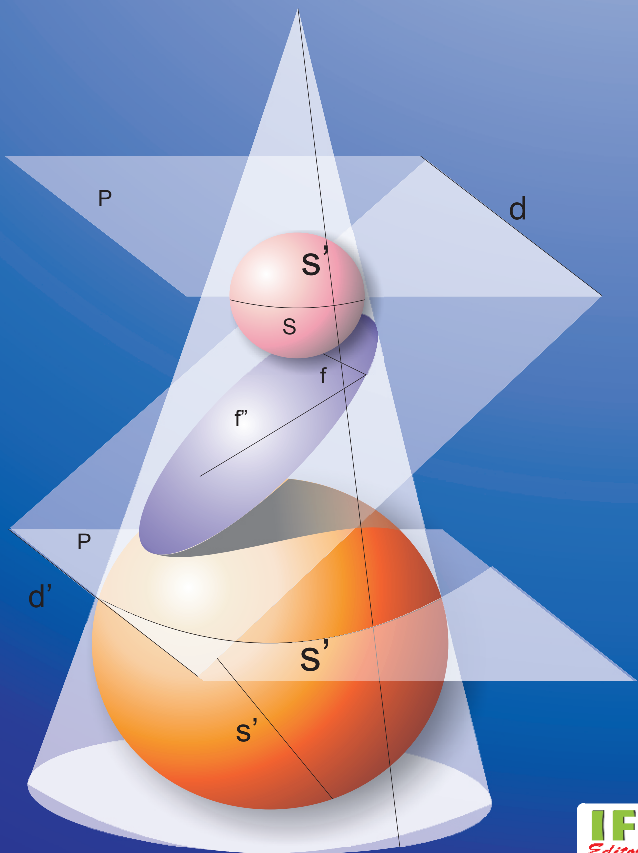
Geometria Analítica

Robson Santana Pacheco



IFRN Editora

GEOMETRIA ANALÍTICA

Robson Santana Pacheco

GEOMETRIA ANALÍTICA

IFRN
Editora

2008

Divisão de Serviços Técnicos.
Catalogação da publicação na fonte.
Biblioteca José de Arimatéia Pereira - IFRN

Pacheco, Robson Santana
Geometria analítica / Robson Santana Pacheco. ï Natal (RN): editora do IFRN, 2009.
149 p.

ISBN 978-85-89571-53-1

1. Geometria analítica. 2. Vetores. I. Título.

IFRN / BJAP

CDU 514.12

EDITORAÇÃO
Samir Cristino de Souza

DIAGRAMAÇÃO E CAPA
Karoline Rachel Teodosio de Melo

CONTATOS
Editora do IFRN
Av. Senador Salgado Filho, 1559, CEP: 59015-000
Natal-RN. Fone: (84)4005-2668/ 3215-2733
Email: dpeq@cefetrn.br

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Em 1591 François Viète (1540-1603) publicou um pequeno livro, *In Artem Analyticam Isagoge* (*Introdução à Arte Analítica*), com o seguinte e arrojado propósito: não deixar nenhum problema sem solução. A inovação contida em seu livro, que o levou a pensar em poder resolver todos os problemas do mundo, era a introdução dos métodos simbólicos na álgebra. Como quase sempre acontece, a idéia revolucionária não angariou aclamação geral na comunidade matemática ï na verdade, gerou polêmicas que durariam cerca de dois séculos. Não obstante, o eventual sucesso da idéia de Viète foi tão completo, que hoje em dia é difícil conceber a matemática sem os seus símbolos. O efeito (relativamente) imediato, porém, foi a transformação da geometria analítica em um poderosíssimo instrumento para a modelação de problemas matemáticos, tanto os da matemática pura, quanto os da matemática aplicada; assim como uma importante propedêutica para o desenvolvimento de vários dos métodos de Cálculo infinitesimal.

O presente livro do Prof. Robson Santana Pacheco, embora não pretenda resolver todos os problemas do mundo, compartilha com o de Viète, no ambiente pedagógico, o que este contribuiu para o percurso histórico. Isto é, o presente livro pretende proporcionar ao aluno atual os requisitos necessários para utilizar a geometria analítica como um instrumento de análise, tanto da matemática pura, quanto da matemática aplicada. Ainda mais, também pretende proporcionar ao aluno parte do conhecimento necessário para que este possa embarcar no estudo do Cálculo sem embaraço. Digo parte do conhecimento porque o Prof. Robson Santana Pacheco não chega a tratar das funções trigonométricas, logarítmicas e exponenciais neste livro.

A apresentação segue o modelo tradicional no ensino da matemática ï definição, exemplo, teorema ï com uma modificação importante, a saber, pouca ênfase é dada ao papel da demonstração. No seu lugar, ressaltam-se as aplicações, isto é, exemplificações de como proceder para resolver os problemas ï de como usar, de forma concreta, a geometria analítica. Isto, em conjunto com a natureza espartana do texto, dá ao livro o caráter de um *workbook*, deixando facilmente identificáveis pelos estudantes, os elementos essenciais e realçando, como parte essencial da experiência pedagógica do leitor, os exercícios.

Ao leitor, enfim, desejamos sorte e sucesso no estudo dessa bela parte da matemática.

John A. Fossa

AGRADECIMENTO

Agradeço inicialmente a Deus, por ter-me dado paciência, persistência e convicção a realização do projeto que vislumbrei, ainda como estudante de matemática, na possibilidade de contribuir para o ensino das ciências, como também de me dar esperança nas horas de desânimo, perante os obstáculos, na construção do conhecimento para o exercício da docência. E pela prática da docência tornou-me possível contribuir, com o meio acadêmico, com esta pequena obra. O magistério, quando vocacionado, transforma-se em um verdadeiro sacerdócio e nos deixa honroso quando se vive. Agradeço também a minha esposa, Juçara, e filhos, Alessandra, Fábio e Robson André por terem compreendidos a ausência que os proporcionei em toda a investida profissional que fiz.

Em especial, a Sra. Teresa Dantas de Araujo, funciaonária da FARN (Faculdade Natalense para o Desenvolvimento do Rio Grande do Norte), que com dedicação de que lhe é peculiar soube com paciência digitar os manuscritos iniciais desta obra, aos alunos do Curso de Sistema de Informação-FARN e aos professores, que souberam acolher e criticar os escritos iniciais que hoje se transformam nesta pequena obra. Estes sim, souberam lapidar com trabalho, sugestões e críticas o material que ora eram-lhes ofertados para estudo.

Finalizando, agradeço a Direção Geral do CEFETRN, através da sua editora, a publicação deste livro.

Robson Santana Pacheco

PREFÁCIO

Trabalhando com estudantes dos diversos cursos na área tecnológica e de ciências exatas, sempre procurei, com zelo de quem é perfeccionista, ser o mais claro e objetivo possível naquilo que me expunha a fazer como docente da disciplina de Geometria Analítica. Senti, durante anos a necessidade, por parte dos estudantes, de um texto mais compacto e descritivo, que usasse de ilustrações e demonstrações geométricas e objetivasse uma compreensão imediata do assunto tratado a cada momento no contexto de cada aula. Resolvi, então, construir a base do programa da disciplina oferecendo aos estudantes de Sistema de Informação um texto que, aplicado e reaplicado por três semestres seguidos, constitui-se como pilar do texto acadêmico ora em curso. Tenho consciência de que muitos detalhes foram deliberadamente omitidos, o que facilitou a este fascículo não ser muito extenso e, ao mesmo tempo, despertar a curiosidade do leitor para a sua participação no processo de ensino aprendizagem. Há um velho provérbio francês que diz: ñAquele que tenta explicar tudo, acaba falando sozinhoò. Por isso, fiz opção na escrita deste livro por um caminho, entre dizer demais e dizer de menos.

Para o estudo da Geometria Analítica se faz necessário, a priori, noções de álgebra cursada no ensino básico, e Geometria Plana como também de uma boa abstração na visualização dos conceitos básicos. Estes conceitos são gerenciadores da compreensão e das resoluções de situações variadas. Um dos objetivos da Geometria Analítica é relacionar a álgebra, forma abstrata, com a geométrica, forma concreta. Por isso, se faz necessária a perfeita compreensão dos conceitos agregados, sempre que possível, da forma geométrica dos mesmos.

Neste livro abordaremos o estudo conceitual sobre os vetores no capitulo 0 ; álgebra com vetores, retas no espaço bi-dimensional nos capítulos I e II; cônicas e circunferência, nos capítulos II e III; vetores, retas e planos no espaço tri-dimensional no capitulo IV e concluímos com um estudo sobre a Superfície Esférica no capítulo V. Há um campo bem robusto de exercícios resolvidos como também propostos, alguns clássicos.

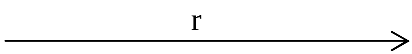
Concluindo, espero ter contribuído de alguma forma no que diz respeito ao despertar, no leitor, pelo estudo da matemática como também em uma visão que tenho da própria matemática.

1. VETORES

Introdução

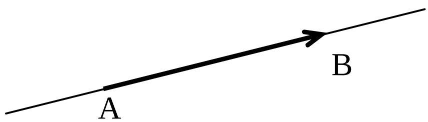
<u>Eixo</u>

É toda reta munida de uma orientação em seu suporte. Convenciona-se como positiva a orientação dada, e negativa a contrária.



<u>Segmento Orientado</u>

Um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ é um segmento de reta determinado pelos pontos A e B, da reta, designados respectivamente como origem e extremidade do segmento. Será designado por uma seta.



Segmento Nulo

Um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ é nulo se e somente se A coincide com B, ou seja Aſ B.

Será representado por $\overrightarrow{AA}$.

Segmentos Opostos

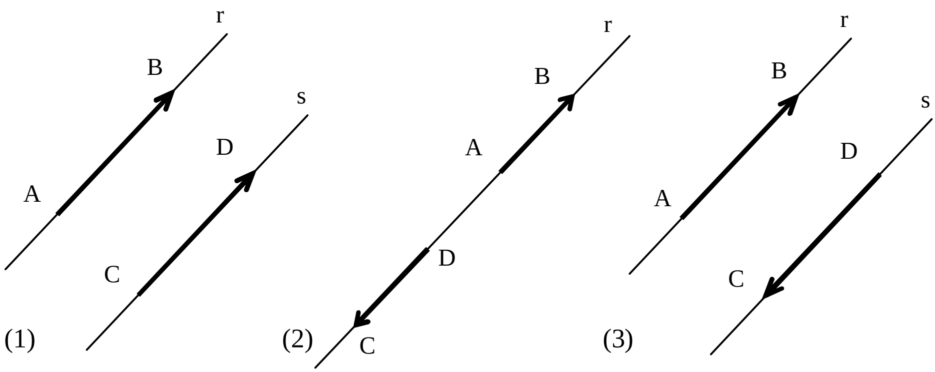
Sendo $\overrightarrow{AB}$ um segmento orientado, afirmamos que o segmento orientado $\overrightarrow{BA}$ é oposto de $\overrightarrow{AB}$.

Medida de um segmento

É um número real positivo que expressa a medida de seu comprimento em relação a uma unidade de medida. A medida de um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ é o seu comprimento ou módulo.

Direção

Denomina-se de direção de um segmento orientado a inclinação da reta que o contem. Desta feita dois segmentos orientados possuem a mesma direção quando as retas suportes que os contem são paralelas.

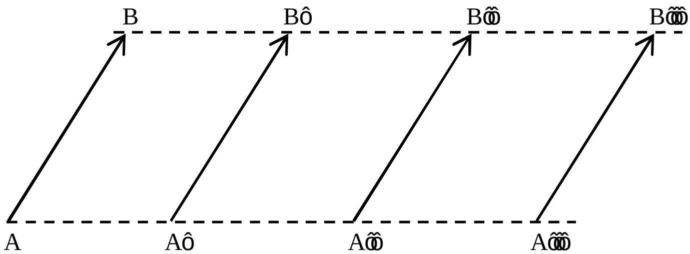


Sentido

Sentido de um segmento orientado é a orientação em seu suporte. Desta maneira dois segmentos orientados possuem sentidos opostos se possuem a mesma direção.

<u>Segmentos Eqüipolentes</u>

Dois ou mais segmentos orientados são eqüipolentes quando possuírem a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo módulo.



$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{A'B'} \sim \overrightarrow{A''B''} \sim \overrightarrow{A'''B'''}$$

Observação:

A eqüipolência de segmento orientado é uma relação de equivalência.

1) $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$ (Reflexiva)

2) Se $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, então $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$ (Simétrica)

3) Se $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF}$, então $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$ (Transitiva)

Vetor

Definimos como um vetor $\vec{v}$ determinado por um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ ao conjunto de todos os segmentos orientados eqüipolentes ao segmento $\overrightarrow{AB}$.

O vetor será representado por qualquer elemento da classe de segmentos orientados eqüipolentes a um segmento $\overrightarrow{AB}$.

O vetor determinado pelo segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ será denotado por $\overrightarrow{AB}$ ou B ï A ou $\vec{v}$.

As características de um vetor $\vec{v}$ são as mesmas de qualquer de seus representantes: sentido, direção e módulo.

O tamanho ou norma (ou intensidade ou comprimento) de um vetor $\vec{u}$ é uma grandeza modular que corresponde ao comprimento do segmento orientado que o representa e é denotado por $\left\|\vec{u}\right\|$.

Dizemos que $\vec{u}$ é um versor ou vetor unitário se e somente se $\left\|\vec{u}\right\| = 1$.

Algumas afirmações sobre vetores são decorrentes da definição de seus representantes:

i) Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos, $\vec{u} // \vec{v}$, se os segmentos orientados que os representa forem paralelos. Desta feita eles podem ter o mesmo sentido ou sentidos contrários.

ii) Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são iguais, $\vec{u} = \vec{v}$, se e somente se tem a mesma norma, mesma direção e mesmo sentido.

iii) Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais, $\vec{u} \perp \vec{v}$, se as retas que as contem forem ortogonais.

iv) O vetor $\vec{u}$ é nulo se e somente se a sua norma for zero, $\left\|\vec{u}\right\| = 0$.

Exercícios:

- 1. Verdadeiro ou Falso?

  a) Vetor é uma grandeza escalar.

  b) A norma de um vetor $\vec{v}$ é sinônimo de tamanho do vetor.

  c) A norma do vetor $\overrightarrow{AB}$ é igual a norma do vetor $\overrightarrow{BA}$.

  d) Qualquer que seja o vetor $\vec{u}$ tem-se $\vec{u} \perp \vec{0}$ e $\vec{u} \,//\, \vec{0}$.

- 2. Se dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos a uma mesma reta então eles são paralelos. Justifique.

- 3. Não podemos afirmar que: ñSe $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores paralelos a um mesmo plano então eles são paralelosò. Por quê?

- 4. Se $\left\|\vec{u}\right\| = \left\|\vec{v}\right\|$ então $\vec{u} = \vec{v}$. Justifique.

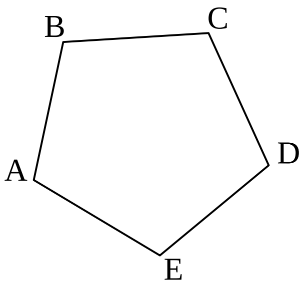
- 5. Demonstrar que as diagonais de um paralelogramo se cortam ao meio.

- 6. Na figura ao lado exprima os seguintes vetores:

  a) $(B-A)+(C-B)$

  b) $(D-A)+(B-D)$

  c) $(A-E)+D-E$

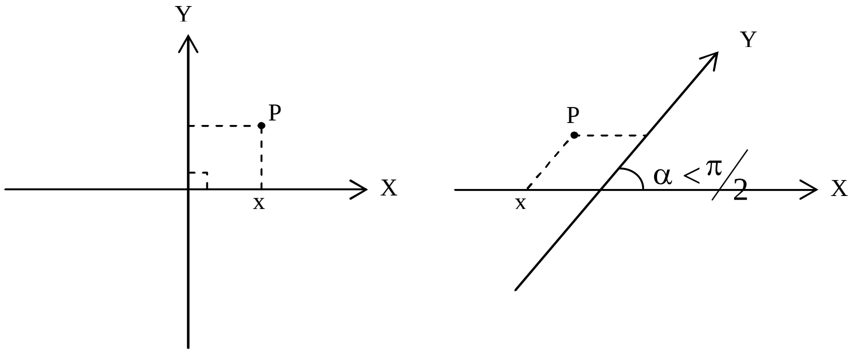


- 7. Sendo $\alpha < 0$ podemos afirmar que $\alpha\vec{v} // \vec{v}$ para algum vetor $\vec{v}$? Justifique.

2. O PLANO

Sistema de Coordenadas

O plano cartesiano é o plano determinado por dois eixos que se interceptam de forma perpendicular ou oblíqua.



Na classificação teremos então:

i) Sistema cartesiano ortogonal;

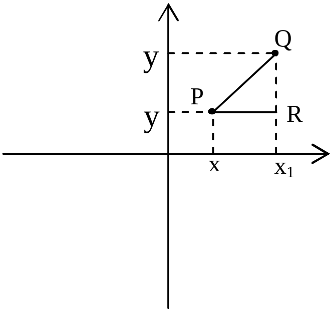
ii) Sistema cartesiano oblíquo.

A cada ponto do plano P no plano cartesiano corresponde um par ordenado *(x, y)* de números reais e, inversamente, para cada *(x, y)* tem como seu correspondente um ponto P no plano; escrevemos *P(x, y)* para indicar estes fatos.

O par ordenado *(x, y)* será denominado de coordenadas cartesianas do ponto P e, x e y serão denominadas abscissa e ordenada do ponto P.

Distância entre dois pontos

Sejam $P(x, y)$ e $Q(x_1, y_1)$ pontos do plano. Conforme mostra figura abaixo; e $d(P, Q)$ a distancia entre os pontos; ou seja $d(P,Q) = \overline{PQ}$. Pelo triangulo retângulo determinado PQR, concluímos que:



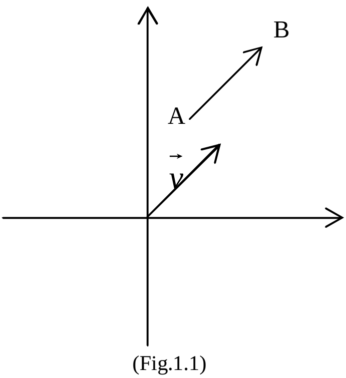
$$\overline{PQ}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{QR}^2$$

daí:

$$d(P,Q) = \sqrt{(x,-x)^2 + (y,-y)^2}$$

Vetores no PLANO

Seja $\overrightarrow{AB}$ um segmento orientado no plano XOY. O vetor determinado por $\overrightarrow{AB}$ é dado por: $\overrightarrow{AB} = \{XY \ / \ XY \sim \overrightarrow{AB}\}$.



(Fig.1.1)

Por esta definição vemos que existe um segmento eqüipolente a $\overrightarrow{AB}$ cuja origem coincide com a origem do plano (Fig.1.1). Tomando $\vec{v}$ como tal segmento orientado o denominaremos como o vetor do plano. Assim teremos:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A$$

Operações com vetores

Sejam $\overrightarrow{v_1} = (a,b)$ e $\overrightarrow{v_2} = (c,d)$ e $\lambda \in \Re$. As operações adição e multiplicação por escalar serão definidas por:

i) $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} = (a+c, b+d)$

ii) $\lambda \overrightarrow{v_1} = (\lambda a, \lambda b)$

Como conseqüência destas operações teremos a diferença de vetores $(\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2})$.

$$\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_1} + (-1)\overrightarrow{v_2} = (a-c, b-d)$$

Propriedades:

a) Adição:

i) $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_1}$ (Comutativa)

ii) $\overrightarrow{v_1} + (\overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}) = (\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) + \overrightarrow{v_3}$ (Associativa)

iii) $\overrightarrow{v_1} + \vec{\theta} = \vec{\theta} + \overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_1}$ (Elemento Neutro)

com $\vec{\theta} = (0,0)$

b) Multiplicação por escalar. Sendo k_1 *e* $k_2 \in \Re$, e $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ vetores no plano:

iv) $(k_1 + k_2)\overrightarrow{v_1} = k_1\overrightarrow{v_1} + k_2.v_1$

v) $k_1(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) = k_1\overrightarrow{v_1} + k_2\overrightarrow{v_2}$

vi) $k_1(k_2\overrightarrow{v_1}) = (k_1 \cdot k_2)\overrightarrow{v_1}$

vii) $1 \cdot \overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_1}$

viii) $0 \cdot \overrightarrow{v_1} = \vec{\theta}$ sendo $\vec{\theta} = (0,0)$

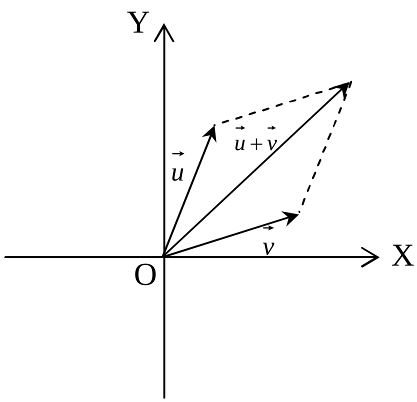
Observação:

É fácil de se verificar que $\vec{v}$ e $k\vec{v}$ são vetores de mesma direção; para $k \neq 0$, e conseqüentemente paralelos e que:

(1) Se $k > 0$ preservam o mesmo sentido, caso contrário sentidos opostos;

(2) Se $|k| > 1$ teremos uma dilatação e $0 < |k| < 1$ em contração..

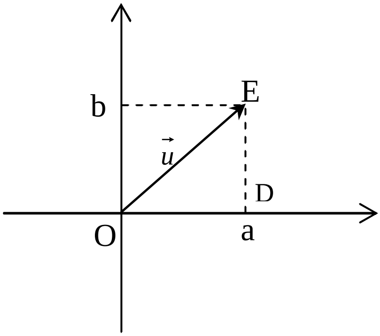
Para representar graficamente o vetor $\vec{u} + \vec{v}$ faz-se uso da construção do paralelogramo conforme a ilustração abaixo. (Fig. 1.2)



(Fig. 1.2)

Norma ou Módulo

Seja $\vec{u} = (a, b)$ um vetor do plano. Então $\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.



Conforme mostra a ilustração ao lado o triangulo OED é retângulo. Assim $\overline{OE}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{ED}^2 \therefore \overline{OE} = \sqrt{\overline{OD}^2 + \overline{ED}^2}$. Como $\left\|\vec{u}\right\| = \overline{OE}$ tem-se que $\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Proposição:

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores do plano e $k \in \Re$, então:

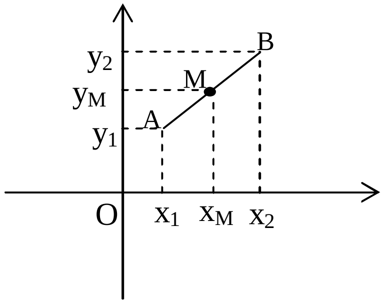
i) $k \cdot \vec{u} = \vec{O} \Rightarrow k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{O}$

ii) $\left\|\vec{u}\right\| \geq 0$ e $\left\|\vec{u}\right\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{O}$

iii) $\left\|\vec{u} + \vec{v}\right\| \leq \left\|\vec{u}\right\| + \left\|\vec{v}\right\|$ (Desigualdade triangular)

iv) $\left\|k \cdot \vec{u}\right\| = |k| \cdot \left\|\vec{u}\right\|$

1.1. Ponto Médio de um segmento



(Fig. 1.3)

Seja $\overline{AB}$ um segmento de reta sendo *(x_1, y_1)* e *(x_2, y_2)* as coordenadas cartesianas dos pontos A e B respectivamente; e M o ponto médio de $\overline{AB}$ com (x_M, y_M) suas coordenadas.

Então: $x_M = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ e $y_M = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

Demonstração:

Os vetores $\overrightarrow{AM}$ e $\overrightarrow{MB}$ são equivalentes, (Fig. 1.3), logo:

$\overrightarrow{AM} = (x_M - x_1, y_M - y_1)$ e

$\overrightarrow{MB} = (x_2 - x_M, y_2 - y_M)$

Assim:

$$x_M - x_1 = x_2 - x_M \Rightarrow x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y_M - y_1 = y_2 - y_M \Rightarrow y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Exemplo:

Considere $A = (2,3)$ e $B = (5,-1)$ as extremidades do segmento $\overline{AB}$. Determine as coordenadas do ponto médio de $\overline{AB}$.

Solução:

Seja $M = (x_M, y_m)$ o ponto médio de $\overline{AB}$, logo:

$$x_M = \frac{2+5}{2} = 7/2 \text{ e } y_m = \frac{3+(-1)}{2} = 1$$

1.2. Vetor unitário

Define-se como vetor unitário ao vetor de norma 1.

Exemplo:

$$\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \text{ é unitário pois:}$$

$$\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1+4}{5}} = 1$$

Caso geral:

Dado um vetor $\vec{v}$ o vetor $\overrightarrow{v_\mu} = \dfrac{\vec{v}}{\left\|\vec{v}\right\|}$ é o vetor unitário de $\vec{v}$.

Exercícios:

- 1) Determine o valor de x para que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, sendo $A = (x+1,3)$, $B = (2,1)$, $C = (3x-1,2+5x)$ e $D = (1+x,5)$.

  Resp.: *x=1*
- 2. Determine o ponto de intersecção da reta mediatriz com o segmento $\overrightarrow{AB}$ sendo *A*=(3,5) e *B*=(-1,-2).

  Resp.: *L*=(1, $3/2$)

- 3. Determine vetores $\vec{u}, \vec{v}$ tais que $\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$.

- 4. Determinar o vetor $\vec{w}$ na igualdade $2\vec{w} - 3\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v} + \vec{w}$,

sendo dados $\vec{u} = (1,3)$ e $\vec{v} = (2,1)$.

Resp.: $\vec{w} = \left(4, \frac{19}{2}\right)$

- 5. Determinar a_1 e a_2 tais que $\vec{w} = a_1\vec{u} + a_2\vec{v}$, sendo

$\vec{u} = (1,2)$, $\vec{v} = (4,-2)$ e $\vec{w} = (-1,8)$.

Resp.: $a_1=3$ e $a_2=-1$

- 6. Sabendo que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são paralelos e que

$(\alpha - \beta + 1)\vec{u} + (\alpha + \beta - 2)\vec{v} = \vec{0}$, determine α e β.

