** Análise Combinatória

**Público-alvo:** Alunos do 2° ano do Ensino Médio

**Objetivos:**

- Compreender e sistematizar o conceito de permutação circular;
- Desenvolver o raciocínio combinatório do estudante;
- Proporcionar a interação entre professor-aluno e aluno-aluno.

**Conteúdo:**

- Permutação circular.

**Duração:** 90 minutos

**Material utilizado:**

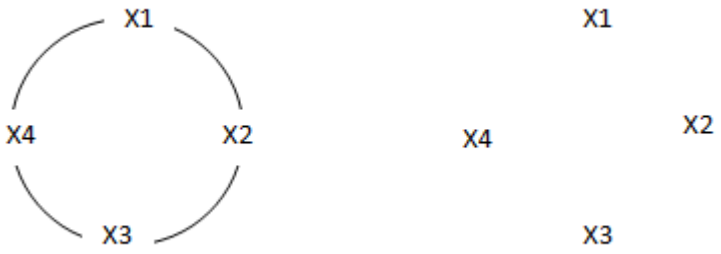
- Folha A4;
- Giz;
- Lápis;
- Pincel para quadro branco;
- Quadro branco.

**Dinâmica da atividade:**

Inicialmente, o local escolhido para a realização da atividade tem que ser preparado. O professor pode optar pela sala de aula ou quadra/pátio da escola (caso

escolha a sala de aula, devem ser afastas as cadeiras, deixando espaço livre para a formação das rodas de ciranda). Desse modo, com o auxílio de um giz, o docente fará marcações no chão indicando onde os alunos devem ficar para formar as cirandas.

Figura 12 – Exemplos de possíveis marcações no chão




Fonte: Acervo da autora.

Após isto, será solicitado que a turma se divida em grupos com quatro componentes. Cada grupo deve ir para uma das marcações e o professor fará o seguinte questionamento: De quantas maneiras podemos formar uma roda de ciranda com 4 pessoas?

Além disso, o docente orientará que cada grupo anote em uma folha de papel as maneiras encontradas. Daí, os alunos exploraram a situação proposta por alguns minutos e em seguida, caso a realização da atividade tenha ocorrido na quadra/pátio da escola, todos devem voltar para a sala de aula, onde analisaram as informações anotadas pelos grupos.

Nesse momento, os grupos socializaram os resultados e o professor direcionará a discussão com o objetivo de explicar o conceito de permutação circular. Para enriquecer o processo de conceituação, um aluno será escolhido para mostrar quantas rodas de ciranda podem ser formadas com um indivíduo.

Em continuidade, o professor escolherá dois, depois três e para finalizar, quatro alunos e repetirá o processo, onde analisará e registrará no quadro quantas rodas de cirandas podem ser formadas em cada situação. Durante este procedimento, o docente ressaltará que, quando os alunos estão dispostos em círculo o que importa é apenas a posição relativa entre eles.

Dessa maneira, analisando as situações listadas no quadro ocorrerá a formalização do conteúdo, tal que serão enunciados o conceito de permutação

circular e a generalização da maneira de calcular a quantidade total de permutações circulares de **n** objetos.

**Comentários:**

1°) As marcações no chão auxiliam apenas na organização da atividade.

2°) É interessante que o professor ao formar rodas de ciranda com dois, três e/ou quatro alunos explore disposições que coincidam por meio de rotação. Essa ação pode auxiliar a compreensão dos estudantes, pois exemplifica que nas permutações circulares o que importa é apenas a posição relativa entre os objetos.

3º) É relevante que, ao final do experimento, o professor aplique uma lista de exercícios propostos sobre o conteúdo de permutação circular.

**Avaliação:** Será levada em consideração a participação efetiva do aluno ao longo da atividade. Além disso, a análise das estratégias desenvolvidas pelos grupos, a verbalização e a socialização de ideias.

## 4.3 ATIVIDADE 3 – ANALISANDO OS JOGOS DO CAMPEONATO POTIGUAR DE FUTEBOL FEMININO DE 2017

Esta atividade tem como objetivo explorar situações do cotidiano para aplicar conhecimentos de Análise Combinatória. Assim, apresentaremos problemas relacionados aos jogos e possíveis premiações do Campeonato Potiguar de Futebol Feminino de 2017 para trabalhar os conteúdos de arranjo simples e combinação simples.