Resp.: $\alpha = 1/2$ e $\beta = 3/2$

- 7. Sabendo que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores paralelos e que

$\vec{v} = (-1,2)$ determine o vetor $\vec{u}$ tal que $\|\vec{u}\| = 2$.

Resp.: $t = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$

- 8. Se *A* e *B* são dois pontos do plano, designe por *d(A, B)* a distância entre *A* e *B*, *d(A,B)*=||*B*-*A*||. Mostrar que *d(A,B)*=*d(B,A)*, e que para três pontos *A*, *B*, *C* quaisquer, temos: $d(A,B) \le d(A,C) + d(B,C)$.

Produto Escalar

Define-se como o produto escalar (ou produto interno) de dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ que se representa por $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ou $< \vec{u}, \vec{v} >$, ao número real $< \vec{u}, \vec{v} > = x_1 x_2 + y_1 y_2$.

Exemplo:

Se $\vec{u} = (3,-1)$ e $\vec{v} = (2,4)$ vetores do plano tem-se $< \vec{u}, \vec{v} > = 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 = 6 - 4 = 2$.

Exemplo:

Dados os vetores $\vec{u} = (a,2)$ e $\vec{v} = (-1,-1)$ e o os pontos *A*=(2,1) e *B*=(0,1), determinar o valor de $a \in \Re$ tal que $< \vec{u}, \vec{v} + \overrightarrow{AB} > = 2$.

Solução:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0,1) - (2,1) = (-2,0)$$

$$< \vec{u}, \vec{v} + \overrightarrow{AB} > = < (a,2), (-1,-1) + (-2,0) > = < (a,2), (-3,-1) >$$

$$= -3a - 2 = 2$$

ou ainda :

$$a = -4/3$$

Observação:

i) Sendo $\vec{v}=(a,b)$, o módulo de $\vec{v}$ é dado por $\left\|\vec{v}\right\| = \sqrt{<\vec{v},\vec{v}>} = \sqrt{a^2+b^2}$.

ii) Sendo *A* e *B* pontos do plano, *d(A,B)*=||*A,B*||.

Propriedades do produto escalar

Sendo $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ vetores do plano e $m \in \Re$, é fácil verificar que:

I) $<\vec{v},\vec{v}> \geq 0$ e $<\vec{v},\vec{v}>=0 \Leftrightarrow \vec{v}=\vec{0}$

II) $<\vec{v},\vec{u}+\vec{w}>=<\vec{v},\vec{u}>+<\vec{v},\vec{w}>$

III) $<\vec{v},\vec{u}>=<\vec{u},\vec{v}>$

IV) $<m\vec{u},\vec{v}>=<\vec{u},m\vec{v}>=m<\vec{u},\vec{v}>$

V) $<\vec{u},\vec{u}>=\left\|\vec{u}\right\|^2$

TEOREMA ï (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)

Sendo $\vec{u}$, $\vec{v}$ vetores no plano, então $\left|<\vec{u},\vec{v}>\right| \leq \left\|\vec{u}\right\| \cdot \left\|\vec{v}\right\|$.

Demonstração:

Sendo $\vec{v}=\vec{0}$ a desigualdade é verdadeira. Suponhamos $\vec{v}\neq\vec{0}$ e sejam $x=<\vec{v},\vec{v}>$ e $y= -<\vec{u},\vec{v}>$ escalares. Então pela propriedade (I) temos:

$<x\vec{u}+y\vec{v}, x\vec{u}+y\vec{v}> \geq 0$ e desenvolvendo encontramos:

$x^2<\vec{u},\vec{u}>+2xy<\vec{u},\vec{v}>+y^2<\vec{v},\vec{v}> \geq 0$.

Procedendo as substituições encontramos:

$$<\vec{v},\vec{v}>^2 \cdot <\vec{u},\vec{u}> -2<\vec{v},\vec{v}> \cdot <\vec{u},\vec{v}> \cdot <\vec{u},\vec{v}> + <\vec{u},\vec{v}>^2 \cdot <\vec{v},\vec{v}> \geq 0$$

$$\therefore <\vec{v},\vec{v}>^2 \cdot <\vec{u},\vec{u}> - <\vec{v},\vec{v}> \cdot <\vec{u},\vec{v}>^2 \geq 0$$

$$\therefore <\vec{v},\vec{v}> \cdot <\vec{u},\vec{u}> - <\vec{u},\vec{v}>^2 \geq 0$$

$$\therefore \left| <\vec{u},\vec{v}> \right|^2 \leq <\vec{v},\vec{v}> \cdot <\vec{u},\vec{u}>$$

$$\therefore \left| <\vec{u},\vec{v}> \right|^2 \leq \left\|\vec{u}\right\|^2 \cdot \left\|\vec{v}\right\|^2$$

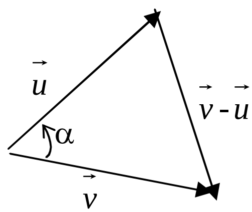
$$\therefore \left| <\vec{u},\vec{v}> \right| \leq \left\|\vec{u}\right\| \cdot \left\|\vec{v}\right\| \qquad c.q.d.$$

Ângulo de dois vetores

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores do plano e $\hat{\alpha}$ o ângulo entre os vetores; então

$$<\vec{u},\vec{v}> = \left\|\vec{u}\right\| \cdot \left\|\vec{v}\right\| \cdot \cos(\hat{\alpha})$$

Com efeito, usando a ilustração (Fig. 1.4) e aplicando a lei dos cossenos temos:



(Fig. 1.4)

$$\left\|\vec{v}-\vec{u}\right\|^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2 + \left\|\vec{v}\right\|^2 - 2\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\| \cos(\hat{\alpha})$$

Como, $\left\|\vec{v}-\vec{u}\right\|^2=\left\|\vec{v}\right\|^2+\left\|\vec{u}\right\|^2-2<\vec{u},\vec{v}>$, teremos após a comparação:

$$\left\|\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{v}\right\|^2-2\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|\cos(\hat{\alpha})=\left\|\vec{v}\right\|^2+\left\|\vec{u}\right\|^2-2<\vec{u},\vec{v}>$$

$$\therefore <\vec{u},\vec{v}>=\left\|\vec{u}\right\|\cdot\left\|\vec{v}\right\|\cdot\cos(\hat{\alpha})$$

Observações:

i) Se $<\vec{u},\vec{v}>>0$ significa que o ângulo entre os vetores é agudo $(0<\alpha<90°)$.

ii) Se $<\vec{u},\vec{v}><0$ significa que o ângulo entre os vetores é obtuso $(90°<\alpha<180°)$

iii) Se $<\vec{u},\vec{v}>=0$ significa que o ângulo entre os vetores é reto $(\alpha=90°)$. Neste caso dizemos que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores perpendiculares.

Exemplo:

1. Determine o valor de *m* para que os vetores do plano $\vec{v}=(m,-2)$ e $\vec{u}=(2m-1,5)$ sejam perpendiculares.

Solução:

Como $\vec{u}\perp\vec{v}$, temos:

$$< \vec{u}, \vec{v} >= 0$$

$$< (2m-1,5), (m,-2) >= 0$$

$$m(2m-1) - 2 \cdot 5 = 0$$

$$2m^2 - m - 10 = 0$$

$$m = \frac{1 \pm \sqrt{1+80}}{4} = \frac{1 \pm 9}{4}$$

$$m' = \frac{1+9}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$m'' = \frac{1-9}{4} = \frac{-8}{4} = -2$$

2. Calcular o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ =(2,1) e $\vec{v}$ =(3,-1).

Solução:

$$\cos(\hat{\alpha}) = \frac{< \vec{u}, \vec{v} >}{\left\|\vec{u}\right\| \cdot \left\|\vec{v}\right\|} = \frac{2 \cdot 3 - 1 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}}$$

$$Logo, \cos(\hat{a}) = \frac{5}{5 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3. Sabendo que o vetor $\vec{u}$ =(1,-3) forma um ângulo de 60° com o vetor $\overrightarrow{AB}$ determinado pelos pontos *A*=(2,1) e *B*=(*m*-1,3 *m*), calcular *m*.

Solução:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (m-1,3m) - (2,1) = (m-3,3m-1)$$

Mas

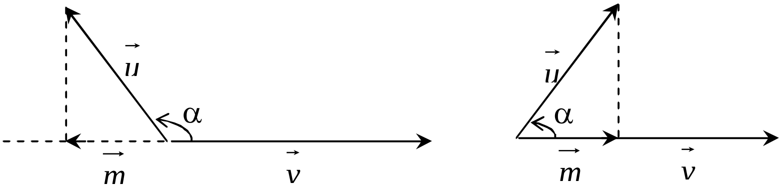
$$<\vec{u}, \overrightarrow{AB}> = \left\|\vec{u}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cdot \cos 60°$$

donde :

$$< (1,-3),(m-3,3m-1) >$$
$$= \sqrt{1^2+(-3)^2} . \sqrt{(m-3)^2+(3m-1)^2} . \frac{1}{2}$$
$$m - 3 + (-3)(3m-1) = \sqrt{10} . \sqrt{10m^2 - 12m + 10} . \frac{1}{2}$$
$$-8m = \sqrt{10}. \sqrt{10m^2 - 12m + 10} . \frac{1}{2}$$
$$-16m = \sqrt{10}. \sqrt{10m^2 - 12m + 10}$$
$$156m^2 + 120 - 100 = 0$$
$$39m^2 + 30m - 25 = 0$$
$$m = \frac{-30 \pm \sqrt{900 + 3900}}{2 \ x \ 39}$$
$$m = \frac{-30 \pm \sqrt{4800}}{78}$$
$$m = \frac{-30 \pm 40\sqrt{3}}{78}$$
$$m = \frac{-15 \pm 20\sqrt{3}}{39}$$
$$Logo, m1 = \frac{-15 + 20\sqrt{3}}{39}, m2 = \frac{-15 - 20\sqrt{3}}{39}$$

Projeção de um vetor

Dados $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores do plano e $\hat{\alpha}$ o ângulo entre eles. O nosso objetivo é determinar o vetor $\overrightarrow{m}$ denotado por $pro_{\vec{v}}(\overrightarrow{u})$, projeção de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$, conforme é ilustrado. (Fig. 1.5)



(Fig. 1.5)

Pela colinearidade de $\overrightarrow{m}$ e $\vec{v}$ existe $k \in \Re$ tal que $\overrightarrow{m} = k\vec{v}$. O nosso intuito é determinar o valor de *k*.

Então:

$$\left\|\overrightarrow{m}\right\| = \left\|k\vec{v}\right\| = |k| \cdot \left\|\vec{v}\right\|$$

$$\therefore |k| = \|m\| \cdot \frac{1}{\left\|\vec{v}\right\|} \qquad (A)$$

Por definição:

$$<\vec{u}, \vec{v}> = \left\|\vec{u}\right\| \cdot \left\|\vec{v}\right\| \cdot \cos(\hat{\alpha})$$

$$e \quad com \qquad \left|\cos(\hat{\alpha})\right| = \frac{\left\|\vec{m}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|} \qquad tem - se$$

$$<\vec{u},\vec{v}> = \left\|\vec{u}\right\| \cdot \left\|\vec{v}\right\| \cdot \frac{\left\|\vec{m}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$$

$$ou \quad seja \qquad \left\|\vec{m}\right\| = \frac{\left|<\vec{u},\vec{v}>\right|}{\left\|\vec{v}\right\|}$$

Substituindo em (A) teremos:

$$|k| = \frac{\left|<\vec{u},\vec{v}>\right|}{\left\|\vec{v}\right\|^2}; \qquad daí:$$

$$\vec{m} = proj_{\vec{v}}(\vec{u}) = \left(\frac{<\vec{u}\cdot\vec{v}>}{<\vec{v}\cdot\vec{v}>}\right)\cdot\vec{v}$$

Exemplo:

Calcule a projeção do vetor $\vec{u}$ =(1,1) sobre o vetor $\vec{v}$ =(+1,4).

Solução:

$$proj_v(\vec{u}) = \left(\frac{<\vec{u},\vec{v}>}{<\vec{v},\vec{v}>}\right)\cdot\vec{v} = \left(\frac{<(1,1),(1,4)>}{<(1,4),(1,4)>}\right)\cdot(1,4)$$

$$proj_v(\vec{u}) = \left(\frac{1\cdot 1+1\cdot 4}{1^2+4^2}\right)\cdot(1,4)$$

$$proj_v(\vec{u}) = \left(\frac{5}{17}\right)\cdot(1,4)$$

Exercícios propostos:

- 9. Sejam $\vec{u}$ =(2,1) e $\vec{v}$ =(4,0) vetores do plano. Calcule:

  a) $<\vec{u},\vec{v}>$

  b) O ângulo formado pelos vetores

  c) O vetor $\vec{w}$, de modulo 2, e que faz um ângulo de 30° com o vetor $\vec{u}$.

  Resp.: a) 8 b) arc.cos$\left(2/\sqrt{5}\right)$

  c) $\left(\frac{2\sqrt{15}+\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{15}-2\sqrt{5}}{5}\right)$ ou

  $\left(\frac{2\sqrt{15}-\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{15}+2\sqrt{5}}{5}\right)$

- 10. Sendo *A*=(1,0), *B*=(2,5) e *C*=(-1,3) pontos do plano. Classifique o triangulo *ABC* quantos aos lados.

  Resp.: Isósceles

- 11. Escreva a vetor $\vec{u}$ (7,-1) como a soma de dois vetores, um dos quais é paralelo e o outro é perpendicular ao vetor $\vec{w}$ (1,-1).

  Resp.: $\vec{v_1}=(3,3)$, $\vec{v_2}=(4,-4)$

- 12. Se $\Pr oj_{\vec{\mu}}(\vec{v})=(2,1)$, $\vec{u}=(4,2)$ e $\|\vec{v}\|=6$, determine $\vec{v}$.

Resp.: $\vec{v} = \left(\dfrac{10+\sqrt{155}}{5}, \dfrac{5-2\sqrt{155}}{5} \right)$ ou

$\vec{v} = \left(\dfrac{10-\sqrt{155}}{5}, \dfrac{5+2\sqrt{155}}{5} \right)$

- 13. Mostre que, se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores do plano, $\left\| \vec{u} + \vec{v} \right\| \leq \left\| \vec{u} \right\| + \left\| \vec{v} \right\|$.

  Sugestão: Use a desigualdade de Cauchy-Schwaz.

- 14. Sendo *A*=(1,-1), *B*=(5,2) e *C*=(-1,+2) pontos do plano e vértices de um triangulo, determine:

  a) Os ângulos internos $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$.

  b) As projeções dos lados *AC* e *AB* sobre o lado *CB*.

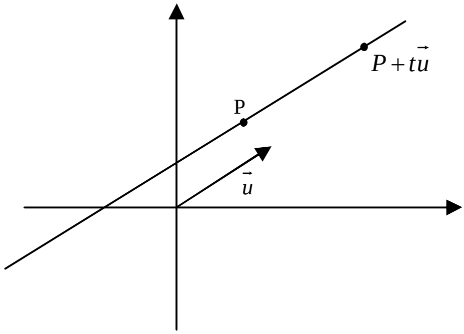
  c) A área do triangulo *ABC*.

- 15. Determine a altura (relativa ao lado *AD*) do paralelogramo cujos vértices são *A*=(1,0), *B*=(2,2), *C*=(5,3) e *D*=(4,1).

Retas

Definimos como equação vetorial da reta (r) passando por um ponto P, na direção do vetor $\vec{\mu}$, como sendo:

(1) $\overrightarrow{PX} = t \cdot \vec{u}$ como $t \in \Re$ e X ponto do plano.



Conhecidos $P=(a,b)$ um ponto do plano, $\vec{u} = (m, n)$ a direção pretendida e $X = (x, y)$ ponto do plano que satisfaz a equação (1) concluímos:

(2) $\begin{cases} x=a+tm \\ y=b+tn, \end{cases}$ $t \in \Re$. Conhecida como equações paramétricas da reta.

Exemplo:

Determinar as equações paramétricas da reta (r) que passa por A=(1,-3) com a direção $\vec{u}$ =(5,4).

Solução:

$$X = A + t\vec{u}$$

$$(x, y) = (1,-3) + t(5,4)$$

$$(r)\begin{cases} x=1+5t \\ y=-3+4t, \qquad t \in \Re \end{cases}$$

Por eliminação do parâmetro t na equação (2), através das operações elementares, obteremos a equação na forma:

$$nx - my = an - bm$$

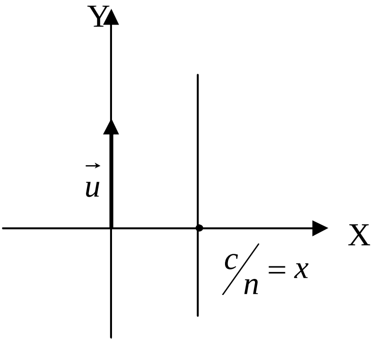
Como a, n, b e m são valores mais conhecidos, tomemos $c=na-bm$ o que resulta em forma simplificada:

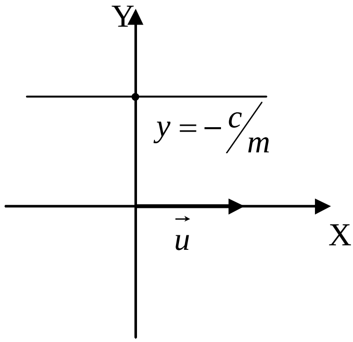
$$nx - my = c \qquad (3)$$

Esta equação (3) é determinada de equação cartesiana da reta.

Considerações gerais:

0. Se $\vec{u}=(o,n)$ a reta é perpendicular ao eixo x e sua equação é reduzida a forma $nx=c$;
1. Se $\vec{u}=(\vec{m},o)$ a reta é perpendicular ao eixo Y e sua equação é reduzida a forma $my=-c$;

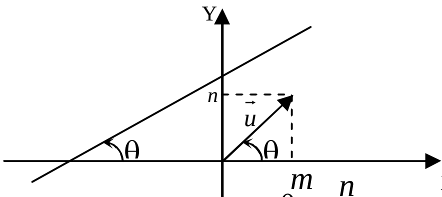




$(c/n > 0)$ $(c/m < 0)$

2. Sendo $m, n \neq 0$ a reta é oblíqua ao eixo dos x e sua equação pode ser reduzida a forma

$y = \dfrac{n}{m}x - \dfrac{c}{m}$ denominada de Equação reduzida da reta.



Da ilustração acima vemos que $tg\theta = \dfrac{n}{m}$ denominado de coeficiente angular da reta.

Exemplo:

1. Encontre as equações paramétricas e cartesianas da reta (r) que passa pelo ponto A=(-1,4) possuindo a direção $\vec{u} = (2,5)$.

Solução:

Seja $X=(x,y)$ um ponto do plano pertencente a reta (*r*). Assim:

$$X = A + t\vec{u} \qquad ,t \in \Re .$$

Substituindo os valores na equação temos:

$$(x,y) = (-1,4) + t(2,5)$$

$$\begin{cases} x=-1+2t \\ y=4+5t \end{cases}$$ são as equações paramétricas.

Eliminando o valor de $t \in \Re$ teremos:

$$\frac{x+1}{2} = t \qquad e \qquad \frac{y-4}{5} = t, \qquad daí:$$

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{5} \therefore 5x+5 = 2y-8$$

$$5x-2y = -8-5 \therefore 5x-2y = -13$$

2. Determine a equação da reta que passa pelos pontos *A*=(2,-1) e *B*=(5,4).

Solução:

Como a reta passa pelos pontos *A* e *B*, assim um vetor diretor da reta é dados por $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (5,4) - (2,-1) = (3,5)$$

Tomando *X*=(*x*,*y*) do plano que satisfaz:

$X = A + t\overrightarrow{AB}$, teremos:

$(x,y) = (2,-1) + t(3,5)$, logo:

$$\begin{cases} x=2+3t \end{cases}$$

y=-1+5t que é a equação paramétrica da reta.

3. Determine a equação cartesiana da reta (r) que possa pelo ponto A=(3,-1) e tem como $\vec{u}_\Gamma$ seu vetor diretor perpendicular ao vetor $\vec{u}$ =(2,5).

Solução:

Seja $\vec{\mu}_r$ o vetor diretor da reta (r), e sendo perpendicular a $\vec{\mu}$ temos que:

$< \vec{\mu}_\Gamma, \vec{u} >= 0$, logo se $\vec{u}_r = (a,b)$ teremos:

$< (a,b),(2,5) >= 0$ ou seja:

$2a + 5b = 0$

Tomando $a \neq 0$, encontramos um diretor para (r).

Como sugestão seja a=5, logo b= -2; assim $\vec{\mu}_r$ =(5,-2).

Seja $X = (x, y)$ um ponto do plano. Assim a equação da reta será:

$X = A + t\vec{u}_r$ ou seja:

$(x, y) = (3,-1) + t(5,-2)$ e mais precisamente:

$$\begin{cases} x=3+5t \\ y=-1-2t \end{cases}$$ que são as equações paramétricas do reta.

Eliminando t obtemos a equação cartesiana de (r).

2x+5y=1

4. Encontre o ponto de intersecção entre as retas de equações x-y-=5 e ï x+3y=1 respectivamente.

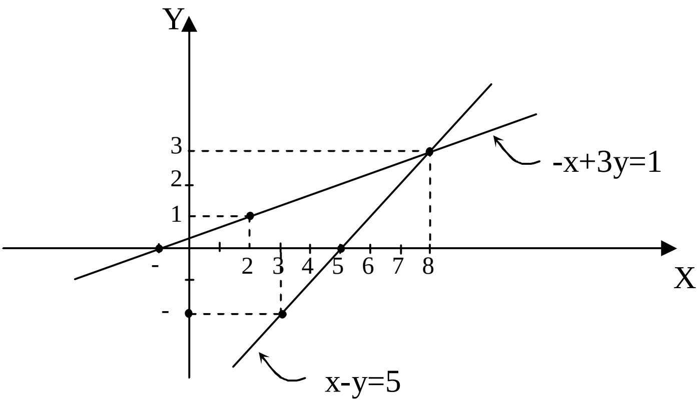
Solução:

A solução consiste unicamente da resolução do sistema linear:

$$\begin{cases} x\text{-}y=5 \\ \text{ï}\, x+3y=1 \end{cases}$$

Usando o método da adição encontramos: 2y=6: logo y=3; Substituindo em qualquer das equações tem-se x=8. Assim P=(8,3) é o ponto de intersecção.

Representação Gráfica



Ângulo entre retas

Sejam (r) e (s) retas e $\vec{\mu}_r$ e $\vec{\mu}_s$ vetores diretores respectivamente.

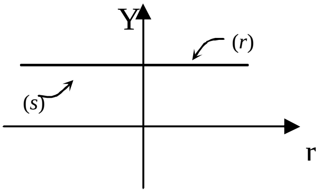
Problema:

Encontrar o menor ângulo formado pelas retas.

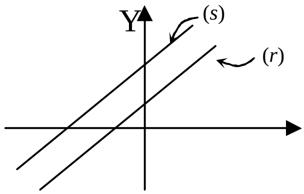
Para solucionar este problema temos dois caso a considerar:

a) (r) e (s) são paralelas.

Assim o menor ângulo é 0°



(coincidentes)



(não coincidentes)

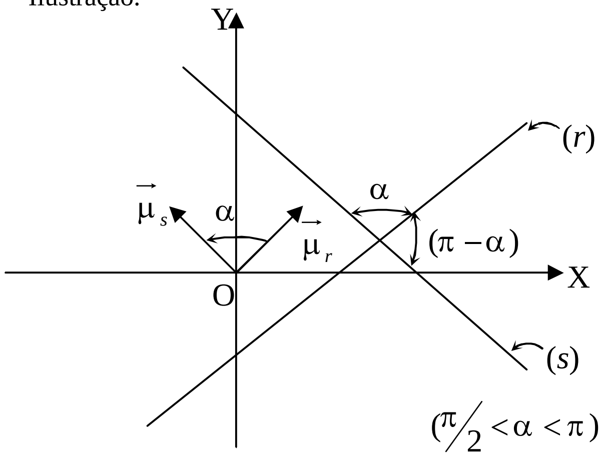
b) (r) e (s) não paralelas.

O menor ângulo (α) entre as retas é dado através do produto interno de seus vetores diretores.

$$\frac{<\vec{\mu}_r, \vec{\mu}_s>}{\left\|\vec{u}_r\right\| \cdot \left\|\vec{u}_s\right\|} = \cos(\alpha)$$

Caso o $\cos(\alpha)$ seja negativo tem-se que $90° < \alpha < 180°$, logo o menor será $(\pi - \alpha)$.

Ilustração:



Exemplo:

Determine o menor ângulo entre as retas (r) e (s) dadas por suas equações y=2x+1 e y=x-1 respectivamente.

Solução:

Calculamos inicialmente os vetores diretores das retas (r) e (s).

$$\vec{\mu}_r = (1,2) \text{ e } \vec{\mu}_s = (1,1)$$

Em seguida determinamos o $\cos(\hat{\alpha})$, sendo $(\hat{\alpha})$ o ângulo entre os vetores, pela equação:

$$\cos(\hat{\alpha}) = \frac{< \vec{\mu}_r, \vec{\mu}_s >}{\left\| \vec{u}_r \right\| \cdot \left\| \vec{u}_s \right\|} \qquad , assim$$

$$\cos(\alpha) = \frac{< (1,2), (1,1) >}{\left\|(1,2)\right\| \cdot \left\|(1,1)\right\|} = \frac{1+2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}}$$

$$\therefore \cos(\hat{\alpha}) = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

Como $\cos(\hat{\alpha}) > 0$, então $0 < \alpha < \pi/2$. Logo $\hat{\alpha} = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$.

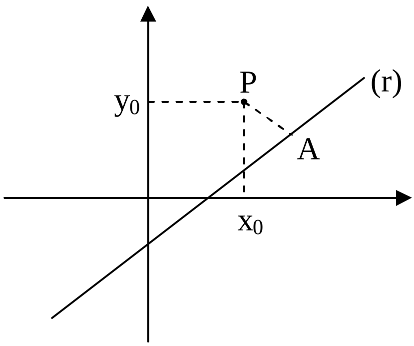
Distância de um ponto a uma reta

Seja $P = (x_0, y_0)$ um ponto do plano e (*r*) um reta de equação $y = ax + b$; então a distância do ponto *P* a reta (*r*) é dada por:

$$d(P,(r)) = \left|\frac{-y_0 + ax_0 + b}{\sqrt{a^2+1}}\right| \quad (1)$$

Demonstração:

Se $P \in (r) \Rightarrow d(P,(r)) = 0$. Suponhamos que $P \notin (r)$.



A distância $d(P,(r)) = d(P,A)$, sendo *A* o pé da perpendicular traçada de *P* a reta (*r*). Assim $d(P,A) = \left\|\overrightarrow{AP}\right\|$. Sendo $\vec{\mu}_r = (1,a)$, o vetor perpendicular a $\vec{\mu}_r$ é do tipo $\vec{u}_1 = (-a,1)$ o qual é colinear a $\overrightarrow{AP}$; logo $\overrightarrow{AP} = t(-a,1)$. Daí, $d(P,A) = \left\|t(-a,1)\right\|$ para algum $t \in \Re$.

Portanto:

$$d(P,A) = |t| \cdot \sqrt{a^2+1} \qquad (*)$$

Conhecido o valor de t o nosso objetivo estará concluído.

Seja $A = (x_1, y_1) \in (r)$, assim:

$\overrightarrow{AP} = t(-a,1)$ podendo também ser escrito:

$(x_0 - x_1, y_0 - y_1) = (-ta, t)$ e;

$$\begin{cases} x_0 - x_1 = -ta \\ y_0 - y_1 = t \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_1 = x_0 + ta \\ y_1 = y_0 - t \end{cases}$$

Daí, substituindo na equação da reta (r) tem-se:

$$y_0 - t = a(x_0 + ta) + b$$

$$-t - t \cdot a^2 = -y_0 + a \cdot x_0 + b$$

$$-t \cdot (1 + a^2) = -y_0 + a \cdot x_0 + b$$

$$-t = \frac{-y_0 + a \cdot x_0 + b}{1 + a^2}$$

$$|t| = |-t| = \left| \frac{-y_0 + a \cdot x_0 + b}{1 + a^2} \right|$$

Substituindo em (*) obtemos:

$$d(P,A) = |t| \cdot \sqrt{a^2+1} = \left| \frac{-y_0 + a \cdot x_0 + b}{a^2 + 1} \right| \cdot \sqrt{a^2+1}$$

$$\therefore d(P,A) = \left| \frac{-y_0 + a \cdot x_0 + b}{\sqrt{a^2+1}} \right| \qquad \text{c.q.d}^{(1)}$$

Exemplo:

1. Determine a distância do ponto $A = (-1,4)$ a reta de equação $y = 3x - 2$.

   Solução:

   A solução deste problema consiste no emprego da relação:

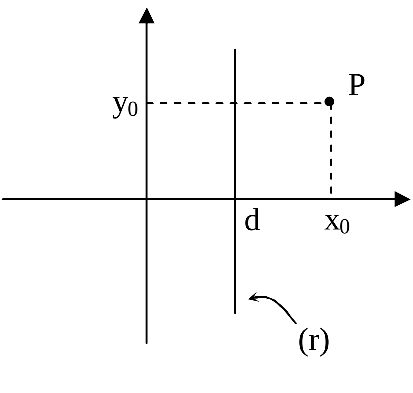
$$d(A,(r)) = \left| \frac{-y_0 + a \cdot x_0 + b}{\sqrt{a^2 + 1}} \right| \quad ; \text{daí :}$$

$$d(A,(r)) = \left| \frac{-4 + 3 \cdot (-1) + (-2)}{\sqrt{3^2 + 1}} \right| = \left| \frac{-9}{\sqrt{10}} \right| = \frac{9}{\sqrt{10}}$$

2. Determine a distância entre as retas $(r): y = 3x + 2$ e $(s): \text{y} = 3\text{x -10}$.

   Solução:

   Como trata-se de retas paralelas, $\vec{\mu}_r = (1,3)$ e $\vec{\mu}_s = (1,3)$, basta tomarmos um ponto qualquer de uma das retas e calcular a distância deste ponto a outra reta. Ou seja: tome $P \in (r)$ com $P = (1, 3 \cdot 1 + 2) = (1,5)$ e determine $d(P,(s))$.



Ora a

$$d(P,(s)) = \left| \frac{-5 + 3 \cdot (1) + (-10)}{\sqrt{3^2 + 1}} \right| = \left| \frac{-12}{\sqrt{10}} \right|$$

Assim $d((r),(s)) = \dfrac{12}{\sqrt{10}}$ u.c.

Observação:

Sendo a reta de equação *x=d* a fórmula (1) não se aplica e conforme a representação gráfica ao lado.

$$d(P,(r)) = |x_0 - d|$$

A Circunferência

Definimos como circunferência ao lugar geométrico cujos pontos que o constituem eqüidistam de um ponto central fixo, denominado de centro, ou seja:

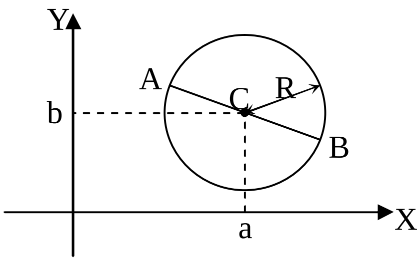
$$\{P \in \Re^2 ; d(P,C) = R\}$$

Elementos da circunferência:

i) Centro;

ii) Raio: a distância de qualquer de seus pontos ao centro;

iii) Diâmetro: é toda corda passando pelo centro da circunferência.



$$\begin{cases} C = (a,b) \rightarrow \text{centro} \\ R = \text{raio} \\ \overline{AB} = \text{diâmetro} \end{cases}$$

Equação Cartesiana

A equação cartesiana da circunferência de centro *C=(a,b)* e raio *R* é dada por:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \qquad (2)$$

Desenvolvendo os termos desta equação chegaremos numa equação mais geral que nos possibilitará a encontrar seus elementos mais facilmente, como também verifica se dado uma equação de grau 2 é de uma circunferência.

Vejamos:

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - R^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$$

Tomando

$A = B = 1, C = -2a, D = -2b$ e $E = a^2 + \mathrm{b}^2 - \mathrm{R}^2$ chegaremos a forma mais geral:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0.$$

Lema: A equação do tipo $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ representa um circunferência então:

$$A = B \neq 0 \text{ e } C^2 + D^2 - 4AE > 0.$$

Demonstração:

Deixamos para o leitor a demonstração.

Exemplo:

1. Determine a equação cartesiana da circunferência de centro *C*=(*2,1*) e raio *R*=3.

Solução:

Basta o emprego da equação (2), logo: $(x-2)^2+(y-1)^2=3^2$.

2. Verifique se a equação $2x^2+2y^2-6x+y+7=0$ representa a equação de uma circunferência.

Solução:

Usando as condições do lema 1.13.2 teremos:

$A=B=2$ o.k.

$C^2+D^2-4EA=(-6)^2+(1)^2-4\cdot(+7)\cdot 2=36+1-56=37-56=-19<0$

Como uma das condições não é satisfeita a equação não representa uma circunferência.

Posições relativas entre ponto e circunferência

Nem todos os pontos $P=(x,y)$ do plano pertencem a circunferência (γ) de equação $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$; somente aqueles que satisfazem a equação. Assim temos três posições a considerar:

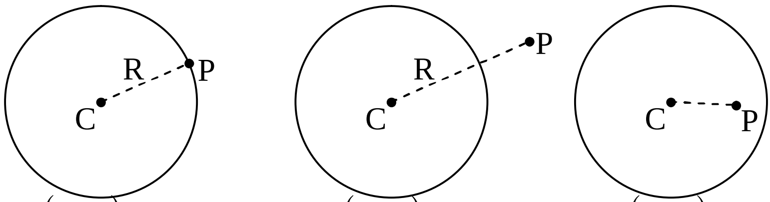
i) $d(P,C)=R \Rightarrow P\in(\gamma)$;

ii) $d(P,C)>R$ então o ponto é exterior a circunferência;

iii) $d(P,C)<R$ então o ponto é interior a circunferência.

Veja as figuras correspondentes:

1º caso 2º caso 3º caso



$d(P,C) = R$ $d(P,C) > R$ $d(P,C) < R$

Exemplo:

Dê a posição do ponto *A*=(3,-2) em relação a circunferência (γ): de raio 5 e centro *C*=(1,-2).

Solução:

Calculamos a distância do ponto *A* ao centro, ou seja:

$$d(A,C) = \sqrt{(3-1)^2 + (-2-(-2))^2} = \sqrt{4+0^2} = 2$$

Como 2<5 concluímos que *P* é interior a circunferência.

Exercícios:

- 16. Escreva a equação paramétrica e cartesiana da reta que passa pelo ponto *A*=(1,0) e tem a direção do vetor $\vec{\mu} = (-1,1)$.

  Resp.: $\begin{cases} x=1-t \\ y=t \end{cases}$ e $x+y-1=0$

- 17. Escreva a equação cartesiana da reta que passa pelos pontos *A*=(2,5) e *B*=(-1,3).

Resp.: $2x-3y+11=0$

- 18. Escreva a equação cartesiana da reta mediatriz ao segmento de extremos *A*=(5,1) e *B*=(0,4).

  Resp.: $5x-3y-5=0$

- 19. Determine o ponto de intersecção entre as retas (*r*) e (*s*), sendo (*r*) a reta que passa pelos pontos *A*=(1,5) e *B*=(0,1) e (*s*) a reta de equação *y*=2*x*-1.

  Resp.: $(-1,-3)$

- 20. Determine o valor de $t \in \Re$ para que o ponto $A=(1+t,2t-1)$ pertença a reta de equação cartesiana $3x-y+2=0$.

  Resp.: -6

- 21. Determine a projeção ortogonal do ponto *A*=(1,5) sobre a reta (*r*) de equação $6x-2y+1=0$.

  Resp.: $\left(\frac{29}{20},\frac{97}{20}\right)$

- 22. Determine o menor ângulo entre as retas de equações cartesianas $y=2x-1$ e $x+y-2=0$ respectivamente.

  Resp.: $arc.\cos\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$

- 23. Calcule a distância do ponto *P*=(1,5) a reta que passa pelo ponto *L*=(-1,-3) e tem a direção do vetor $\vec{v}=(1,3)$.

  Resp.: $\frac{2}{\sqrt{10}}$

- 24. Determine a equação paramétrica da reta que passa pelo ponto A=(2,1) e é paralela a reta de equação cartesiana $2x - y + 8 = 0$.

  Resp.: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$

- 25. Escreva a equação da reta (s) que passa pelo ponto A=(1,-3) e é perpendicular a reta (r) que passa pelos ponto B=(0,1) e C=(1,1).

  Resp.: $x = 1$

- 26. Determine a equação da circunferência que possui como um dos diâmetros o segmento $\overline{AB}$ onde A=(0,5) e B=(1,2).

  Resp.: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = 10$

- 27. Determine o centro e o raio da circunferência de equação cartesiana $x^2 + y^2 - 7x + 8y + 10 = 0$.

  Resp.: $C = \left(\frac{7}{2}, -4\right)$, $r = \frac{\sqrt{103}}{2}$

- 28. Escreva a equação da circunferência que contem os pontos A=(2,1), B=(0,3) e C=(-1,1).

  Resp.: $x^2 + y^2 - x - 3y = 0$

- 29. Dê a posição da reta (r) de equação cartesiana $x + y - 1 = 0$ em relação a circunferência de equação $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 6$.

  Resp.: secante

- 30. Determine os pontos de intersecção da reta (r) de equação $x - y + 1 = 0$ e a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$.

  Resp.: $\left(\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{17}}{2} \right)$ ou $\left(\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}, \dfrac{1-\sqrt{17}}{2} \right)$

- 31. Determine a equação da circunferência que passa pelos pontos intersecção das retas dadas pelas equações cartesianas $y = 1,\ 2x + y - 7 = 0$ e $x - y + 1 = 0$.

  Resp.: $x^2 + y^2 - 3x - 3y + 2 = 0$

- 32. Dê a posição do ponto A=(4,3) em relação a circunferência de equação cartesiana $x^2 + y^2 + 2x - 8 = 0$.

  Resp.: Exterior

3. CÔNICAS:

As cônicas foram material de estudo pelos gregos. Os estudos proferidos por Apolônio a eles tornaram-se um documento de grande relevância da geometria clássica grega.

Embora tenham sido estudadas há muitas décadas passadas, elas ainda hoje são de grande importância como podemos ver: a parábola é de grande utilização na forma dos espelhos dos faróis de veículos; a elipse ganhou importância no estudo das leis de Kepler (1571-1630); a hipérbole é usada para mostrar como se comporta uma partícula-alfa no campo elétrico de um átomo.

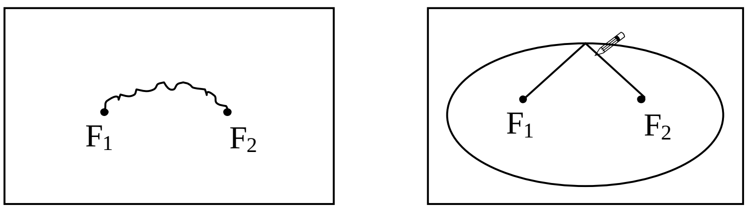
Classificamos como cônicas as curvas: Elipse, Hipérbole e Parábola.

Elipse

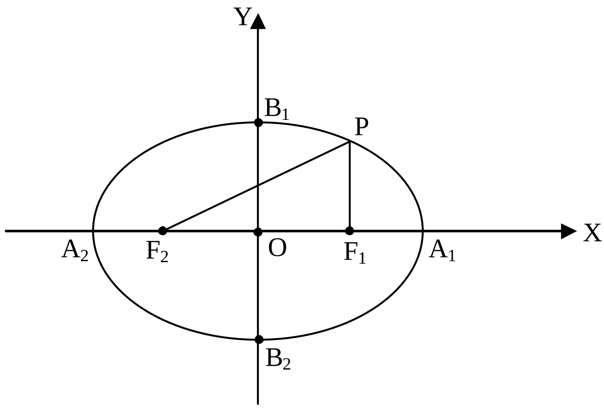
Dados dois pontos F_1 e F_2 do plano e um valor real $r > 0$ tal que $d(F_1, F_2) < r$, o conjunto de todos os pontos do plano em que $d(P, F_1) + d(P, F_2) = r$ é denominado de elipse.

Construção mecânica:

Fixe dois pregos em uma tabua e em seguida amarre a eles um barbante de comprimento maior que $d(F_1, F_2)$. Com um lápis encostado no barbante e esticando-o, mova-o; O mesmo descreverá uma elipse.



Consideremos agora este lugar geométrico no plano cartesiano, onde F_1 e F_2 estarão localizados no eixo dos X e a origem coincidirá com o ponto médio de $\overline{F_1F_2}$. (Conforme fig. 1)



(Fig. 1)

1. Os pontos A_1 e A_2 são tais que $d(A_1, A_2) = r$.

   É fácil de comprovar, basta para isso fazer P coincidir com A_1, pois $r = d(A_1, F_2) + d(F_1, A_1)$;

   e como

   $d(F_1, A_1) = d(F_2, A_2)$ tem-se que:

   $r = d(A_1, F_2) + d(F_2, A_2) = d(A_1, A_2)$.

Nomenclatura:

1. $\overline{A_1A_2}$ é chamado de eixo maior da elipse e $\overline{B_1B_2}$, onde $d(B_1B_2) < r$, é chamado de eixo menor.
2. Os pontos F_1 e F_2 são chamados de pontos focais e A_1, A_2, B_1 e B_2 são chamados de vértices da elipse.

A nossa pretensão é descrever uma equação analítica que caracterize o lugar geométrico (conforme fig. 1).

Tomemos P=(x,y), A_1=(a,0) , A_2=(-a,0) , B_1=(0,b) , B_2=(0,-b) , F_1=(c,0) e F_2=(-c,0).

Aplicando a propriedade que caracteriza a elipse temos:

$$d(P,F_1)+d(P,F_2)=r\,.$$

Como $d(A_1,A_2)=r \Rightarrow r=2a;$ daí:

$$d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a$$

$$d(P,F_1)=2a-d(P,F_2)$$

$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}$$

Elevando o quadrado a ambos os termos, obtemos :

$$(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$x^2-2cx+c^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2cx+c^2$$

$$0=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+4cx$$

Podemos ainda escrever :

$$a^2\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx$$

Elevando ao quadrado, temos ainda :

$$a^2\left[(x+c)^2+y^2\right]=\left(a^2+cx\right)^2$$

$$a^2\left[x^2+2cx+c^2\right]+y^2=a^4+2a^2cx+c^2x^2$$

$$a^2x^2+2ca^2x+a^2c^2+y^2a^2=a^4+2a^2cx+c^2x^2$$

$$a^2x^2-c^2x^2+y^2a^2=a^4-a^2c^2$$

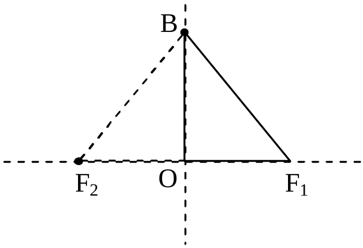
$$\left(a^2-c^2\right)x^2+y^2a^2=a^2\left(a^2-c^2\right) \qquad \text{(I)}$$

Consideremos o triangulo B_1F_1 F_2 e podemos observar que:

1. $d(B_1, F_1) + d(B_1, F_2) = r = 2a$ e como $d(B_1, F_1) = d(B_1, F_2)$

tem - se: $2d(B_1, F_1) = 2a$

$d(B_1, F_1) = a$



2. $\overline{OF_1} = c$ e $\overline{OB} = b$

Logo: $a^2 = c^2 + b^2 \therefore b^2 = a^2 - c^2 \therefore c = \sqrt{a^2 - b^2}$ (II)

Substituindo II em I teremos:

$$b^2x^2 + y^2a^2 = a^2b^2$$

Como *a* e *b* são não nulos, temos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

NOTA:

Quando os focos da elipse estão sobre o eixo de Y também é fácil mostrar que a equação permanece inalterada. Para isso teremos que observar na (fig. 2) que:

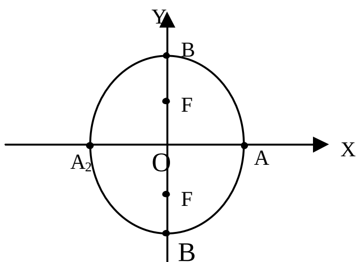


Fig. 2

i) O eixo maior agora é $\overline{B_1 B_2}$ e que $d(B_1, B_2) = 2b$

ii) $d(A_1 F_1) = b$ visto que $d(A_1, F_1) + d(A_1, F_2) = 2b$

iii) Pelo triangulo OF_1A_1 temos que: $b^2 = a^2 + c^2 \therefore c = \sqrt{b^2 - a^2}$

Resumindo:

Em quaisquer dos casos mostrados na fig. 1 e fig. 2 concluímos que:

1. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ representa a elipse;
2. Se a>b os focos encontram-se no eixo dos X;
3. Se a<b os focos encontram-se no eixo dos Y.

Exemplo:

1. Determine a equação da elipse cujos focos são dados por F_1=(+3,0), F_2=(-3,0) e eixo maior 8.

   Solução:

   Como os focos encontram-se no eixo dos X então $\overline{A_1 A_2}$ é o eixo maior da elipse. E como $d(A_1, A_2) = 2a = 8$, então a=4.

Sendo $a>b$, então $c=\sqrt{a^2-b^2}\ \therefore b^2=a^2-c^2$ daí:

$$b=\pm\sqrt{4^2-3^2}=\pm\sqrt{7}$$

Assim a equação da elipse será:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$$

2. Sendo $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{49}=1$ pede-se:

   a) Os vértices e os focos da elipse;

   b) O eixo maior;

   c) Faça a representação gráfica.

Solução:

a) Pela equação $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ da elipse vem que:

$$a^2=9\ \therefore a=\pm 3$$

$$b^2=49\ \therefore b=\pm 7$$

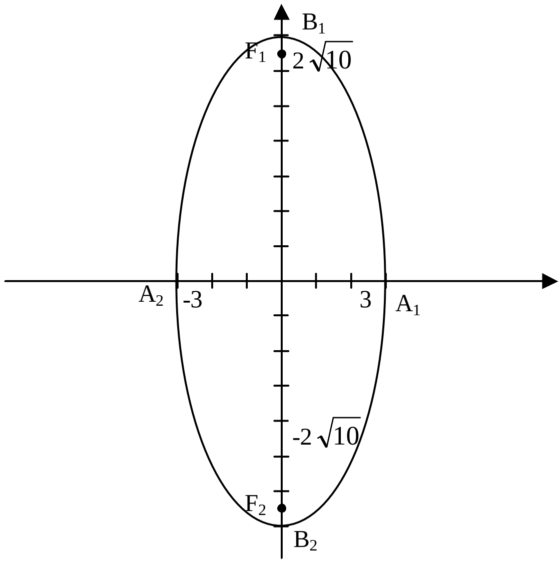
Como $|a|<|b|\Rightarrow c=\pm\sqrt{b^2-a^2}$

$$c=\pm\sqrt{49-9}=\pm 2\sqrt{10}$$

Assim:

$$A_1=(3{,}0),\ A_2=(-3{,}0),\ B_1=(0{,}7),\ B_2=(0{,}-7),$$
$$F_1=\left(0{,}2\sqrt{10}\right)\text{ e } F_2=\left(0{,}-2\sqrt{10}\right)$$

b) O eixo maior e $\overline{B_1B_2}$ encontrando-se no eixo dos Y.

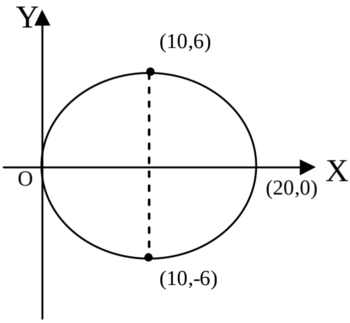


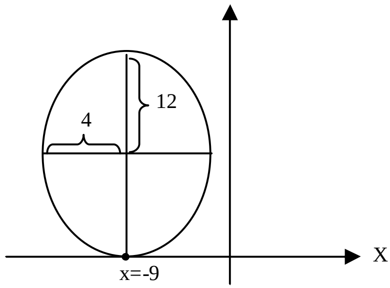
Exercícios:

- 1. Uma elipse tem seus focos no eixo OX e seu centro em O. sabendo que o eixo maior mede 8, e a distância focal é 4, dê uma equação para elipse.

  Resp.: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{12}=1$

- 2. Determine as equações das elipses seguintes:





Resp.: $\frac{(x-10)^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$

- 3. Determine os focos da cônica de equação $\frac{(x+3)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$.

  Resp.: $F_1=(2,-3)\quad F_2=(-6,-3)$

- 4. Dê o centro C, o eixo maior e o eixo menor da elipse $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$.

  Resp.: $C=(2,0)$, $\overline{B_1B_2}=8$, $\overline{A_1A_2}=6$

- 5. Determine o valor de *m* para que a reta $\frac{2x}{9}+\frac{my}{4}=1$ seja tangente a elipse de equação $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.
- 6. Verifique se há intersecção entre a reta $x+y=1$ e a elipse de equação: $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$.

  Resp.: Sim.
- 7. Determine o valor de *m* para que o ponto $A=(m,1-2m)$ pertença a elipse de equação $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$.

  Resp.: não existe.
- 8. Dê a posição do ponto $L=(1,5)$ em relação a elipse de equação $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$.

  Resp.: Exterior.
- 9. Determine os pontos de intersecção da elipse de equação cartesiana $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$ com os eixos coordenados (OX e OY).

  Resp.:

  $$\left(0,\frac{4\sqrt{2}}{3}\right),\left(0,\frac{-4\sqrt{2}}{3}\right),\left(\frac{2+3\sqrt{3}}{2},0\right) \text{ e } \left(\frac{2-3\sqrt{3}}{2},0\right)$$

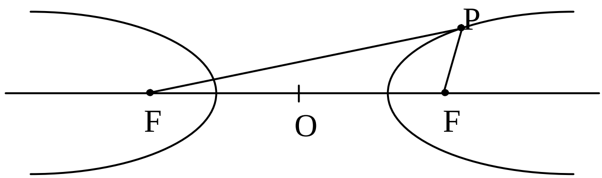
Hipérbole

Hipérbole é um lugar geométrico do plano cuja diferença das distâncias de um ponto, a dois pontos fixos do plano é constante, em valor absoluto.

Sejam F_1 e F_2 dois pontos do plano em que $d(F_1, F_2) = 2c$ e $a \in \Re^+$ onde $2a<2c$.

Assim o conjunto do plano:

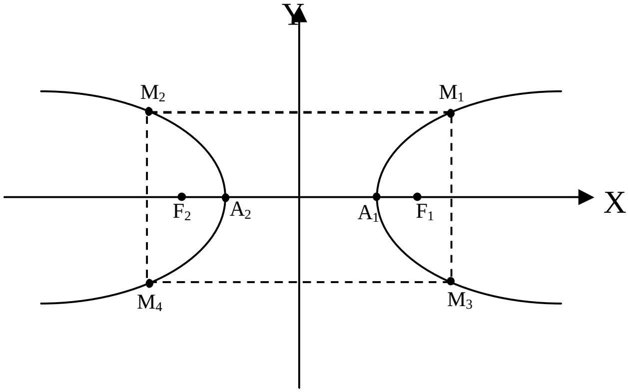
$\{P \in \Re^2; |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}$ é denominado de hipérbole.



(Fig. 2.2 a)

Pela propriedade $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$, temos que: $d(P, F_1) - d(P, F_2) = \pm 2a$ desta feita concluímos que a hipérbole é uma curva de dois ramos. Para o ponto P do plano em que $d(P, F_2) - d(P, F_1) > 0$, ele estará localizado do lado direito da figura 2.2.a e caso contrario do lado da esquerda.

Para simplificação de observação considere F_1 e F_2 disposto no eixo X e pelo ponto médio de F_1 e F_2 tracemos uma perpendicular (Y). Ao ponto de intersecção da curva com o eixo dos X atribuamos os valores pontuais de A_1 e A_2 respectivamente.