### 4.3.1 Plano de Atividade 3

**Tema:** Análise Combinatória

**Público-alvo:** Alunos do 2° ano do Ensino Médio

**Objetivos:**

- Aplicar conhecimentos combinatórios em situações do cotidiano;
- Interpretar as informações apresentadas nas situações-problema propostas;
- Desenvolver estratégias próprias de resolução.

**Conteúdo:**

- Arranjo simples;
- Combinação simples.

**Duração:** 45 minutos

**Material utilizado:**

- Folha A4;
- Folha com a atividade impressa;
- Lápis e borracha.

**Desenvolvimento:** A priori, o professor distribuirá uma folha com a atividade proposta impressa e uma folha A4, onde os alunos devem registrar as resoluções, entregando-a no final da aula.

Após isto, será feita a leitura em conjunto das questões e o docente auxiliará os estudantes no processo de resolução, incentivando e esclarecendo possíveis dúvidas.

Atividade proposta:

1) O Campeonato Potiguar de Futebol Feminino de 2017 será disputado pelas seguintes equipes:

Quadro 5: Times que participaram do Campeonato Potiguar de Futebol Feminino 2017.

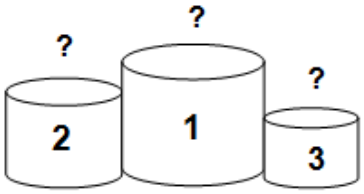
Fonte: Elaborado pela autora.

Os jogos dessa competição ocorreram no sistema ida e volta, ou seja, todos os times jogam entre si duas vezes, uma vez no próprio campo e outra vez no campo do adversário. Dessa forma, quantos jogos serão realizados no Campeonato Potiguar de Futebol Feminino de 2017?

Agora, suponha que as equipes Associação Esportiva Monte Líbano, Atlético Clube Corinthians e Centro Esportivo Força e Luz também estarão competindo. Quantas partidas teria o campeonato?

2) O Campeonato Potiguar de Futebol Feminino de 2017 consagrará como campeã a equipe que conquistar o maior número de pontos. Considerando que não houve empate na pontuação e que os três melhores times são premiados, de quantas maneiras distintas pode-se compor o pódio?

Figura 13 – Representação do pódio.




Fonte: Acervo da autora.

3) Suponha que, a equipe Sociedade Esportiva União seja a campeã e seu elenco é composto por 20 atletas. Considerando que ocorrerá uma cerimônia de premiação, porém, apenas 4 jogadoras podem representar o time, de quantos modos podem-se escolher as jogadoras?

**Comentários:** 1ª) A atividade proposta também pode ser desenvolvida em dupla ou grupo.

2º) Para que os alunos tenham maior interesse pela atividade, o docente pode utilizar campeonatos e times locais para compor as questões.

**Avaliação:** Os alunos serão avaliados mediante a análise das respostas desenvolvidas por eles. Além disso, se observará a desenvoltura dos estudantes durante o processo de resolução.

## 4.4 ATIVIDADE 4 – *SOFTWARE* GEOMETRIA DO TÁXI – CONTAGEM

O *software* Geometria do táxi – Contagem foi desenvolvido pelo projeto Matemática Multimídia[12], da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). Esse recurso explora noções básicas de combinatória a partir da seguinte questão: de quantas maneiras podemos ir de um ponto a outro em uma malha quadriculada?

[12] http://m3.ime.unicamp.br/portal/

Assim, sugerimos o uso desse software em sala de aula para se trabalhar o conteúdo de combinação simples.

### 4.4.1 Plano da Atividade 4

**Tema:** Análise Combinatória

**Público-alvo:** Alunos do 2° ano do Ensino Médio

**Objetivos:**

- Desenvolver noções do conceito de combinação simples por meio do *software* Geometria do táxi – Contagem;
- Utilizar e indicar pares ordenados no sistema de coordenadas cartesianas;
- Explorar, de forma intuitiva, conceitos de contagem e combinatória;
- Proporcionar a interação entre professor-aluno e aluno-aluno.

**Conteúdos:**

- Sistema de coordenadas;
- Contagem;
- Princípio multiplicativo;
- Combinação simples.