(Fig. 2.2.b)

Pode-se observar facilmente que cada ramo da hipérbole é simétrico em relação ao eixo dos X e que os ramos são simétricos em relação ao eixo dos Y. Daí se M_1 é da hipérbole existe M_2, M_3, M_4 onde M_1 e M_2 ou M_3 e M_4 são simétricos em relação ao eixo Y e M_1 e M_3 ou M_2 e M_4 são simétricos em relação ao eixo X. Baseado nesta conclusão vemos que:

$$d(A_1, F_2) - d(A_1, F_1) = 2a$$
$$d(A_2, F_2) - d(A_2, F_1) = -2a$$

Como A_1 é simétrico a A_2 pode-se concluir:

$$d(A_1, F_2) = d(A_2, F_1)$$

Daí podemos escrever:

$$d(A_2, F_2) - d(A_1, F_1) = 0 \quad \text{ou seja :}$$
$$d(A_2, F_2) = d(A_1, F_1)$$

Vê-se também que $d(A_1 A_2) = 2a$. Ora como o ponto A_1 é da hipérbole vale a relação:

$$d(F_2, A_1) - d(A_1, F_1) = 2a \quad (*)$$

Por outro lado:

$$d(F_2, A_1) = d(F_2, A_2) + d(A_2, A_1)$$

Daí substituindo (*) temos:

$$d(F_2, A_1) + d(A_2, A_1) - d(A_1, F_1) = 2a$$

Como $d(F_2, A_2) = d(A_1, F_1)$, tem-se:

$$d(A_2, A_1) = 2a .$$

ELEMENTOS PRINCIPAIS:

F_1 e F_2 $\rightarrow$ focos

O $\rightarrow$ ponto médio de $\overline{F_1F_2}$ denominado de centro

$\overline{A_1A_2}$ $\rightarrow$ eixo real ou transverso

$\overline{B_1B_2}$ $\rightarrow$ eixo imaginário

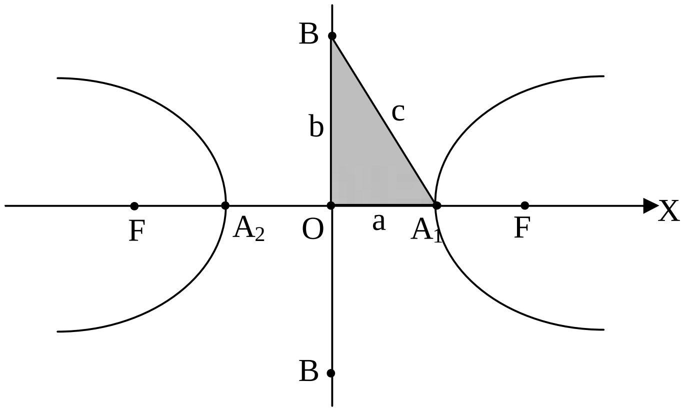
2c $\rightarrow$ distância focal

2a $\rightarrow$ medida do eixo real

2b $\rightarrow$ medida do eixo transverso

$e = \dfrac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}}$ $\rightarrow$ excentricidade

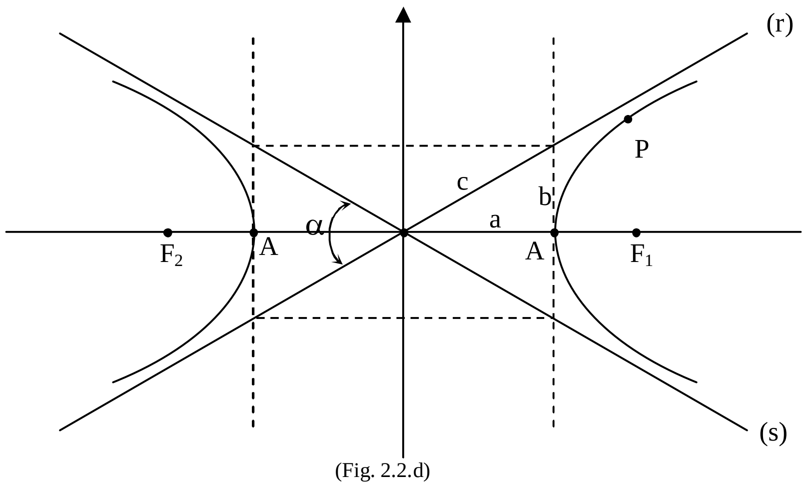
$\mathrm{c}^2 = a^2 + b^2$ $\rightarrow$ relação especial



(Fig. 2.2.c)

Observe que sendo a hipérbole uma curva aberta, o eixo imaginário tem significado abstrato.

Consideremos agora o retângulo obtido em intersecção da circunferência de centro O e raio C e pelas retas passando por A_1 e A_2 perpendiculares respectivamente ao eixo real, conforme mostra (Fig. 2.2.c).



(Fig. 2.2.d)

As retas (r) e (s) que contem as diagonais do retângulo são chamadas de assindotas da hipérbole e possui como equações cartesianas

$$y = \frac{b}{a}x \text{ e } y = -\frac{b}{a}x \text{ respectivamente.}$$

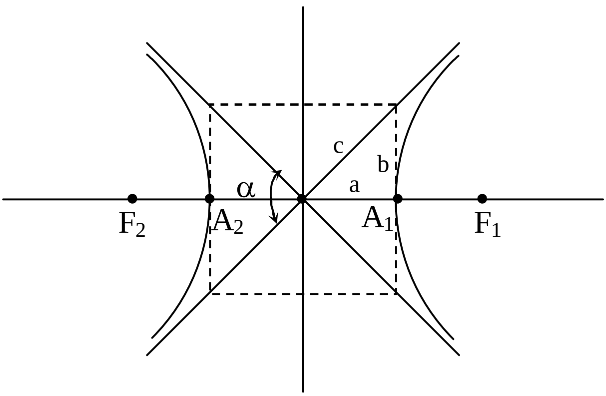
Definimos como retas assíndotas da hipérbole as retas em que os pontos da hipérbole tende a se aproximar dos pontos da reta na medida em que se afastam dos focos.

Definimos como excentricidade da hipérbole ao valor e dado por:

$$e = \frac{a}{c}.$$

A excentricidade está relacionada com a abertura (α) da hipérbole, conforme Fig. 2.2.c.

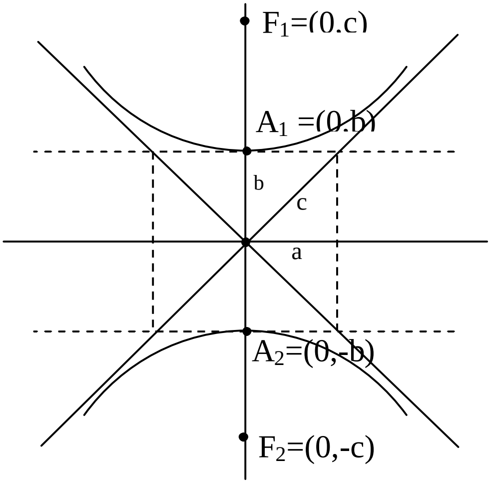
Observando o quociente $\frac{c}{a}$, vê-se que diminuindo o valor de a a fração cresce em conseqüência o ângulo Ŭ(abertura da hipérbole) cresce o que torna a curva da hipérbole mais abertas.



(Fig. 2.2.e)

Para $a=b$ o valor do ângulo $\hat{\alpha}$ é de $\pi/2\,rd$, e neste caso a hipérbole é chamada de hipérbole eqüilátera. (Fig. 2.2.e)

Por analogia tem-se todo um estudo da hipérbole quando o eixo real encontra-se sob o eixo Y; conforme mostra a figura 2.2.f.



(Fig. 2.2.f)

Neste caso $\left|d(P,F_1)-d(P,F_2)\right|=2b$ e $c^2-b^2=a^2$ e $e=\dfrac{c}{b}$.

Equação Cartesiana Reduzida da Hipérbole

Como referência para dedução desta equação fixamos nossa atenção a (fig. 2.2.d). Seja $P=(x,y)$ um ponto da hipérbole. Usando a propriedade de pertinência no lugar geométrico em estudo teremos:

$\left|d(P,F_1)-d(P,F_2)\right|=2a$ ou seja:

$$d(P,F_1)-d(P,F_2)=\pm 2a \quad \text{, ou}$$

$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}\pm 2a$$

Elevando ao quadrado a igualdade: (i)

$$(x-c)^2+y^2=(x+c)^2+y^2\pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+4a^2$$

$$x^2-2cx+c^2+y^2=x^2+2cx+c^2+y^2\pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+4a^2$$

$$-4cx-4a^2=\pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$cx+a^2=\pm a\sqrt{(x+c)^2+y^2} \qquad \text{(ii)}$$

Elevando o quadrado a igualdade (ii) :

$$(cx+a^2)^2=\left(\pm a\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2$$

$$c^2x^2+2a^2cx+a^4=\left[(x+c)^2+y^2\right]a^2$$

$$c^2x^2+2a^2cx+a^4=a^2x^2+2cxa^2+c^2a^2+y^2a^2$$

$$(c^2-a^2)x^2+(a^2-c^2)a^2-y^2a^2=0$$

como $c^2=b^2+a^2$, $c^2-a^2=b^2$ ou $a^2-c^2=-b^2$

temos:

$$b^2x^2+a^2(-b^2)-y^2a^2=0$$

e mais:

$$b^2x^2-y^2a^2=a^2b^2$$

Sendo a e $b\neq 0$

$$\frac{b^2x^2}{a^2b^2}-\frac{y^2a^2}{a^2b^2}=1$$

simplificando:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \text{(I)}$$

No caso em que o eixo real encontrar-se no eixo Y teremos: (Fig. 2.2.f)

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad \text{(II)}$$

Exemplos:

1. Determine os focos, os vértices e a excentricidade da hipérbole de equação $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$.

   Solução:

   A equação dada nos mostra que o eixo real encontra-se no eixo X, assim:

   $$a^2 = 25 \text{ e } b^2 = 9\text{, logo}$$

   $$a = \pm 5 \quad \text{e } b = \pm 3$$

   Como $c^2 = a^2 + b^2$ tem-se:

   $$c = \pm\sqrt{25+9} = \pm\sqrt{34}\ .$$

   Conseqüentemente:

   $$A_1 = (5,0) \quad , \quad A_2 = (-5,0)$$

   $$F_1 = (\sqrt{34},0) \quad \text{e} \quad F_2 = (-\sqrt{34},0)$$

   Como a excentricidade é dada por: $e = \frac{c}{a}$ temos que:

   $$e = \frac{\sqrt{34}}{5}$$

2. Qual a distância focal da hipérbole cuja equação é: $\frac{(y-1)^2}{36} - \frac{(x+2)^2}{64} = 1$?

Solução:

Procedendo uma mudança de coordenadas tomemos:

$$Y = y - 1 \quad \text{e} \quad X = x + 2 \text{ e}$$

substituindo na equação encontremos:

$$\frac{Y^2}{36} - \frac{X^2}{64} = 1$$

Comparando com a equação II observamos que a hipérbole encontra-se com eixo real sob o eixo Y. assim $b^2 = 36$ e $a^2 = 64$; e como $c^2 = a^2 + b^2$ teremos:

$$c^2 = 36 + 64 = 100 \therefore c = \pm 10 .$$

Como a distância focal é dada por 2c. veremos que a distância focal vale 20.

Exercício:

- 10. Deduza uma equação da hipérbole:

  a) de focos F_1=(4,0) e F_2=(-4,0) e vértices A_1=(3,0) e A_2=(-3,0);

  b) de focos F_1=(3,3) e F_2=(-3,-3) e vértices A_1=(+1,1) e A_2=(-1,-1).

Resp.: a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ b) $7x^2 + 7y^2 + 18xy = 32$

- 11. Qual a excentricidade da hipérbole cuja equação é $\frac{x^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$?

  Resp.: $e = 2/\sqrt{13}$

- 12. Determine a equação da hipérbole que tem as características:

  a) centro no ponto (2,0);

  b) um foco em (2,-2);

  c) um dos vértices em (2,1).

  Resp.: $3y^2 - x^2 + 4x = 7$

- 13. Diga em que eixo coordenado estão os focos da hipérbole, e calcule a medida do eixo real, a do eixo transverso e a distância focal, nos casos:

  a) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$ b) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

  c) $-4x^2 + 7y^2 = 48$

  d) $\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

  Resp.: a) eixo X, 2*a*=8, 2*b*=4, $2c = 4\sqrt{5}$

- 14. Uma hipérbole de eixo transverso e eixo real contidos nos eixo coordenados contem os pontos $(3, -15/4)$ e $\left(-2\sqrt{5}, 9/2\right)$.

  a) Dê a equação cartesiana da hipérbole;

  b) Dê as coordenadas dos focos e dos vértices;

  c) Calcule a excentricidade.

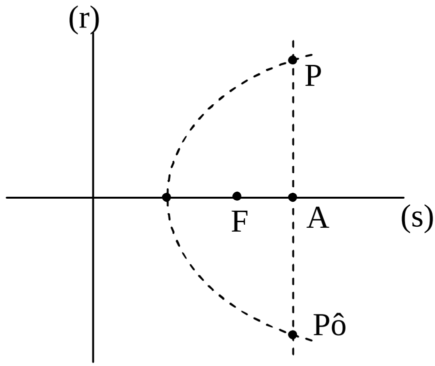
Parábola

Definição:

Sejam F um ponto e (r) uma reta no plano, com F não pertencente a reta (r). Define-se como parábola ao lugar geométrico do plano cujos pontos que o constituem eqüidistam do ponto F e da reta (r), em outras palavras a parábola é dada pelo conjunto:

$$\left\{P \in \Re^2 ; d(P, F) = d(P, (r))\right\}.$$

Construção: Seja (r) uma reta e F um ponto no plano, conforme figura 2.4.a abaixo. Por F traçamos uma reta (s) perpendicular a (r), chamado eixo de simetria da parábola.

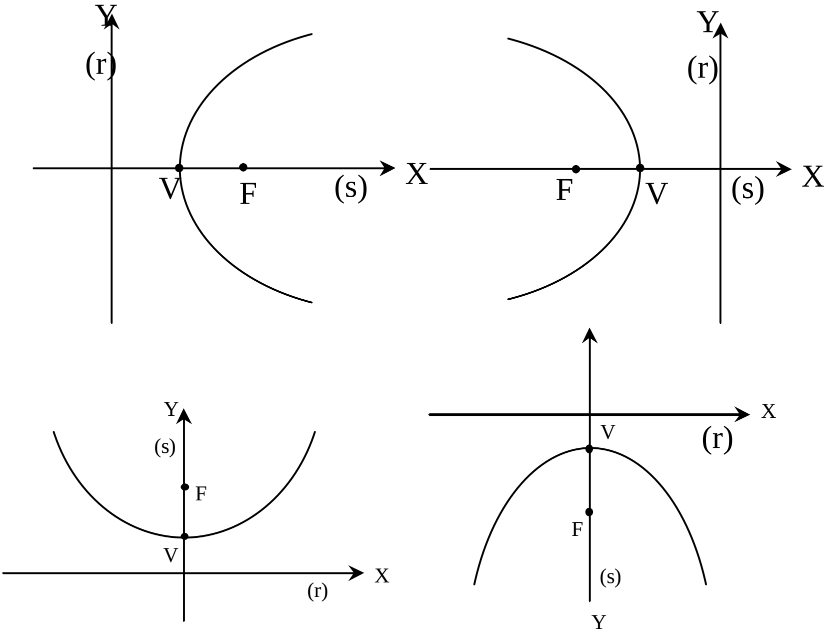


(Fig. 2.4.a)

Seja $A \in (s)$ onde $d(A,(r)) \geq \frac{1}{2} d(F,(r))$. Por A tracemos uma reta paralela a reta (r) e centrando o compasso em F com abertura igual a $d(F,(r))$ marquemos os pontos P e Pô. Tais pontos satisfazem a propriedade de que $d(P,F) = (P,(r))$ logo pontos da parábola. De maneira análoga tracemos outros pontos e ligando estes pontos obteremos a parábola.

Por esta construção podemos de imediato observar que a parábola é simétrica em relação a reta (s).

Fazemos recair sobre os eixos coordenados X e Y do plano X_0Y o eixo de simetria (s) e a reta (r) poderemos ter quatro situações conforme mostra a figura 2.2.b abaixo.



(Fig. 2.4.b)

Elementos principais:

F → foco

(*s*) → reta de simetria

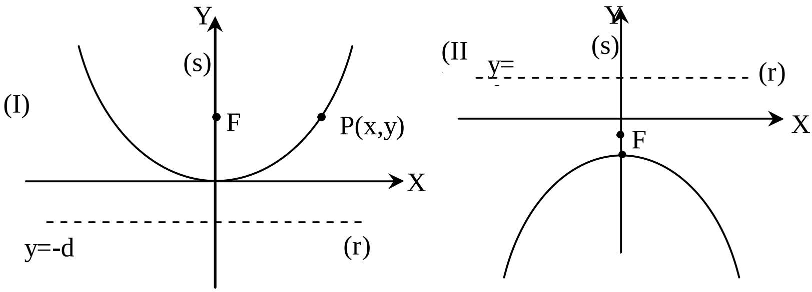
(*r*) → reta diretriz

V → vértice da parábola

2p → distância de F a (r)

Equação Cartesiana Reduzida da Parábola

Para dedução desta equação tomemos como parte de estudo o caso em que (*s*) coincide com o eixo Y e *F*=(0,*p*) ou *F*=(0,-*p*) conforme figura abaixo. (Fig. 2.4.c)



(Fig. 2.4.c)

Tomando como influência a representação (I) da Fig. 2.4.c, temos que:

F=(0,*p*) e (*r*) possui equação *y*=-*p* (*p*>0). Seja *P*=(*x*,*y*) aleatório da parábola e aplicando a propriedade temos:

$$d(P,F) = d(P,(r)),$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = |y+p|$$

elevando ao quadrado:

$$(x-0)^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2$$

e mais:

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$

daí chegamos a:

$$y = \frac{1}{4p} x^2 \quad \text{(A)}$$

Se considerarmos a representação (II) da Fig. 2.4.c e fazendo procedimento análogo chegaremos a:

$$y = -\frac{1}{4p} x^2 \quad \text{(B)}$$

Tomando (*s*) coincidindo com o eixo X no sistema ortogonal de coordenadas e *F*=(*p*,0) ou *F*=(-*p*,0) obteremos as equações respectivamente:

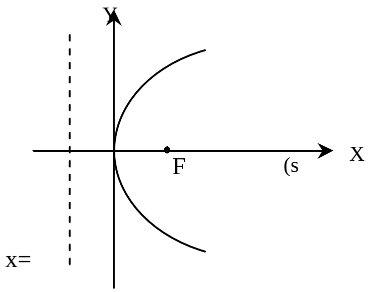
$$x = \frac{1}{4p} y^2 \quad \text{e} \quad x = -\frac{1}{4p} y^2$$

Exemplo:

1. Faça a representação gráfica da parábola de equação cartesiana $X = 2y^2$.

Solução:

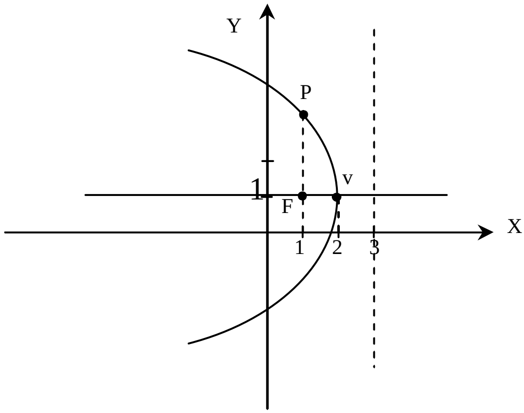
A parábola possui o foco de coordenadas $\left(\frac{1}{8}, 0\right)$ visto que $\frac{1}{4p} = 2$ ou seja $p = \frac{1}{8}$; e diretriz $x = -\frac{1}{8}$. Assim a sua representação gráfica é dada por:



2. Encontrar a equação da parábola de foco $F(1,1)$, sendo $x=3$ a equação da reta diretriz.

Solução:

Conforme os dados acima poderemos concluir que o vértice terá coordenadas (2,1) de acordo com o gráfico ao lado.



$d(P,F)=d(P,(r))$ ou ainda:

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=|x-3|$$

elevando ao quadrado:

$(x-1)^2+(y-1)^2=(x-3)^2$ e mais ainda:

$(y-1)^2=x^2-6x+9-(x^2-2x+1)$

$(y-1)^2=-4x+8=4(2-x)$ ou seja

$(y-1)^2=4(2-x)$

3. Determinar o vértice, o foco, uma equação para a reta diretriz e uma equação para o eixo de simetria da parábola de equação $x^2+4x+8y+12=0$.

Solução:

Completando o quadrado em x na equação temos:

$x^2+4x+4-4+8y+12=0$, ou seja:

$(x+2)^2+8(y+1)=0$,

e mais:

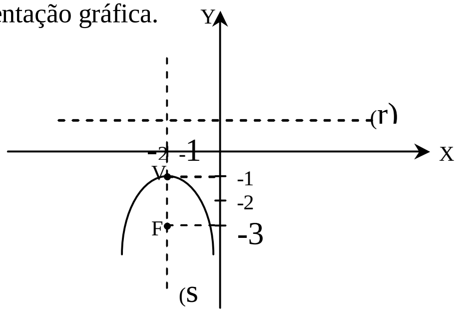
$\left(y+1\right)=-\frac{1}{8}\left(x+2\right)^2$. Confrontando com a equação (B) temos que:

$$-\frac{1}{4p}=-\frac{1}{8} \text{, logo } p=2.$$

Assim $V=\left(-2,-1\right)$ e foco $F\left(-2,-3\right)$ visto que $d\left(V,F\right)=2$.

Como (r) reta diretriz teremos y=1 visto que $d\left(V,\left(r\right)\right)=2$; e sendo a reta de simetria (s) contendo o vértice $V=\left(-2,-1\right)$ e o foco $F\left(-2,-3\right)$ terá como equação cartesiana x=-2.

Confira a representação gráfica.



Exercícios:

- 15. Encontrar a equação de cada uma das parábolas, sabendo que:

  a) V=(0,0); diretriz (r) : y=-3;

  b) F=(3,0); diretriz (r) : x=-3.

Resp.: a) $y=\frac{1}{12}x^2$ b) $x=\frac{1}{12}y^2$

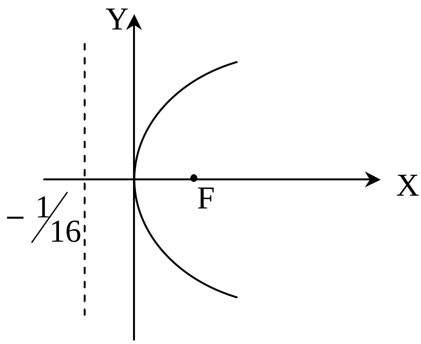
- 16. Determinar o foco, o vértice, a equação da diretriz e o eixo de simetria, e esboce a representação gráfica das parábolas cujas equações são:

a) $x=4y^2$ b) $x=-\dfrac{1}{16}y^2$

c) $y=x^2$ d) $y=\dfrac{1}{8}x^2$

Resp.:

a) $F=\left(\dfrac{1}{16},0\right)$, $V=(0,0)$, $\mathrm{X}=\left(-\dfrac{1}{16}\right)$, eixo X



- 17. Mostre que toda parábola cujo eixo de simetria é paralelo ao eixo Y é de equação em forma: $Y=ax^2+bx+c$.

- 18. Deduza uma equação da parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo Y e passa pelos pontos $A=(0,0)$, $B=(1,1)$ e $C=(3,1)$.

Resp.: $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x$

- 19. Encontre a equação da parábola com eixo de simetria coincidente com o eixo OY e tem como vértice a origem $\theta = (0,0)$ e passa pelo ponto (+1,4).

  Resp.: $y = 4x^2$

Translação de Eixos

Para nosso estudo a translação de eixos tem como objetivos simplificar as equações das cônicas da forma mais geral à forma reduzida ou canônica; ou seja da forma:

$$Ax^2 + By^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

para um dos modelos.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ , \ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \ , \ \mathrm{y} = \frac{1}{4p}x^2$$

$$y = -\frac{1}{4}x^2 \ , \ x = \frac{1}{4p}y^2 \ \text{ ou } \ x = \frac{-1}{4p}y^2,$$

conforme seja a curva considerada.

Exemplo:

Seja a parábola de equação cartesiana $x^2 - 2x - 20y - 39 = 0$. Determine o seu vértice e seu foco.

Solução:

Da forma como a equação é apresentada não nos é de fácil percepção a identificação do que foi pedido em virtude de todo um trabalho que foi direcionado a casos particulares. Em virtude disso é que o processo comparativo se dá mediante a identificação de formas. Desta feita o que nos é favorável é trabalharmos a equação fornecida na busca de sua simplificação que é $y = \frac{1}{4p}x^2$.

Tomando a equação:

$$x^2 - 2x - 20y - 39 = 0$$

façamos a completação do quadrado na variável *x*.

$$x^2 - 2x + 1 - 1 - 20y - 39 = 0$$

daí:

$$(x-1)^2 - 20y - 40 = 0$$, ou seja:

$$20(y+2) = (x-1)^2$$

$$(y+2) = \frac{1}{20}(x-1)^2$$

Tomando $Y_1 = y + 2$ e $X_1 = x - 1$ teremos a forma reduzida:

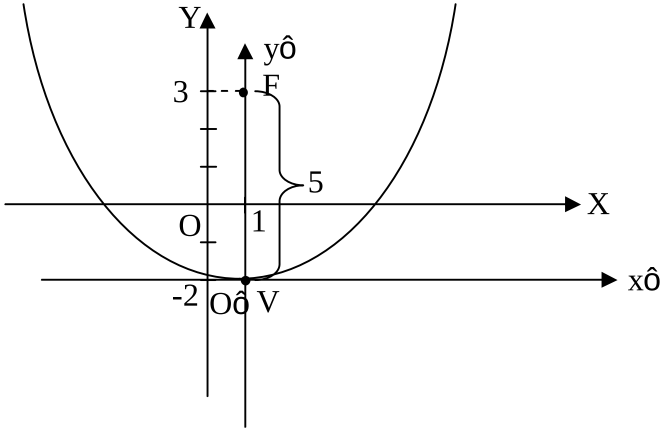
$$Y_1 = \frac{1}{20}X_1^2$$

Desta feita $\frac{1}{20} = \frac{1}{4p} \therefore p = 5$.

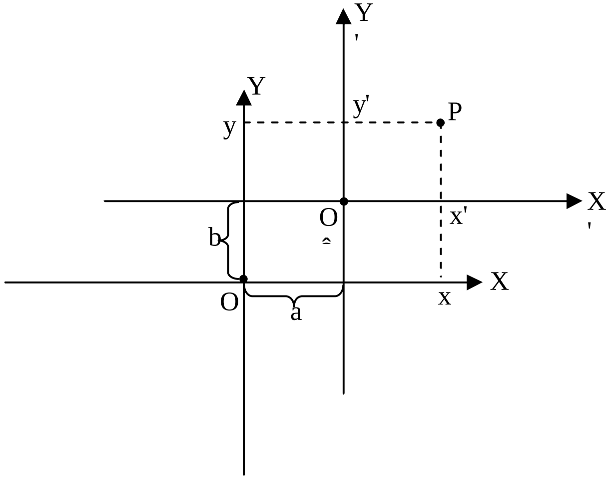
Logo *V*=(1,-2) e como $d(V,F) = 5$ e $F = (1,b)$ tem-se que $b - (-2) = 5 \therefore b = 3$.

Assim *F*=(1,3).

Para um entendimento mais claro faremos a representação gráfica abaixo:



Considerando em um mesmo plano Ŭ dois sistemas ortogonais de coordenadas XOY e XôOôYô em que OX é paralelo a OôXô e o mesmo acontecendo para os eixos OY e OôYô conforme a figura 2.5.b.



(α)

(Fig. 2.5.b)

O sistema ortogonal de coordenadas XôOôYô pode ser considerado como o traslado do sistema XOY em que Oô faz-se coincidir com O. Considere um ponto P do plano Ŭ. Sendo visto sob cada referencial ele possui coordenadas diferentes. Vejamos: para o sistema ortogonal XOY terá como coordenadas (x,y) e para XôOôYô será (xô,yô). como Oô possui coordenadas (a,b) em relação ao referencial XOY segue as equações:

$$x = a + x'$$

$$y = b + y' \text{, daí}:$$

$$(\mathrm{I})\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases}$$

As equações em (I) vão nos possibilitar fazer as mudanças de coordenada do ponto *P* do referencial de XOY para XôOôYô e vice-versa.

No exemplo podemos observar que a parábola no sistema ortogonal de coordenada XôOôYô possui a equação:

$Y_1 = \dfrac{1}{20} X_1^2$, e que em nada fica alterado os seus elementos.

Exemplo:

Usando uma translação conveniente, elimine os termos do primeiro grau da equação da elipse $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$ e dê o centro e os vértices.

Solução:

O método usado é a completação de quadrados para a equação: $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$.

Agrupando os termos segundo a mesma variável temos:

$$4\left(x^2-2x\right)+9\left(y^2-4y\right)+4=0\text{, daí:}$$

$$4\left(x^2-2x+1\right)-4+9\left(y^2-4y+4\right)-36+4=0$$

$$4\left(x-1\right)^2+9\left(y-2\right)^2=36\text{, ou ainda:}$$

$$\frac{\left(x-1\right)^2}{9}+\frac{\left(y-2\right)^2}{4}=1$$

Desta feita em comparação com a equação:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

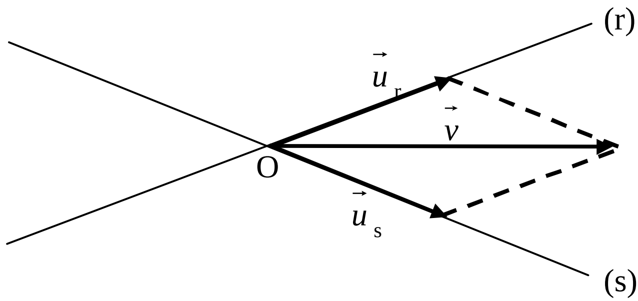
temos que: $a^2=9$ e $b^2=4$ ou seja $a=\pm 3$ e $b=\pm 2$. Por outro lado fazendo a mudança de variável tomando $x_1=x-1$ e $y_1=y-2$ teremos: $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1.$

$$A_1=\left(4,2\right), A_2=\left(-2,2\right), B_1=\left(1,4\right), B_2=\left(1,0\right).$$

4. ESPAÇO

Introdução

O plano como um termo indefinido da geometria está bem determinado por duas retas concorrentes não coincidentes. Tomando em cada reta seu vetor diretor constituímos uma base; o que nos leva a afirmar que todo e qualquer vetor do plano é descrito como uma combinação linear destes vetores. Mas claramente, sendo $\overrightarrow{u_r}$ e $\overrightarrow{v_s}$ os diretores das reta (*r*) e (*s*) que determinam o plano (α), segue-se que para qualquer vetor $\vec{v}$ do plano existem $x, y \in \Re$ onde $\vec{v} = x\overrightarrow{u_r} + x\overrightarrow{yv_s}$; conforme ilustra a figura 3.0.a.



(Fig 3.0.a)

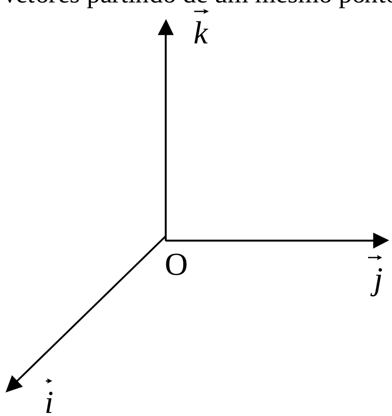
Em virtude do conjunto $\left\{\vec{u}_r, \vec{u}_s\right\}$ reproduzir todo e qualquer vetor do plano, dizemos que o plano é de dimensão 2 ou bi-dimensional.

Para o espaço, todo conjunto de três vetores, não coplanares e não múltiplas dois a dois. $\left\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\right\}$ é uma base, e de forma análoga mostra-se que todo vetor $\vec{v}$ no espaço é uma combinação linear destes vetores, ou seja $\exists x, y, z \in \Re$ tal que $\vec{v} = x\overrightarrow{u_1} + y\overrightarrow{u_2} + z\overrightarrow{u_3}$.

Sistema de Coordenadas

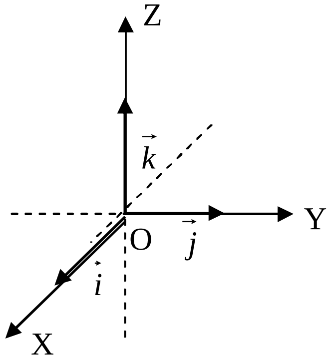
Considere o conjunto de vetores $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$ onde são não coplanares, perpendiculares dois a dois e de norma 1. Tal conjunto será denominado de base ortonormal do espaço.

Situemos estes vetores partindo de um mesmo ponto O. (Fig. 3.1.a)



(Fig. 3.1.a)

Tracemos três retas concorrentes em O e com direções respectivas de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. A reta com direção $\vec{i}$ representada por OX (eixo das abcissas); com direção $\vec{j}$ por OU (eixo das ordenadas) e com direção $\vec{k}$ representaremos por OZ (eixo das cotas).



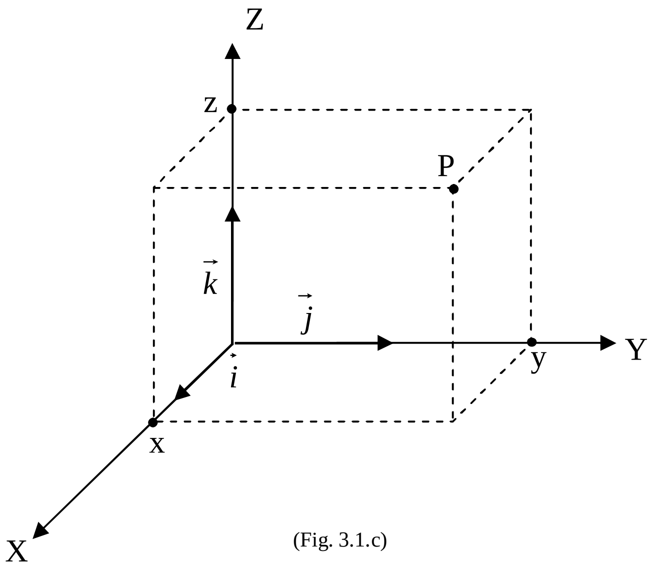
(Fig. 3.1.b)

Em virtude de dois vetores não colineares determinar um plano, podemos verificar de acordo com a (Fig. 3.1.b) que o espaço fica dividido em oito octantes; 04 acima do plano XY e 04 abaixo. Como exemplo, temos como 1º octante tomado pelos planos determinados pelos planos XY, YZ e XZ.

A cada ponto do espaço se faz corresponde a uma terna (*x*,*y*,*z*) com $x, y, z \in \Re$ e a cada terna (*x*,*y*,*z*) faz-se corresponder um ponto do espaço. A isso dizemos que existe uma correspondência biunívoca entre os pontos do espaço e o conjunto de ternas (*x*,*y*,*z*) com $x, y, z \in \Re$. Desta feita representaremos o espaço pelo conjunto.

$$\mathrm{E} = \{(x, y, z) / \, x, y, z \in \Re\},$$

e cada ponto do espaço por $P = (x, y, z)$ onde serão chamado de coordenadas cartesianas de *P*. Conforme nos mostra a Fig. 3.1.c o ponto *P* será sempre o vértice de um paralelepípedo.



(Fig. 3.1.c)

Como mostra a figura 3.1.c podemos concluir que:

O ponto $P = (x, y, z)$ encontra-se:

(i) no eixo OX se $y = z = 0$

(ii) no eixo OY se $x = z = 0$

(iii) no eixo OZ se $y = x = 0$

(iv) na origem se $x = y = z = 0$

(v) no plano XY se $z = 0$

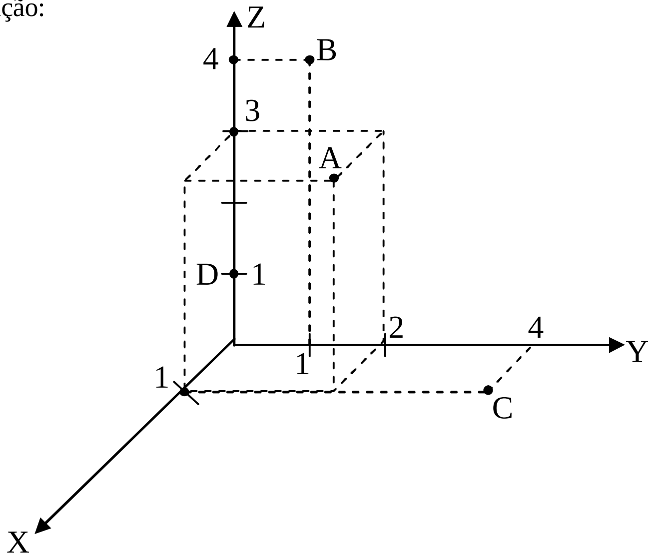
(vi) no plano YZ se $x = 0$

(vii) no plano XZ se $y = 0$

Exemplo:

Represente os pontos, A, B, C e D do espaço no sistema de eixos coordenados ortogonais, sendo A= (1,2,3), B= (0,1,4), C= (1,4,0), D= (0,0,1).

Solução:



Vetores no espaço

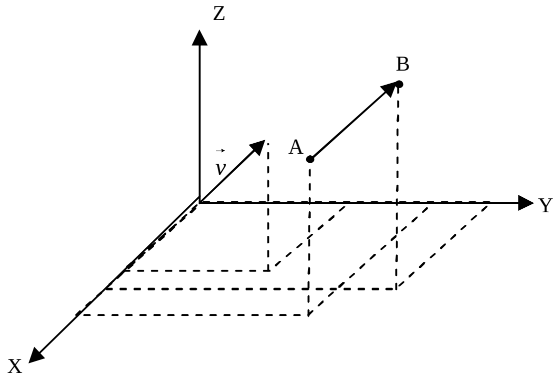
Definimos como um vetor no espaço a todo vetor cuja origem coincide com a origem do sistema cartesiano. De forma análoga ao plano, todo ponto P=(x,y,z) do espaço e a origem O definirá um vetor no espaço ou ainda como existe uma correspondência biunívoca entre os pontos do espaço e as ternas (x,y,z), como $x, y, z \in \Re$, não configura dualidade ao representar por um vetor no espaço a uma terna (x,y,z). Assim $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$.

Mas $\overrightarrow{OP} = P - O = (x, y, z) - (0,0,0)$ ou seja, $\vec{v} = (x, y, z)$ será doravante denotado como um vetor no espaço. Sendo $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ uma base ortogonal do espaço poderemos ainda escrever $\vec{v}$ como sendo:

$$\vec{v} = (x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \text{sendo}$$
$$\vec{i} = (1,0,0),\ \vec{j} = (0,1,0) \text{ e } \vec{k} = (0,0,1)$$

Dados dois pontos do espaço $A=(a,b,c)$ e $B=(a_1,b_1,c_1)$, definimos o vetor $\overrightarrow{AB}$ como sendo: $\overrightarrow{AB} = B - A$. De forma análoga ao estudo no plano teremos ainda:

$\overrightarrow{AB} = (a_1 - a, b_1 - b, c_1 - c)$ conforme mostra a figura 3.2.a.



(Fig 3.2.a)

Sendo $\overrightarrow{AB}$ um segmento orientado, existe um segmento orientado que lhe é eqüipolente partindo da origem. Daí a cada par de pontos que dá origem a um vetor existe um vetor no espaço o qual lhe representa (fig. 3.2.a). Este vetor tendo as mesmas características será o vetor:

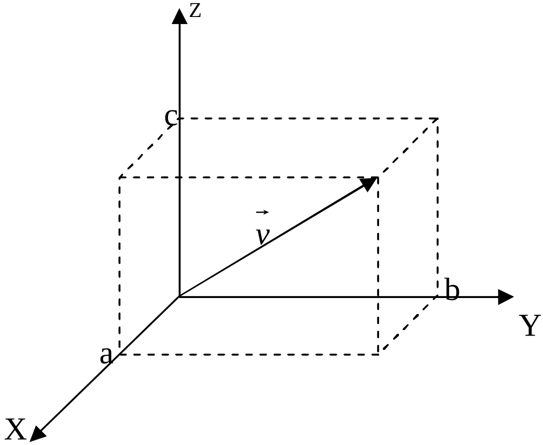
$$\vec{v} = (a_1 - a, b_1 - b, c_1 - c)$$

Módulos

Seja $\vec{v} = (a, b, c)$ um vetor no espaço. Definimos como $\|\vec{v}\|$, a norma de $\vec{v}$, ao número:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Observe que a norma de $\vec{v}$ é igual ao comprimento do segmento orientado que o representa (fig. 3.2.b).



(Fig 3.2.b)

Operações com vetores

Sejam $\vec{u} = (x, y, z)$, $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$ vetores no espaço e $k \in \Re$. Como foi visto com vetores no plano estenderemos ao espaço as mesmas definições.

I) Adição e Subtração

$$\vec{u} + \vec{v} = (x + x_1, y + y_1, z + z_1)$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$$

II) Multiplicação de um escalar por um vetor

$$k\vec{u} = (kx, ky, kz)$$

Salientamos que as propriedades relativas as estas operações, como também a representação gráfica são as mesmas para vetores no espaço.

Exemplo:

Sendo $\vec{u} = (1,2,2)$ e $\vec{v} = (2,3,4)$ e $k = 2$; determine os vetores $\vec{u} + \vec{v}$ e $k \cdot \vec{u}$, $\vec{u} - \vec{v}$.

Solução:

$$\vec{u} + \vec{v} = (1,2,2) + (2,3,4) = (3,5,6)$$

$$2 \cdot \vec{u} = 2 \cdot (1,2,2) = (2,4,4)$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (1,2,2) - (2,3,4) = (-1,-1,-2)$$

Produto escalar

Sejam $\vec{u}=(x,y,z)$ e $\vec{v}=(x_1,y_1,z_1)$ vetores do plano, denote por $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ou $<\vec{u}, \vec{v}>$ ou $(\vec{u}, \vec{v})$ ao produto escalar dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Definição:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x \cdot x_1 + y \cdot y_1 + z \cdot z_1$$

Esta definição é também conhecida como produto escalar canônico dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Deixamos ao leitor verificar que todas as propriedades para esta operação no capítulo 1 também são verdadeiras para o espaço.

Exemplo:

1. Calcule o produto escalar dos vetores sendo $\vec{u} = (2,1,0)$ e $\vec{v} = (-1,3,4)$.

   a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$

   b) $\vec{u} \cdot (\vec{u} - \vec{v})$

   c) $(3\vec{u}) \cdot \vec{v}$

   Solução:

   a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2,1,0) \cdot (-1,3,4) = 2(-1) + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 4$ ou seja $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$

   b) $\vec{u} \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = (2,1,0) \cdot ((2,1,0) - (-1,3,4)) =$
   $(2,1,0) \cdot (3,-2,-4) = 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot (-4)$

   ou ainda:

   $\vec{u}(\vec{u} - \vec{v}) = 3$

   c) $(3\vec{u}) \cdot \vec{v} = (3(2,1,0)) \cdot (-1,3,4) = (6,3,0) \cdot (-1,3,4) =$
   $6 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 + 0 \cdot 4$

   logo, $(3\vec{u}) \cdot \vec{v} = 3$

2. Determine o valor de $a \in \Re$ para que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, sendo $\vec{u} = (a, a-2, 1)$ e $\vec{v} = (1, 4, 2)$.

Solução:

Por definição da operação temos $\vec{u} \cdot \vec{v} = a \cdot 1 + (a-2) \cdot 4 + 1 \cdot 2$ e como $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ tem-se:

$$5a - 6 = 0 \quad \text{ou} \quad a = \frac{6}{5}$$

3. Mostre que sendo $\vec{u} = (a, b, c)$, então $\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{\vec{\mu} \cdot \vec{u}}$.

Solução:

Por definição $\vec{\mu} \cdot \vec{\mu} = (a, b, c) \cdot (a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2$,

e como $\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ temos que: $\vec{\mu} \cdot \vec{u} = \left\|\vec{u}\right\|^2$, ou seja

$\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{\vec{\mu} \cdot \vec{u}}$

Produto Vetorial

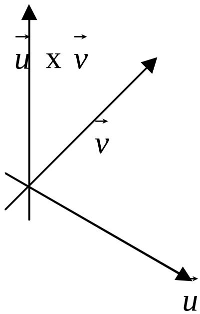
Definimos uma nova operação no conjunto de vetores no espaço, tal que a cada par de vetores $(\vec{u}, \vec{v})$ do espaço esta associado um vetor do espaço, indicado por $\vec{u}$ X $\vec{v}$, que satisfaz as seguintes propriedades:

i) $\left\|\vec{u} \times \vec{v}\right\| = \left\|\vec{u}\right\| \cdot \left\|\vec{v}\right\| \cdot \operatorname{sen}(\vec{u}, \vec{v})$

ii) $\vec{u} \times \vec{v}$ é perpendicular simultaneamente a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$.

iii) O terno $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}\right)$ é positivo (veja figura 3.2.4.a)

a)



Conseqüências da definição:

a) $\vec{u}$ x $\vec{u}$ =0

Sendo $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$ base ortogonal para o espaço é fácil de comprovar que:

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \quad \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$

Propriedades:

Sendo $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ vetores no espaço e $k \in \Re$, então vale:

(I) Não comutativo:

$$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$$

(II) Não associativo:

$$\vec{u} \times \left(\vec{v} \times \vec{w}\right) \neq \left(\vec{u} \times \vec{v}\right) \times \vec{w}$$

(III) Distributiva:

$$\vec{u} \times \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$$

$$\left(\vec{u} + \vec{v}\right) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$$

(IV) $\left(k\vec{u}\right) \times \vec{w} = k\left(\vec{u} \times \vec{w}\right) = \vec{u} \times \left(k\vec{w}\right)$

Considere agora $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$ uma base ortogonal $\vec{u} = \left(x, y, z\right)$ e $\vec{v} = \left(x_1, y_1, z_1\right)$ dois vetores do espaço. Com uso da propriedade (III) do produto vetorial vamos encontrar as coordenadas de $\vec{u} \times \vec{v}$.

Como $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ e $\vec{v} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ temos que:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) \times \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right)$$

$$= \left(x\vec{i}\right) \times \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right) + \left(y\vec{j}\right) \times \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right) + \left(z\vec{k}\right) \times \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right) =$$

$$= \left(x\vec{i}\right) \times \left(x_1\vec{i}\right) + \left(x\vec{i}\right) \times \left(y_1\vec{j}\right) + \left(x\vec{i}\right) \times \left(z_1\vec{k}\right) + \left(y\vec{j}\right) \times \left(x_1\vec{i}\right) + \left(y\vec{j}\right) \times \left(y_1\vec{j}\right) + \left(y\vec{j}\right) \times \left(z_1\vec{k}\right) +$$
$$\left(z\vec{k}\right) \times \left(x_1\vec{i}\right) + \left(z\vec{k}\right) \times \left(y_1\vec{j}\right) + \left(z\vec{k}\right) \times \left(z_1\vec{k}\right)$$

E como $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$ é uma base ortogonal temos que:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k},\ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i},\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j},\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k},\ \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$$

Assim:

$$\vec{u}\times\vec{v}=(xy_1)\vec{k}-(xz_1)\vec{j}-(yx_1)\vec{k}+yz_1\vec{i}+zx_1\vec{j}-zx_1\vec{i}=$$

$$=(yz_1-zy_1)\vec{i}+(zx_1-xz_1)j+(xy_1-yx_1)\vec{k}$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=(yz_1-zy_1,zx_1-xz_1,xy_1-yx_1)$$

Observando cuidadosamente a expressão:

$$(yz_1-zy_1)\vec{i}+(zx_1-xz_1)\vec{j}+(xy_1-yx_1)\vec{k}\quad,$$

podemos concluir sem muito esforço que trata-se do determinante

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}, \text{ daí}$$

podemos definir o produto vetorial como sendo:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}$$

Com base nas propriedades do determinante vê-se facilmente a comprovação das propriedades da operação produto vetorial.

Exemplo:

1. Calcule o produto vetorial dos vetores $\vec{u}$ =(2,1,3) e $\vec{v}$ =(4,-1,0).

   Solução:

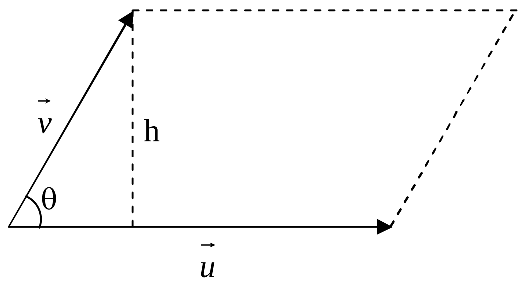
$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(0\vec{i} + 12\vec{j} - 2k) - (4\vec{k} + 0\vec{j} - 3\vec{i})$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = 12\vec{j} - 2\vec{k} - 4\vec{k} + 3\vec{i} = (3,12,-6)$$

2. Calcule a área do paralelogramo definido pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$

Solução:



Como facilitador de compreensão seja a figura acima. A altura h do paralelogramo é dada por:

$$h = \left\|\vec{v}\right\| \cdot \operatorname{sen}\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$$

e como:

área = base . altura

temos que:

área = $\left\|\vec{u}\right\| \cdot \left\|\vec{v}\right\| \cdot \operatorname{sen}\theta$.

Por outro lado:

$$\left\|\vec{u} \times \vec{v}\right\| = \left\|\vec{u}\right\| \cdot \left\|\vec{v}\right\| \cdot \operatorname{sen}\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$$

Logo:

$$A_{\square} = \left\|\vec{u} \times \vec{v}\right\|$$

3. Determine a área do triangulo que tem com dois de seus lados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

   Solução:

   Sendo a área do triangulo é a metade da área do paralelogramo, podemos afirmar que:

$$\text{Área}_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot \left\|\vec{u} \times \vec{v}\right\|$$

Produto misto

Combinando o produto interno e o produto vetorial poderemos definir o produto misto. A cada terno de vetores $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$ do espaço podemos associar a um número real dado por $\left(\vec{u} \times \vec{v}\right) \cdot \vec{w}$.

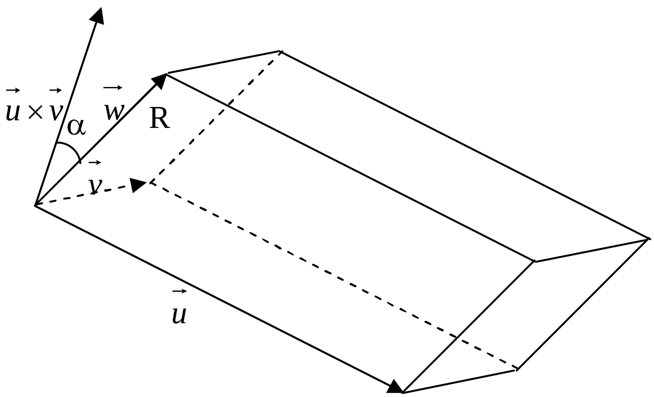
Definição:

Seja $\vec{u} = (a, b, c)$, $\vec{v} = (a_1, b_1, c_1)$, e $\vec{w} = (a_2, b_2, c_2)$ vetores no espaço. Definimos o produto misto:

$$\left(\vec{u} \times \vec{v}\right) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

<u>Interpretação Geométrica.</u>

Considere a figura 3.2.5.a



(Fig 3.2.5.a)

Pela geometria espacial temos que o volume de um paralelepípedo é igual ao produto da altura pela área de base. Conforme mostrado anteriormente temos que:

$$\left(\vec{u} \times \vec{v}\right) \cdot \vec{w} = \left\|\vec{u} \times \vec{v}\right\| \cdot \left\|\vec{w}\right\| \cdot \cos\left(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w}\right)$$

O termo $\left\|\vec{w}\right\| \cdot \cos\left(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w}\right)$ é igual a altura do paralelepípedo e como $\left\|\vec{u} \times \vec{v}\right\|$ é a área do paralelogramo (base) temos que:

$$Vol = \left| \left(\vec{u} \times \vec{v} \right) \cdot \vec{w} \right| \quad (I)$$

Exemplo:

Calcule o volume do paralelepípedo definido pelos vetores $\vec{u} = (1,0,4)$, $\vec{v} = (0,1,5)$, $\vec{w} = (-1,0,0)$.