**Duração:** 90 minutos

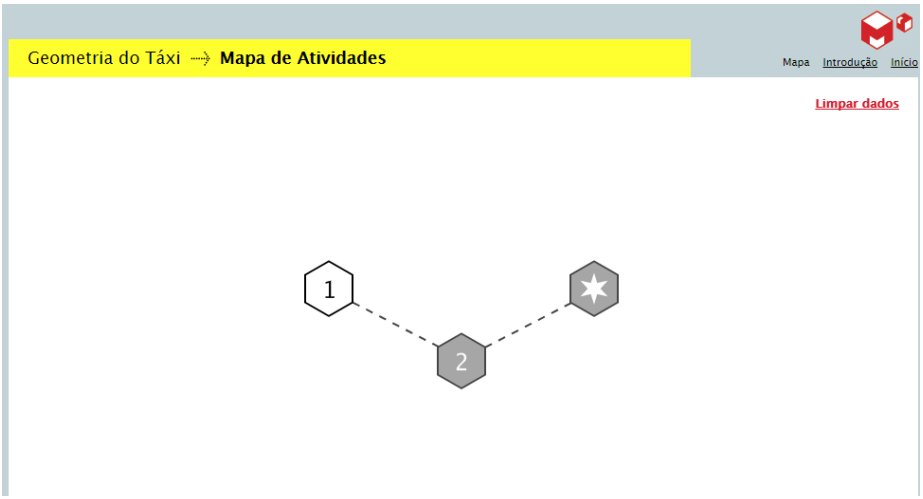
**Material utilizado:**

- Computadores;
- Folha A4;
- Lápis;
- Pincel para quadro branco;
- Quadro branco;
- *Software* Geometria do táxi – Contagem.

**Desenvolvimento:**

Inicialmente, no laboratório de informática, o professor dividirá a turma em duplas e apresentará o software Geometria do táxi – Contagem. Neste momento, deverá salientar que a estrutura do mesmo é composta por duas atividades e um desafio, tal que na aula serão trabalhadas apenas as atividades.

Figura 14 – Mapa de atividades




Fonte: Acervo da autora.

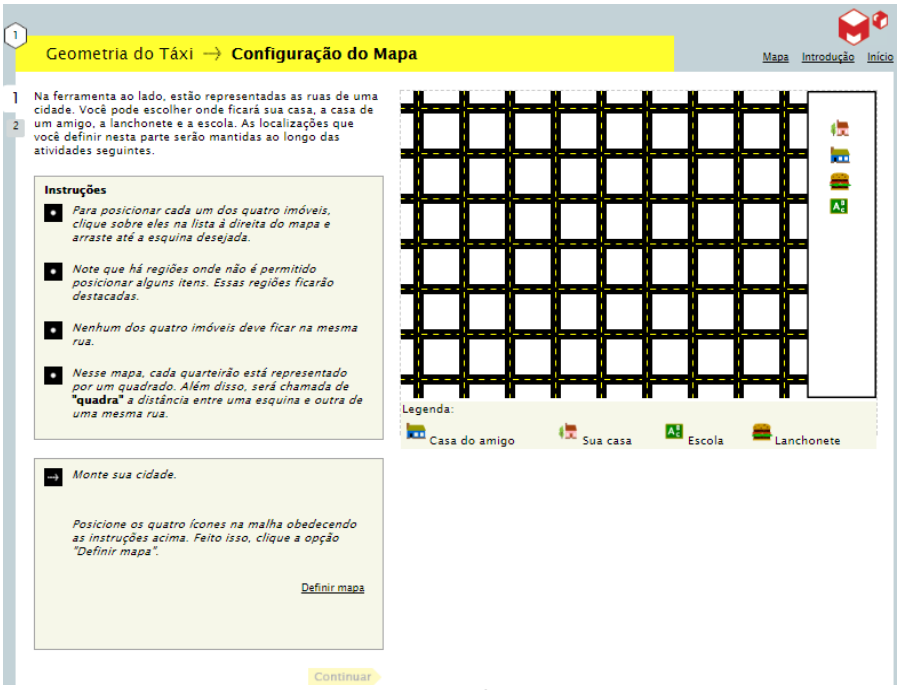
Em seguida, o professor orientará que cada dupla inicie a atividade 1, que é composta por duas partes, são elas:

1ª) Posicionar quatro localidades em um mapa de ruas de uma cidade, tal que esse é representado por uma malha quadriculada;

2ª) Indicar as coordenadas cartesianas das localidades posicionadas; determinar e marcar no mapa o trajeto mínimo, ou seja, o menor percurso possível entre duas localidades indicadas.

O *software* apresenta instruções claras de como realizar as atividades. Dessa maneira, o docente solicitará que os estudantes sigam as instruções e acompanhará o progresso das duplas, esclarecendo possíveis dúvidas.