Solução:

Usando o resultado (I) teremos:

$$v = \left| \left(\vec{u} \times \vec{v} \right) \cdot \vec{w} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$v = \left| (0+0+0) - (-4+0+0) \right| = |4| = 4$$

Exercícios:

- 1. Represente os pontos no sistema coordenados de eixos ortogonais.

  a) A = (1,0,3)

  b) B = (1,1,2)

  c) C = (2,-3,4)

  d) D = (0,0,3)

- 2. Represente no sistema coordenado de eixos ortogonais os vetores:

  a) $\overrightarrow{AB}$ sendo A = (1,5,4) e B = (3,1,2)

  b) $\vec{v}$ = (1,3,5)

- 3. Determine o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sendo:

a) $\vec{u}$ = (1,0,1) e $\vec{v}$ = (1,2,1)

b) $\vec{u}$ = (2,1,0) e $\vec{v}$ = (0,1,-1)

Resp.: a) $\alpha = arc.\text{sen}\ {}^{2}\!/\!_{\sqrt{6}}$ b) $\alpha = arc.\text{sen}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$

- 4. Calcule a norma dos vetores:

a) $\overrightarrow{AB}$ sendo A = (2,1,0) e B = (5,1,-1)

b) $\vec{v}$ = (2,1,0)

Resp.: a) $\sqrt{10}$ b) $\sqrt{5}$

- 5. Sendo $\vec{u}$ = (2,1,0), $\vec{v}$ = (3,-1,4) e $\vec{w}$ = (0,1,-1) calcule o produto vetorial:

a) $\vec{u} \times \vec{u}$

b) $\vec{u} \times \left(\vec{v} - \vec{w}\right)$

c) $\left(\vec{u} - \vec{w}\right) \times \left(\vec{v} + \vec{w}\right)$

Resp.: a) $\vec{0}$ b) $(5,-10,-7)$ c) $(0,-3,0)$

- 6. Determine a área do paralelogramo de lados formado pelos vetores $\vec{u}$ = (-1,3,4) e $\vec{v}$ = (3,1,0).

Resp.: $\sqrt{260}$

- 7. Determine a área do triângulo *ABC* sendo que *A* = (1,2,0), *B* = (-1,-3,2) e *C* = (1,0,4).

Resp.: a) $\sqrt{\frac{336}{2}}$

- 8. Calcule o volume do paralelepípedo que tem um vértice no ponto *A* = (1,2,1) e os três vértices adjacentes nos pontos *B* = (1,3,2), *C* = (4,1,3) e *D* = (2,1,6).

  Resp.: 15

- 09. Calcule os seguintes produtos vetoriais:

  a) $\left(2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}\right) \times \left(\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}\right)$

  b) $\left(-\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right) \times \left(3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}\right)$

  Resp.: a) $9\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ b) $\vec{j} + \vec{k}$

- 10. Determine um vetor $\vec{u}$ que seja simultaneamente perpendicular aos vetores $\vec{v}$ = (1,-1,0) e $\vec{w}$ = (0,-1,5).

  Resp.: $\overrightarrow{w_0} = \left(-5,-5,-1\right)$

- 11. Complete o enunciado das seguintes proposições:

  a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ se e somente se $\vec{u}$.........................$\vec{v}$

  b) $\vec{u} \times \vec{v} = 0$ se e somente se $\vec{u}$............................$\vec{v}$

  c) $\left(\vec{u} \times \vec{v}\right) \cdot \vec{w} = 0$ se e somente se $\vec{u} \times \vec{v}$...............$\vec{v}$

- 12. Sejam $\vec{u}$ = (1,0,1) e $\vec{v}$ = (0,1,1). Calcule $\vec{w}$ perpendicular a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e tal que $\left\|\vec{w}\right\| = 3$.

  Resp.: $\left(-\sqrt{3},-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$ ou $\left(+\sqrt{3},+\sqrt{3},-\sqrt{3}\right)$

- 13. Mostre que $\vec{u}\cdot\left(\vec{v}\times\vec{w}\right) = -\vec{u}\cdot\left(\vec{w}\times\vec{v}\right)$

- 14. Se $A = \left(x_1, y_1, z_1\right)$ e $B = \left(x_2, y_2, z_2\right)$ são pontos do espaço, e $d\left(A, B\right)$ a distancia do ponto *A* ao ponto *B*, então:

  $$d\left(A, B\right) = \sqrt{\left(x_1 - x_2\right)^2 + \left(y_1 - y_2\right)^2 + \left(z_1 - z_2\right)^2}$$

  (Sugestão: calcule $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$)

- 15. Determine vetores $\vec{v}$ do espaço ortogonal ao vetor $\vec{u} = (1,0,-1)$.

  Resp.: $\vec{v} = \left(a, b, a\right) \quad / \, a, b \in \Re$

- 16. Considere $\vec{u} = \left(2,-1,4\right)$ e $\vec{v} = \left(-1,1,0\right)$ vetores do espaço.

  a) Determine o vetor unitário simultaneamente ortogonal aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

- 17. Sendo $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$ e $\vec{k} = (0,0,1)$ vetores da base canônica do espaço, mostre que:

  a) $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ b) $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$

  c) $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$

  d) $\vec{k} \times \vec{k} = 0$

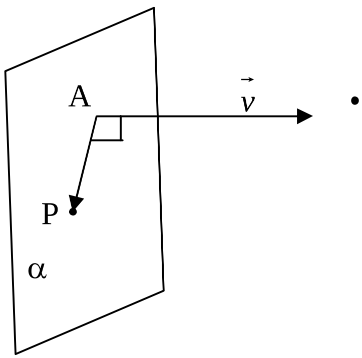
- 18. Sendo $\vec{u} = (2,-1,3)$ e $\vec{w} = (-1,2,0)$ vetores do espaço, determine um vetor do espaço $\vec{v}$ tal que $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}$.

  Resp.: $\vec{v} = (0,0,+1)$

5. RETAS E PLANOS:

Plano

Dado um ponto A e um vetor no espaço $\vec{v}$, existe um único plano que contem A e é perpendicular a $\vec{v} = (a, b, c)$ no espaço.



Qualquer ponto $P = (x, y, z)$ do plano satisfaz a equação vetorial:

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{(I)}$$

E ainda:

$$(P - A) \cdot \vec{v} = 0$$

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) = 0$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (1)$$

$$\text{onde } d = -ax_0 - by_0 - cz_0$$

A equação (1) é chamada de equação cartesiana do plano e o vetor $\vec{u}$ =(a,b,c) é chamado de vetor diretor do plano. Observemos que essa equação é linear, isto é, envolve apenas termos do primeiro grau em x, y e z.

Exemplo:

- 1. Determine a equação do plano (α) que contem os pontos A=(1,2,1), B=(0,1,1) e C=(0,1,0).

Solução:

Seja P = (x, y, z) um ponto do plano (α). Desta feita os vetores $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ por pertencerem ao mesmo plano (α) são vetores linearmente dependentes e por conseguinte:

$$\left(\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}\right) \cdot \overrightarrow{AC} = 0,$$ ou ainda:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 0-1 & 1-2 & 1-1 \\ 0-1 & 1-2 & 0-1 \end{vmatrix} = 0,$$ ou

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$ que pode ser escrita como:

$$x - y + 0 \cdot z + 1 = 0$$

- 2. Determine a equação cartesiana de um plano (β) que contém o ponto A = (2,1,0) e é perpendicular ao vetor $\vec{u} = (1,-1,3)$.

Solução:

Como $\vec{u}$ é perpendicular ao plano (β), assim todo e qualquer vetor em (β) é perpendicular a $\vec{u}$. Seja $P \in (\beta)$; $P = (x, y, z)$. O vetor $\overrightarrow{AP}$ é perpendicular a $\vec{u}$, logo:

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{u} = 0$$

ou ainda:

$$(P - A) \cdot \vec{u} = 0$$
$$(x - 2, y - (+1), z - 0) \cdot (1, -1, 3) = 0$$

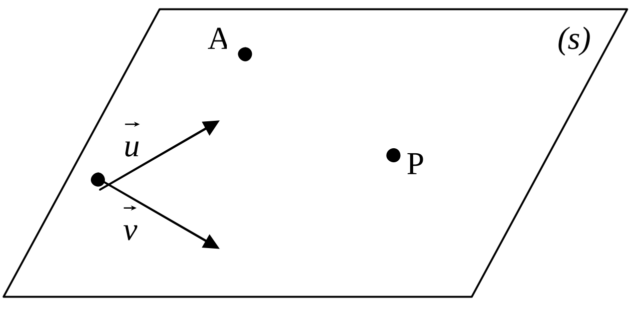
que pode ainda ser escrita:

$$x - y + 3z - 1 = 0$$

- 3. Determinar a equação do plano (s) que passa pelo ponto A(1,2,1) e é paralelo aos vetores $\vec{u}$ = (2,1,1) e $\vec{v}$ = (1,1,-2).

Solução:

Inicialmente observamos que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são colineares, logo linearmente independentes. Desta feita existirá um só plano (s) que contenha o ponto A e seja paralelos aos vetores.



Seja $P = (x,y,z)$ um ponto de β , então $\left(\overrightarrow{AP} \times \vec{u}\right) \cdot \vec{v} = 0$, ou ainda,

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

que pode ainda ser escrito:

$$-3x + 5y + z - 8 = 0$$

• 4. Determine a intersecção entre os planos $(\alpha): 2x - y + z - 1 = 0$ e $(\beta): x - y + 2z + 3 = 0$.

Solução:

O nosso problema consiste em determinarmos o conjunto de pontos do espaço que satisfaz simultaneamente as equações dos planos (α) e (β) . Para isto nos restringimos a resolver o sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0(I) \\ x - y + 2z + 3 = 0(II) \end{cases}$$

Usando o método da substituição isolamos em (I) a variável $y = 2x + z - 1$, e substituindo em II.

$x - (2x + z - 1) + 2z + 3 = 0$, ou ainda:

$-x + z + 4 = 0$; donde isolando z temos:

$z = x - 4$

Calculando y:

$$y = 2x + x - 4 - 1$$
$$y = 3x - 5$$

Assim a intersecção será a reta dado pelo conjunto de pontos:

$(r) = \{(x, 3x - 5, x - 4) / x \in R\}$

• 5. Encontrar o ponto de intersecção do plano $x + y + z - 3 = 0$ com os eixos 0x, 0y e 0z.

Solução:

Seja $P, Q, M \in (\alpha)$

(i) Um ponto $P \in \overrightarrow{0X} \Leftrightarrow P = (a,0,0)$ logo: $a + 0 + 0 - 3 = 0 \therefore a = 3$ ou seja $P = (3,0,0)$

(ii) De forma análoga, $Q \in \overrightarrow{0Y} \Leftrightarrow Q = (0,b,0)$, ou ainda: $0 + b + 0 - 3 = 0 \therefore b = 3$ ou seja $Q = (0,3,0)$

(iii) Finalmente $M \in \overrightarrow{0Z} \Leftrightarrow M = (0,0,c)$, ou seja $0 + 0 + c - 3 = 0$, donde $c = +3$.

Assim M=(0,0,+3). (confira figura 4.1.a)

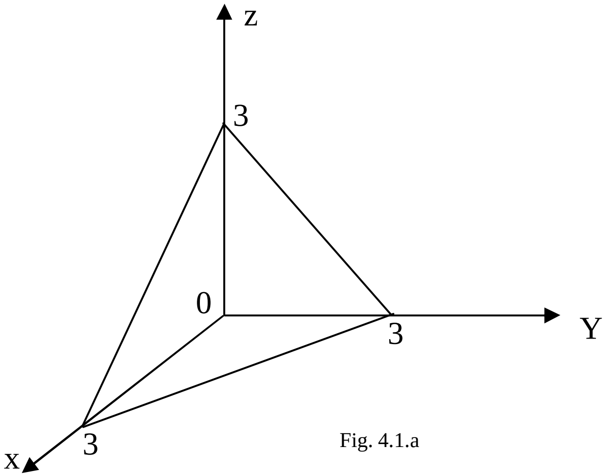


Fig. 4.1.a

Exercícios:

- 1. Determine a distância entre os pontos:

  a) *A*=(2,1,0) e *B*=(-1,3,5)

  b) M=(-1,3,5) e N=(2,-4,-5)

  Resp.: a) $\sqrt{38}$ b) $\sqrt{158}$

- 2. Encontre a equação do plano (α) que passa pelos pontos:

  a) *A*=(2,1,0), *B*=(1,1,1) e *C*=(-1,2,5)

  b) *A*=(3,-1,4), *B*=(0,1,0) e *C*=(2,-1,3)

  Resp.: a) $-x+2y-z=0$ b) $-2x+y+2z-1=0$

- 3. Determine a equação do plano que é perpendicular ao vetor $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$ e passa pelo ponto *A*=(1,-2,0).

  Resp.: $2x-3y+4z-8=0$

- 4. Encontre a equação do plano (α) que passa pelo ponto L=(1,-1,0) e é paralelo aos vetores $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$.

  Resp.: $-2x - y + z + 1 = 0$

- 5. Determinar a equação do plano (α) paralelo ao plano (β) de equação $2x - 3y + z = 2$ e passa pelo ponto $A = (1,1,1)$.

  Resp.: $2x - 3y + z = 0$

- 6. Determinar um vetor unitário, normal ao plano que passa pelos pontos *A*=(1,-1,0), *B*=(2,-1,3) e *C*=(0,0,1).

  Resp.: $\vec{u} = \left(3/\sqrt{26}, 4/\sqrt{26}, -1/\sqrt{26} \right)$

- 7. Encontre os pontos de intersecção do plano (α) de equação cartesiana $3x - y + 2z - 1 = 0$ com os eixos coordenados 0x, 0y e 0z.

  Resp.: $\left(1/3, 0, 0\right), (0, -1, 0), \left(0, 0, 1/2\right)$

- 8. Ache a equação do plano (α) que passa pelo ponto *A*=(2,1,1) e é paralelo ao plano (β) de equação cartesiana $2x - y + z + 4 = 0$.

  Resp.: $2x - y + z - 4 = 0$

- 9. Determine os valores de m e $n \in \Re$ para que o ponto *A*=(*m*-1,*n*,*m*-*n*) pertença simultaneamente aos planos (α) e

(β) de equações cartesianas $x+y-z+3=0$ e $2x-y+4z+1=0$.

Resp.: $n=-1$ e $m=-2/3$

- 10. Usando a fórmula da distância entre dois pontos, mostre que a equação da esfera de centro *C*=(a,b,c) e raio R é dada por: $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z ï c)^2 = R^2$, com *P*=(x,y,z) um ponto qualquer da esfera.
- 11. Encontre a equação da esfera de:

a) centro *A*=(2,1,0) e raio 5

b) centro *C*=(1,-1,2) e raio 3

Resp.: a) $(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=25$

b) $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$

Retas

Sejam $A=(x_1,y_1,z_1)$ e $B=(x_2,y_2,z_2)$ dois pontos do espaço não coincidentes. Então existe uma única reta que passa por estes pontos simultaneamente. Um ponto *P*=(x,y,z) pertence a esta reta se e somente se os vetores $\vec{AP}$ e $\vec{AB}$ são colineares, logo existe $\lambda \in \Re$ tal que: $\vec{A}\vec{P}=\lambda.A\vec{B}$.(1)

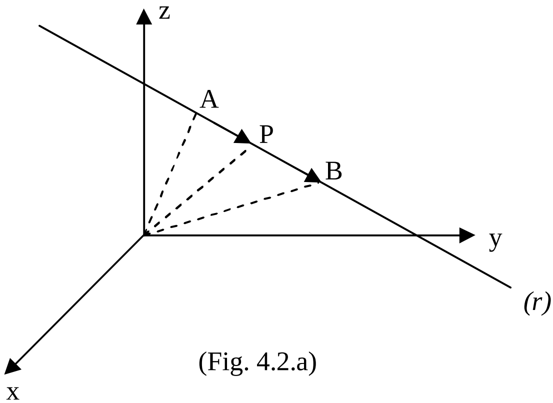
Em termos de coordenadas, temos:

$$(x - x_1, y - y_1, z - z_1) = \lambda\,(x_2 ï x_1, y_2 ï y_1, z_2 ï z_1)$$

que é equivalente a:

$$\begin{cases} x - x_1 = \lambda(x_2 - x_1) \\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y_1) \\ z - z_1 = \lambda(z_2 - z_1) \end{cases} \qquad (2)$$

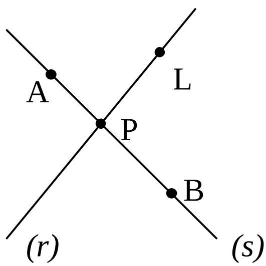
chamada de equações paramétricas da reta (r) que passa por A na direção de $\vec{AB}$. O vetor $\vec{AB}$ é chamado de vetor diretor da reta.



(Fig. 4.2.a)

Observe que para cada $\lambda \in \Re$ em (2) temos um ponto da reta (r); e reciprocamente a cada ponto P da reta (r) existe um escalar $\lambda \in \Re$.

Sendo a reta (r) não paralela a nenhum dos planos *XY*, *YZ* ou *XZ*, em outras palavras $z_1 \neq z_2$, $x_2 \neq x_1$, $y_2 \neq y_1$, podemos também eliminar λ em (2) e escrevermos sua forma simétrica:



$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

(3) que é conhecida como equação cartesiana da reta (r).

Exemplo:

1. Determinar a equação da reta que passa pelos pontos A=(1,2,3) e B=(4,5,-1).

   Solução:

   Como $\vec{AB}$ não é paralelo a nenhum dos planos XY, YZ e XZ temos que:

$$\frac{x-1}{4-1}=\frac{y-2}{5-2}=\frac{z-3}{-1-3}$$ ou seja:

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{-4}$$

2. Encontre um vetor diretor da reta que passa pelos pontos A=(-1,0,3) e B=(0,-4,2).

   Solução:

   Como o vetor diretor é o vetor que dá a direção da reta e como A e B são pontos da reta, assim temos:

$$\vec{u}=\vec{AB}=B-A=(0,-4,2)-(-1,0,3)$$
$$\vec{u}=(1,-4,-1)$$

3. Determine as equações paramétricas da reta (r) que passa pelos por L=(-2,1,0) e é perpendicular a reta (s) que passa pelos pontos B=(-1,1,5) e A=(2,-1,3)

   Solução:

   Vamos primeiro determinar um vetor diretor para a reta (s), ou seja:

$$\vec{u}=\vec{AB}=B-A=(-1,1,5)-(2,-1,3)$$

   daí $\vec{u}=(-3,2,2)$.

Em face do problema possuir solução única, devemos encontrar $P \in (s)$ no qual $\vec{PL} \perp \vec{AB}$. Para tanto calculemos as equações paramétricas da reta (s)

Se $P \in (s)$ então $\vec{AP} = \lambda \vec{AB}$, ou equivalentemente:

$P - A = \lambda \vec{AB}$, ou ainda

$$(x-2, y+1, z-3) = \lambda(-3,2,2)$$

O que nos leva a:

$$\begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$$

Desta feita $P = (2-3\lambda, -1+2\lambda, 3+2\lambda)$ é ponto de (s) para todo $\lambda \in \Re$.

Impondo a condição do problema temos que:

$< \vec{PL}, \vec{AB} >= 0$, ou ainda:

$$0 =< (-2-(2-3\lambda), 1-(-1+2\lambda), 0-(3+2\lambda)), (-3,2,2) >$$

$$< (-4+3\lambda, 2-2\lambda, -3-2\lambda), (-3,2,2) >= 0$$

onde:

$$-3(-4+3\lambda) + 2(2-2\lambda) + 2(-3-2\lambda) = 0$$

$$12 - 9\lambda + 4 - 4\lambda - 6 - 4\lambda = 0$$

$$10 - 17\lambda = 0$$

Assim: $\lambda = \dfrac{10}{17}$

Substituindo λ em P temos:

$$P = \left(\frac{4}{17}, \frac{3}{17}, \frac{71}{17} \right)$$

Calculemos agora as equações da reta (*r*) que passa por *P* e *L*.

Seja $X = (x, y, z) \in (r)$, então $\vec{PX} = t.\vec{PL}$ ou em forma equivalente:

$$\left(x - \frac{4}{17}, y - \frac{3}{17}, z - \frac{71}{17} \right) = t.\left(-2 - \frac{4}{17}, 1 - \frac{3}{17}, 0 - \frac{71}{17} \right)$$

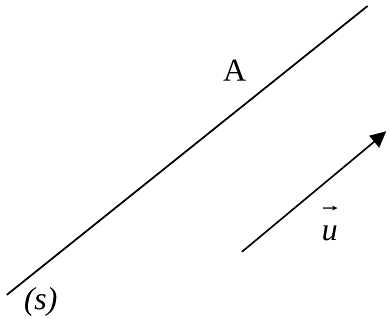
que pode ainda ser escrito:

$$\begin{cases} x = \frac{4}{17} - \frac{38}{17}t \\ y = \frac{3}{17} + \frac{14}{17}t \\ z = \frac{71}{17} - \frac{71}{17}t \end{cases}$$ que são as equações paramétricas de (*r*).

4. Determine a equação cartesiana da reta (*s*) que passa pelo ponto *A*=(2,3-1) e é paralela ao vetor $\vec{\mu} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

Solução:

Observe na gravura a solução geométrica do problema.



Seja $\vec{\mu}_s$ um vetor diretor da reta (s). Como sendo $(s) // \vec{\mu} \Rightarrow \vec{\mu}_s = t.\vec{u}$. Fazendo t=1, como poderia ser outro valor $\neq 0$, temos que $\vec{\mu}_s = \vec{u}$.

A equação vetorial da reta (s) será;

$P = A + \lambda\vec{u}$, com $P=(x,y,z)$ um ponto qualquer da reta (s). Substituindo os dados nesta equação encontramos as equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

Eliminando o parâmetro λ temos:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{1}$$

que é a equação cartesiana da reta (s).

5. Verifique se as retas (r) e (s) dadas respectivamente pelas equações cartesianas $\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$ e $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-1}{2}$ são concorrentes, reversas ou paralelas.

Solução:

As retas são paralelas se os vetores diretores respectivos $\vec{\mu}_r$ e $\vec{\mu}_s$ são paralelos. Ora $\vec{\mu}_r = (3,-2,1)$ e $\vec{\mu}_s = (1,-3,2)$ e como não existe $t \in \Re$ tal que $\vec{\mu}_s = t\,\vec{\mu}_r$ afirmamos que não são paralelas.

Sejam $m, n \in \Re$ tal que $\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-2}{1}=m$ e

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-1}{2}=n$$

As retas (r) e (s) são concorrentes se e somente se o sistema:

$x = 4 + 3m$

$y = -2m$

$z = 2 + m$

$x = 1 + n$

$y = 2$ ï $3n$

$z = 1 + 2n$, é solúvel; caso contrário (r) e (s) são retas reversas.

Resolvendo o sistema teremos:

$4 + 3m = 1 + n$

$-2m = 2$ ï $3n$

2 + m = 1 + 2n ou ainda;

Considere agora o sistema formado pelas duas primeiras equações:

$$\begin{cases} 4+3m=1+n \\ -2m=2-3n \end{cases},$$

teremos como solução $m=-1$ e n = 0.

Substituindo na terceira equação.

$2+(-1)=1+2.0$, concluímos que também satisfaz. Logo o sistema é solúvel e P= (1,2,1) é o ponto de intersecção das retas (r) e (s). Assim as retas são concorrentes.

6. Verifique se a reta (r) dada pela equação $\frac{x-1}{2}=y-3=\frac{z+1}{4}$ é concorrente ao plano (α) de equação cartesiana $x+2y-3z=10.$

Solução:

A reta (r) é concorrente ao plano (α) se e somente se $(r)\cap(\alpha)\neq\phi$. Logo o nosso problema consiste na resolução do sistema:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2}=y-3=\frac{z+1}{4} \\ x+2y-3z=10 \end{cases}$$

Com o auxílio de um parâmetro $\lambda\in\Re$ temos que:

$$x = 1 + 2\lambda$$
$$y = 3 + \lambda$$
$$z = -1 + 4\lambda$$

Substituindo na equação do plano as variáveis x,y,z teremos:

$$1 + 2\lambda + 2(3 + \lambda) - 3(-1 + 4\lambda) = 10$$

ainda pode ser escrito:

$-8\lambda = 10 - 10$ ou ainda:

$$\lambda = 0.$$

Logo o ponto de intersecção entre a reta (r) e o plano (α) é:

$P = (1,3,-1)$.

Ângulo entre duas retas

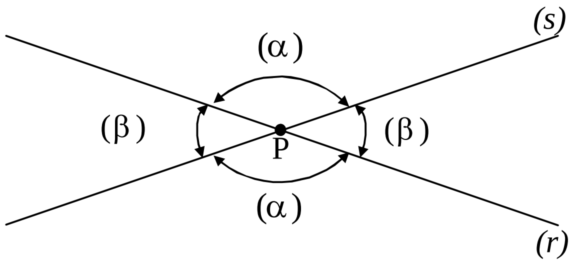
Sejam (*r*) e (*s*) retas no espaço. Pode ocorrer um dos três casos:

(i) (*r*) e (*s*) são paralelas não coincidentes

(ii) (*r*) e (*s*) são concorrentes

(iii) (*r*) e (*s*) são reversas

Sendo (*r*) e (*s*) concorrentes, elas formam entre si quatro ângulos, dois a dois opostos pelo vértice no ponto de concorrência *P*.



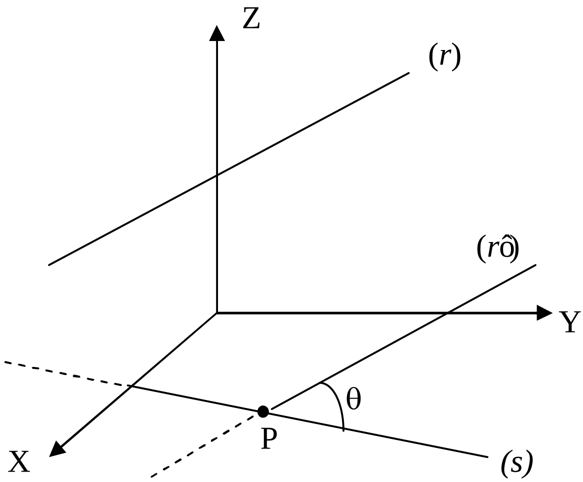
(Fig. 4.2.1.a)

Definição:

Define-se como ângulo, entre as retas (concorrentes), ao menor ângulo determinados por elas.

Sendo paralelas o ângulo entre elas será de 0^o.

Sendo (*r*) e (*s*) retas reversas, toma-se um ponto em uma delas, exemplo (*s*), e por este ponto traça-se uma paralela (*r*ô) a reta (*r*). O ângulo entre (*r*) e (*s*) será dado pelo ângulo entre (*r*ô) e (*s*).



Desta forma sendo $\vec{\mu}_r$ e $\vec{\mu}_s$ vetores diretores das retas (r) e (s) respectivamente, o ângulo θ entre elas será tal que:

$$\cos(\theta) = \frac{< \vec{\mu}_r , \vec{\mu}_s >}{\|\vec{u}_r\| . \|\vec{u}_s\|}$$

Exemplo:

1. Calcule o ângulo entre as retas (r) e (s) dadas por suas equações cartesianas: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z+1}{3}$ e $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z}{-1}$ respectivamente.

   Solução:

   Tome $\vec{\mu}_r$ = (2,1,3) e $\vec{\mu}_s$ =(1,3,-1) como vetores diretores das retas (r) e (s) respectivamente. O ângulo θ entre as retas será tal que:

$$\cos(\theta) = \frac{<\vec{\mu}_r, \vec{\mu}_s>}{\|\vec{u}_r\| . \|\vec{u}_s\|} = \frac{2.1 + 1.3 + 3(-1)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} . \sqrt{1^2 + 3^2 + (-1)^2}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{14}.\sqrt{11}} = \frac{2}{\sqrt{154}}, donde \theta = \arccos(\frac{2}{\sqrt{154}})$$

2. Calcular o valor de λ para que as retas

$$(r): \frac{y+3}{\lambda} = x = \frac{z}{5} \quad \text{e}$$

$$(s): \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 1 + 5t \end{cases} \quad \text{sejam ortogonais.}$$

Solução:

Os vetores no espaço $\vec{\mu}_r = (1, \lambda, 5)$ e $\vec{\mu}_s = (2,1,5)$ são vetores diretores respectivos de (*r*) e (*s*). Como o proposto é que (*r*) seja ortogonal a (*s*) tem-se:

$$<\vec{\mu}_r, \vec{\mu}_s> = 0$$

ou:

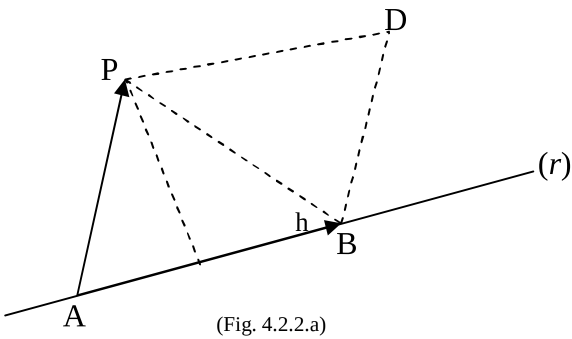
$$<(1, \lambda, 5), (2,1,5)> = 0$$
$$1.2 + 1.\lambda + 5.5 = 0$$
$$\lambda = -27$$

Distância de um ponto a uma reta

Seja (r) uma reta e P um ponto no espaço; e d(P, (r)) a distância do ponto P a reta (r).

Se $P \in (r)$, então d(P, (r))=0.

Suponha que $P \notin (r)$, e tomemos A e B pontos da reta (r) (Figura 4.2.2.a)



(Fig. 4.2.2.a)

É fácil observar que $\vec{AB}$ é um vetor diretor da reta (r) ($A \neq B$). Os vetores $\vec{AP}$ e $\vec{AB}$ constituem lados do triângulo ABP cuja área é dada por:

$$S = \frac{1}{2}\left\|\vec{AB}\right\|.h \quad \text{(I)}$$

com h a altura do triângulo em relação ao vértice P.

Fazendo uso do produto vetorial (Exercício 3, cap. IV), vimos também que

$$S = \frac{1}{2}\left\| \vec{AP} \times \vec{AB} \right\| \text{ (II)}$$

Comparando (I) com (II) podemos escrever que:

$$\left\| \vec{AP} \times \vec{AB} \right\| = \left\| \vec{AB} \right\| .h$$

Não é difícil de verificar que

h = d(P, (*r*))

Desta feita concluímos que:

$$\text{D(P, }(r)) = \frac{\left\| \vec{AP} \times \vec{AB} \right\|}{\left\| \vec{AB} \right\|}$$

Exemplo:

1. Calcule a distância do ponto A=(1,2,5) a reta de equações paramétricas:

$$(s):\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + t \\ z = 2 - 5t \end{cases}$$

Solução:

Atribuamos dois valores quaisquer para t afim de termos dois pontos da reta.

Para:

$$t = 0 \Rightarrow A_1 = (1, -3, 2)$$
$$t = 1 \Rightarrow B = (3, -2, -3)$$

Consideremos os vetores $\overrightarrow{A_1A}$ e $\overrightarrow{AB}$ e apliquemos a fórmula da distância (4.2.2)

$$d(P,(r)) = \frac{\left\|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$$

Ora.

$$\overrightarrow{A_1A} = A - A_1 = (1,2,5) - (1,-3,2) = (0,5,3)$$

$$\overrightarrow{A_1B} = B - A_1 = (3,-2,-3) - (1,-3,2) = (2,1,-5)$$

$$\overrightarrow{A_1A} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -28\vec{i} + 6\vec{j} - 10\vec{k}$$

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \|(2,-4,-8)\| = \sqrt{84}$$

$$\left\|\overrightarrow{A_1A} \times \overrightarrow{A_1B}\right\| = \sqrt{(-28)^2 + 6^2 + (-10)^2} = \sqrt{920}$$

Daí chegamos a concluir que:

$$d(A,(r)) = \frac{\sqrt{920}}{\sqrt{84}} = \frac{\sqrt{230}}{\sqrt{21}} \approx 3,31$$

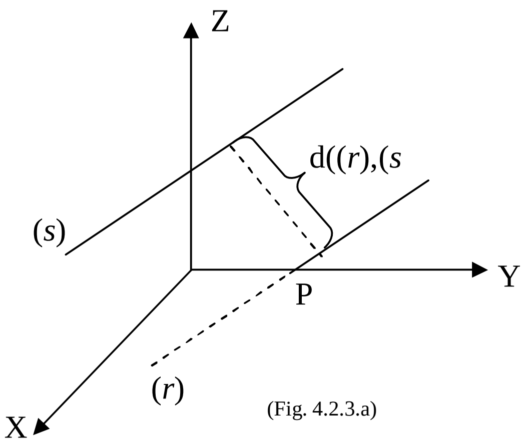
Distância entre retas.

Sendo (r) e (s) retas no espaço temos três casos a considerar.

1. Paralelas

   a) (r) e (s) coincidentes, então d((r),(s))=0

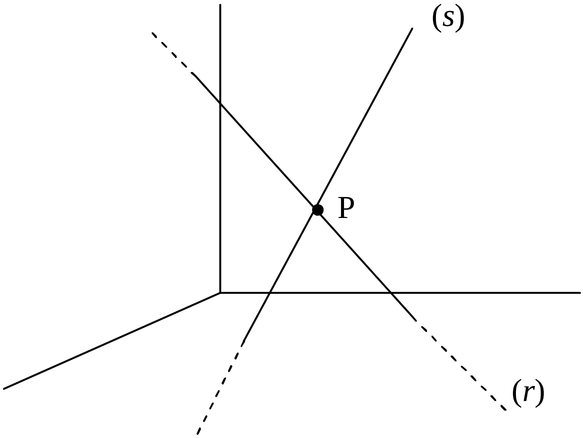
   b) (r) e (s) distintas. Escolhendo aleatoriamente um ponto $P \in (r)$, a distância d((r), (s)) = d(P, (s)).



(Fig. 4.2.3.a)

2. Concorrentes

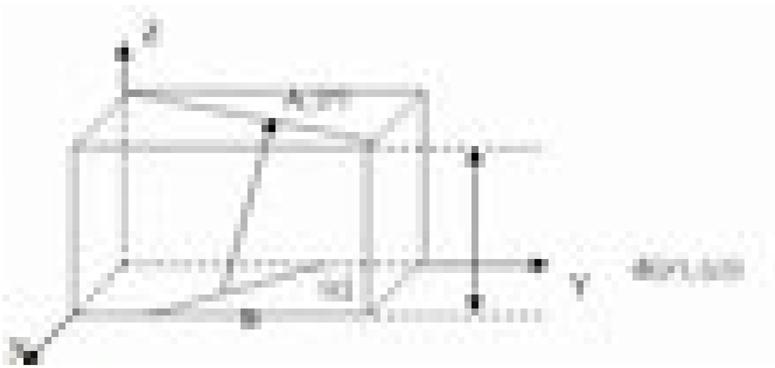
As retas (r) e (s) são concorrentes, então existe um ponto P em comum. E como a distância entre elas é a menor, temos que d((r),(s))=0. (Fig. 4.2.3.b)



(Fig. 4.2.3.b)

3. Reversas.

As retas (*r*) e *(s)* são reversas, logo $(r) \cap (s) = \phi$. Para melhor compreensão considere a figura (4.2.3.c).



Tomemos A um ponto em (*r*) e B um ponto em (*s*) aleatoriamente e façamos a projeção do vetor $\vec{BA}$ sobre $\vec{\mu}_r \times \vec{\mu}_s$, com $\vec{\mu}_r$ e $\vec{\mu}_s$ vetores diretores de (*r*) e (*s*) respectivamente.

Observe que $\vec{\mu}_r \times \vec{\mu}_s$ é paralelo ao eixo $0\vec{Z}$, neste caso. Como $d((r),(s)) = \left\| proj_{\vec{\mu}_r \times \vec{\mu}_s} \vec{AB} \right\|$ temos que:

$$d((r),(s)) = \frac{\left| \left\langle \vec{AB}, \vec{\mu}_R \times \vec{\mu}_S \right\rangle \right|}{\left\| \vec{\mu}_r \times \vec{\mu}_s \right\|} \qquad \text{(confira 1.9.1)}$$

Exemplo:

1. Calcule a distância entre as retas (*r*) e (*s*) dadas por:

$$(r): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 3 + 3t \end{cases} \text{ e } (s): \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

Solução:

Pelos vetores diretores de (*r*) e (*s*), $\vec{\mu}_r = \vec{\mu}_s = (-2,1,3)$ concluímos que elas são paralelas. Portanto escolhemos um ponto P em (*r*) e calculamos a distância d(P, (*s*)). Tomemos t=0, logo *P*=(1,0,3).

Assim

d((*r*), (*s*)) = d(P, (*s*))

Para cálculo de distância d(P, (*s*)) é necessário que sejam dados dois pontos de (*s*). Sejam por exemplo *A*=(-1,3,1) e *B*=(1,4,4). Desta feita:

$$d((r), (s)) = d(P, (s)) = \frac{\left\| \vec{AP} \times \vec{AB} \right\|}{\left\| \vec{AB} \right\|}$$

Ora:

$$\overrightarrow{AP} = (2,-3,2), \quad \overrightarrow{AB} = (2,1,3)$$

$$\vec{AP} \times \vec{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 2 \\ +2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -11\vec{i} - 2\vec{j} + 8\vec{k}$$

$$\left\| \vec{AP} \times \vec{AB} \right\| = \sqrt{(-11)^2 + (-2)^2 + 8^2} = \sqrt{199}$$

$$\left\| \vec{AB} \right\| = \sqrt{14}$$

Portanto pode-se concluir que:

$$d((r),(s)) = \frac{\sqrt{199}}{\sqrt{14}}$$

2. Calcular a distância entre as retas (r) e (s) dadas por:

$$(r): \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3t \end{cases} \text{ e } (s): \begin{cases} x = 1 + 2n \\ y = n \\ z = 2 + 3n \end{cases}$$

Solução:

Sendo $\vec{\mu}_r = (1,2,3)$ e $\vec{\mu}_s = (2,1,3)$ vetores diretores das retas (r) e (s) respectivamente podemos concluir que as retas não são paralelas. Desta feita as retas serão concorrentes ou reversas. As retas (r) e (s) são concorrentes se e somente se o sistema:

$x = t$

$y = 1 + 2t$

$z = 3t$

$x = 1 + 2n$

$y = n$

$z = 2 + 3n$, tenha solução.

Resolvendo o sistema teremos:

$t = 1 + 2n$

$1 + 2t = n$

$3t = 2 + 3n$

Tomando as duas primeiras equações:

$\begin{cases} t = 1 + 2n \\ 1 + 2t = n \end{cases}$ teremos como solução

$t = n = -1$

Substituindo na terceira equação:

$3 \cdot (-1) = 2 + 3 \cdot (-1)$ concluímos que não é satisfeito tais valores. Logo o sistema não possui solução para tanto as retas são reversas.

Tomemos agora um ponto $A \in (r)$ e $B \in (s)$; ou seja:

$A = (0,1,0)$ $B = (1,0,2)$ e

apliquemos a fórmula de distância

$$d((r),(s)) = \frac{\left| \left\langle \overrightarrow{AB}, \vec{u}_r \times \vec{u}_s \right\rangle \right|}{\left\| \vec{u}_r \times \vec{u}_s \right\|}$$

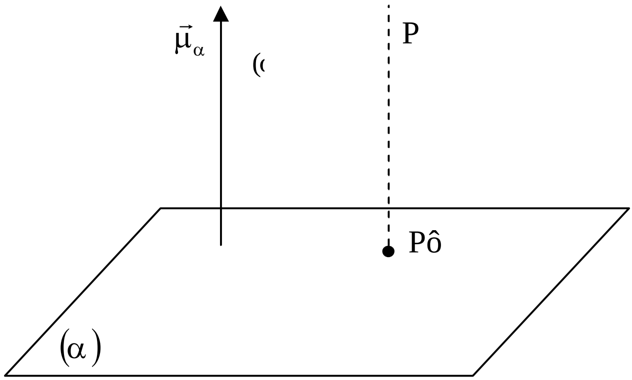
ou seja:

$$d((r),(s)) = \frac{|\langle(1,-1,2),(1,2,3)\times(2,1,3)\rangle|}{\|(1,2,3)\times(2,1,3)\|}$$

$$= \frac{|-6|}{\sqrt{9+9+9}} = \frac{6}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Distância de um ponto a um plano.

Seja P = (x_0,y_0,z_0) um ponto e (α) um plano de equação cartesiana ax+by+cz+d=0. É nosso objetivo encontrar a relação que nos forneça a distância do ponto P ao plano. (Figura 4.2.4.a)



(Fig. 4.2.4.a)

Seja Pô=(x_1,y_1,z_1) a projeção ortogonal de P ao plano (α). Definiremos como d(P, (α)), a distância do ponto P ao plano (α), como sendo a norma do vetor $\left\|\vec{P'P}\right\|$, ou seja:

$$d(P,(\alpha)) = \left\|\vec{P'P}\right\|$$

Se $P \in (\alpha)$ podemos então concluir que $d(P,(\alpha) = 0$. Suponha que $P \notin (\alpha)$. Como o vetor $\vec{P'P}$ é perpendicular a (α), logo paralelo ao vetor diretor do plano $\vec{\mu}_\alpha = (a,b,c)$. Tomemos o vetor unitário de $\vec{\mu}_\alpha$, ou seja $\dfrac{\vec{\mu}_\alpha}{\left\|\vec{\mu}_\alpha\right\|}$. Assim podemos afirmar que:

$$d(P,(\alpha)) = \left\|\vec{P'P}\right\| = \left|< \vec{P'P}, \frac{\vec{\mu}_\alpha}{\left\|\vec{\mu}_\alpha\right\|} >\right| (1)$$

ou ainda:

$$d(P,(\alpha)) = \frac{1}{\left\|\vec{\mu}_\alpha\right\|} . \left|\left\langle \vec{P'P}, \vec{\mu}_\alpha \right\rangle\right|$$

Mas:

$$\left\|\vec{\mu}_\alpha\right\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}, e$$

$$< \vec{P'P}, \vec{\mu}_\alpha > = < (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1), (a,b,c) >$$

$$< \vec{P'P}, \vec{u}_\alpha > = ax_0 + bx_0 + cz_0 - (ax_1 + bx_1 + cz_1)$$

O leitor pode ainda observar que: $ax_1+by_1+cz_1 = -d$.

Assim sendo podemos concluir que:

$$< \vec{P'P}, \vec{\mu}_\alpha > = ax_0 + bx_0 + cz_0 + d$$

Fazendo as devidas substituições em (1) podemos ainda escrever:

$$d(P,(\alpha)) = \left| \frac{ax_0 + bx_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right| (2)$$

Exemplo:

1. Determine a distância do ponto A=(5,2,1) ao plano (α) de equação cartesiana x ï y + 2z ï 3 = 0.

   Solução:

   Aplicando a relação (2) podemos dizer que:

   $$d(A,(\alpha)) = \left| \frac{5.1 + 2(-1) + 2.1 + (-3)}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} \right|$$

   donde:

   $$d(A,(\alpha)) = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

2. Determine a distância entre os planos (α) e (β) sendo dados por suas equações cartesianas 2x-y+z+10=0 e 2x-y+z-5=0.

   Solução:

   Como os planos (α) e (β) são paralelos $\vec{\mu}_\alpha = \vec{\mu}_\beta = (2,-1,1)$ afirmamos que:

   $d((\alpha),(\beta)) = \mathrm{d}(\mathrm{P},(\beta))$ com $P \in (\alpha)$ ou

   $d((\alpha),(\beta)) = \mathrm{d}(\mathrm{B},(\alpha))$ com $B \in (\beta)$

   Daí o problema se restringe a calcular a distância de um ponto a um plano.

Seja $P = (0,5,-5) \in (\alpha)$, então

$$d(P,(\beta)) = \left| \frac{2.0 + (-1).5 + 1(-5) + (-5)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} \right|$$

e ainda:

$$d((\alpha),(\beta)) = \frac{15}{\sqrt{6}}$$

3. Determine a distância da reta (r) ao plano (α) sendo dados por:

$$(r): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + t \\ z = 4 + 2t \end{cases} \quad (\alpha): x + y - z + 2 = 0$$

Solução:

Como a distância de uma reta ao plano somente é definida quando a reta for paralela a plano, o leitor pode facilmente observar através dos diretores da reta e do plano dados que são ortogonais, ou seja:

$\vec{\mu}_r = (1,1,2)$ diretor da reta (r), $\vec{\mu}_\alpha = (1,1,-1)$ diretor do plano (α) e

$$< \vec{\mu}_r, \vec{\mu}_\alpha >=< (1,1,2) - 1,1,-1) >= 1.1 + 1.1 + 2(-1) = 0$$

Logo como $\vec{\mu}_r \perp \vec{\mu}_\alpha$ temos que $(\alpha)//(r)$. Assim teremos:

$$d((r),(\alpha)) = d(P,(\alpha)) \text{ com } P \in (r)$$

Dado $P = (1,-3,4) \in (r)$, para t = 0, teremos:

$$d((r),(\alpha)) = \left| \frac{1.1 + 1(-3) + (-1).4 + 2}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} \right|$$

o que também pode ser escrito:

$$d((r),(\alpha)) = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

Exercícios:

- 12. Determinar as equações paramétricas e cartesianas das retas que passam pelos pontos:

  a) A=(1,2,0) e B=(0,0,4)

  b) L=(1,-1,1) e M=(2,-1,4)

  Resp.: a) $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{4}$; $\begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = 2-2\lambda \\ z = 4\lambda \end{cases}$

- 13. Encontrar a equação cartesiana da reta que:

  a) passa pelo ponto A=(1,-1,5) na direção do vetor $\vec{v} = (2,-1,3)$

  Resp.: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{3}$

  b) passa pelo ponto M=(0,1,1) na direção do vetor $\vec{u} = (1,1,0)$

  Resp.: $x = y-1 \quad z = 1$

- 14. Escreva a equação paramétrica da reta que passa pelo ponto M=(1,-1,3) e é perpendicular a reta (*s*) de equação cartesiana $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{2}=z+1$.

  Resp.: $\begin{cases} x = 1 + t/2 \\ y = -1 - 3t \\ z = 3 + \frac{9}{2}t \end{cases}$

- 15. Ache a equação da reta (*r*) que passa pelo ponto *A*=(1,0,1) e é paralela aos planos 2x+3y+z+1=0 e x-y+z=0.

  Resp.: $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{-5}$

- 16. Encontrar a equação cartesiana da reta (*r*) que passa pelo ponto M=(2,3,-1) e é paralela ao vetor $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.

  Resp.: $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{1}$

- 17. Mostrar que os pontos *A*=(-1,4,-3), *B*=(2,1,3) e *C*=(4,-1,7) são colineares.

  Resp.: (Sugestão: Produto misto)

- 18. Determine um ponto e um vetor diretor de cada uma das seguintes retas:

a) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{z+1}{3} \\ y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - 3t \\ z = t \end{cases}$

c) $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$

- 19. Encontrar o ponto de intersecção das retas, casos existam.

a) $(r): \begin{cases} x = 3y - 1 \\ z = y + 1 \end{cases}$ e $(s): \begin{cases} y = 2x + 1 \\ z = x - 1 \end{cases}$

b) $(r): \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-5}{4}$ e $(s): \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 - t \\ z = 7 - 2t \end{cases}$

- 20. Determinar a equação cartesiana da reta que passa pelo ponto M=(-1,0,1) e é paralela a reta (s) de equação cartesiana:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{z-1}{1} \\ y = 2 \end{cases}$$

Resp.: $\dfrac{x+1}{2} = z - 1 \quad \text{e} \quad y = 0$

- 21. Ache a equação cartesiana do plano que passa pelos pontos A=(1,0,1), B=(2,1,0) e C=(1,1,1).

Resp.: $x + z - 2 = 0$

- 22. Determine um plano (α) perpendicular ao plano $(\beta): x + y - z = 8$ e que passa pelo ponto M=(1,2,1).

  Resp.: $x + y + 2z - 5 = 0$

- 23. Encontre a intersecção entre os planos $(\alpha): x - y + z = 0$ e $(\beta): 2x + y - z - 3 = 0$.

- 24. Ache o ângulo entre as retas

  a) $(r): \left\{ \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{x}{3} = \dfrac{z-1}{-1} \right.$ e $(s): \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 4 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$

  b) $(r): \begin{cases} x = 1 \\ \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-1}{4} \end{cases}$ e $(s): \left\{ \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-4}{2} = \dfrac{z-3}{2} \right.$

  Resp.: a) 90^{o}, b) $\hat{\theta} = \arccos\left(\dfrac{2}{\sqrt{17}}\right)$

- 25. Calcule a distância do ponto a reta (r) nos seguintes casos:

  a) P=(2,1,5) e $(r): \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-3}{2}$

  Resp.: $2\sqrt{2}/3$

  b) P=(0,1,0) e $(s): \begin{cases} x = 2y - 1 \\ z = 3y + 2 \end{cases}$

  Resp.: $\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{14}}$

c) P=(-1,1,1) e $(s):\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 - t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$

Resp.: $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{6}}$

- 26. Ache a distância entre as retas seguintes:

a) $(r):\begin{cases} 3x + 1 = y \\ z = x - 4 \end{cases}$ e $(s):\begin{cases} y = 2x - 1 \\ z = x + 2 \end{cases}$

Resp.: $6/\sqrt{2}$

b) $(r):\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 0 + t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$ e $(s):\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 4 + t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$

Resp.: $\dfrac{\sqrt{325}}{\sqrt{14}}$

c) $(r):\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-3}{-1}$ e $(s):\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 2 - t \end{cases}$

Resp.: 0

- 27. Determine o valor de $m \in \Re$, para que o ponto M=(1-m,2m,1-3m) pertença ao plano (α): x+2y-z+7=0.

Resp.: $m = -7/6$

- 28. Calcule a distância do ponto P ao plano (α) nos seguintes casos:

a) *P*=(2,-1,4) e (α): x ï y ï z ï 2 = 0

Resp.: $\sqrt{3}$

b) *P*=(0,-1,1) e (α): x ï y = 0

Resp.: $\sqrt{2}/2$

c) *P*=(2,-1,3) e (α): 2x ï y + z = 0.

Resp.: 0

- 29. Ache os pontos de intersecção do plano (α): 2x ï y + z = 2 com os eixos coordenados (0X,0Y,0Z).

  Resp.: (1,0,0) , (0,-2,0) , (0,0,2)

- 30. Encontre a distância entre os planos (α): 3x ï y + z = 7 e (β): 3x ï y + z ï 10 = 0.

  Resp.: $3/\sqrt{11}$

- 31. Mostre que se (α) e (β) são planos paralelos dados por suas equações cartesianas ax + by + cz + d = 0 e a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 respectivamente, então a distância entre eles é dada por:

$$d((\alpha),(\beta)) = \left| \frac{d - d_1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$

- 32. Dados M=(0,1,2), N=(-1,1,1) e *P*=(5,7,9), escreva as equações paramétricas da reta que contém a mediana, relativa ao lado MN, do triângulo MNP.