Figura 15 – Atividade 1, primeira parte.




Fonte: Acervo da autora.

Após concluírem a atividade 1, as duplas devem seguir para a próxima atividade. Essa é composta por cinco partes, cujo objetivo é determinar quantos caminhos diferentes, de comprimento mínimo, podem ser percorridos.

Dessa forma, a atividade 2 propõe:

1ª) Determinar e marcar no mapa o menor percurso possível entre duas localidades indicadas; calcular, de forma intuitiva, quantos caminhos distintos existem entre essas duas localidades;

2ª) Dado um trajeto no mapa, descrê-lo a partir da seguinte notação: letra H para descolamentos na horizontal e a letra V, para vertical; listar todos os trajetos possíveis.

3ª) Apresenta um trajeto com o menor número de quadras possíveis. O caminho indicado é formado por pontos afastados um do outro, assim, o software mostra a quantidade de trajetos por meio da fórmula de combinação simples;

4ª) Determinar o número de trajetos mínimos entre duas localidades (os pontos que determinam os trajetos são afastados um do outro);

5ª) Indicar os trajetos com o menor número de quadra possível entre as localidades A e B e, em seguida, entre B e C; determinar o número de trajetos mínimos possíveis entre A e C, passando antes por B. Além disso, traz a seguinte questão: de quantas maneiras você pode fazer uma trajetória com tamanho mínimo

que parte da sua casa, passa pela casa do seu amigo, depois pela a escola, pela lanchonete, e termina na sua casa?

Assim, o professor auxiliará as ações dos estudantes durante o desenvolvimento da atividade. Nas partes um e dois, o docente apenas esclarecerá dúvidas, pois as resoluções são intuitivas e de fácil visualização.

Em continuidade, o professor solicitará que as duplas iniciem todas juntas a parte seguinte. Neste momento, será feita a leitura em voz alta da questão apresentada pelo *software* e o professor irá ao quadro, onde reproduzirá um trajeto de comprimento mínimo entre duas localidades.

O caminho exposto no quadro deve ser formado por duas localidades afastadas. Desse modo, o professor pedirá que os estudantes listrem em uma folha de papel todos os trajetos mínimos possíveis. Essa ação visa mostrar aos alunos que quanto maior a distância entre as localidades, mais complexo é determinar os caminhos mínimos através apenas da visualização.

Em seguida, o professor continuará a explorar o exemplo exposto no quadro, a fim de encontrar uma forma sistemática para a determinação do número de trajetos mínimos. Neste instante, deverá destacar que no momento que se definem os movimentos horizontais, automaticamente determinam-se quais outros serão verticais.

Assim, ao fim da explanação o docente deve concluir que, se entre duas localidades o menor trajeto percorrido são n quadras, tais que p são horizontais e q verticais, então o número de trajetos mínimos distintos é dado por

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} .$$

Após isto, as duplas devem seguir para a parte quatro. As questões apresentadas indicam caminhos cujas localidades são afastadas umas das outras, assim, se faz necessário utilizar a fórmula apresentada na parte anterior. O professor, mais uma vez, não fará intervenções diretas.

Na parte cinco é necessário que os alunos apliquem o princípio multiplicativo para determinar o número de trajetos mínimos possíveis entre A e C, passando antes por B. Dessa forma, o docente deixará que os estudantes tentem resolver a questão por alguns minutos e, em seguida, irá ao quadro mostra que o resultado é

obtido a partir do produto do número de trajetos mínimos entre A e B pelo número de trajetos mínimos entre B e C. Feito isto, citará que a ferramenta Matemática que garante o resultado é o princípio multiplicativo.

A questão que encerra a parte cinco também é resolvida pelo princípio multiplicativo. Além disso, o *software* orienta que essa seja respondida no caderno dos estudantes. Assim, o professor orientará que as duplas a responda em uma folha de papel e entregue no final da aula.

Para finalizar a aula, o professor retomará a atividade 2 (parte 3) e formalizará o conceito de combinação simples. Após isto, abrirá espaço para que os alunos façam perguntas referentes às atividades, assim como, perguntas e/ou comentários sobre o desenvolvimento da aula.

**Comentários:** 1º) O *software* pode ser utilizado como uma aplicação do conteúdo de combinação simples.

2º) O professor pode abordar o conceito de permutação com elementos repetidos a partir das situações propostas pelo *software*.

3º) A atividade proposta também pode ser desenvolvida individualmente.

**Avaliação:** A avaliação se baseará na participação e desenvoltura dos estudantes durante todo o desenvolvimento da atividade. Também será considerada a questão entregue.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo investigou a produção de conhecimento acerca da Análise Combinatória para analisar a forma como esse conteúdo tem sido abordado no Ensino Médio. Nele realizamos uma investigação de forma sedimentada na construção histórica desse conhecimento. Para isto, realizamos inicialmente uma pesquisa bibliográfica e em seguida um estudo no qual foram analisados trabalhos referentes à temática publicados no Boletim de Educação Matemática e na coleção de livros didáticos Conexões com a Matemática (LEONARDO, 2013). Nesses verificamos o que propõem e a forma como se organizam e orientam quanto à produção e ao ensino da Análise Combinatória no contexto do nível médio da educação brasileira.

Após isto, combinamos os resultados da produção do conhecimento e da pesquisa bibliográfica com a análise dos livros para a construção de quatro propostas de atividades do conteúdo de Análise Combinatória voltado ao Ensino Médio. Essas propostas procuram colaborar com o ensino para além do que preceituam os livros didáticos.

Entendemos o livro didático como um recurso importante para o ensino e aprendizagem. Entretanto, ele é apenas um auxiliar da aprendizagem, cabe ao professor adequá-lo a sua prática. Lajolo ressalta que,

> Substituição, alteração e complementação de exercícios e atividades propostos pelo livro didático adotado em classe não ocorrem apenas a propósito de livros didáticos insatisfatórios. O melhor dos livros didáticos não pode competir com o professor: ele, mais do que qualquer livro, sabe quais os aspectos do conhecimento falam mais de perto a seus alunos, que modalidades de exercício e que tipos de atividade respondem mais fundo em sua classe. (LAJOLO, 1996, p. 8).

Dessa forma, procuramos oferecer diferentes estratégias de abordagem, tal que essas trazem situações contextualizadas e valorizam a construção de conceitos matemáticos.

Na atividade 1 apresentamos problemas de criptografia por permutação como ferramenta motivacional para o processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos de permutação simples e com repetição. Além disso, visamos apresentar o conceito de fatorial de um número natural a partir da resolução de problemas de permutação.

A atividade 2 propôs um experimento para introdução do assunto de permutação circular. Nesta situação, buscamos oferecer aos alunos uma abordagem pautada em um processo construtivo do raciocínio. Salientamos que, o livro didático analisado não apresenta o conteúdo de permutação circular, assim, trazemos essa sugestão como alternativa de suporte para os professores.

Na atividade 3 apresentamos problemas relacionados aos jogos e possíveis premiações do Campeonato Potiguar de Futebol Feminino de 2017 para trabalhar os conteúdos de arranjo simples e combinação simples. Com isto, buscamos explorar situações do cotidiano, permitindo que os alunos visualizem a aplicação do conteúdo em uma perspectiva contextualizada.

Já na atividade 4, sugerimos o uso do *software* Geometria do táxi – Contagem para abordar o conteúdo de combinação simples. Procuramos, mais uma vez, explorar a construção de conceitos e a aplicação da Análise Combinatória em situações reais e o uso de tecnologias digitais no Ensino Médio.

Dessa forma, as propostas de atividades elaboradas buscaram contribuir com o ensino da combinatória no Ensino Médio, além de fornecer subsídios para os professores de Matemática. É importante ressaltar que, as sugestões apresentadas não findam com as possibilidades de abordagens, ou seja, o professor pode optar por outros caminhos e metodologias.

Consideramos que os procedimentos realizados nesta pesquisa podem promover outras reflexões acerca do processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de Análise Combinatória no Ensino Médio o que possibilitaria novas práticas, assim como, apoiar o trabalho do professor de Matemática quanto ao tema estudado.

## REFERÊNCIAS


ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 14724**: informação e documentação: trabalhos acadêmicos: apresentação. Rio de Janeiro, 2011.

BIGGS, N. L. The roots of combinatorics. **Revista Historia Mathematica**. vol 6. 1979. p.109-136.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da Matemática**. Trad. Helena Castro. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

BRASIL. **Decreto n° 91.542, de 19 de agosto de 1985**. Institui o Programa Nacional do Livro Didático, dispõe sobre sua execução e dá outras providências. Disponível em: http://legis.senado.gov.br/legislacao/ListaPublicacoes.action?id=218965. Acesso em: 10 abr. 2017.

_____. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Médio (PCNEM)**: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2000.