Resp.: $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} + \frac{11}{2}t \\ y = 1 + 6t \\ z = \frac{3}{2} + \frac{15}{2}t \end{cases}$

- 33. Determine o ponto de intersecção da reta (r) com o plano (α) para os seguintes casos:

a) $(r): \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{3}$ e $(\alpha): x - y + 2z = 1$

Resp.: $P = \left(\frac{5}{11}, \frac{7}{11}, -\frac{6}{11}\right)$

b) $(r): \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 - 4t \\ z = 2 - t \end{cases}$ e $(\alpha): 2x - z = 4$

Resp.: $\left(\dfrac{16}{5}, \dfrac{13}{5}, \dfrac{12}{5}\right)$

c) $(r): \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 4t \\ z = 2 - t \end{cases}$ e $(\alpha): 2x + y - 2z = 7$

Resp.: $(r) \cap (\alpha) = \phi$

d) $(r): \begin{cases} x = 2 - t \\ z = 1 + 2t \\ y = 1 - 3t \end{cases}$ e $(\alpha): -x + y + z = 0$

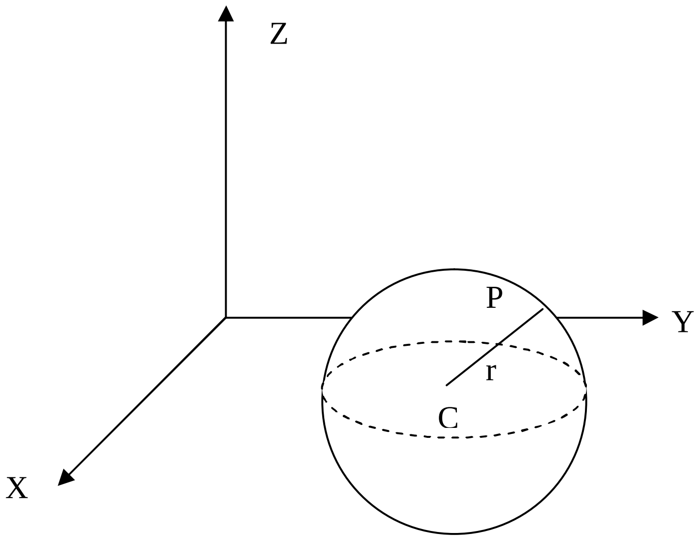
Resp.: $(r) \cap (\alpha) = (r)$

6. SUPERFÍCIE ESFÉRICA

Equações da Superfície Esférica.

Sejam *C*=(a,b,c) um ponto do espaço e $r \in \Re^{*}{}_{+}$; a superfície esférica de centro C e raio r é um lugar geométrico cujos pontos que a constituem satisfaz a equação

d(P,C) = r (figura 5.1)



(Fig 5.1)

Sendo P = (x,y,z) um ponto aleatório da superfície esférica, temos:

$\vec{CP}$ = P ï C = (x ï a,y ï b,z ï c), e como d(C,P) $= \left\| \vec{CP} \right\|$ = r, obtemos:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2 \quad (1)$$

denominada de equação reduzida da esfera de centro C e raio r.

A partir da equação (1), e desenvolvendo os quadrados encontramos que:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 - r^2 = 0$$

Como $a, b, c, r \in \Re$ são constantes pré-definida, podemos escrever.

$$x^2 + y^2 + z^2 + Bx + Cy + Dz + E = 0 \quad (2)$$

a qual denominamos de Equação Geral da Superfície Esférica.

Observe que:

$$B = -2a$$

$$C = -2b$$

$$D = -2c$$

$$E = a^2 + b^2 + c^2 - r^2 \quad (3)$$

Proposição: (1)

A equação, $x^2 + y^2 + z^2 + Bx + Cy + Dz + E = 0$, é de uma superfície esférica se e somente se $B^2 + C^2 + D^2 - 4E > 0$.

Demonstração:

Basta substituir os valores de a,b,c em E e impor a condição de existência para r.

Proposição:(2)

Se uma esfera é dada pela equação cartesiana:

$x^2 + y^2 + z^2 + Bx + Cy + Dz + E = 0$, então o centro $C = \left(-B/2, C/2, -D/2\right)$ e o raio

$$R = \frac{\sqrt{B^2 + C^2 + D^2 - 4E}}{2}$$

Exemplo:

1. Determinar a equação reduzida da superfície esférica de centro C=(1,0,4) e raio r=5.

   Solução:

   Aplicando a equação (1) obtemos:

   $(x \text{ ï } 1)^2 + y^2 + (z \text{ ï } 4)^2 = 25$

2. Verifique se uma superfície esférica pode ser descrita pela equação $x^2 + y^2 + z^2 \text{ ï } 4x + y \text{ ï } 3z + 5 = 0$, e caso possa determinar o seu centro e o seu raio.

   Solução:

   Pela equação $x^2 + y^2 + z^2 \text{ ï } 4x + y \text{ ï } 3z + 5 = 0$, constatamos que B = -4, C = 1, D = -3 e E = 5 e como $B^2 + C^2 + D^2 \text{ ï } 4E = (-4)^2 + 1^2 + (-3)^2 \text{ ï } 4.5 = 26 \text{ ï } 20 = 6$, concluímos pela proposição (1) que trata-se de uma equação da superfície esférica.

   Assim o centro e o raio é obtido na forma:

   $$C = \left(\frac{-B}{2}, \frac{-C}{2}, \frac{-D}{2}\right) \text{ e } r = \frac{\sqrt{B^2 + C^2 + D^2 - 4E}}{2}$$

   o que pode ser escrito por:

   $$C = (2, -1/2, 3/2) \text{ e } r = \sqrt{3/2}$$

3. Determine o valor de $m \in \Re$ para que o ponto A=(1-m,2m,3) pertença a superfície esférica de equação $(x - 1)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 16$.

Solução:

Se A pertence a superfície esférica, então as coordenadas de A satisfazem a equação dada, ou seja:

$$(1 - m - 1)^2 + (2m)^2 + (3 - 2)^2 = 16$$

$$m^2 + 4m^2 + 1^2 = 16$$

$$5m^2 = 16 - 1$$

ou ainda:

$$m = \sqrt{3} \text{ ou } m = -\sqrt{3}$$

4. Encontre os pontos de intersecção da superfície esférica dada pela equação $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6z + 1 = 0$ com os eixos coordenados 0X, 0Y e 0Z.

Solução:

Sejam A,B,C pontos no espaço nos quais $A \in OX, B \in OY$ e $C \in OZ$.

Desta feita temos:

A = (x,0,0), B = (0,y,0) e C = (0,0,z) os supostos pontos de intersecção da esfera com os eixos coordenados.

Aplicando cada ponto na equação teremos:

<u>Ponto A</u>:

$$x^2 + 0^2 + 0^2 - 2x - 6.0 + 1 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \quad \text{daí} \quad A = (1,0,0)$$

Ponto B:

$0^2 + y^2 + 0^2$ ï 2.0 ï 6.0 + 1 = 0

$y^2 + 1 = 0$, então $y \in \Re$.

Logo a superfície esférica não intercepta o eixo OY.

Ponto C:

$0^2 + 0^2 + z^2$ ï 2.0 ï 6.z + 1 = 0

z^2 ï 6z + 1 = 0

Resolvendo esta equação obtemos:

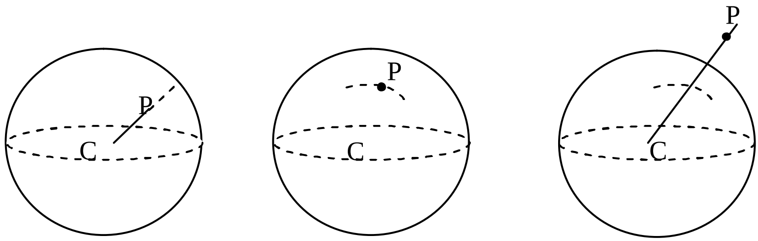
$$z' = 3 + 2\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad z'' = 3 - 2\sqrt{2}$$

Daí concluímos que a superfície esférica intercepta o eixo 0Z em dois pontos.

$$C_1 = \left(0,0,3 + 2\sqrt{2}\right) \quad \text{e} \quad C_1 = \left(0,0,3 - 2\sqrt{2}\right)$$

Posição entre o Ponto e a Superfície Esférica

São três as posições do ponto P em relação a superfície esférica.



(Fig. 5.2)

I) Interior a superfície se e somente se $d(P,C) < r$

II) Na superfície, se e somente se $d(P,C) = r$

III) Exterior a superfície se e somente se

$$d(P,C) > r$$

Onde C é o centro e r é o raio da superfície esférica.

Exemplo:

1. Dê a posição do ponto P = (2,-1,4) a superfície esférica de equação

   (x ï 1)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 49.

   Solução:

   Como o centro é o ponto C = (1,-2,0) e o raio r = 7, é bastante compararmos d(P,C) com o raio.

   Ora; $d(P,C) = \sqrt{(2-1)^2 + (-1-2)^2 + (4-0)^2}$

   ou ainda:

   $$d(P,C) = \sqrt{18}$$

   Logo P é um ponto interior a superfície esférica haja visto que $\sqrt{26} < 7$

2. Ache o (*s*) ponto (*s*) de intersecção entre a reta

(*r*): $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+1}{1}$ e a superfície esférica da equação reduzida $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.

Solução:

Se P é o ponto de intersecção entre a reta (*r*) e a superfície esférica, suas coordenadas satisfazem a ambas as equações.

Inicialmente tomemos um ponto genérico da reta (*r*) ou seja: P = (1 + 2t, -t, -1 + t) para $t \in \Re$; em seguida apliquemos a superfície esférica através de sua equação reduzida.

Logo:

$$(1 + 2t)^2 + (-t)^2 + (-1 + t)^2 = 6$$

Desenvolvendo os quadrados e reduzindo, temos:

$3t^2 + t$ ï $2 = 0$

Daí encontramos tô= -1 ou tò = +2/3.

Desta forma a reta intercepta a superfície esférica nos pontos:

$P_1 = (1$ ï $2, -1, -1$ ï $1) = (-1,-1,-2)$

P_2

$$= (1 + 2.\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, -1 + \frac{2}{3}) = (7/3, -2/3, -1/3)$$

3. Decida se a reta (*r*) é exterior a superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, sendo:

$$(r): \begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

Solução:

A reta (*r*) é exterior a superfície esférica se e somente se d(C, (*r*))>R onde C e R são o centro e o raio desta superfície respectivamente.

Para calcularmos a distância do centro C a reta pela fórmula é necessário obtermos um ponto da reta (*r*).

Pelas equações paramétricas de (*r*) obtemos sem muito esforço um de seus pontos e um vetor diretor, por exemplo:

P = (4,0,1) e $\vec{\mu}_r = (-3,1,2)$

Daí:

$$d(C,(r)) = \frac{\left\| \vec{OP} \times \vec{\mu}_r \right\|}{\left\| \vec{u}_t \right\|} \quad ; \quad \text{mas}$$

$$\left\| \vec{u}_r \right\| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

$$\overrightarrow{CP} \times \vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 11\vec{j} + 4\vec{k} \text{ , e}$$

$$\left\| \overrightarrow{CP} \times \vec{u}_r \right\| = \sqrt{(-1)^2 + (-11)^2 + 4^2} = \sqrt{138}$$

Desta feita:

$$d(C,(r)) = \frac{\sqrt{138}}{\sqrt{14}} = \sqrt{69/7}$$

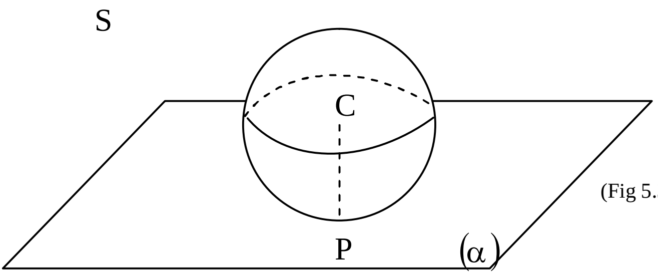
Como o raio da superfície vale $\sqrt{2}$, concluímos que

D(C, (r)) > R.

Logo (r) é exterior a esfera.

Plano Tangente.

Diz-se que um plano (α) é tangente a uma superfície esférica (S) se e somente se existir um único ponto P comum a ambos (Fig. 5.3)



(Fig 5.3)

Proposição 2:

Um ponto P é ponto de tangência entre um plano (α) e uma superfície esférica (S) se e somente se o vetor $\overrightarrow{CP}$ é ortogonal ao plano.

Demonstração:

Seja $C(x_0,y_0,z_0)$ o centro e r o raio da superfície esférica.

Seja $P=(x_1,y_1,z_1)\in(\alpha)\cap(S)$ e como

$\overrightarrow{CP}=(x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0)$, termos

$$\left\|\overrightarrow{CP}\right\|=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}=R$$

Por outro lado, sabendo que P é ponto de tangência, temos que $d(C,(\alpha))=R$.

Assim $d(C,(\alpha))=\left\|\overrightarrow{CP}\right\|$ o que nos leva a concluir que $\overrightarrow{CP}\perp(\alpha)$.

Como $\overrightarrow{CP}\perp(\alpha)$ e $P\in(\alpha)\cap(S)$ temos que $d(C,(\alpha))=R$. Logo P é ponto de tangência.

Exemplo:

1. Escreva a equação cartesiana do plano (α) tangente a superfície esférica (S) de equação reduzida $(x + 1)^2 + (y ï\ 1)^2 + z^2 = 7$ no ponto $P=(1,0,\sqrt{3})$.

   Solução:

Pela proposição (2) o vetor $\overrightarrow{CP}$ é ortogonal ao plano (α), com $C=(-1,1,0)$; logo:

$$\overrightarrow{CP}=\left(-1-(-1),0-1,\sqrt{3}-0\right)$$
$$\overrightarrow{CP}=\left(2,-1,\sqrt{3}\right)$$

Seja *A*=(x,y,z) um ponto arbitrário do plano (α); então:

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{CP}=0$$
$$\left(x-1,\,y-0,\,z-\sqrt{3}\right)\cdot\left(2,-1,\sqrt{3}\right)=0$$
$$2(x-1)+(-1)\cdot y+\sqrt{3}\left(z-\sqrt{3}\right)=0$$

O que também pode ser escrito:

$$2x-y+\sqrt{3}z-5=0$$

2. Determine a equação cartesiana do plano (α) tangente a superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e paralelo ao plano (β) de equação x + y ï z + 1 = 0.

Solução:

Como o plano (α) é paralelo ao plano (β) temos que:

(α) : x + y ï z + d = 0

Por outro lado:

$d(C,(\alpha))=R$ por (α) ser tangente a superfície esférica (S).

Logo podemos ter:

$$\left|\frac{1\cdot 0+1\cdot 0+(-1)\cdot 0+d}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}\right|$$

Ou seja:

$$\left|d\right| = 2\sqrt{3}$$

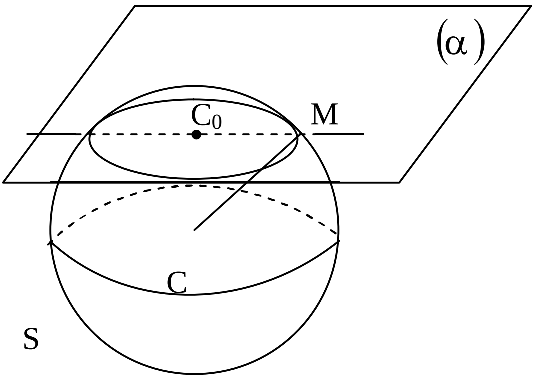
Assim teremos os planos:

$$(\alpha_1): x + y - z + 2\sqrt{3} = 0$$
$$(\alpha_2): x + y - z - 2\sqrt{3} = 0$$

3. Determine o centro e o raio da circunferência de intersecção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ com o plano (α): x + y ï z = 5.

Solução:

Analisemos a figura:



Da equação da superfície esférica (S) temos que C=(0,0,0) e R = 4, são o centro e o raio de S. seja C_0 = (a,b,c) o centro da circunferência intersecção do plano (α) com a superfície esférica. O vetor $\overrightarrow{CC_0}$ é ortogonal ao plano (α); logo podemos escrever:

$$\overrightarrow{CC_0} = t(1,1,-1)$$

Onde:

(a,b,c) = t(1,1,-1)

ou ainda:

a = t

b = t

c = -t

Em virtude de $C_0 \in (\alpha)$ temos que:

$t + t + t = 5$

ou seja:

$$t = 5/3$$

Desta feita $C_0 = \left(5/3, 5/3, -5/3\right)$

Para determinar o valor do raio da circunferência usamos a relação:

$$\left\|\overrightarrow{CC_0}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{C_0M}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{CM}\right\|^2,$$

que pode ser reescrita:

$$\left\|\left(5/3, 5/3, 5/3\right)\right\|^2 + r^2 = 4^2,$$

com r o raio da circunferência intersecção. Assim:

$$r^2 = 16 - \frac{75}{9} = \frac{69}{9}$$

$$\text{ou}: \ r = \frac{\sqrt{69}}{3}$$

4. Escreva a equação do plano (α) que contém a reta de equações paramétricas x = t, y = t e z = 0 e é tangente a superfície esférica (S) de equação (xï 1)^2+(yï 1)^2+(zï 2)^2=1.

Solução:

Seja ax + by + cz + d = 0 a equação do plano (α). Como o plano (α) contém a reta (r), podemos escrever:

at + bt + c.0 + d = 0 com $t \in \Re$.

Para t = 0

0(a + b) + d = 0 $\therefore$ d = 0

Para t = +1

a + b + 0 = 0, onde a = -b.

Substituindo na equação do plano (α), teremos:

ax - ay + cz = 0

Aplicando a condição de tangência para o plano.

$d(C,(\alpha)) = r$, ou seja:

$$\left| \frac{a \cdot 1 + (-a) \cdot 1 + c \cdot 2 + 0}{\sqrt{a^2 + (-a)^2 + c^2}} \right| = 1$$

ou ainda:

$$\left| \frac{2c}{\sqrt{2a^2 + c^2}} \right| = 1$$

Elevando o quadrado a igualdade vem:

4c^2 = 2a^2 + c^2 , ou ainda:

2a^2 ï 3c^2 = 0

Fatorando a expressão, temos que:

$$\left(\sqrt{2}a-\sqrt{3}c\right)\left(\sqrt{2}a+\sqrt{3}c\right)=0$$

Daí podemos afirmar que:

$$\sqrt{2}a-\sqrt{3}c=0 \quad \text{ou} \quad \sqrt{2}a+\sqrt{3}c=0$$

ou seja:

$$c=\pm\sqrt{2/3}\cdot a$$

Substituindo na equação do plano tem-se que:

$$ax-ay\pm\sqrt{2/3}\cdot z\cdot a=0$$

Ou ainda:

$$x-y+\sqrt{2/3}\cdot z=0 \quad \text{ou} \quad x-y-\sqrt{2/3}\cdot z=0$$

Comparando com o valor do raio da superfície esférica, concluímos que o plano intercepta a superfície esférica.

5. Decida se o plano (α) intercepta a superfície esférica (S), sendo:

$(\alpha): x-y+z-1=0$

$(S): x^2+(y-1)+z^2=16$

Solução:

O plano (α) interceptará a superfície esférica (S) se $d(C,(\alpha))\leq r$, com C o centro e r o raio da superfície esférica.

Como C=(0,1,0) e r=4, daí:

$$d(C,(\alpha)) = \left| \frac{1\cdot 0 + (-1)\cdot 1 + 0\cdot 1 + (-1)}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} \right| \;, \quad \text{ou}$$

ainda:

$$d(C,(\alpha)) = \left| \frac{-2}{\sqrt{3}} \right| = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Comparando com o valor do raio da superfície esférica, $\frac{2}{\sqrt{3}} \leq 4$, concluímos que o plano intercepta a superfície esférica.

6. Escreva a equação de um plano (α), tangente a superfície esférica (S): $x^2 + (y + 1)^2 + (z ï\ 1)^2 = 5$ no ponto P=(0,1,2).

Solução:

Pela proposição (2) o vetor $\overrightarrow{CP}$ é ortogonal ao plano (α), com C o centro da superfície esférica. Como C= (0,-1,1), daí:

$$\overrightarrow{CP} = (0,1,2) - (0,-1,1) \;, \text{ ou seja :}$$
$$\overrightarrow{CP} = (0,2,1)$$

Seja $M = (x, y, z) \in (\alpha)$, podemos então escrever:

$\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{CP} = 0$, o que nos levará a equação do plano (α):

$$(x-0, y-1, z-2)\cdot(0,2,1) = 0$$
$$0\cdot x + 2(y-1) + 1\cdot(z-2) = 0$$

ou ainda:

$$(\alpha): 2y + z - 4 = 0$$

Exercícios:

- 1. Encontre a equação reduzida da superfície esférica (S), onde:

  a) C = (1,2,0) e r = 3

  Resp.: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9$

  b) C = (0,0,0) e r = 8

  Resp.: $x^2 + y^2 + z^2 = 64$

  c) C = (2,-1,4) e $r = \sqrt{3}$

  Resp.: $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 = 3$

- 2. Decida quais das equações representa uma superfície esférica.

  a) $x^2 + y^2 + z^2$ ï 4x ï 8y + z - 10 = 0

  b) $x^2 + y^2 + z^2$ ï 8z + 9 = 0

  c) $x^2 + 2y^2 + z^2$ ï 4x + 5y + 15 = 0

- 3. Determine o valor de $m \in \Re$ para o qual o ponto *A* pertença a superfície esférica S.

  a) (S): $x^2 + y^2 + z^2$ ï 4 = 0 e *A* = (m,1-m,1)

  Resp.: $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

  b) (S): $x^2 + y^2 + z^2$ ï 2x + 2y - 4z = 19 e *A*=(0,1,m)

  Resp.: $2 \pm \sqrt{20}$

- 4. Encontre os pontos de intersecção da superfície esférica (S) e os eixos coordenados 0X, 0Y e 0Z.

a) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 1$

Resp.: Não intercepta os eixos coordenados.

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 1 = 0$

Resp.: eixo OY no ponto (0,1,0)

- 5. Seja (α) um plano tangente a superfície esférica (S) e paralelo ao plano (β). Encontre a equação cartesiana de plano (α).

a) (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2z - 6 = 0$ e (β): $x+y+z-1=0$

Resp.: $(\alpha): x + y + z + 4 + 4\sqrt{3 = 0}$ ou

$$(\alpha): x + y + z + 4 - 4\sqrt{3 = 0}$$

b) (S): $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ e (β): $x - y + 2z = 0$

- 6. Decida se a reta (r) intercepta a superfície esférica (S).

a) (S): $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ e $(r): \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$

Resp.: intercepta.

b) (S): $x^2 + y^2 - 2y + 1 = 0$ e $(r): \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+1}{3}$

Resp.: não intercepta.

- 7. Dê a posição do ponto A em relação a superfície esférica (S)

a) A = (1,-1,2) e (S): $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

Resp.: interior.

b) A = (0,-1,4) e (S): $x^2 - 4x + y^2 + z^2 - 2z + 1 = 0$

Resp.: exterior.

c) A = (1,0,3) e (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 6y - 10 = 0$

Resp.: $A \in S$

- 8. Determine os pontos de intersecção entre a reta (r) e a superfície esférica (S), sendo:

$$(r): \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1} \quad \text{e} \quad (\mathrm{S}): x^2 + y^2 + z^2 = 5$$

Resp.: (-1, -2, 0) e $(\frac{5}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{4}{3})$

- 9. Encontre a equação do plano (α) tangente a superfície esférica (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 3 = 0$ no ponto A=(1,1,1).

Resp.: $y + 2z - 3 = 0$

- 10. Determine a equação do plano (α) tangente a superfície esférica (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + y - 2z - 5/4 = 0$ e paralelo ao plano (β): $x - y + z - 5 = 0$.

Resp.: $x - y + z + 3/2 = 0$ ou $x - y + z - 21/2 = 0$

- 11. Dê a equação cartesiana do plano (α) que contém a reta $(r): \begin{cases} y = z \\ x = 1 \end{cases}$ e é tangente a superfície esférica (S): $x^2+(y+1)^2+z^2=1$.

- 12. Verifique se o plano (α) intercepta a superfície esférica (S), para os casos:

a) (α): $x + y + z - 1 = 0$ e (S): $x^2 + y^2 + z^2 = 5$

Resp.: intercepta.

b) (α): $2x - y + z = 0$ e (S): $(x - 1)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 6$

Resp.: não intercepta.

- 13. Encontre o centro e o raio da circunferência da intersecção da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ com o plano (α): $2x + y + z = 4$.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, Geraldo. **Cálculo 1**: funções de uma variável. 6.ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1994. 355 p.

BOULO, Paulo; CAMARGO, Ivan de. **Introdução à geometria analítica no espaço.** São Paulo: Makron Books, 1997. 239 p.

EDWARDS JR., C. Heny; PENNEY, David E.. **Cálculo com geometria analítica.** Rio de Janeiro: Prentice Hall do Brasil, 1997. 486 p.

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com geometria analítica.** 3.ed. São Paulo: Harbra, 1994. 685 p. v. 1.

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com geometria analítica.** 3.ed. São Paulo: Harbra, 1994. 490 p. v.2.

REIS, Genésio Lima dos; SILVA, Valdir Vilmar da. **Geometria analítica.** 2.ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1996. 242 p.

SIMMONS, George F.. **Cálculo com geometria analítica.** São Paulo: McGraw-Hill, 1987. 807 p.

STEINBRUCH, Alfredo. **Geometria analítica.** 2.ed. São Paulo: Makron Books, 1987. 292 p.

BOLDRINI,José Luiz..[ET AL.]. **Àlgebra Linear.**3 ed.SãoPaulo:Harbra,1980.441p.

LANG,Serge. **Algebra Linear.** São Paulo: Edgar Blucher,1971,267p.

Robson Santana Pacheco licenciado em Matemática pela UFPI,com mestrado pela UNB em matemática pura, desenvolveu sua docência em escolas de nível médio de 1o e 2o nos estados do Piauí e Rio Grande do Norte. Atuou como docentes nas Universidades Federais UFPI e UFRN tendo trabalhado na graduação e pós-graduação na área de Matemática e nas faculdades Particulares FARN, Estácio de Sá e FACEX. Trabalhou em vários projetos como professor e coordenador na formação de professores de nível médio pela UFRN financiado pelo MEC e Capes. Atualmente é professor do IFRN.

O Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte iniciou em 1985 suas atividades editoriais com a publicação da Revista da ETFRN, que a partir de 1999 se transformou na Revista Holos, em formato impresso e, posteriormente, eletrônico. Em 2004, foi criada a Diretoria de Pesquisa que fundou, em 2005, a editora do IFRN. A publicação dos primeiros livros da Instituição foi resultado de pesquisas dos professores para auxiliar os estudantes nas diversas disciplinas e cursos.

Buscando consolidar uma política editorial cuja qualidade é prioridade, a Editora do IFRN, na sua função de difusora do conhecimento já contabiliza várias publicações em diversas áreas temáticas.

IFRN Editora

ifuncern

REDE FEDERAL DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
1909-2009

978-85-89571-53-1