_____. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio:** Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC, 2002.

_____. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Lei número 9394, 20 de dezembro de 1996. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L9394.htm. Acesso em: 24 jul. 2016.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas: editora da Unicamp, 2011.

FERREIRA, N. S. A. As pesquisas denominadas “estado da arte”. **Educação & Sociedade**, São Paulo, ano 23, n. 79, p.257-272, ago. 2002.

FRANZON, C. R. P. **A característica universal de Leibniz:** contextos, trajetórias implicações. 2015. 187 f. Tese (Programa de Pós-graduação em Educação Matemática) – Instituto de Geociência e Ciências Exatas – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, São Paulo, 2015.

FREITAS, O. **Equipamentos e materiais didáticos**. Brasília: Universidade de Brasília, 2007. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/profunc/equip_mat_dit.pdf . Acesso em: 4 abr. 2017.

GANASSOLI, A. P. **Criptografia e Matemática**. 2015. 80 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Departamento de Matemática – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2015.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. (Org.). **Métodos de pesquisa**. Porto Alegre: UFRGS, 2009.

GROENWALD, C. L. O.; ZOCH, L. N.; HOMA, A. I. R. Seqüência Didática com Análise Combinatória no Padrão SCORM. **BOLEMA,** Rio Claro, n. 34, p. 27-56, 2009. Disponível em: http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/viewFile/3298/2791. Acesso em: 16 jul. 2016.

**Guia de livros didáticos: PNLD 2014:** Matemática Ensino fundamental anos finais. Brasília: Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica, 2013.

IBGE. **Normas de apresentação tabular**. 3. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 1993. Disponível em: http://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv23907.pdf. Acesso em: 14 jun. 2017.

KOLATA, G. In Archimedes Puzzle, a New Eureka Moment, **The New York Times**, Nova York, 14 dez. 2003.

LAJOLO, M. Livro didático: um (quase) manual de usuário. In: **Em Aberto**. ano 16. n. 69. Brasília: Inep, 1996.

LEONARDO, F. M (Org.). **Conexões com a Matemática**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013. v. 2.

LIBÂNEO, J. C. **Didática**. 2. ed. São Paulo: Cortez, 2013.

LIMA, E.L. *et al*. **A Matemática do Ensino Médio**. vol. 2. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

LOPES, J. M.; REZENDE, J. C. Um Novo Jogo para o Estudo do Raciocínio Combinatório e do Cálculo de Probabilidade. **BOLEMA**, Rio Claro, v. 23, n. 36, p. 657-682, 2010. Disponível em: http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/viewFile/4035/3272. Acesso em: 16 jul. 2016.

MORGADO, A. C. *et al*. **Análise combinatória e probabilidade com as soluções dos exercícios**. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. (Coleção do Professor de Matemática).

NICHELE, A.; SCHLEMMER, E.; RAMOS, A. F. QR Codes na educação em Química. **Revista novas tecnologias na educação**, UFRGS, v. 13, n. 2, dez, 2015.

PICADO, J. **Estruturas discretas:** textos de apoio. Universidade de Coimbra, 2009.

ROA, R.; NAVARRO-PELAYO, V. Razonamiento combinatorio e implicaciones para la enseñanza de la probabilidad. **Jornades europees d'estadística:** l'ensenyament i la difusió de l'estadística, Palma, 2001.

ROMANATTO, M. C. **O livro didático:** alcances e limites. São Paulo, 2004. Disponível em: www.miltonborba.org/CD/Interdisciplinaridade/Anais_VII.../mr19-Mauro.doc. Acesso em: 10 jan. 2017.

SANTOS, J. P. O.; MELLO, M. P.; MURARI, I. T. C. Introdução à Análise Combinatória. 4. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna Ltda, 2007.

SAVIANI, D. Trabalho e educação: fundamentos ontológicos e históricos. **Revista Brasileira de Educação**, São Paulo, v. 12, n. 34, p. 152-165, jan./abr. 2007.
SEVERINO, A. J. Metodologia do trabalho científico. 23. ed. São Paulo: Cortez, 2007.

TAVARES, C. S.; BRITTO, F. R. M. Contando a história da contagem. **Revista do Professor de Matemática**, SBM, v. 57, p. 33-40, 2005.

VAZQUEZ, C. M. R.; NOGUTI, F. C. H. Análise Combinatória: alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 8, 2004, Recife. **Anais**... Recife: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2004, p. 01-13.